

Таким образом, присоединение дополнительных барабанов влияет на перераспределение частот всех элементов цепи Маркова, и это обстоятельство можно использовать для оптимизации параметров процесса чесания волокна.

УДК 517.9

## НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫЙ АНАЛОГ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

Студ. Жданова М.Д., студ. Норова А.А., ст. преп. Силивончик В.В.  
Витебский государственный технологический университет

**ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.** Пусть на плоскости дана последовательность точек  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ , причём  $x_i \neq x_j$  при  $i \neq j$ . Требуется найти прямую, определяемую уравнением  $y = ax + b$ , для которой функция  $\Phi(a, b) = \sum_1^n |ax_i + b - y_i|$  принимает минимальное значение.

**КРИТЕРИЙ ОПТИМАЛЬНОСТИ.** Функция  $\Phi(a, b)$  является выпуклой. Достаточным условием минимальности функции является наличие нулевого субградиента, что формально записывается в виде двух равенств

$$\sum_{i=1}^n c_i x_i = 0, \quad \sum_{i=1}^n c_i = 0, \quad (1)$$

$$\text{где } c_i = \frac{ax_i + b - y_i}{|ax_i + b - y_i|} = \begin{cases} 1, & \text{при } ax_i + b - y_i > 0 \\ -1 & \text{при } ax_i + b - y_i < 0 \\ c_i \in [-1; 1] & \text{при } ax_i + b - y_i = 0 \end{cases}$$

$$\text{Теперь } \Phi(a, b) = \sum_{i=1}^n |ax_i + b - y_i| = \sum_{i=1}^n c_i (ax_i + b - y_i).$$

**ПРОСТЕЙШИЕ СЛУЧАИ.** Пусть прямая  $y = ax + b$  удовлетворяет системе уравнений (1). 1. Прямая не проходит через точки  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ . Тогда её можно сдвигать и поворачивать до соприкосновения с первой попавшейся точкой с сохранением равенств (1). Имеем множество оптимальных прямых. 2. Прямая проходит ровно через одну точку  $(x_1, y_1)$ . Из второго уравнения (1) получаем, что  $c_1$  – целое. Если  $c_1 = 1$ , прямую можно поворачивать и сдвигать вверх с сохранением равенств (1); если  $c_1 = -1$ , прямую можно поворачивать и сдвигать вниз; если  $c_1 = 0$ , прямую можно поворачивать. Движения можно производить до соприкосновения с первой попавшейся точкой. Опять имеем множество оптимальных прямых.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1.** Пусть прямая  $y = a_0 x + b_0$  проходит ровно через одну точку  $(x_1, y_1)$  и  $A_1 = -\sum_{i=2}^n c_i$ . Тогда, если  $A_1 > 1$ , то прямую можно двигать вверх, а если  $A_1 < -1$ , – вниз с уменьшением значения функции  $\Phi(a, b)$ . Если  $A_1 x_1 + \sum_{i=2}^n c_i x_i < 0$ , то

прямую можно поворачивать вокруг точки  $(x_1, y_1)$  против часовой стрелки, а если  $A_1 x_1 + \sum_2^n c_i x_i > 0$ , по часовой стрелке – с уменьшением значения функции  $\Phi(a, b)$ .

**ПРЯМАЯ ПРОХОДИТ ЧЕРЕЗ ДВЕ ТОЧКИ**  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ . Считаем  $x_2 > x_1$ . Запишем и решим систему

$$\begin{cases} A_1 x_1 + A_2 x_2 = -\sum_{i=3}^n c_i x_i & ; A_1 = \frac{\sum_{i=3}^n c_i (x_i - x_2)}{x_2 - x_1}, A_2 = \frac{-\sum_{i=3}^n c_i (x_i - x_1)}{x_2 - x_1} \\ A_1 + A_2 = -\sum_{i=3}^n c_i \end{cases} \quad (2)$$

Если  $A_1, A_2 \in [-1; 1]$ , то положив  $c_1 = A_1, c_2 = A_2$ , получим справедливость равенств (1) и прямая оптимальна. Если  $A_1, A_2 \neq \pm 1$  не являются целыми, – оптимальная прямая единственна. В противном случае возможно движение прямой с сохранением оптимальности, – имеем множественную оптимальность.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.** Пусть прямая  $y = a_0 x + b_0$  проходит ровно через две точки  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  ( $x_2 > x_1$ ) и  $A_1, A_2$  – найдены по формулам (2). Предположим, что  $|A_2| > 1$ . Тогда вращением прямой вокруг точки  $(x_1, y_1)$  можно получить уменьшение функции  $\Phi(a; b)$ . При  $A_2 > 1$  вращать следует в сторону роста параметра  $a$ , при  $A_2 < -1$  – в сторону убывания  $a$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** При  $A_2 > 1$  имеем  $\left. \frac{d\Phi(a_0; b_0)}{da} \right|_+ < 0$  и функция  $\Phi$  – убывает.

При  $A_2 < -1$  – аналогично:  $\left. \frac{d\Phi(a_0; b_0)}{da} \right|_- < 0$ .

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3** Пусть прямая  $y = a_0 x + b_0$  проходит ровно через две точки  $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$  ( $x_2 > x_1$ ) и  $A_1, A_2$  – те же, что и в формулах (2). Если  $|A_1| > 1$ , то вращением прямой вокруг точки  $(x_2, y_2)$  можно получить уменьшение функции  $\Phi(a; b)$ . При  $A_1 > 1$  вращать следует в сторону убывания параметра  $a$ , при  $A_1 < -1$  – в сторону роста параметра  $a$ .

**ДОКАЗЫВАЕТСЯ** аналогично предложению 3.

**ПРЯМАЯ ПРОХОДИТ ЧЕРЕЗ ТРИ ТОЧКИ ИЛИ БОЛЕЕ.** Пусть прямая  $y = ax + b$  проходит через точки  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_k, y_k)$  ( $k > 2$ ) и не проходит через остальные.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.** Если прямая  $y = a_0 x + b_0$  проходит только через точки  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_k, y_k)$  и  $A_1, A_2$  – получены по формулам

$$\begin{cases} A_1 x_1 + A_2 x_2 = -\sum_{i=k+1}^n c_i x_i & ; A_1 = \frac{\sum_{i=k+1}^n c_i (x_i - x_2)}{x_2 - x_1}, A_2 = \frac{-\sum_{i=k+1}^n c_i (x_i - x_1)}{x_2 - x_1} \\ A_1 + A_2 = -\sum_{i=k+1}^n c_i \end{cases}$$

то неравенства  $|A_1|, |A_2| \leq 1$  достаточны для оптимальности.

Теперь рассмотрим случай, когда неравенства  $|A_1|, |A_2| \leq 1$  не выполняются и двух точек недостаточно для определения оптимальности.

**ЛЕММА.** Пусть прямая  $y = ax + b$  проходит только через точки  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_k, y_k)$ . Пусть  $\Delta_j = |x_i - x_j|$ . Тогда если выполняются неравенства

$$-\sum_{i=1}^k \Delta_j < \sum_{i=k+1}^n c_i x_i - \sum_{i=k+1}^n c_i x_j < \sum_{i=1}^k \Delta_j \quad (1 \leq j \leq k), \quad (3)$$

то выполняются и следующие неравенства:

$$-k < \sum_{i=k+1}^n c_i < k, \quad -\sum_{j=1}^k x_j < \sum_{i=k+1}^n c_i x_i < \sum_{j=1}^k x_j.$$

Если  $x_0$  – произвольная точка и  $\Delta_j = |x_0 - x_j|$ , то выполняются неравенства

$$-\sum_{j=1}^k \Delta_j < \sum_{i=k+1}^n c_i x_i - \sum_{i=k+1}^n c_i x_0 < \sum_{j=1}^k \Delta_j.$$

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5.** Пусть прямая  $y = a_0 x + b_0$  проходит только через точки  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_k, y_k)$ , и справедливы неравенства (3). Тогда данная прямая является оптимальной.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Показывается, что при любом движении прямой происходит рост значения функции  $\Phi(a; b)$ .

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.** Пусть прямая  $y = a_0 x + b_0$  проходит только через точки  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_k, y_k)$ , и справедливы неравенства, аналогичные (3), но среди неравенств могут быть нестрогие. Тогда данная прямая является оптимальной, но не единственной.

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Наличие нестрогих неравенств указывает на возможность движения прямой с сохранением значения функции  $\Phi(a; b)$ .

Список использованных источников

1. Иоффе, А. Д. Теория экстремальных задач / А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров. – Москва : Наука, 1976. – 480 с.

УДК 621.778: 621.372.8

## АНАЛИЗ МЕТОДОВ РАСЧЕТА И КОНСТРУИРОВАНИЯ ВОЛНОВОДНЫХ СИСТЕМ ДЛЯ УЛЬТРАЗВУКОВЫХ ВОЛОЧИЛЬНЫХ УСТАНОВОК

Асп. Новиков В.Ю.

Витебский государственный технологический университет

**Введение.** Действие мощных ультразвуковых колебаний на процесс волочения пластичных, труднодеформируемых и композиционных материалов хорошо известно. Однако важную роль играют вопросы проектирования ультразвуковой колебательной системы (УЗКС). Теория и анализ этих систем излагаются на основе дифференциальных уравнений, а решение их представляет относительно сложную задачу, поэтому принято расчет и анализ сложных УЗКС сводить к простым системам с соответствующими граничными условиями. Компьютеры позволяют выполнить такие расчеты при помощи приближенных численных методов, один из них – метод конечных элементов (МКЭ), который реализован в ANSYS, позволяющей моделировать различные по