

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Учреждение образования
«Витебский государственный технологический университет»

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ.
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА
И ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА**

Практикум

для студентов первого курса специальностей
6-05-0611-04 «Электронная экономика»,
6-05-0611-01 «Информационные системы и технологии»

Витебск
2026

УДК 517 (076.1) (075.8)

Составители:

А. В. Коваленко, А. П. Дмитриев

Одобрено кафедрой «Математика и информационные технологии»
УО «ВГТУ», протокол № 9 от 13.05.2026.

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом
УО «ВГТУ», протокол № 9 от 29.05.2026.

Математический анализ. Преобразование Лапласа и элементы векторного анализа : практикум / сост. А. В. Коваленко, А. П. Дмитриев. – Витебск : УО «ВГТУ», 2026. – 81 с.

Практикум содержит основные теоретические сведения, задания к практическим занятиям, примеры для самостоятельного выполнения заданий, вопросы к экзамену или зачёту по четырём разделам курса «Математический анализ» для студентов специальностей 6-05-0611-04 «Электронная экономика», 6-05-0611-01 «Информационные системы и технологии»: операционное исчисление, криволинейные интегралы, поверхностные интегралы, элементы теории поля. Данное издание предназначено для проведения практических занятий у студентов первого курса факультетов «Информационные технологии и робототехника» и «Экономика и бизнес-управление», а также может быть использовано в ходе изучения указанных тем студентами заочной и дистанционной форм обучения.

УДК 517 (076.1) (075.8)

© УО «ВГТУ», 2026

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
Перечень вопросов учебной программы по курсу «Математический анализ. Преобразование Лапласа и элементы векторного анализа» для специальностей 6-05-0611-04, 6-05-0611-01	5
Практикум по решению задач	6
1 Преобразование Лапласа. Оригинал и изображение	6
2 Свойства оригиналов и изображений	12
3 Решение дифференциальных уравнений операционными методами	30
4 Интеграл и формула Дюамеля	38
5 Криволинейные интегралы	44
6 Поверхностные интегралы	56
7 Элементы теории поля	64
Литература	79
Приложение А. Вспомогательные таблицы.....	80

ВВЕДЕНИЕ

Учебный практикум составлен на основе практических занятий, которые авторы проводили на протяжении многих лет работы преподавания дисциплины «Математический анализ» в Витебском государственном технологическом университете. Приведённый материал проверен на нескольких поколениях студентов и содержит необходимые сведения для будущих выпускников. Большинство рассматриваемых задач носят практическую направленность и имеют тесную связь с дисциплинами, которые будут изучать студенты в следующих семестрах.

Настоящие учебно-методические материалы предназначены для студентов факультетов «Информационные технологии и робототехника» и «Экономика и бизнес-управление» УО «ВГТУ», которые изучают курс «Математический анализ». В работе приведён краткий теоретический материал для проведения практических занятий по указанному выше курсу. Практикум написан в соответствии с учебной программой дисциплины «Математический анализ».

В работе выделяются семь тем курса «Математический анализ». Каждая тема представляет собой методический материал для проведения преподавателем практических занятий и выполнения контролируемой самостоятельной работы студентами. В начале каждого раздела приведён краткий теоретический материал (определения, теоремы, формулы), который необходим студенту для решения задач по рассматриваемой теме. В то же время этих сведений недостаточно для итоговой аттестации по предмету. Прежде чем приступать к решению задач практического занятия или выполнения домашнего задания, студенту необходимо изучить теоретический курс лекционного материала или обратиться к академическим изданиям для более детального изучения разделов курса, которые его интересуют. Наименование тем курса, а также их структура построены в соответствии с учебной программой дисциплины «Математический анализ» для студентов специальностей 6-05-0611-04, 6-05-0611-01. Некоторые темы курса «Математический анализ» могут применяться на практических занятиях студентами всех видов специальностей и форм обучения вуза в процессе изучения других дисциплин.

На кафедре «Математика и информационные технологии» по дисциплине «Математический анализ» разработана тестовая форма контроля знаний с применением компьютерной техники. Предложенная методическая разработка позволяет подготовиться студентам к прохождению теста, как по отдельным темам курса, так и по всему материалу.

Данный практикум может быть использован преподавателем для проведения практических занятий у студентов не только дневной формы обучения, но и заочной. Студенты заочной формы обучения могут применять теоретический и практический материалы практикума для самостоятельной работы по предмету и выполнению контрольных заданий.

**ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ ПО КУРСУ
«МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА
И ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА»
ДЛЯ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ 6-05-0611-04, 6-05-0611-01**

1. Оригинал и изображение. Преобразование Лапласа.
2. Оригинал и изображение основных элементарных функций.
3. Таблица оригиналов и изображений.
4. Свойства линейности и однородности преобразования Лапласа.
5. Свойство запаздывания функции-оригинала.
6. Свойство смещения функции-изображения.
7. Свойства дифференцирования оригинала и изображения.
8. Свойства интегрирования оригинала и изображения.
9. Свёртка оригиналов. Теорема об изображении свёртки.
10. Восстановление оригинала по заданному изображению.
11. Применение преобразования Лапласа к решению дифференциальных уравнений.
12. Применение преобразования Лапласа к решению систем дифференциальных уравнений.
13. Интеграл Дюамеля. Применение интеграла Дюамеля к решению дифференциальных уравнений.
14. Криволинейный интеграл первого рода и его свойства.
15. Методы вычисления криволинейного интеграла первого рода.
16. Поверхностный интеграл первого рода и его свойства.
17. Методы вычисления поверхностного интеграла первого рода.
18. Скалярное поле и его характеристики.
19. Векторное поле и его геометрические характеристики.
20. Криволинейный интеграл второго рода и его свойства.
21. Методы вычисления криволинейного интеграла второго рода.
22. Поверхностный интеграл второго рода и его свойства.
23. Методы вычисления поверхностного интеграла первого рода.
24. Интегральные характеристики векторных полей: поток и циркуляция.
25. Дифференциальные характеристики векторных полей: дивергенция, её физический смысл и метод вычисления.
26. Дифференциальные характеристики векторных полей: ротор, его смысл и метод вычисления в декартовой системе координат.
27. Теорема Остроградского-Гаусса.
28. Теорема Стокса.
29. Потенциальные поля. Потенциал поля.
30. Соленоидальные и гармонические поля.

ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

1 ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА. ОРИГИНАЛ И ИЗОБРАЖЕНИЕ

Содержание: функция-оригинал, аналитичные функции, преобразование Лапласа, функция-изображение, таблица оригиналов и изображений.

1.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Операционное исчисление является одним из важнейших разделов практического математического анализа. Операционное исчисление считается основой автоматики и тепломеханики. Операционный метод широко используется при решении обыкновенных дифференциальных уравнений и систем таких уравнений. Этот метод может быть использован при решении дифференциальных уравнений в частных производных.

Решение дифференциального уравнения операционным методом состоит в том, что от дифференциального уравнения относительно искомой функции $f(t)$ переходят к другой функции $F(p)$. Полученное операционное уравнение является алгебраическим. Оно более простое по сравнению с исходным дифференциальным уравнением. Решая полученное уравнение относительно функции $F(p)$, а затем, переходя к соответствующей функции $f(t)$, находим искомое решение дифференциального уравнения.

Операционное исчисление является одним из методов математического анализа, который позволяет рассматривать символ производной как величину, над которой можно производить определённую систему формальных операций. В результате применения операционного исчисления многие операции математического анализа сводятся к простейшим алгебраическим действиям.

Определение 1.1.1 Функция $f(t)$ называется *функцией-оригиналом* или просто *оригиналом* при выполнении трёх условий:

- 1) $f(t) = 0$, если $t < 0$;
- 2) на интервале $(0; +\infty)$ функция $f(t)$ имеет конечное число точек разрыва первого рода;
- 3) при значении $t \rightarrow +\infty$, абсолютная величина функции возрастает не быстрее некоторой экспоненты, то есть $|f(t)| \leq M \cdot e^{\sigma t}$.

Если функция $f(t)$ является оригиналом, то чисел σ существует бесконечно много, при этом нижняя грань всех чисел σ называется показателем роста функции, при этом число $\sigma_0 = \inf \{\sigma\}$ называется *показателем роста*.

Определим область как связанное открытое множество, которое при любом разбиении на две части, хотя бы одна из этих частей содержит предельную

точку другой, и любая точка входит в неё вместе с некоторой своей окрестностью.

Рассмотрим комплекснозначную функцию $\omega = f(z) = u(x; y) + i v(x; y)$ комплексной переменной $z = x + i y$, определённую в некоторой области G . Выберем точки z и $z + \Delta z$ из области G . Приращение функции равно $\Delta \omega = f(z + \Delta z) - f(z)$, а приращение аргумента равно $\Delta z = \Delta x + i \cdot \Delta y$.

Определение 1.1.2 Комплекснозначная функция $\omega = f(z)$ называется дифференцируемой в точке $z \in G$, если существует производная этой функции в точке z , то есть отношение $\frac{\Delta \omega}{\Delta z}$ имеет конечный предел при значении Δz , произвольным образом, стремящимся к нулю:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta z} = f'(z) = \omega'.$$

Теорема 1.1.1 Пусть действительные функции $u = u(x; y)$, $v = v(x; y)$ дифференцируемы в точке $z = x + i y$, а функция $\omega = f(z) = u(x; y) + i v(x; y)$ определена в некоторой окрестности этой точки. Комплекснозначная функция $\omega = f(z)$ дифференцируема в точке $z = x + i y$, тогда и только тогда, когда выполняются условия Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1.1.1)$$

Определение 1.1.3 Функция $\omega = f(z)$ называется *аналитической* в точке z , если она дифференцируема в окрестности этой точки.

Функция $\omega = f(z)$ называется аналитической в области G , если она дифференцируема в каждой точке этой области.

Для любой аналитической функции $f(z)$ справедливо равенство

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \cdot \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i \cdot \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (1.1.2)$$

Определим понятие функции-изображения для заданной функции-оригинала.

Определение 1.1.4 Соответствие, по которому каждой функции-оригиналу $f(t)$ сопоставляется функция $F(p)$, где $p = s + i \omega$ – комплексная переменная, определяемая по формуле

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt, \quad (1.1.3)$$

называется *преобразованием Лапласа*. Функция $F(p)$ называется *функцией-изображением* или *изображением* функции-оригинала $f(t)$ по Лапласу.

Для любой функции-оригинала $f(t)$ интеграл (1.1.3) является сходящимся, так как этот интеграл по абсолютной величине ограничен, то есть справедливо выполнение неравенства $|F(p)| \leq \frac{M}{\sigma - \sigma_0}$.

При этом, по свойствам несобственных интегралов, интеграл (1.1.3) является сходящимся, если $\operatorname{Re} p = \sigma > \sigma_0$, то есть действительная часть больше показателя роста. Это условие является необходимым условием того, чтобы функция комплексного переменного $p = s + i\omega$ являлась изображением. Кроме этого, при значении $p \rightarrow \infty$, изображение $F(p) \rightarrow 0$. Таким образом, справедлива теорема.

Теорема 1.1.2 Любой оригинал $f(t)$ имеет изображение $F(p)$, являющейся аналитической функцией в полуплоскости $\operatorname{Re} p = \sigma > \sigma_0$, где σ_0 – показатель роста функции-оригинала $f(t)$.

Обозначения:

$f(t) = F(p)$ (функция-оригинал $f(t)$ имеет изображение $F(p)$),

$F(p) = f(t)$ (функция $F(p)$ является изображением оригинала $f(t)$).

Несобственный интеграл, определяющий преобразование Лапласа, обладает и тем свойством, что в области действительной части $\operatorname{Re} p > \sigma_0$ его можно дифференцировать по переменной p . Пусть $f(t) = F(p)$. Тогда

$$F'_p(p) = \left(\int_0^{\infty} f(t) e^{-pt} dt \right)'_p = \int_0^{\infty} \left(f(t) e^{-pt} \right)' dt = \int_0^{\infty} (-t) f(t) e^{-pt} dt = -t f(t).$$

В дальнейшем, говоря о функции-оригинале $f(t)$, мы всегда будем подразумевать, что при значении $t < 0$ значение $f(t) = 0$.

Рассмотрим функцию $1(t) = \eta(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0; \\ 0, & t < 0, \end{cases}$ которая называется единич-

ной функцией или функцией Хэвисайда. В операционном исчислении подразумевается, что функции умножены на функцию Хэвисайда. Например, пишем

$$f(t) = t^n, \text{ но подразумеваем } f(t) = \begin{cases} t^n, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Таблица основных оригиналов и изображений

Функция – оригинал	Функция – изображение
1	2
$1(t)$	$\frac{1}{p}$
t^n	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
$e^{\lambda t}$	$\frac{1}{p - \lambda}$
$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
$\text{sh } \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 - \omega^2}$
$\text{ch } \omega t$	$\frac{p}{p^2 - \omega^2}$
$t \cdot \sin \omega t$	$\frac{2\omega p}{(p^2 + \omega^2)^2}$
$t \cdot \cos \omega t$	$\frac{p^2 - \omega^2}{p^2 + \omega^2}$
$(t - a)^n$	$\frac{n! e^{-ap}}{p^{n+1}}$
$t^n e^{\lambda t}$	$\frac{n!}{(p - \lambda)^{n+1}}$
$e^{\lambda t} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}$
$e^{\lambda t} \cos \omega t$	$\frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 + \omega^2}$
$e^{\lambda t} \cdot \text{sh } \omega t$	$\frac{\omega}{(p - \lambda)^2 - \omega^2}$
$e^{\lambda t} \text{ch } \omega t$	$\frac{p - \lambda}{(p - \lambda)^2 - \omega^2}$

1.2 Примеры решения типовых задач

1.2.1 Задана функция $f(t) = e^{\alpha t} \cdot \cos \omega t$. Является ли указанная функция функцией-оригиналом?

Решение. В операционном исчислении рассматриваются функции, умноженные на единичную функцию. Поэтому заданная функция имеет вид

$$f(t) = \begin{cases} e^{\alpha t} \cos \omega t, & t \geq 0, \\ 0, & t < 0. \end{cases}$$

Первое условие выполнено в силу задания функции. Функции $e^{\alpha t}$ и $\cos \omega t$ являются непрерывными функциями при $t \geq 0$, а, следовательно, на этом промежутке будет непрерывна функция $f(t) = e^{\alpha t} \cos \omega t$, как произведение непрерывных функций. Заданная функция не имеет точек разрыва, то есть выполняется второе условие определения функции-оригинала.

Проверим выполнение третьего условия.

$$|f(t)| = |e^{\alpha t} \cdot \cos \omega t| = |e^{\alpha t}| \cdot |\cos \omega t| \leq e^{\alpha t} \cdot 1 = 1 \cdot e^{\alpha t}.$$

Третье условие функции-оригинала выполняется: $M=1$, а показатель роста σ_0 равен α . Таким образом, заданная функция является функцией-оригиналом.

1.2.2 Задана функция $f(t) = \frac{2}{t-4}$. Является ли указанная функция функцией-оригиналом?

Решение. Функция $f(t) = \frac{2}{t-4}$ не является функцией-оригиналом, так как при значении $t=4$ функция терпит разрыв второго рода, то есть не выполнено второе условие определения 1.1.1.

1.2.3 Проверить, является ли функция $\omega = z^2$ аналитической. Найти производную функции $\omega = z^2$.

Решение. Находим действительную $u = \operatorname{Re} z$ и мнимую $v = \operatorname{Im} z$ части числа $\omega = z^2$.

$$\begin{aligned} \omega = z^2 &= (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy, \\ u &= x^2 - y^2, \quad v = 2xy. \end{aligned}$$

Проверим условия Коши-Римана (1.1.1):

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2x.$$

Условия (1.1.1) выполняются. Следовательно, функция $\omega = z^2$ дифференцируема и аналитична во всех точках комплексной области. Производную функции находим по одной из формул (1.1.2):

$$\omega' = (z^2)' = \frac{\partial(x^2 - y^2)}{\partial x} + i \frac{\partial 2xy}{\partial x} = 2x + i2y = 2(x + iy) = 2z.$$

1.2.4 Проверить, является ли функция $\omega = z \cdot \bar{z}$ аналитической.

Решение. Так как, произведение комплексного числа на сопряжённое число равно $z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2$, то $u = x^2 + y^2$, а $v = 0$. Условие Коши-Римана выполняется только в одной точке $(0;0)$. Следовательно, функция $\omega = z \cdot \bar{z}$ дифференцируема только в точке $z = 0$ и нигде не является аналитичной.

1.2.5 Найти по определению функцию-изображение $F(p)$ для функции-оригинала $f(t) = e^{\lambda t}$.

Решение. По определению $F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{\lambda t} e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p-\lambda)t} dt =$
 $= -\frac{1}{p-\lambda} \cdot e^{-(p-\lambda)t} \Big|_0^{+\infty} = 0 + \frac{1}{p-\lambda} = \frac{1}{p-\lambda}$. Таким образом, $e^{\lambda t} \cdot \doteq \frac{1}{p-\lambda}$.

1.3 Задания для решения на практическом занятии

1.3.1 Проверить по определению оригинала, какие из функций $f(t)$ являются функциями-оригиналами.

1.3.1.1 $f(t) = 1(t)$. **1.3.1.2** $f(t) = t^2$. **1.3.1.3** $f(t) = \frac{1}{t-1}$.

1.3.1.4 $f(t) = \sin 3t$. **1.3.1.5** $f(t) = \cos 4t$. **1.3.1.6** $f(t) = \operatorname{tg} t$.

1.3.1.7 $f(t) = \operatorname{ch} 2t$. **1.3.1.8** $f(t) = \operatorname{sh} 4t$ **1.3.1.9** $f(t) = \frac{4}{t^2 - 4}$

1.3.2 Показать, что функция $\omega = e^z$ является аналитической на всей комплексной плоскости. Найти её производную.

1.3.3 Найти по определению функцию-изображение $F(p)$ для функции-оригинала $f(t)$.

1.3.2.1 $f(t) = 1(t)$. **1.3.2.2** $f(t) = t$. **1.3.2.3** $f(t) = \sin t$.

1.3.2.4 $f(t) = \cos 2t$. **1.3.2.5** $f(t) = \operatorname{sh} 3t$. **1.3.2.6** $f(t) = \operatorname{ch} 4t$.

1.3.2.7 $f(t) = e^{2t}$. **1.3.2.8** $f(t) = 2 + 4t$. **1.3.2.9** $f(t) = \cos^2 \frac{t}{2}$.

1.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

1.4.1 Показать, что функция $\omega = n \cdot z^3$, где n – номер варианта, является аналитической на всей комплексной плоскости. Найти её производную.

1.4.2 Проверить по определению оригинала, какие из функций $f(t)$ являются функциями-оригиналами. Найти по определению функцию-изображение $F(p)$ для функции-оригинала $f(t)$.

1.4.1.1	$f(t) = 2t + 1.$	1.4.1.2	$f(t) = e^{3t}.$	1.4.1.3	$f(t) = \sin 2t.$
1.4.1.4	$f(t) = \cos t.$	1.4.1.5	$f(t) = \operatorname{sh} t.$	1.4.1.6	$f(t) = \operatorname{ch} 2t.$
1.4.1.7	$f(t) = \sin^2 t.$	1.4.1.8	$f(t) = \cos^2 t.$	1.4.1.9	$f(t) = 5t - 2.$
1.4.1.10	$f(t) = 3t + 5.$	1.4.1.11	$f(t) = e^{4t}.$	1.4.1.12	$f(t) = \sin 4t.$
1.4.1.13	$f(t) = \cos 3t.$	1.4.1.14	$f(t) = \operatorname{sh} 2t.$	1.4.1.15	$f(t) = \operatorname{ch} 3t.$
1.4.1.16	$f(t) = \sin^2 2t.$	1.4.1.17	$f(t) = \cos^2 2t.$	1.4.1.18	$f(t) = 7t - 5.$
1.4.1.19	$f(t) = 6t + 3.$	1.4.1.20	$f(t) = e^{7t}.$	1.4.1.21	$f(t) = \sin 5t.$
1.4.1.22	$f(t) = \cos 4t.$	1.4.1.23	$f(t) = \operatorname{sh} 4t.$	1.4.1.24	$f(t) = \operatorname{ch} 4t.$
1.4.1.25	$f(t) = \sin^2 3t.$	1.4.1.26	$f(t) = \cos^2 3t.$	1.4.1.27	$f(t) = 6t - 3.$
1.4.1.28	$f(t) = t^2$	1.4.1.29	$f(t) = 9t - 10$	1.4.1.30	$f(t) = e^{10t-9}$

2 СВОЙСТВА ОРИГИНАЛОВ И ИЗОБРАЖЕНИЙ

Содержание: линейность, подобие, дифференцирование оригинала и изображения, интегрирование оригинала и изображения, запаздывание оригинала, смещение изображения, свёртка оригиналов, нахождение изображения по заданному оригиналу, определение оригинала по известному изображению.

2.1 Теоретический материал по теме практического занятия

При практическом применении преобразования Лапласа вычисления проводятся не над заданными функциями, а над их изображениями. Поэтому, кроме таблицы оригиналов и их изображений необходимо знать и правила отображения тех или иных операций.

Рассмотрим основные свойства преобразования Лапласа.

1. Свойство **однородности**.

Теорема 2.1.1 При умножении оригинала на постоянный множитель изображение умножается на тот же множитель, то есть из соотношения $f(t) = F(p)$ следует, что

$$\alpha \cdot f(t) = \alpha \cdot F(p). \quad (2.1.1)$$

2. Свойство **аддитивности**.

Теорема 2.1.2 Изображение суммы конечного числа оригиналов равно сумме их изображений.

Если $f(t) = F(p)$, $\varphi(t) = \Phi(p)$, то

$$f(t) + \varphi(t) = F(p) + \Phi(p). \quad (2.1.2)$$

3. Свойство **линейности**.

Данное свойство является следствием свойств однородности и линейности.

Теорема 2.1.3 Если $f(t) = F(p)$, $\varphi(t) = \Phi(p)$ и числа $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, то

$$\alpha f(t) + \beta \varphi(t) = \alpha F(p) + \beta \Phi(p). \quad (2.1.3)$$

4. Свойство **подобия**.

Теорема 2.1.4 Если $f(t) = F(p)$ и α – положительное число, то

$$f(\alpha t) = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right). \quad (2.1.4)$$

5. Свойство **дифференцирования оригинала**.

Теорема 2.1.5 Если функция $f(t)$ и её производные до n -го порядка включительно являются оригиналами и $f(t) = F(p)$, то

$$f''(t) = p(pF(p) - f(0)) - f'(0) = p^2 F(p) - pf(0) - f'(0). \quad (2.1.5)$$

Если функция $f(t)$ непрерывно дифференцируема на интервале $(0; +\infty)$ и $f'(t)$ является оригиналом, то из соотношения $f(t) = F(p)$ следует, что первая производная имеет изображение

$$f'(t) = pF(p) - f(0). \quad (2.1.6)$$

Если функция $f(t)$ непрерывно дифференцируема на интервале $(0; +\infty)$ и $f''(t)$ является оригиналом, то из соотношения $f(t) = F(p)$ следует, что вторая производная имеет изображение

$$f''(t) = p^2 F(p) - pf(0) - f'(0). \quad (2.1.7)$$

Замечание. В частном случае, если $f(0) = f'(0) = f''(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$, то $f^{(n)}(t) = p^n F(p)$. Таким образом, дифференцирование оригинала сводится к умножению изображения на комплексную переменную p .

6. Свойство дифференцирования изображения.

Теорема 2.1.6 Если функция $f(t)$ является оригиналом и $f(t) = F(p)$, то

$$-t \cdot f(t) = F'(p), \quad (2.1.8)$$

то есть умножению оригинала на параметр $(-t)$ соответствует производная от изображения $F(p)$.

Путём последовательного дифференцирования преобразования Лапласа

$F(p) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-pt} dt$ по параметру p получаем последовательность формул:

$$\begin{aligned} -t \cdot f(t) &= F'(p); \\ t^2 \cdot f(t) &= F''(p); \\ -t^3 \cdot f(t) &= F'''(p); \\ &\dots\dots\dots \\ (-t)^m \cdot f(t) &= F^{(m)}(p). \end{aligned} \quad (2.1.9)$$

7. Свойство интегрирования оригинала.

Теорема 2.1.7 Если функция $f(t)$ является оригиналом и $f(t) = F(p)$, то

$$\int_0^t f(\tau) d\tau = \frac{F(p)}{p}, \quad (2.1.10)$$

то есть интегрированию оригинала в пределах от значения 0 до значения t соответствует деление изображения на величину p .

В операционном исчислении соотношения (2.1.6) и (2.1.10), которые определяют изображения производной и интеграла для оригинала $f(t)$, играют важную роль. Эти соотношения показывают, что действиям математического анализа – дифференцированию и интегрированию оригиналов – соответствуют алгебраические действия соответственно умножения и деления изображений на p . Поэтому величину p будем рассматривать как оператор дифференцирования, а величину $\frac{1}{p}$ – как оператор интегрирования по заданному отрезку $[0; t]$.

8. Свойство интегрирования изображения.

Теорема 2.1.8 Если функция $f(t)$ является оригиналом и $f(t) = F(p)$, то

$$\frac{f(t)}{t} = \int_p^{\infty} F(z) dz. \quad (2.1.11)$$

Таким образом, деление на переменную t функции-оригинала сводится к интегрированию изображения.

9. Свойство сдвига в оригинале.

Теорема 2.1.9 (запаздывания оригинала). Если функция $f(t)$ является оригиналом и $f(t) = F(p)$, то для любого положительного числа τ справедливо соотношение

$$f(t - \tau) = e^{-p\tau} F(p). \quad (2.1.12)$$

Если $f(t)$ принимать за некоторый сигнал, который включается в момент времени $t = 0$, то $f(t - \tau)$ – есть сигнал, который включится в момент времени $t = \tau$. Таким образом, запаздывание оригинала на величину τ означает умножение изображения на величину $e^{-p\tau}$.

Теорема 2.1.10 (упреждение оригинала). Если функция $f(t)$ является оригиналом и $f(t) = F(p)$, то для любого положительного числа τ справедливо соотношение

$$f(t + \tau) = e^{p\tau} \left(F(p) - \int_0^{\tau} e^{-p\tau} f(t) dt \right). \quad (2.1.13)$$

График функции $f(t + \tau)$ получатся из графика функции $f(t)$ путём смещением влево на величину τ .

10. Свойство смещения в изображении.

Теорема 2.1.11 . Если функция $f(t)$ является оригиналом и $f(t) = F(p)$, то для любого комплексного числа p_0 справедливо соотношение

$$e^{p_0 t} f(t) = F(p - p_0). \quad (2.1.14)$$

Таким образом, умножение оригинала на величину $e^{p_0 t}$, при переходе к изображению, осуществляет смещение изображения на величину p_0 .

11. Свойство свёртки оригиналов.

Определение 2.1.1 Свёрткой функций $f(t)$ и $\varphi(t)$ называется функция

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \varphi(t - \tau) d\tau, \text{ которая обозначается } f(t) \cdot \varphi(t) \text{ или } (f \cdot \varphi)(t).$$

Определение 2.1.2 Если $f(t)$ и $\varphi(t)$ являются функциями-оригиналами, то свёрткой оригиналов называется определённый интеграл

$$(f \cdot \varphi)(t) = \int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau. \quad (2.1.15)$$

Теорема 2.1.12 . Если функция $f(t)$ и $\varphi(t)$ являются оригиналами, причём $f(t) = F(p)$, $\varphi(t) = \Phi(p)$, то свёртка оригиналов имеет изображение

$$(f \cdot \varphi)(t) = \int_0^t f(\tau)\varphi(t-\tau)d\tau = F(p)\Phi(p). \quad (2.1.16)$$

Рассмотрим методы нахождения функции-оригинала по заданному изображению.

1. Если изображение представляет дробно-рациональное выражение, то раскладывают дробь на простейшие дроби, а затем, применяя метод неопределённых коэффициентов, находят неизвестные параметры в разложении. После этого используем свойства и таблицу оригиналов и изображений.

2. Метод использования свойства свёртки функции-оригинала: $F(p) \cdot \Phi(p) = (f \cdot \varphi)(t)$ (формула 2.1.16).

3. Метод использования свойств дифференцирования оригинала (формулы 2.1.5) и дифференцирования изображения (формула 2.1.9).

4. Метод использования свойств интегрирования оригинала (формула 2.1.10) и интегрирования изображения (формула 2.1.11).

5. Метод использования свойства запаздывания оригинала (формула 2.1.12).

6. Метод использования свойства смещения изображения (формула 2.1.14).

2.2 Примеры решения типовых задач

2.2.1 Задана функция-оригинал $f(t) = (3t^2 + 4)\sin 5t$. Найти изображение $F(p)$ заданного оригинала.

Решение. Преобразуем заданную функцию-оригинал $(3t^2 + 4)\sin 5t = 3t^2 \sin 5t + 4\sin 5t$. По таблице оригиналов и изображений найдём изображение функции синуса: $4\sin 5t = 4 \cdot \frac{5}{p^2 + 25}$.

По свойству дифференцирования изображения, умножение оригинала на величину t^2 сводится к двукратному дифференцированию изображения.

$$t^2 \sin 5t = \left(\frac{5}{p^2 + 25} \right)'' = \left(-\frac{10p}{(p^2 + 25)^2} \right)' = \frac{30p^2 - 250}{(p^2 + 25)^2}.$$

Следовательно, исходная функция-оригинал имеет изображение

$$f(t) = (3t^2 + 4) \sin 5t = \frac{90p^2 - 750}{(p^2 + 25)^3} + \frac{20}{p^2 + 25} = F(p).$$

2.2.2 Задана функция-оригинал $f(t) = \int_0^t \frac{\sin 5\tau + \sin 3\tau}{\tau} d\tau$. Найти её изображение $F(p)$.

Решение. Для нахождения изображения заданной функции-оригинала воспользуемся свойством интегрирования оригинала. Находим изображение числителя подынтегральной функции.

$$\sin 5t + \sin 3t = \frac{5}{p^2 + 25} + \frac{3}{p^2 + 9}.$$

Тогда изображение подынтегральной функции имеет вид:

$$\begin{aligned} \frac{\sin 5t + \sin 3t}{t} &= \int_p^{+\infty} \left(\frac{5}{z^2 + 25} + \frac{3}{z^2 + 9} \right) dz = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_p^{+\infty} \left(\frac{5}{z^2 + 25} + \frac{3}{z^2 + 9} \right) dz = \\ &= \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{z}{5} + \operatorname{arctg} \frac{z}{3} \right) \Big|_p^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} \left(\operatorname{arctg} \frac{b}{5} + \operatorname{arctg} \frac{b}{3} - \operatorname{arctg} \frac{p}{5} - \operatorname{arctg} \frac{p}{3} \right) = \\ &= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} \frac{p}{5} - \operatorname{arctg} \frac{p}{3} = \operatorname{arcctg} \frac{p}{5} + \operatorname{arcctg} \frac{p}{3}. \end{aligned}$$

Находим изображение исходной функции

$$f(t) = \int_0^t \frac{\sin 5\tau + \sin 3\tau}{\tau} d\tau = \frac{\operatorname{arcctg} \frac{p}{5} + \operatorname{arcctg} \frac{p}{3}}{p} = F(p).$$

2.2.3 Задана функция-оригинал $f(t) = e^{-3t}(t^3 - 2 \cos 7t)$. Найти изображение $F(p)$ заданного оригинала.

Решение. Для определения изображения заданной функции-оригинала воспользуемся свойством смещения изображения. По таблице оригиналов и

изображений находим изображение $t^3 - 2 \cos 7t = \frac{6}{p^4} - \frac{2p}{p^2 + 49}$. Тогда исходная функция-оригинал имеет изображение $f(t) = \frac{6}{(p+3)^4} - \frac{2(p+3)}{(p+3)^2 + 49} = F(p)$.

2.2.4 На рисунке 2.2.1 изображён график функции-оригинала $f(t)$. Найти функцию-изображение $F(p)$ для заданного оригинала.

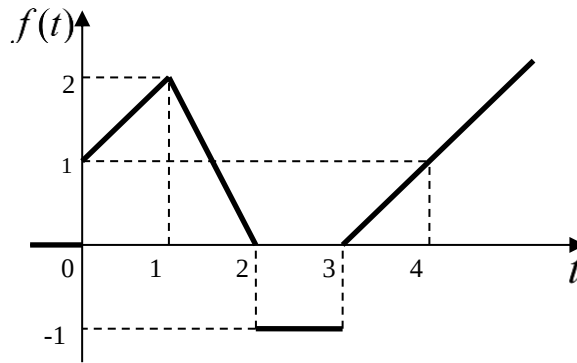


Рисунок 2.2.1 – График оригинала

Решение. Запишем функцию, заданную графическим образом, в аналитическом виде. Для этого воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две точки $M_1(t_1; f(t_1))$ и $M_2(t_2; f(t_2))$: $\frac{t-t_1}{t_2-t_1} = \frac{f(t)-f(t_1)}{f(t_2)-f(t_1)}$.

Если $t < 0$, то $f(t) = 0$.

Если $0 \leq t < 1$, то $\frac{t-0}{1-0} = \frac{f(t)-1}{2-1}$ или $f(t) = t + 1$.

Если $1 \leq t < 2$, то $\frac{t-1}{2-1} = \frac{f(t)-2}{0-2}$ или $f(t) = -2t + 4$.

Если $2 \leq t < 3$, то очевидно, что $f(t) = -1$.

Если $t \geq 3$, то $\frac{t-3}{4-3} = \frac{f(t)-0}{1-0}$ или $f(t) = t - 3$.

Таким образом, исходная функция может быть записана в виде системы

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0; \\ t + 1, & \text{при } 0 \leq t < 1; \\ 4 - 2t, & \text{при } 1 \leq t < 2; \\ -1, & \text{при } 2 \leq t < 3; \\ t - 3, & \text{при } t \geq 3. \end{cases}$$

С помощью единичной функции $1(t) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < 0; \\ 1, & \text{при } t \geq 0, \end{cases}$ запишем исходную

функцию $f(t)$ одним аналитическим выражением, то есть представим её в виде

функции-оригинала. При этом будем учитывать, что единичная функция, запаздывающая на время τ , имеет вид:

$$1(t - \tau) = \begin{cases} 0, & \text{при } t < \tau; \\ 1, & \text{при } t \geq \tau. \end{cases}$$

Функция $f(t) = 0$, при значении времени $t < 0$. В момент времени $t = 0$ она «выключается» и «включается» функция $f(t) = t + 1$.

Далее в момент времени $t = 1$ функция $f(t) = t + 1$ «выключается» и «включается» функция $f(t) = 4 - 2t$, которая в свою очередь «выключается» в момент времени $t = 2$.

В этот же момент включается функция $f(t) = -1$, которая «выключается» при $t = 3$.

И, наконец, в момент времени $t = 3$ «включается» функция $f(t) = t - 3$, которая и действует в дальнейшем. Поэтому функция-оригинал может быть записана в виде

$$f(t) = (t + 1)1(t) - (t + 1)1(t - 1) + (4 - 2t)1(t - 1) - (4 - 2t)1(t - 2) - 1(t - 2) + 1(t - 3) + (t - 3)1(t - 3) = (t + 1)1(t) - 3(t - 1)1(t - 1) + (2t - 5)1(t - 2) + (t - 2)1(t - 3).$$

Для того чтобы найти изображение полученной функции, необходимо представить её в виде

$$f(t) = f_1(t)1(t) + f_2(t - 1)1(t - 1) + f_3(t - 2)1(t - 2) + f_4(t - 3)1(t - 3).$$

Следовательно, исходную функцию-оригинал запишем в виде

$$f(t) = (t + 1)1(t) - 3(t - 1)1(t - 1) + (2(t - 2) - 1)1(t - 2) + ((t - 3) + 1)1(t - 3).$$

По свойствам преобразования Лапласа и таблице оригиналов и их изображений находим изображения полученных оригиналов:

$$\begin{aligned} f_1(t) = t + 1 &= \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}, & f_2(t) = -3t &= -\frac{3}{p^2}, \\ f_3(t) = 2t - 1 &= \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p}, & f_4(t) = t + 1 &= \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p}. \end{aligned}$$

По свойству запаздывания оригинала включение оригинала с запаздыванием на величину τ соответствует умножению изображения на величину $e^{-p\tau}$. Следовательно, исходная функция-оригинал будет иметь изображение

$$f(t) = F(p) = \frac{1}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{3}{p^2} \cdot e^{-p} + \left(\frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} \right) \cdot e^{-2p} + \left(\frac{1}{p^2} + \frac{1}{p} \right) \cdot e^{-3p}.$$

2.2.5 Найти оригинал $f(t)$ по заданному изображению $F(p) = \frac{1}{p(p^2 + 36)}$

Решение. Для восстановления оригинала воспользуемся свойством интегрирования оригинала. По таблице оригиналов и изображений определяем оригинал для изображения $\frac{1}{p^2 + 36} = \frac{1}{6} \sin 6t$. Восстанавливаем оригинал для исходного изображения.

$$\frac{1}{p(p^2 + 36)} = \frac{1}{6} \int_0^t \sin 6\tau d\tau = -\frac{1}{36} \cos 6\tau \Big|_0^t = -\frac{1}{36} \cos 6t + \frac{1}{36} \cos 0 = \frac{1}{36} - \frac{1}{36} \cos 6t.$$

2.2.6 Найти оригинал $f(t)$ по заданному изображению $F(p) = \frac{p^2 + 9p + 5}{p^3 + p^2 - 2}$

Решение. Дробь является правильной. Разложим её на простейшие дроби, для чего необходимо разложить знаменатель на простейшие множители. Подбором находим один из корней многочлена $P_3(p) = p^3 + p^2 - 2$. Корнем этого многочлена является число $p=1$, так как $P_3(1)=0$. Разделим многочлен на $p-1$.

$$\begin{array}{r|l} p^3 + p^2 + 0 \cdot p - 2 & p-1 \\ \hline p^3 - p^2 & p^2 + 2p + 2 \\ \hline 2p^2 + 0 \cdot p & \\ \hline 2p^2 - 2 \cdot p & \\ \hline 2 \cdot p - 2 & \\ \hline 2 \cdot p - 2 & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Квадратный трёхчлен $p^2 + 2p + 2$ не раскладывается на множители, так как дискриминант квадратного трёхчлена отрицателен.

Следовательно, $p^3 + p^2 - 2 = (p-1) \cdot (p^2 + 2p + 2)$. Раскладываем исходную дробь на простейшие дроби.

$$\frac{p^2 + 9p + 5}{p^3 + p^2 - 2} = \frac{p^2 + 9p + 5}{(p-1) \cdot (p^2 + 2p + 2)} = \frac{A}{p-1} + \frac{Bp + C}{p^2 + 2p + 2} =$$

$$= \frac{A \cdot (p^2 + 2p + 2) + (Bp + C) \cdot (p-1)}{(p-1) \cdot (p^2 + 2p + 2)} = \frac{(A+B)p^2 + (2A-B+C)p + 2A-C}{(p-1) \cdot (p^2 + 2p + 2)}.$$

Дроби равны, знаменатели равны, следовательно, равны и числители.

$$(A+B)p^2 + (2A-B+C)p + 2A-C = p^2 + 9p + 5$$

Сравнивая коэффициенты при соответствующих степенях, находим коэффициенты A , B и C .

$$\begin{cases} A+B=1; \\ 2A-B+C=9; \\ 2A-C=5; \end{cases} \quad \begin{cases} B=1-A; \\ 2A-1+A+2A-5=9; \\ C=2A-5; \end{cases} \quad \begin{cases} B=-2; \\ A=3; \\ C=1. \end{cases}$$

Таким образом, исходная дробь представима в виде суммы простейших рациональных дробей

$$\frac{p^2 + 9p + 5}{p^3 + p^2 - 2} = \frac{3}{p-1} + \frac{-2p+1}{p^2 + 2p + 2}.$$

Найдём изображения для каждой функции-оригинала в полученном разложении. По таблице оригиналов и изображений: $\frac{3}{p-1} = 3 \cdot e^t$.

Определим изображение второго слагаемого, для чего в знаменателе выделим полный квадрат, а в числителе выражение, возводимое в квадрат в знаменателе. Затем представим дробь в виде суммы двух дробей.

$$\frac{-2p+1}{p^2 + 2p + 2} = \frac{-2(p+1)+3}{(p+1)^2 + 1} = -2 \cdot \frac{p+1}{(p+1)^2 + 1} + 3 \cdot \frac{1}{(p+1)^2 + 1}.$$

Для определения функции-оригинала для заданного изображения воспользуемся свойством смещения изображения. По таблице оригиналов и изображений: $\frac{p}{p^2 + 1} = \cos t$, $\frac{1}{p^2 + 1} = \sin t$.

Следовательно, по свойству смещения изображения имеем

$$\frac{-2p+1}{p^2+2p+2} = -2 \cdot \frac{p+1}{(p+1)^2+1} + 3 \cdot \frac{1}{(p+1)^2+1} = -2 \cdot e^{-t} \cos t + 3 \cdot e^{-t} \sin t.$$

Таким образом, функция-оригинал для заданного изображения имеет вид

$$\frac{p^2+9p+5}{p^3+p^2-2} = 3 \cdot e^t - 2 \cdot e^{-t} \cos t + 3 \cdot e^{-t} \sin t.$$

2.2.7 Найти оригинал $f(t)$ по заданному изображению $F(p) = \frac{pe^{5p}}{p^2+49}$

Решение. Для определения функции-оригинала заданного изображения воспользуемся свойством запаздывания оригинала.

Так как $\frac{p}{p^2+49} = \cos 7t$, то

$$\frac{pe^{5p}}{p^2+49} = \cos 7(t-5) \cdot 1(t-5).$$

2.3 Задания для решения на практическом занятии

2.3.1 Найти изображения функций-оригиналов $f(t) = 4 + 5e^{3t} - 2 \cos 2t$ и $\varphi(t) = 3t + 2 \operatorname{sh} 4t$.

2.3.2 Найти изображения функций-оригиналов $f(t) = \sin^2 7t + \cos^3 t$ и $\varphi(t) = 3 \operatorname{ch}^2 9t - \sin^3 t$ используя свойство подобия.

2.3.3 Найти изображения функций-оригиналов $f(t) = \sin^2 5t + 3$ и $\varphi(t) = \frac{2}{3} \cos^3 t$ используя свойство дифференцирования оригинала.

2.3.4 Найти изображения функций-оригиналов $f(t) = t^2 \operatorname{sh} 2t$ и $\varphi(t) = t^3 e^{2t}$ с использованием свойства дифференцирования изображения.

2.3.5 Найти изображения функций-оригиналов $f(t) = \int_0^t (\sin 5\tau - \sin 2\tau) d\tau$

и $\varphi(t) = \int_0^t (\operatorname{ch} 3\tau + \operatorname{ch} \tau) d\tau$ двумя способами, с использованием и без использования свойства интегрирования оригинала.

2.3.6 Найти изображения функций-оригиналов $f(t) = \frac{\sin 3t}{2t}$ и $\varphi(t) = \frac{\operatorname{sh} 9t}{4t}$.

2.3.7 Найти изображения функций-оригиналов $f(t) = (t^2 - 8t + 16) \cdot 1(t - 4)$ и $\varphi(t) = t^2 - 8t + 16$.

2.3.8 Найти изображения функций-оригиналов $f(t) = 3\cos(2t - 6) \cdot 1(t - 3)$ и $\varphi(t) = \cos(2t - 6)$.

2.3.9 Найти изображения функций-оригиналов $f(t) = e^{2t} \cos 3t$ и $\varphi(t) = e^{-4t} \operatorname{sh} 2t$ с использованием свойства смещения изображения.

2.3.10 Найти изображения функций-оригиналов $f(t) = \int_0^t \tau \operatorname{ch}(2t - 2\tau) d\tau$ и $\varphi(t) = \int_0^t \sin 2\tau \cos(3t - 3\tau) d\tau$ двумя способами, с использованием и без использования свойства свёртки оригиналов.

2.3.11 По заданной функции-оригиналу $f(t)$ найти изображение $F(p)$.

2.3.11.1 $f(t) = (3t - 4) \cos 2t$.

2.3.11.2 $f(t) = (2t^2 + 5) \sin 3t$.

2.3.11.3 $f(t) = (5t + 3) \operatorname{sh} 4t$.

2.3.11.4 $f(t) = (t^2 - 1) \operatorname{ch} 2t$.

2.3.11.5 $f(t) = (3t + 2)e^{6t}$.

2.3.11.6 $f(t) = \int_0^t \frac{\sin 2\tau - \sin 4\tau}{\tau} d\tau$.

2.3.11.7 $f(t) = \int_0^t \frac{\cos 5\tau + \cos \tau}{\tau} d\tau$.

2.3.11.8 $f(t) = \int_0^t \cos^2 4\tau d\tau$.

2.3.11.9 $f(t) = e^{2t} \cos 3t$.

2.3.11.10 $f(t) = e^{-4t} \sin 5t$.

2.3.11.11 $f(t) = e^{-4t} \operatorname{ch} 5t$.

2.3.11.12 $f(t) = e^{-7t} \operatorname{sh} 3t$.

2.3.11.13 $f(t) = (t - 3)^5 1(t - 3)$.

2.3.11.14 $f(t) = \operatorname{sh}(2t - 4) 1(t - 2)$.

2.3.11.15 $f(t) = e^{4t-8} 1(t - 2)$.

2.3.11.16 $f(t) = 2 \sin(3t + 9) 1(t + 3)$.

2.3.11.17 $f(t) = 5 \cos(4t + 8) 1(t + 2)$.

2.3.11.18 $f(t) = 1 + \sin(5t + 10) 1(t + 2)$.

2.3.11.19 $f(t) = \operatorname{ch} 3t + t \operatorname{sh} 3t + 2$.

2.3.11.20 $f(t) = \sin 5t - t \cos 5t - 5$.

2.3.12 На рисунке 2.3.1 изображён график функции-оригинала $f(t)$. Найти функцию-изображение $F(p)$ для заданного оригинала.

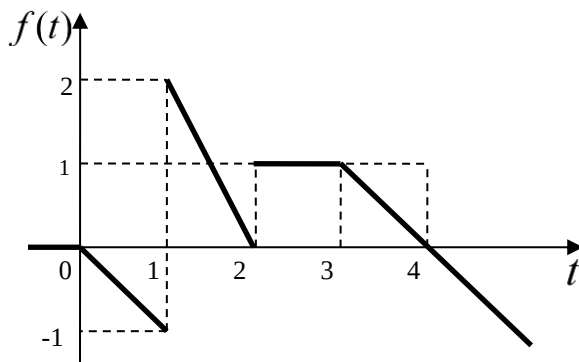


Рисунок 2.3.1 – График оригинала задачи 2.3.12

2.3.13 На рисунке 2.3.2 изображён график функции-оригинала $f(t)$. Найти функцию-изображение $F(p)$ для заданного оригинала.

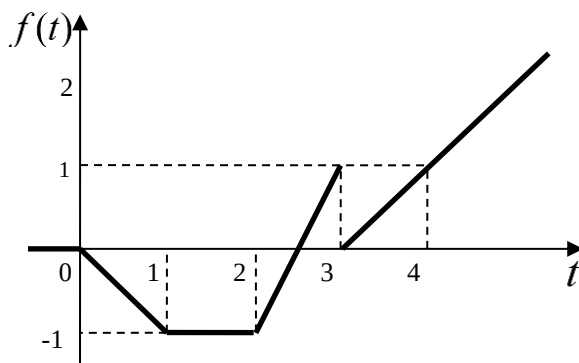


Рисунок 2.3.2 – График оригинала задачи 2.3.13

2.3.14 Найти оригинал $f(t)$ по заданному изображению $F(p)$

2.3.14.1 $F(p) = \frac{p}{p^2 - 9p + 20}.$

2.3.14.2 $F(p) = \frac{p+3}{p^2 + 6p - 7}.$

2.3.14.3 $F(p) = \frac{p+2}{p^2 - 2p + 5}.$

2.3.14.4 $F(p) = \frac{p-3}{p(p^2 + 16)}.$

2.3.14.5 $F(p) = \frac{2}{p^3 - p^2}.$

2.3.14.6 $F(p) = \frac{p^2}{(p^2 + 4)(p^2 + 9)}.$

2.3.14.7 $F(p) = \frac{p^2}{(p^2 - 25)(p^2 - 36)}.$

2.3.14.8 $F(p) = \frac{1}{(p^2 + 4)^2}.$

2.3.14.9 $F(p) = \frac{p}{(p^2 + 4)^2}.$

2.3.14.10 $F(p) = \frac{p^2}{(p^2 + 9)^2}.$

2.3.14.11 $F(p) = \frac{4}{p^2(p^2 + 16)}.$

2.3.14.12 $F(p) = \frac{4}{p(p^2 - 9)}.$

2.3.14.13 $F(p) = \frac{p+7}{p(p^2 - 9)}.$

2.3.14.14 $F(p) = \frac{p-32}{p^2 + 6p + 25}.$

2.3.14.15 $F(p) = \frac{p+2}{p^2 - 6p + 8}.$

2.3.14.16 $F(p) = \frac{p-4}{p^2 + 8p + 16}.$

2.3.14.17 $F(p) = \frac{p}{(p^2 + 25)(p^2 + 36)}.$

2.3.14.18 $F(p) = \frac{p}{(p^2 + 1)(p^2 + 9)}.$

2.3.14.19 $F(p) = \frac{p}{(p+2)(p+6)^2}.$

2.3.14.20 $F(p) = \frac{p-1}{(p-2)^2(p+3)}.$

2.3.14.21 $F(p) = \frac{e^{2p}}{p(p^2 + 1)}.$

2.3.14.22 $F(p) = \frac{e^{-3p}}{p(p^2 + 4)}.$

2.3.14.23 $F(p) = \frac{e^{4p}}{p(p^2 - 9)}.$

2.3.14.24 $F(p) = \frac{e^{-p}}{p(p^2 - 25)}.$

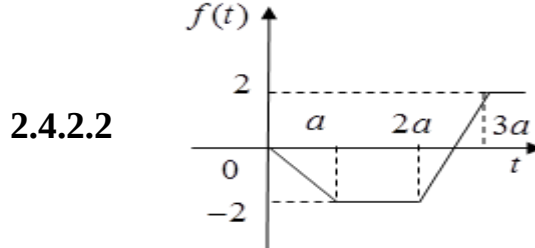
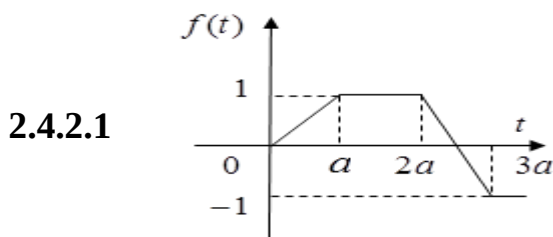
2.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

2.4.1 Найти функцию-оригинал $f(t)$ по заданному изображению $F(p)$.

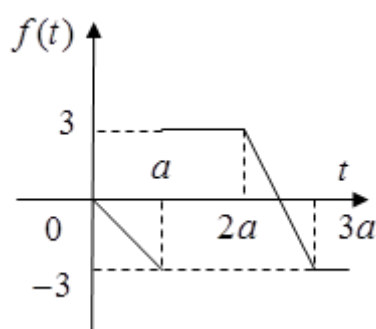
- | | | | |
|----------|-------------------------------|---------------------------------|--|
| 2.4.1.1 | a) $\frac{1}{(p^2-1)^2};$ | б) $\frac{p-1}{p^2(p^2+1)};$ | в) $\frac{e^{-p}}{(p-1) \cdot (p^2+2p+2)}.$ |
| 2.4.1.2 | a) $\frac{p}{(p^2+1)^2};$ | б) $\frac{p+2}{p^2(p^2-1)};$ | в) $\frac{e^{2p}}{(p+2) \cdot (p^2-2p+2)}.$ |
| 2.4.1.3 | a) $\frac{4}{(p^2-4)^2};$ | б) $\frac{p-3}{p^2(p^2+4)};$ | в) $\frac{e^{-3p}}{(p-3) \cdot (p^2+4p+5)}.$ |
| 2.4.1.4 | a) $\frac{4p}{(p^2+4)^2};$ | б) $\frac{p+4}{p^2(p^2-4)};$ | в) $\frac{e^{4p}}{(p+4) \cdot (p^2-4p+5)}.$ |
| 2.4.1.5 | a) $\frac{1}{(p^2-9)^2};$ | б) $\frac{p-5}{p^2(p^2+9)};$ | в) $\frac{e^{-5p}}{(p-5) \cdot (p^2+2p+10)}.$ |
| 2.4.1.6 | a) $\frac{p}{(p^2+9)^2};$ | б) $\frac{p+6}{p^2(p^2-9)};$ | в) $\frac{e^{6p}}{(p+6) \cdot (p^2-2p+10)}.$ |
| 2.4.1.7 | a) $\frac{9}{(p^2-25)^2};$ | б) $\frac{p-7}{p^2(p^2+25)};$ | в) $\frac{e^{-7p}}{(p-7) \cdot (p^2+4p+13)}.$ |
| 2.4.1.8 | a) $\frac{9p}{(p^2+25)^2};$ | б) $\frac{p+8}{p^2(p^2-25)};$ | в) $\frac{e^{8p}}{(p+8) \cdot (p^2-4p+13)}.$ |
| 2.4.1.9 | a) $\frac{16}{(p^2-36)^2};$ | б) $\frac{p-9}{p^2(p^2+36)};$ | в) $\frac{e^{-9p}}{(p-9) \cdot (p^2+6p+13)}.$ |
| 2.4.1.10 | a) $\frac{10p}{(p^2+36)^2};$ | б) $\frac{p+10}{p^2(p^2-36)};$ | в) $\frac{e^{10p}}{(p+10) \cdot (p^2-6p+13)}.$ |
| 2.4.1.11 | a) $\frac{4}{(p^2-49)^2};$ | б) $\frac{p-11}{p^2(p^2+49)};$ | в) $\frac{e^{-11p}}{(p-11) \cdot (p^2+8p+25)}.$ |
| 2.4.1.12 | a) $\frac{12p}{(p^2+49)^2};$ | б) $\frac{p+12}{p^2(p^2-49)};$ | в) $\frac{e^{12p}}{(p+12) \cdot (p^2-8p+25)}.$ |
| 2.4.1.13 | a) $\frac{13}{(p^2-64)^2};$ | б) $\frac{p-13}{p^2(p^2+64)};$ | в) $\frac{e^{-13p}}{(p-13) \cdot (p^2+8p+20)}.$ |
| 2.4.1.14 | a) $\frac{p}{(p^2+64)^2};$ | б) $\frac{p+14}{p^2(p^2-64)};$ | в) $\frac{e^{14p}}{(p+14) \cdot (p^2-8p+20)}.$ |
| 2.4.1.15 | a) $\frac{15}{(p^2-100)^2};$ | б) $\frac{p-15}{p^2(p^2+100)};$ | в) $\frac{e^{-15p}}{(p-15) \cdot (p^2+10p+74)}.$ |
| 2.4.1.16 | a) $\frac{16p}{(p^2+100)^2};$ | б) $\frac{p+16}{p^2(p^2-100)};$ | в) $\frac{e^{16p}}{(p+16) \cdot (p^2-10p+74)}.$ |

- 2.4.1.17 а) $\frac{17}{(p^2 - 121)^2}$; б) $\frac{p - 17}{p^2(p^2 + 121)}$; в) $\frac{e^{-19p}}{(p - 10) \cdot (p^2 + 12p + 40)}$.
- 2.4.1.18 а) $\frac{18p}{(p^2 + 121)^2}$; б) $\frac{p + 18}{p^2(p^2 - 121)}$; в) $\frac{e^{18p}}{(p + 18) \cdot (p^2 - 12p + 40)}$.
- 2.4.1.19 а) $\frac{19}{(p^2 - 144)^2}$; б) $\frac{p - 19}{p^2(p^2 + 144)}$; в) $\frac{e^{-19p}}{(p - 19) \cdot (p^2 + 4p + 29)}$.
- 2.4.1.20 а) $\frac{20p}{(p^2 + 144)^2}$; б) $\frac{p + 20}{p^2(p^2 - 144)}$; в) $\frac{e^{20p}}{(p + 20) \cdot (p^2 - 4p + 29)}$.
- 2.4.1.21 а) $\frac{21}{(p^2 - 169)^2}$; б) $\frac{p - 21}{p^2(p^2 + 169)}$; в) $\frac{e^{-21p}}{(p - 21) \cdot (p^2 + 12p + 40)}$.
- 2.4.1.22 а) $\frac{22p}{(p^2 + 169)^2}$; б) $\frac{p + 22}{p^2(p^2 - 169)}$; в) $\frac{e^{22p}}{(p + 22) \cdot (p^2 - 12p + 40)}$.
- 2.4.1.23 а) $\frac{23}{(p^2 - 196)^2}$; б) $\frac{p - 23}{p^2(p^2 + 196)}$; в) $\frac{e^{-23p}}{(p - 23) \cdot (p^2 + 14p + 53)}$.
- 2.4.1.24 а) $\frac{24p}{(p^2 + 196)^2}$; б) $\frac{p + 24}{p^2(p^2 - 196)}$; в) $\frac{e^{24p}}{(p + 24) \cdot (p^2 - 14p + 53)}$.
- 2.4.1.25 а) $\frac{25}{(p^2 - 225)^2}$; б) $\frac{p - 25}{p^2(p^2 + 225)}$; в) $\frac{e^{-25p}}{(p - 25) \cdot (p^2 + 2p + 65)}$.
- 2.4.1.26 а) $\frac{26p}{(p^2 + 225)^2}$; б) $\frac{p + 26}{p^2(p^2 - 225)}$; в) $\frac{e^{26p}}{(p + 26) \cdot (p^2 - 2p + 65)}$.
- 2.4.1.27 а) $\frac{27}{(p^2 - 256)^2}$; б) $\frac{p - 27}{p^2(p^2 + 256)}$; в) $\frac{e^{-27p}}{(p - 27) \cdot (p^2 + 4p + 85)}$.
- 2.4.1.28 а) $\frac{28p}{(p^2 + 256)^2}$; б) $\frac{p + 28}{p^2(p^2 - 256)}$; в) $\frac{e^{28p}}{(p + 28) \cdot (p^2 - 4p + 85)}$.
- 2.4.1.29 а) $\frac{29}{(p^2 - 289)^2}$; б) $\frac{p - 29}{p^2(p^2 + 289)}$; в) $\frac{e^{-29p}}{(p - 29) \cdot (p^2 + 2p + 229)}$.
- 2.4.1.30 а) $\frac{30p}{(p^2 + 289)^2}$; б) $\frac{p + 30}{p^2(p^2 - 289)}$; в) $\frac{e^{30p}}{(p + 30) \cdot (p^2 - 2p + 229)}$.

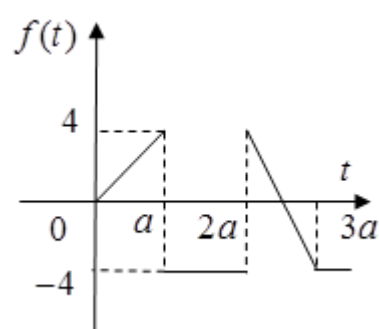
2.4.2 Найти изображение $F(p)$ для функции-оригинала $f(t)$, которая задана графически.



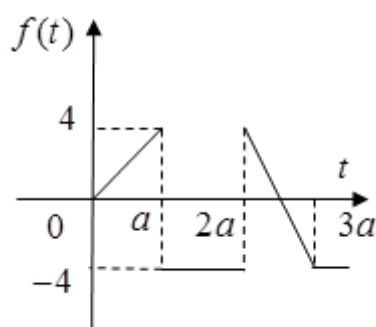
2.4.2.3



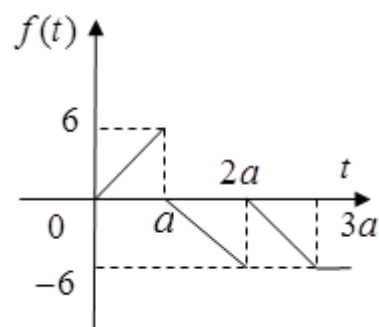
2.4.2.4



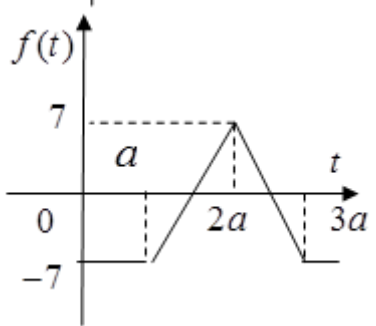
2.4.2.5



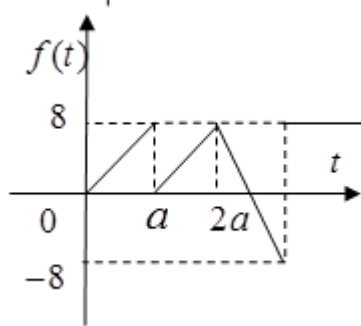
2.4.2.6



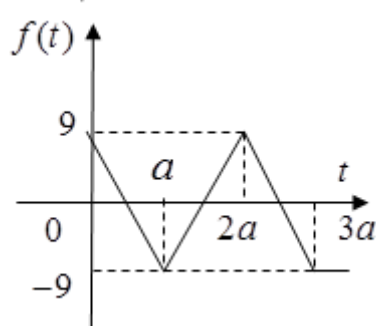
2.4.2.7



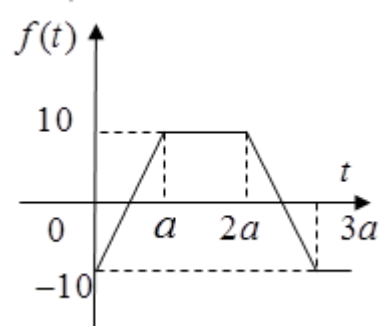
2.4.2.8



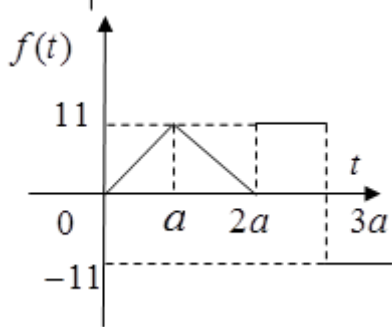
2.4.2.9



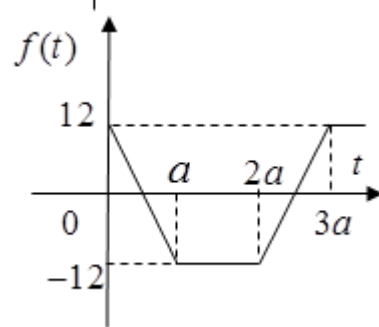
2.4.2.10



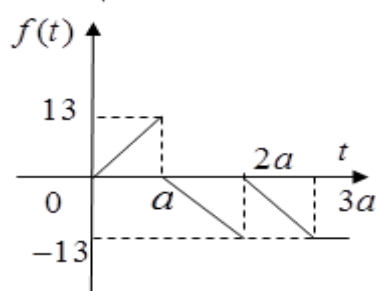
2.4.2.11



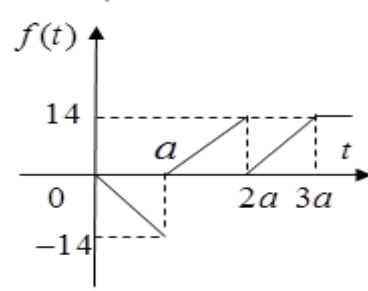
2.4.2.12



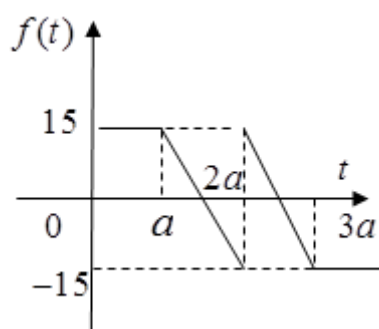
2.4.2.13



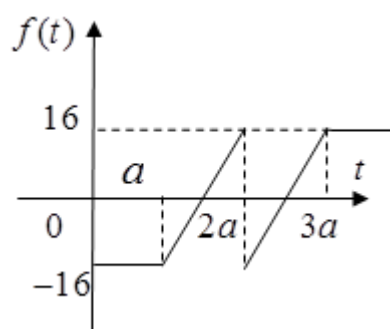
2.4.2.14



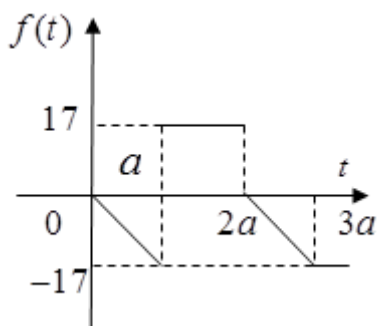
2.4.2.15



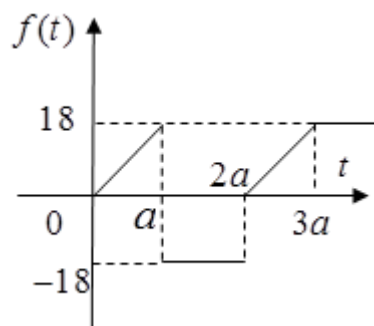
2.4.2.16



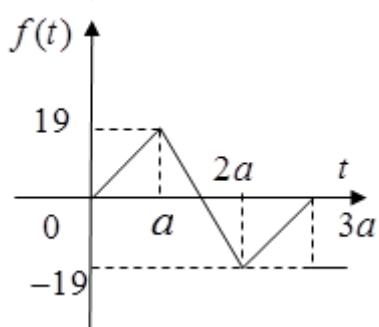
2.4.2.17



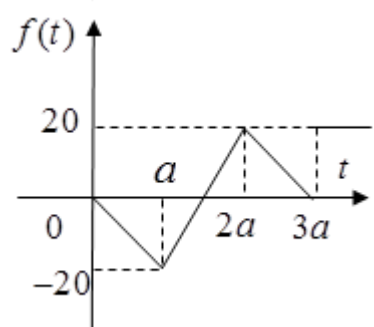
2.4.2.18



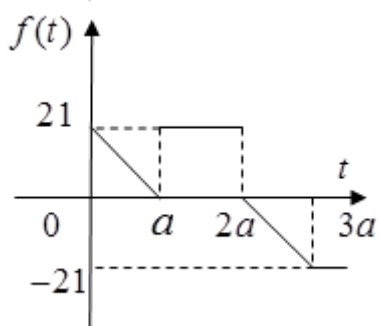
2.4.2.19



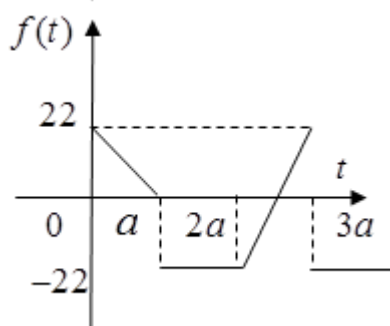
2.4.2.20



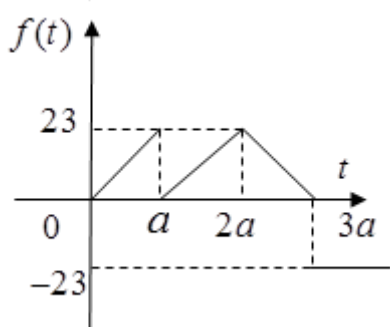
2.4.2.21



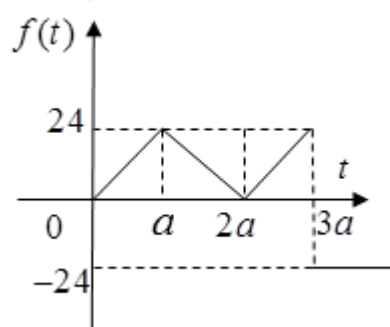
2.4.2.22



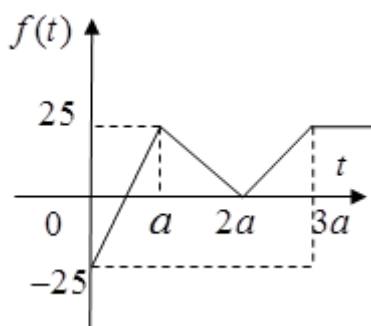
2.4.2.23



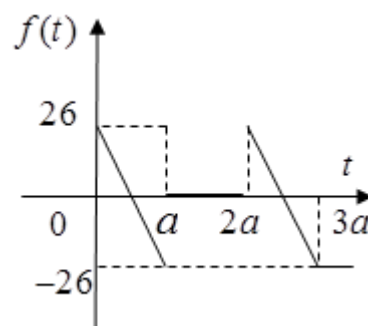
2.4.2.24



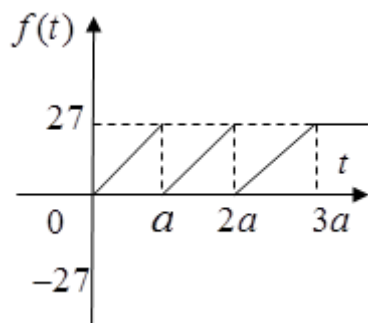
2.4.2.25



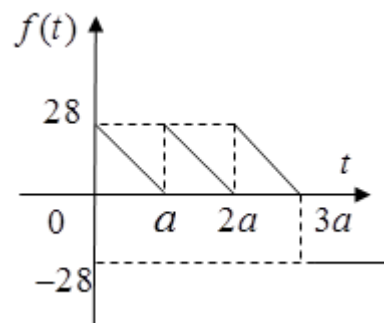
2.4.2.26



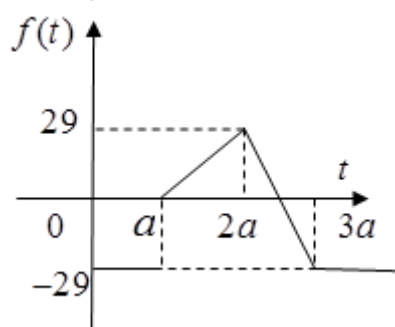
2.4.2.27



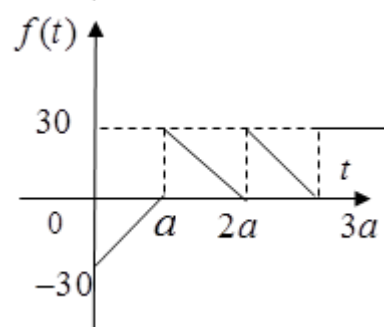
2.4.2.28



2.4.2.29



2.4.2.30



3 РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОПЕРАЦИОННЫМИ МЕТОДАМИ

Содержание: решение дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений операционными методами.

3.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Рассмотрим применение операционного исчисления к решению дифференциальных уравнений.

Решение задачи Коши для линейного дифференциального уравнения высшего порядка с постоянными коэффициентами

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + a_2 y^{(n-2)}(t) + \dots + a_n y(t) = f(t), \quad (3.1.1)$$

состоит в нахождении решения $y = y(t)$, которое удовлетворяет начальным условиям:

$$y(0) = y_0, y'(0) = y'_0, y''(0) = y''_0, \dots, y^{(n-1)}(0) = y_0^{(n-1)}. \quad (3.1.2)$$

Операционным методом эта задача может быть решена при условии, что функции $f(t)$ и $y(t)$ вместе со своими производными являются функциями-оригиналами. Пусть $y(t) = Y(p)$, а $f(t) = F(p)$.

Алгоритм решения дифференциального уравнения с помощью преобразования Лапласа.

1. Используя теорему о дифференцировании оригинала, переходим от заданного уравнения к операторному уравнению, то есть к уравнению относительно изображения $Y(p)$ оригинала $y(t)$, учитывая, что $f(t)$ имеет изображение $F(p)$. Операторное уравнение имеет вид

$$Q_n(p)Y(p) = F(p) + R_{n-1}(p), \quad (3.1.3)$$

где $Q_n(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \dots + a_n$ – характеристический многочлен, $R_{n-1}(p)$ – многочлен степени не выше $n-1$.

2. Выражаем из операторного уравнения изображение

$$Y(p) = \frac{F(p) + R_{n-1}(p)}{Q_n(p)}. \quad (3.1.4)$$

3. Используя таблицу и свойства преобразования Лапласа, по заданному изображению определяем оригинал, который будет представлять частное решение данного дифференциального уравнения.

4. Решение системы дифференциальных уравнений проходит по той же схеме решения дифференциального уравнения, путём перехода от дифференциальных уравнений системы переходим к операторным уравнениям.

3.2 Примеры решения типовых задач

3.2.1 Методом операционного исчисления найти решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + 5y = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

Решение. Пусть $y(t) = Y(p)$. По теореме дифференцирования оригинала получаем изображения первой производной $y'(t) = pY(p) - y(0) = pY(p)$ и

изображение второй производной $y''(t) = p^2 Y(p) - py(0) - y'(0) = p^2 Y(p) - 1$. В результате приходим к операторному уравнению

$$p^2 Y(p) - 1 - 2pY(p) + 5Y(p) = 0$$

или

$$Y(p) = \frac{1}{p^2 - 2p + 5} = \frac{1}{(p-1)^2 + 4}.$$

Для полученного изображения находим оригинал $y(t) = \frac{1}{2} e^t \sin 2t$. Данная функция является решением исходного дифференциального уравнения.

3.2.2 Методом операционного исчисления найти решение дифференциального уравнения $x'' + 16x = 4\sin 4t$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = -1$, $x'(0) = 0$.

Решение. Перейдём от дифференциального уравнения второго порядка к операторному уравнению. Пусть $x(t) = X(p)$. По теореме дифференцирования оригинала имеем

$$x''(t) = p^2 \cdot X(p) - p \cdot x(0) - x'(0) = p^2 \cdot X(p) + p.$$

Кроме этого, по таблице оригиналов и изображений правая часть дифференциального уравнения имеет изображение

$$4\sin 4t = \frac{16}{p^2 + 16}.$$

Переходим от исходного дифференциального уравнения к уравнению в изображениях $p^2 \cdot X(p) + p + 16 \cdot X(p) = \frac{16}{p^2 + 16}$.

Тогда получаем операторное уравнение $(p^2 + 16) \cdot X(p) = \frac{16}{p^2 + 16} - p$ или

$$X(p) = \frac{16}{(p^2 + 16)^2} - \frac{p}{p^2 + 16}.$$

Правую часть последнего равенства приводить к общему знаменателю не имеет смысла, так как оригинал для второго слагаемого известен $\left(\frac{p}{p^2 + 16} = \cos 4t\right)$, а оригинал для выражения $\frac{16}{(p^2 + 16)^2}$ удобнее найти по свойству изображения свёртки оригиналов.

Известно, что $\frac{4}{p^2 + 16} = \sin 4t$, поэтому

$$\begin{aligned} \frac{16}{(p^2 + 16)^2} &= \frac{4}{p^2 + 16} \cdot \frac{4}{p^2 + 16} = \int_0^t \sin 4\tau \cdot \sin 4(t - \tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t (\cos(8\tau - 4t) - \cos 4t) d\tau = \left[\frac{1}{16} \sin(8\tau - 4t) - \frac{1}{2} \tau \cdot \cos 4t \right]_0^t = \\ &= \frac{1}{16} \sin 4t - \frac{1}{2} t \cdot \cos 4t + \frac{1}{16} \sin 4t = \frac{1}{8} \sin 4t - \frac{1}{2} t \cdot \cos 4t. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$X(p) = x(t) = \frac{1}{8} \sin 4t - \frac{1}{2} t \cdot \cos 4t - \cos 4t = \frac{1}{8} \sin 4t - \frac{t+2}{2} \cos 4t.$$

Решением заданного дифференциального уравнения является функция $x(t) = \frac{1}{8} \sin 4t - \frac{t+2}{2} \cos 4t$.

3.2.3 Методами операционного исчисления найти решение системы дифференциальных уравнений, удовлетворяющее указанным начальным условиям.

$$\begin{cases} \dot{x} + 3x - 4y = 9e^{2t}; \\ \dot{y} + 2x - 3y = 3e^{2t}, \end{cases} \quad x(0) = 2, \quad y(0) = 0.$$

Решение. Пусть $x(t) = X(p)$, $y(t) = Y(p)$. В силу начальных условий и свойств дифференцирования оригинала $\dot{y}(t) = pY(p)$, $\dot{x}(t) = pX(p) - 2$. По таблице оригиналов и изображений $e^{2t} = \frac{1}{p-2}$. Система дифференциальных уравнений в операторной форме имеет вид:

$$\begin{cases} pX(p) - 2 + 3X(p) - 4Y(p) = \frac{9}{p-2}; \\ pY(p) + 2X(p) - 3Y(p) = \frac{3}{p-2}, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} (p+3)X(p) - 4Y(p) = \frac{2p+5}{p-2}; \\ 2X(p) + (p-3)Y(p) = \frac{3}{p-2}. \end{cases}$$

Для нахождения изображений $X(p)$ и $Y(p)$ воспользуемся формулами Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} p+3 & -4 \\ 2 & p-3 \end{vmatrix} = p^2 - 1, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} \frac{2p+5}{p-2} & -4 \\ \frac{3}{p-2} & p-3 \end{vmatrix} = \frac{2p^2 - p - 3}{p-2},$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} p+3 & \frac{2p+5}{p-2} \\ 2 & \frac{3}{p-2} \end{vmatrix} = -\frac{p+1}{p-2}.$$

Тогда

$$X(p) = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{2p^2 - p - 3}{(p-2)(p^2 - 1)} = \frac{(2p-3)(p+1)}{(p-2)(p-1)(p+1)} = \frac{2p-3}{(p-2)(p-1)},$$

$$Y(p) = \frac{\Delta_y}{\Delta} = -\frac{p+1}{(p-2)(p^2 - 1)} = -\frac{p+1}{(p-2)(p-1)(p+1)} = -\frac{1}{(p-2)(p-1)}.$$

Восстановим оригиналы по заданным изображениям, используя таблицу оригиналов и изображений.

$$X(p) = \frac{2p-3}{(p-2)(p-1)} = \frac{1}{p-1} + \frac{1}{p-2} \Rightarrow x(t) = e^t + e^{2t},$$

$$Y(p) = -\frac{1}{(p-2)(p-1)} = \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p-2} \Rightarrow y(t) = e^t - e^{2t}.$$

Таким образом, решением заданной системы дифференциальных уравнений являются функции $x(t) = e^t + e^{2t}$ и $y(t) = e^t - e^{2t}$.

3.3 Задания для решения на практическом занятии

Решить дифференциальные уравнения и системы методами операционного исчисления.

3.3.1 Найти частное решение дифференциального уравнения $x''(t) + 8x'(t) + 9x(t) = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = x'(0) = 1$.

3.3.2 Найти частное решение дифференциального уравнения $\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 29y(t) = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = \dot{y}(0) = 2$.

3.3.3 Найти частное решение дифференциального уравнения $\ddot{x} - 3\dot{x} + 2x = e^{3t}$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = 1, \dot{x}(0) = -1$.

3.3.4 Найти частное решение дифференциального уравнения $\ddot{x} + 4x = 2 \sin t$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = -1$, $\dot{x}(0) = 1$.

3.3.5 Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - y = t$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

3.3.6 Найти частное решение дифференциального уравнения $\ddot{x} - 9x = \sin t$, удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = -1$, $\dot{x}(0) = 3$.

3.3.7 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' + y = e^t$.

3.3.8 Найти общее решение дифференциального уравнения $y'' - y' = 2$.

3.3.9 Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 3y' + 2y = te^t$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$.

3.3.10 Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + 2y' + 2y = 2 + 2t$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$.

3.3.11 Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + y' = t^2 + 2t$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = -2$, $y'(0) = 1$.

3.3.12 Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 7y' + 6y = \sin t$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

3.3.13 Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + 2y' + 5y = \cos t$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

3.3.14 Найти частное решение дифференциального уравнения $y''' + 2y'' + y' = -2e^{-2t}$, удовлетворяющее начальным условиям $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 1$.

3.3.15 Найти решение системы дифференциальных уравнений
$$\begin{cases} x' - y = 0, \\ y' - x = t \end{cases}$$
 при начальных условиях $x(0) = y(0) = 0$.

3.3.16 Найти решение системы дифференциальных уравнений
$$\begin{cases} x' = 2x + 3y + 5t, \\ y' = 3x + 2y + 8e^t \end{cases}$$
 при начальных условиях $x(0) = 0$, $y(0) = 1$.

3.3.17 Найти решение системы дифференциальных уравнений
$$\begin{cases} x' = y + z, \\ y' = x + z, \\ z' = x + y \end{cases}$$
 при начальных условиях $x(0) = -1$, $y(0) = 1$ и $z(0) = 0$.

3.3.18 Найти решение системы дифференциальных уравнений
$$\begin{cases} x' + 3x - 4y = 9e^{2t}, \\ y' + 2x - 3y = 3e^{2t} \end{cases}$$
 при начальных условиях $x(0) = 2$, $y(0) = 0$.

3.3.19 Найти решение системы дифференциальных уравнений
$$\begin{cases} x' - 2x - 4y = \cos t, \\ y' + x + 2y = \sin t \end{cases}$$
 при начальных условиях $x(0) = 2$, $y(0) = 0$.

3.3.20 Найти решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'' = 7x + 5y, \\ y'' = y \end{cases}$$
 при начальных условиях $x(0) = y(0) = 0$, $x'(0) = y'(0) = 1$.

3.3.21 Найти решение системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} x'' - 3x - 4y = -3, \\ y'' + x + y = -5 \end{cases}$$
 при начальных условиях $x(0) = x'(0) = 0$, $y(0) = y'(0) = 0$.

3.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

3.4.1 Решить задачу Коши дифференциального уравнения, методами операционного исчисления.

3.4.1.1 $x'' + x' - 2x = 2\sin t - 3\cos t$,
 $x(0) = 2$, $x'(0) = 1$.

3.4.1.2 $x'' + x = \operatorname{sh} 2t$,
 $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$.

3.4.1.3 $x'' + 4x' + 5x = \operatorname{ch} 2t$,
 $x(0) = 2$, $x'(0) = 3$.

3.4.1.4 $x'' - x' - 2x = 3\sin 2t - 2\cos 2t$,
 $x(0) = 3$, $x'(0) = 2$.

3.4.1.5 $x'' - 5x' + 6x = 2\sin 3t + \cos 3t$,
 $x(0) = 3$, $x'(0) = 4$.

3.4.1.6 $x'' + 4x = \operatorname{ch} 2t$,
 $x(0) = 4$, $x'(0) = 3$.

3.4.1.7 $x'' - 4x' + 5x = \operatorname{ch} 3t$,
 $x(0) = 4$, $x'(0) = 5$.

3.4.1.8 $x'' + 5x' + 6x = \sin 4t - \cos 4t$,
 $x(0) = 5$, $x'(0) = 4$.

3.4.1.9 $x'' + 4x' - 5x = 2\sin 5t - \cos 5t$,
 $x(0) = 5$, $x'(0) = 6$.

3.4.1.10 $x'' + 9x = \operatorname{sh} 4t$,
 $x(0) = 6$, $x'(0) = 5$.

3.4.1.11 $x'' + 2x' + 2x = \operatorname{ch} 4t$,
 $x(0) = 6$, $x'(0) = 7$.

3.4.1.12 $x'' - 6x' + 8x = 6\sin 6t - 6\cos 6t$,
 $x(0) = 7$, $x'(0) = 6$.

3.4.1.13 $x'' + 6x' + 8x = \sin 7t + 7\cos 7t$,
 $x(0) = 7$, $x'(0) = 8$.

3.4.1.14 $x'' + 16x = \operatorname{ch} 5t$,
 $x(0) = 8$, $x'(0) = 7$.

3.4.1.15 $x'' - 2x' + 2x = \operatorname{ch} 5t$,
 $x(0) = 8$, $x'(0) = 9$.

3.4.1.16 $x'' + 7x' - 8x = 2\sin 8t - \cos 8t$,
 $x(0) = 9$, $x'(0) = 8$.

3.4.1.17 $x'' - 6x' + 5x = \sin 9t + 4\cos 9t$,
 $x(0) = 3$, $x'(0) = 1$.

3.4.1.18 $x'' + 25x = \operatorname{sh} 6t$,
 $x(0) = 1$, $x'(0) = 3$.

3.4.1.19 $x'' + 6x' + 13x = \operatorname{ch} 6t$,
 $x(0) = 2$, $x'(0) = 0$.

3.4.1.20 $x'' + 6x' + 5x = -5\sin 2t + 3\cos 2t$,
 $x(0) = 3$, $x'(0) = 4$.

3.4.1.21 $x'' - 8x' + 7x = \sin 5t + 3\cos 5t$,
 $x(0) = 4$, $x'(0) = 5$.

3.4.1.22 $x'' + 36x = 3\operatorname{ch} 7t$,
 $x(0) = 2$, $x'(0) = 7$.

3.4.1.23 $x'' - 6x' + 13x = \operatorname{ch} 7t$,
 $x(0) = 2$, $x'(0) = 4$.

3.4.1.24 $x'' + 8x' + 7x = 6\sin 5t - 6\cos 5t$,
 $x(0) = 5$, $x'(0) = 5$.

- 3.4.1.25 $x'' - 8x' + 15x = 2\sin t - 3\cos t$, $x(0) = 3$, $x'(0) = 5$, 3.4.1.26 $x'' + 49x = \operatorname{sh} 8t$,
 $x(0) = 7$, $x'(0) = -7$.
- 3.4.1.27 $x'' + 2x' + 17x = \operatorname{ch} 8t$, $x(0) = 1$, $x'(0) = 2$, 3.4.1.28 $x'' + 8x' + 15x = \sin t - \cos t$,
 $x(0) = -3$, $x'(0) = -5$.
- 3.4.1.29 $x'' + 6x' + 9x = 3\sin 3t + 3\cos 3t$, $x(0) = 3$, $x'(0) = 3$, 3.4.1.30 $x'' + 64x = \operatorname{ch} 9t$,
 $x(0) = -8$, $x'(0) = 8$.

3.4.2 Решить систему дифференциальных уравнений при заданных начальных условиях, методами операционного исчисления.

- 3.4.2.1
$$\begin{cases} x' = 2x + y + e^t, \\ y' = 5x - 2y + 2e^t; \end{cases} \quad x(0) = 1, y(0) = -4.$$
- 3.4.2.2
$$\begin{cases} x' = 3x + 7y + e^{2t}, \\ y' = x - 3y + 2e^{2t}; \end{cases} \quad x(0) = -2, y(0) = 3.$$
- 3.4.2.3
$$\begin{cases} x' = 4x - 3y + 2e^{3t}, \\ y' = -x + 2y - 5e^{3t}; \end{cases} \quad x(0) = 3, y(0) = 5.$$
- 3.4.2.4
$$\begin{cases} x' = x - y + 8e^{4t}, \\ y' = x + 3y - e^{4t}; \end{cases} \quad x(0) = 2, y(0) = 1.$$
- 3.4.2.5
$$\begin{cases} x' = -4x + 3y + 8e^{6t}, \\ y' = 3x + 4y + 2e^{6t}; \end{cases} \quad x(0) = 3, y(0) = -1.$$
- 3.4.2.6
$$\begin{cases} x' = x + 4y - 6e^{5t}, \\ y' = 2x - y + 4e^{5t}; \end{cases} \quad x(0) = -1, y(0) = -2.$$
- 3.4.2.7
$$\begin{cases} x' = 2x - 4y + 2e^{7t}, \\ y' = -x + 5y - 5e^{7t}; \end{cases} \quad x(0) = 4, y(0) = -1.$$
- 3.4.2.8
$$\begin{cases} x' = 3x + 2y + 8e^{8t}, \\ y' = x + 2y - e^{8t}; \end{cases} \quad x(0) = 3, y(0) = 8.$$
- 3.4.2.9
$$\begin{cases} x' = -5x - 3y + e^{9t}, \\ y' = 3x + 5y + 2e^{9t}; \end{cases} \quad x(0) = 4, y(0) = -2.$$
- 3.4.2.10
$$\begin{cases} x' = 6x - 11y + e^{10t}, \\ y' = x - 6y + 2e^{10t}; \end{cases} \quad x(0) = -4, y(0) = -5.$$
- 3.4.2.11
$$\begin{cases} x' = 4x - 3y + 3e^{-t}, \\ y' = x + 4e^{-t}; \end{cases} \quad x(0) = 2, y(0) = -9.$$
- 3.4.2.12
$$\begin{cases} x' = -2y + 8e^{-2t}, \\ y' = x + 3y - e^{-2t}; \end{cases} \quad x(0) = 6, y(0) = -1.$$

$$\begin{aligned} 3.4.2.13 \quad & \begin{cases} x' = -7x + 4y + 8e^{-3t}, \\ y' = 8x + 7y + 2e^{-3t}; \end{cases} \\ & x(0) = 2, y(0) = -5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.4.2.14 \quad & \begin{cases} x' = 8x + 5y - 6e^{-4t}, \\ y' = -3x - 8y + 4e^{-4t}; \end{cases} \\ & x(0) = -3, y(0) = -4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.4.2.15 \quad & \begin{cases} x' = 3x - 2y + 2e^{-5t}, \\ y' = -2x + 6y - 2e^{-5t}; \end{cases} \\ & x(0) = 6, y(0) = -3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.4.2.16 \quad & \begin{cases} x' = 2x - 2y + 6e^{-6t}, \\ y' = 2x + 7y - 3e^{-6t}; \end{cases} \\ & x(0) = -2, y(0) = -3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.4.2.17 \quad & \begin{cases} x' = -9x + 19y + 2e^{-7t}, \\ y' = x + 9y + e^{-7t}; \end{cases} \\ & x(0) = 2, y(0) = -3. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.4.2.18 \quad & \begin{cases} x' = 10x - 16y + e^{-8t}, \\ y' = 4x - 10y + 2e^{-8t}; \end{cases} \\ & x(0) = -5, y(0) = 5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.4.2.19 \quad & \begin{cases} x' = 3x - 5y + 7e^{-9t}, \\ y' = -x + 7y - e^{-9t}; \end{cases} \\ & x(0) = 1, y(0) = -5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.4.2.20 \quad & \begin{cases} x' = 4x - 2y + 8e^{-10t}, \\ y' = -6x + 5y - 3e^{-10t}; \end{cases} \\ & x(0) = 5, y(0) = 10. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.4.2.21 \quad & \begin{cases} x' = -11x + 7y + 8e^{12t}, \\ y' = 3x + 11y + 2e^{12t}; \end{cases} \\ & x(0) = -3, y(0) = -1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.4.2.22 \quad & \begin{cases} x' = 12x + 4y - 6e^{11t}, \\ y' = 11x - 12y + 4e^{11t}; \end{cases} \\ & x(0) = 1, y(0) = 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.4.2.23 \quad & \begin{cases} x' = 6x - 3y + 2e^{-11t}, \\ y' = -x + 4y - 5e^{-11t}; \end{cases} \\ & x(0) = 8, y(0) = -5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.4.2.24 \quad & \begin{cases} x' = 5x - 3y + 6e^{-12t}, \\ y' = -5x + 7y - e^{-12t}; \end{cases} \\ & x(0) = 1, y(0) = -7. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.4.2.25 \quad & \begin{cases} x' = -13x - 3y + e^{13t}, \\ y' = 23x + 13y + 2e^{13t}; \end{cases} \\ & x(0) = -2, y(0) = -2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.4.2.26 \quad & \begin{cases} x' = 14x + 29y + e^{14t}, \\ y' = x - 14y + 2e^{14t}; \end{cases} \\ & x(0) = -3, y(0) = -4. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.4.2.27 \quad & \begin{cases} x' = 7x - 3y + 2e^{-13t}, \\ y' = 4x + 3e^{-13t}; \end{cases} \\ & x(0) = 1, y(0) = -5. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.4.2.28 \quad & \begin{cases} x' = -2y + 8e^{-14t}, \\ y' = -3x + 5y - e^{-14t}; \end{cases} \\ & x(0) = 2, y(0) = -2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.4.2.29 \quad & \begin{cases} x' = -16x - 12y + e^{-15t}, \\ y' = -12x + 16y + e^{-15t}; \end{cases} \\ & x(0) = -1, y(0) = 1. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3.4.2.30 \quad & \begin{cases} x' = 17x - 11y + e^{15t}, \\ y' = 3x - 17y + e^{15t}; \end{cases} \\ & x(0) = -1, y(0) = -2. \end{aligned}$$

4 ИНТЕГРАЛ И ФОРМУЛА ДЮАМЕЛЯ

Содержание: формула и интеграл Дюамеля, применение интеграла к решению дифференциальных уравнений.

4.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Рассмотрим применение интеграла Дюамеля к решению дифференциальных уравнений.

Пусть функция $f(t)$ непрерывна на интервале $[0; +\infty)$, а функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на этом интервале.

Теорема 4.1.1 Пусть функция $f(t)$ непрерывна, а функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на интервале $[0; +\infty)$. Если функция $f(t)$, $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ является оригиналами, причём $f(t) = F(p)$, $\varphi(t) = \Phi(p)$, то выполняется преобразование

$$p \cdot F(p) \cdot \Phi(p) = f(t) \cdot \varphi(0) + \int_0^t f(\tau) \varphi'(t - \tau) d\tau, \quad (4.1.1)$$

Соотношение (4.1.1) называют *формулой Дюамеля*, а правую часть этого соотношения – *интегралом Дюамеля*.

Рассмотрим применение интеграла Дюамеля к решению линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$L(x) = a_0 x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + a_2 x^{(n-2)}(t) + \dots + a_n x(t) = f(t) \quad (4.1.2)$$

при нулевых начальных условиях: $x(0) = x'(0) = x''(0) = \dots = x^{(n-1)}(0) = 0$.

Предположим, что известно решение уравнения

$$L(x) = 1. \quad (4.1.3)$$

Дифференциальные уравнения (4.1.2) и (4.1.3) представим в операторном виде.

Для уравнения (4.1.2) получаем операторное уравнение вида

$$A(p) \cdot X(p) = F(p), \quad (4.1.4)$$

а для уравнения (4.1.3) операторное уравнение имеет вид

$$A(p) \cdot X_1(p) = \frac{1}{p}. \quad (4.1.5)$$

Из уравнения (4.1.4) находим изображение $X(p) = \frac{F(p)}{A(p)}$, а из формулы

(4.1.5) находим изображение $A(p) = \frac{1}{pX_1(p)}$. Подставляя изображение $A(p)$ в

первое равенство, получаем выражение для функции-изображения решения исходного уравнения: $X(p) = p \cdot X_1(p) \cdot F(p)$. Применяем к последнему равенству формулу Дюамеля (4.1.1).

$$X(p) = p \cdot X_1(p) \cdot F(p) = f(t) \cdot x_1(0) + \int_0^t f(\tau) x_1'(t-\tau) d\tau. \quad (4.1.6)$$

Так как $x_1(0) = x(0) = 0$, то решение исходного уравнения имеет вид

$$X(p) = \int_0^t f(\tau) x_1'(t-\tau) d\tau = x(t). \quad (4.1.7)$$

4.2 Примеры решения типовых задач

4.2.1 Найти решение задачи Коши для дифференциального уравнения

$x'' - x' = \frac{e^t}{1+e^t}$, которое удовлетворяет начальным условиям $x(0) = x'(0) = 0$.

Решение. Пусть $x(t) = X(p)$. Найдём изображение производных оригинала: $x''(t) = p^2 X(p) - px(0) - x'(0) = p^2 X(p)$, $x'(t) = pX(p) - x(0) = pX(p)$.

Рассмотрим уравнение $x_1'' - x_1' = 1$ и перейдём в нем к операторному уравнению:

$p^2 X_1(p) - pX_1(p) = \frac{1}{p}$ или $X_1(p) = \frac{1}{p^2(p-1)}$. Найдём оригинал $x_1(t)$, используя

свойство интегрирования оригинала.

$$\frac{1}{p(p-1)} = \int_0^t e^\tau d\tau = e^\tau \Big|_0^t = e^t - 1.$$

$$X_1(p) = \frac{1}{p^2(p-1)} = x_1(t) = \int_0^t (e^\tau - 1) d\tau = (e^\tau - \tau) \Big|_0^t = e^t - t - 1; \quad x_1'(t) = e^t - 1.$$

Определим оригинал $x(t)$, который является решением уравнения.

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \int_0^t f(\tau) x_1'(t-\tau) d\tau = \int_0^t \frac{e^\tau (e^{t-\tau} - 1)}{1+e^\tau} d\tau = e^t \int_0^t \frac{d\tau}{1+e^\tau} - \int_0^t \frac{e^\tau d\tau}{1+e^\tau} = \left[\begin{array}{l} e^\tau = z, \tau = \ln z, d\tau = \frac{dz}{z} \\ \tau = 0 \Rightarrow z = 1, \tau = t \Rightarrow z = e^t \end{array} \right] = \\
 &= e^t \int_1^{e^t} \frac{dz}{z(1+z)} - \int_0^t \frac{d(1+e^\tau)}{1+e^\tau} = e^t \int_1^{e^t} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{1+z} \right) dz - \ln(1+e^\tau) \Big|_0^t = e^t \ln \left| \frac{z}{1+z} \right|_1^{e^t} - \ln(1+e^t) + \ln 2 = \\
 &= e^t \ln \frac{e^t}{1+e^t} + e^t \ln 2 - \ln(1+e^t) + \ln 2.
 \end{aligned}$$

4.2.2 Найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + y = \text{sh } t$ при нулевых начальных условиях с помощью формулы Дюамеля.

Решение. Для нахождения решения дифференциального уравнения с нулевыми начальными условиями будем использовать формулы Дюамеля. Рассмотрим дифференциальное уравнение $y_1'' - 2y_1' + y = 1$, причём $y_1(0) = 0$, $y_1'(0) = 0$. Пусть $y(t) = Y(p)$, а $y_1(t) = Y_1(p)$, причём $f(t) = \text{sh } t$. Тогда, на основании свойства дифференцирования оригинала получаем изображения производных функций: $y_1'(t) = pY_1(p)$, $y_1''(t) = p^2Y_1(p)$. По таблице оригиналов и изображений $1 = \frac{1}{p}$, переходим от дифференциального уравнения к операторному уравнению

$$p^2Y_1(p) - 2pY_1(p) + Y_1(p) = \frac{1}{p};$$

$$(p^2 - 2p + 1)Y_1(p) = \frac{1}{p} \text{ или } (p-1)^2 \cdot Y_1(p) = \frac{1}{p}.$$

Из последнего уравнения выражаем $Y_1(p) = \frac{1}{p \cdot (p-1)^2}$. Для определения оригинала будем использовать свойство интегрирования оригинала: интегрированию оригинала в пределах от 0 до t соответствует деление изображения на p . В начале определим оригинал изображения $\frac{1}{(p-1)^2}$, используя свойство

$$\text{дифференцирования изображения: } \frac{1}{(p-1)^2} = \left(-\frac{1}{p-1} \right)' = t \cdot e^t.$$

Тогда $Y_1(p) = y_1(t) = \int_0^t \tau \cdot e^\tau d\tau$. Воспользуемся формулой интегрирования

по частям $\int_a^b u dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v du$.

$$y_1(t) = \int_0^t \tau \cdot e^\tau d\tau = \left[\begin{array}{ll} u = \tau & du = d\tau \\ dv = e^\tau d\tau & v = e^\tau \end{array} \right] = \tau \cdot e^\tau \Big|_0^t - \int_0^t e^\tau d\tau = t \cdot e^t - e^\tau \Big|_0^t = t \cdot e^t - e^t + 1.$$

Определим оригинал $y(t)$ по формуле $y(t) = \int_0^t y_1'(\tau) \cdot f(t - \tau) d\tau$. Найдём производную $y_1'(t) = (t \cdot e^t - e^t + 1)' = e^t + t \cdot e^t - e^t = t \cdot e^t$.

Таким образом,

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t \tau \cdot e^\tau \cdot \text{sh}(t - \tau) d\tau = \int_0^t \tau \cdot e^\tau \cdot \frac{e^{t-\tau} - e^{\tau-t}}{2} d\tau = \frac{e^t}{2} \int_0^t \tau d\tau - \frac{e^{-t}}{2} \int_0^t \tau \cdot e^{2\tau} d\tau = \\ &= \left[\begin{array}{ll} u = \tau & du = d\tau \\ dv = e^{2\tau} d\tau & v = \frac{1}{2} e^{2\tau} \end{array} \right] = \frac{e^t}{4} \cdot \tau^2 \Big|_0^t - \frac{e^{-t}}{4} \cdot \tau \cdot e^{2\tau} \Big|_0^t + \frac{e^{-t}}{4} \int_0^t e^{2\tau} d\tau = \frac{e^t}{4} \cdot t^2 - \frac{e^t}{4} \cdot t + \\ &+ \frac{e^{-t}}{8} e^{2\tau} \Big|_0^t = \frac{1}{4} t^2 e^t - \frac{1}{4} t e^t + \frac{1}{8} e^t - \frac{1}{8} e^{-t} = \frac{1}{4} t^2 e^t - \frac{1}{4} t e^t + \frac{1}{4} \text{sh } t. \end{aligned}$$

Решением исходного дифференциального уравнения является функция

$$y(t) = \frac{1}{4} t^2 e^t - \frac{1}{4} t e^t + \frac{1}{4} \text{sh } t.$$

4.3 Задания для решения на практическом занятии

4.3.1 С помощью формулы Дюамеля найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + 2y = e^t$ при нулевых начальных условиях.

4.3.2 С помощью формулы Дюамеля найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' + y = \text{sh } t$ при нулевых начальных условиях.

4.3.3 С помощью формулы Дюамеля найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + 4y' + 4y = \frac{e^{-2t}}{(1+2t)^2}$ при нулевых начальных условиях.

4.3.4 С помощью формулы Дюамеля найти частное решение дифференциального уравнения $y'' + y = e^{-t}$ при нулевых начальных условиях.

4.3.5 С помощью формулы Дюамеля найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 3y' + 2y = e^{2t}$ при нулевых начальных условиях.

4.3.6 С помощью формулы Дюамеля найти частное решение дифференциального уравнения $x' + 2x = \sin 3t$ при нулевых начальных условиях.

4.3.7 С помощью формулы Дюамеля найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - y' = \frac{1}{(1+e^{-t})^2}$ при нулевых начальных условиях.

4.3.8 С помощью формулы Дюамеля найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 36y = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 6t}$ при нулевых начальных условиях.

4.3.9 С помощью формулы Дюамеля найти частное решение дифференциального уравнения $y'' - 2y' = \frac{5}{1+e^{-2t}}$ при нулевых начальных условиях.

4.3.10 С помощью формулы Дюамеля найти частное решение дифференциального уравнения $x'' - 4x' + 4x = \operatorname{ch} 2t$ при нулевых начальных условиях.

4.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

4.4.1 С помощью формулы Дюамеля найти частное решение дифференциального уравнения при начальных нулевых условиях.

4.4.1.1 $x'' - x = \frac{4}{e^{2t} + e^{-2t} + 2}.$

4.4.1.2 $x'' + 2x' + x = \frac{t}{te^t + e^t}.$

4.4.1.3 $x'' - x' = \frac{e^{-t}}{1 + e^{-t}}.$

4.4.1.4 $x'' - x' = \frac{1}{e^{-t} + 1}.$

10.4.1.5 $x'' + 4x' + 4x = \frac{1}{(e^t + 2te^t)^2}.$

4.4.1.6 $x'' + 2x' = \frac{4}{e^{2t} + e^{-2t} + 2}.$

4.4.1.7 $x'' - x = \frac{2e^t}{1 + e^{2t}}.$

4.4.1.8 $x'' + 2x' + x = \frac{1}{e^t + t^2 e^t}.$

4.4.1.9 $x'' - 2x' + x = \frac{4e^t}{e^{2t} + e^{-2t} + 2}.$

4.4.1.10 $x'' + x' = \frac{e^{-t}}{e^{-t} + 1}.$

4.4.1.11 $x'' + x' = \frac{1}{2 + \frac{1}{2} \operatorname{cht}}.$

4.4.1.12 $x'' - 2x' + x = \frac{1}{e^{-t}(1+t)}.$

$$4.4.1.13 \quad x'' - 4x' + 4x = \frac{8e^{2t}}{e^{4t} + e^{-4t} + 2}.$$

$$4.4.1.14 \quad x'' - 4x = \frac{1}{1 + \operatorname{ch} 2t}.$$

$$4.4.1.15 \quad x'' - 9x = \frac{\operatorname{sh} 3t}{\operatorname{ch}^2 3t}.$$

$$4.4.1.16 \quad x'' + 6x' + 9x = \frac{e^{-3t}}{(t+3)^2}.$$

$$4.4.1.17 \quad x'' - 4x = \frac{1}{\operatorname{ch}^3 2t}.$$

$$4.4.1.18 \quad x'' - 9x = \operatorname{th} 3t.$$

$$4.4.1.19 \quad x'' - 10x' + 25x = e^{5t} / (1 + t^2).$$

$$4.4.1.20 \quad x'' - 4x = 2e^{2t} / (e^{4t} + 1).$$

$$4.4.1.21 \quad x'' - 9x = \operatorname{th}^2 3t.$$

$$4.4.1.22 \quad x'' - x' = \frac{e^t}{2e^{-t} + 1}.$$

$$4.4.1.23 \quad x'' + x' = \frac{e^{-2t}}{(1 + e^{-t})^2}.$$

$$4.4.1.24 \quad x'' + 4x' + 4x = \frac{e^{-2t}}{\operatorname{ch}^2 2t}.$$

$$4.4.1.25 \quad x'' - 16x = \operatorname{th}^2 4t.$$

$$4.4.1.26 \quad x'' + x' = \frac{e^{2t}}{2 + e^t}.$$

$$4.4.1.27 \quad x'' - x' = \frac{1}{(1 + e^{-t})^2}.$$

$$4.4.1.28 \quad x'' + x' = \frac{1}{1 + e^{-t}}.$$

$$4.4.1.29 \quad x'' - 25x = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 5t}.$$

$$4.4.1.30 \quad x'' - 2x' = \frac{2}{1 + e^{-2t}}.$$

5 КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Содержание: криволинейные интегралы первого рода и их приложения, криволинейные интегралы второго рода и их приложения.

5.1 Теоретический материал по теме практического занятия

5.1.1 Криволинейные интегралы первого рода

Определение 5.1.1.1 *Криволинейным интегралом первого рода (КИ-1) от функции $f(x; y; z)$ по дуге γ называется предел интегральных сумм данной функции при стремлении мелкости разбиения к нулю и если этот предел существует и конечен.*

$$\int_{\gamma} f(x; y; z) dl \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\lambda_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i; y_i; z_i) \cdot \Delta l_i. \quad (5.1.1.1)$$

Рассмотрим методы вычисления КИ-1.

1) $\gamma: x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [t_1; t_2]$.

$$\int_{\gamma} f(x; y; z) dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t); y(t); z(t)) \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt. \quad (5.1.1.2)$$

$$2) \quad \gamma: x = x(t), y = y(t), t \in [t_1; t_2].$$

$$\int_{\gamma} f(x; y) dl = \int_{t_1}^{t_2} f(x(t); y(t)) \sqrt{x'^2 + y'^2} dt. \quad (5.1.1.3)$$

$$3) \quad \gamma: y = f(x), x \in [a; b].$$

$$\int_{\gamma} f(x; y) dl = \int_a^b f(x; y(x)) \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (5.1.1.4)$$

$$4) \quad \gamma: r = r(\varphi), \varphi \in [\alpha; \beta]$$

$$\int_{\gamma} f(x; y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(r \cos \varphi; r \sin \varphi) \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi. \quad (5.1.1.5)$$

Рассмотрим приложения КИ-1.

Длину дуги кривой: $l = \int_{\gamma} dl$.

Масса материальной дуги плотностью $\mu(x; y; z)$: $m = \int_{\gamma} \mu(x; y; z) dl$.

Координаты центра масс плоской дуги: $x_c = \int_{\gamma} x \mu(x; y; z) dl$,

$$y_c = \int_{\gamma} y \mu(x; y; z) dl, \quad z_c = \int_{\gamma} z \mu(x; y; z) dl :$$

Моменты инерции дуги относительно начала координат, координатных осей и плоскостей: $I_0 = \int_{\gamma} (x^2 + y^2 + z^2) \mu dl$, $I_x = \int_{\gamma} (y^2 + z^2) \mu dl$, $I_y = \int_{\gamma} (x^2 + z^2) \mu dl$, $I_z = \int_{\gamma} (x^2 + y^2) \mu dl$, $I_{xy} = \int_{\gamma} z^2 \mu dl$, $I_{xz} = \int_{\gamma} y^2 \mu dl$, $I_{yz} = \int_{\gamma} x^2 \mu dl$.

5.1.2 Криволинейные интегралы второго рода

Пусть в пространстве задана некоторая кривая γ , которая определяется параметрическими уравнениями: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$. Предпо-

ложим, что кривая γ является ориентируемой, и в каждой её точке определена вектор-функция $\vec{a} = P(x; y; z)\vec{i} + Q(x; y; z)\vec{j} + R(x; y; z)\vec{k}$.

Определение 5.1.2.1 Криволинейным интегралом второго рода (КИ-2) от вектор-функции $\vec{a}(x; y; z)$ вдоль ориентируемой кривой γ называется криволинейный интеграл первого рода от скалярной функции $\vec{a} \cdot \vec{\tau} = a_\tau(x; y; z)$ дуге γ .

$$\int_{\gamma} \vec{a} \cdot \vec{\tau} dl \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\gamma} a_\tau dl. \quad (5.1.2.1)$$

В координатной форме КИ-2 имеет вид

$$\int_{\gamma} \vec{a} \cdot \vec{\tau} dl = \int_{\gamma} P(x; y; z)dx + Q(x; y; z)dy + R(x; y; z)dz. \quad (5.1.2.2)$$

Непосредственно из определения КИ-2 следует, что он зависит от направления интегрирования вдоль кривой, то есть меняет знак при изменении ориентации кривой: $\int_{\gamma^+} a_\tau dl = - \int_{\gamma^-} a_\tau dl$.

Вычисление КИ-2 сводится к вычислению определённого интеграла.

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} P(x; y; z)dx + Q(x; y; z)dy + R(x; y; z)dz = \\ = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t); y(t); z(t))x'(t) + Q(x(t); y(t); z(t))y'(t) + R(x(t); y(t); z(t))z'(t))dt. \end{aligned} \quad (5.1.2.3)$$

В случае плоского поля формула (5.1.2.3) упрощается.

$$\int_{\gamma} P(x; y)dx + Q(x; y)dy = \int_{\alpha}^{\beta} (P(x(t); y(t))x'(t) + Q(x(t); y(t))y'(t))dt. \quad (5.1.2.4)$$

Рассмотрим плоское векторное поле $\vec{a}(P(x; y); Q(x; y))$. Пусть на плоскости Oxy задана некоторая кривая $\gamma: y = f(x), x \in [a; b]$. Тогда криволинейный интеграл второго рода вдоль кривой γ вычисляется путём перехода к определённому интегралу по формуле

$$\int_{\gamma} P(x; y)dx + Q(x; y)dy = \int_a^b (P(x; f(x)) + Q(x; f(x)) \cdot f'(x)) dx. \quad (5.1.2.5)$$

Криволинейный интеграл второго рода (5.1.2.2) в случае, когда $\vec{a} = \vec{F}$ — сила, под действием которой перемещается тело, определяет работу силы $\vec{F}$ на

пути γ . В этом заключается физический смысл криволинейного интеграла второго рода.

$$A = \int_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{\tau} dl = \int_{\gamma} P(x; y; z) dx + Q(x; y; z) dy + R(x; y; z) dz. \quad (5.1.2.6)$$

5.2 Примеры решения типовых задач

5.2.1 Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int_{\gamma} x dl$, где кривая γ задана уравнением $y = x^2$ на отрезке $[0; 1]$.

Решение. Для вычисления применим формулу (5.1.1.4).

$$\int_{\gamma} x dl = \int_0^1 x \sqrt{1 + 4x^2} dx = \frac{1}{8} \int_0^1 x (1 + 4x^2)^{\frac{1}{2}} d(1 + 4x^2) = \frac{1}{12} (1 + 4x^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^1 = \frac{1}{12} (5\sqrt{5} - 1).$$

5.2.2 Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int_{\gamma} (2x + y) dl$, где γ – контур треугольника ABO с вершинами в точках $A(1; 0)$, $B(0; 2)$, $O(0; 0)$.

Решение. Для вычисления криволинейного интеграла первого рода воспользуемся свойством аддитивности области интегрирования и формулой (5.1.1.4):

$$\int_{OAB} (2x + y) dl = \int_{AB} (2x + y) dl + \int_{BO} (2x + y) dl + \int_{OA} (2x + y) dl.$$

На отрезке AB : $y = -2x + 2$, $y' = -2$, $dl = \sqrt{1 + y'^2} dx = \sqrt{5} dx$.

На отрезке BO : $x = 0$, $x' = 0$, $dl = \sqrt{1 + x'^2} dy = dy$.

На отрезке OA : $y = 0$, $y' = 0$, $dl = \sqrt{1 + y'^2} dx = dx$.

Учитывая, что криволинейный интеграл первого рода не зависит от пути интегрирования и, используя формулу перехода к определённом интегралу, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} (2x + y) dl &= \int_0^1 (2x - 2x + 2) \sqrt{5} dx + \int_0^2 (2 \cdot 0 + y) dy + \int_0^1 (2x + 0) dx = \\ &= \int_0^1 2\sqrt{5} dx + \int_0^2 y dy + \int_0^1 2x dx = 2\sqrt{5} x \Big|_0^1 + \frac{y^2}{2} \Big|_0^2 + x^2 \Big|_0^1 = 2\sqrt{5} + 2 + 1 = 2\sqrt{5} + 3. \end{aligned}$$

5.2.3 Вычислить криволинейный интеграл $\int_{\gamma} (x+y)dl$, где γ – лепесток

лемнискаты $\rho = 4\sqrt{\sin 2\varphi}$, расположенной в первой координатной четверти.

Решение. По условию $\sin 2\varphi \geq 0$ или $\pi n \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. С учётом

того, что лемниската расположена в первой четверти, получаем, что $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$.

Линия задана уравнением в полярной системе координат, поэтому необходимо воспользоваться формулой (5.1.1.5).

Так как $\rho' = 4 \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin 2\varphi}} \cdot \cos 2\varphi \cdot 2 = \frac{4\cos 2\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}}$, то дифференциал равен:

$$dl = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2} d\varphi = \sqrt{16\sin 2\varphi + \frac{16\cos^2 2\varphi}{\sin 2\varphi}} d\varphi = \frac{4d\varphi}{\sqrt{\sin 2\varphi}} = \frac{16d\varphi}{4\sqrt{\sin 2\varphi}} = \frac{16d\varphi}{\rho}.$$

Вычисляем заданный криволинейный интеграл первого рода:

$$\int_{\gamma} \frac{x+y}{4} dl = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho \cos \varphi + \rho \sin \varphi}{4} \cdot \frac{16d\varphi}{\rho} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos \varphi + \sin \varphi) d\varphi = 4(\sin \varphi - \cos \varphi) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 8.$$

5.2.4 Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int_{\gamma} ydl$, где γ –

первая арка циклоиды $x = 2(t - \sin t)$, $y = 2(1 - \cos t)$, $t \in [0; 2\pi]$.

Решение. Линия задана параметрическим образом, поэтому необходимо воспользоваться формулой (5.1.1.3).

Так как $x' = 2(1 - \cos t)$ и $y' = 2\sin t$, то дифференциал равен:

$$dl = \sqrt{x'^2 + y'^2} dt = \sqrt{4(1 - \cos t)^2 + 4\sin^2 t} dt = 2\sqrt{2 - 2\cos t} dt = 4\sin \frac{t}{2} dt.$$

Вычисляем заданный криволинейный интеграл первого рода:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} ydl &= \int_0^{2\pi} 2 \cdot (1 - \cos t) \cdot 4 \cdot \sin \frac{t}{2} dt = 8 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt - 8 \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} \cdot \cos t dt = -16 \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} - \\ &- 4 \int_0^{2\pi} \left(-\sin \frac{t}{2} + \sin \frac{3 \cdot t}{2} \right) dt = -16(-1 - 1) - 8 \cos \frac{t}{2} \Big|_0^{2\pi} + \frac{8}{3} \cos \frac{3 \cdot t}{2} \Big|_0^{2\pi} = 32 - 8(-1 - 1) + \\ &+ \frac{8}{3}(-1 - 1) = 32 + 16 - \frac{16}{3} = \frac{128}{3} = 42\frac{2}{3}. \end{aligned}$$

5.2.5 Вычислить криволинейный интеграл первого рода $\int_L xy dl$, где L – дуга винтовой линии $x = a \cos t$, $y = a \sin t$, $z = bt$, ограниченная точками, для которых $t = 0$, $t = \frac{5\pi}{2}$.

Решение. Линия задана параметрическим образом, поэтому необходимо воспользоваться формулой (5.1.1.2). Так как $x' = -a \sin t$, $y' = a \cos t$, $z' = b$, то $dl = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} dt$.

Вычисляем заданный криволинейный интеграл первого рода:

$$\begin{aligned} \int_L x \cdot y dl &= \int_0^{\frac{5\pi}{2}} a \cos t a \sin t \sqrt{a^2 + b^2} dt = \frac{1}{2} a^2 \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^{\frac{5\pi}{2}} \sin 2t dt = \\ &= -\frac{1}{4} a^2 \sqrt{a^2 + b^2} \cos 2t \Big|_0^{\frac{5\pi}{2}} = -\frac{1}{4} a^2 \sqrt{a^2 + b^2} \cdot (-1 - 1) = \frac{1}{2} a^2 \cdot \sqrt{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

5.2.6 Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int_{\gamma} 4x^3 dx + 3x^2 y dy$, где γ – дуга кривой $y = x^2$ от точки $A(1;1)$ до точки $B(3;9)$.

Решение. Для вычисления криволинейного интеграла второго рода воспользуемся формулой (5.1.2.5):

$$\begin{aligned} \int_{\gamma} 4x^3 dx + 3x^2 y dy &= \int_1^3 \left(4x^3 + 3x^2 \cdot x^2 \cdot (x^2)' \right) dx = \int_1^3 (4x^3 + 3x^4 \cdot 2x) dx = \\ &= \int_1^3 (4x^3 + 6x^5) dx = \left(x^4 + x^6 \right) \Big|_1^3 = 81 + 729 - 1 - 1 = 808. \end{aligned}$$

5.2.7 Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int_{\gamma} \frac{(y^3 - x^2) dx + (x^3 + y^2) dy}{x^2 + y^2}$, где γ – дуга окружности $x = R \cos t$, $y = R \sin t$, расположенная в первой четверти, в направлении возрастания параметра t .

Решение. Для вычисления криволинейного интеграла второго рода воспользуемся формулой (5.1.2.4):

$$\int_{\gamma} \frac{(y^3 - x^2) dx + (x^3 + y^2) dy}{x^2 + y^2} =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(R^3 \sin^3 t - R^2 \cos^2 t) \cdot (-R \sin t) + (R^3 \cos^3 t + R^2 \sin^2 t) \cdot R \cos t}{R^2 \cos^2 t + R^2 \sin^2 t} dt = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^4 \cos^4 t - R^4 \sin^4 t + R^3 \cos^2 t \sin t + R^3 \sin^2 t \cos t}{R^2} dt = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^2 (\cos^4 t - \sin^4 t) dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} R \cos^2 t \sin t dt + \int_0^{\frac{\pi}{2}} R \sin^2 t \cos t dt = \\
&= R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t - \sin^2 t) \cdot (\cos^2 t + \sin^2 t) dt - R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t d \cos t + R \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t d \sin t = \\
&= R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2t \cdot 1 dt - \frac{R}{3} \cos^3 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{R}{3} \sin^3 t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \\
&= \frac{R^2}{2} \sin 2t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{R}{3} (0 - 1) + \frac{R}{3} (1 - 0) = \frac{R^2}{2} (0 - 0) + \frac{R}{3} + \frac{R}{3} = \frac{2R}{3}.
\end{aligned}$$

5.2.8 Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int_{\gamma} (y^2 + z^2) dx - yz dy + x dz$, где γ — дуга винтовой линии $x = b \cdot t$, $y = a \cos t$, $z = a \sin t$ $\left(0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}\right)$.

Решение. Для вычисления криволинейного интеграла второго рода воспользуемся формулой (5.1.2.3).

$$\begin{aligned}
&\int_L (y^2 + z^2) dx - y \cdot z dy + x dz = \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[(a^2 \cos^2 t + a^2 \sin^2 t) \cdot b - a \cdot \cos t \cdot a \cdot \sin t \cdot (-a \cdot \sin t) + b \cdot t \cdot a \cdot \cos t \right] dt = \\
&= a^2 b \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt + a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \cos t dt + ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \cos t dt =
\end{aligned}$$

$$= \begin{bmatrix} u = t & du = dt \\ dv = \cos t \, dt & v = \sin t \end{bmatrix} = a^2 b t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t \, d \sin t + ab t \sin t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin t \, dt =$$

$$= \frac{a^2 b \pi}{2} + \frac{a^3 \sin^3 t}{3} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{a b \pi}{2} + ab \cos t \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2 b \pi}{2} + \frac{a^3}{3} + \frac{a b \pi}{2} - ab.$$

5.3 Задания для решения на практическом занятии

5.3.1 Вычислить криволинейный интеграл $\int_{\gamma} x^3 dl$, где γ – дуга кубической параболы $y = x^3$ между точками $A(1;1)$ и $B(2;8)$.

5.3.2 Вычислить криволинейный интеграл $\int_{\gamma} \operatorname{ch} x \, dl$, где γ – дуга кривой $y = \operatorname{sh} x$ между точками, для которых $x = 0$ и $x = 1$.

5.3.3 Вычислить криволинейный интеграл $\int_{\gamma} (x^5 + 8xy) \, dl$, где γ – дуга кривой $4y = x^4$ между точками, для которых $x = 0$ и $x = 1$.

5.3.4 Вычислить криволинейный интеграл $\int_{\gamma} y \sqrt{1 + y^2} \, dl$, где γ – дуга кривой $x = \ln y$ между точками, для которых $y = 1$ и $y = 4$.

5.3.5 Вычислить криволинейный интеграл $\oint_{\gamma} (2x + 2y) \, dl$, где γ – контур прямоугольника с вершинами в точках $A(1;1)$, $B(5;1)$, $C(5;6)$, $D(1;6)$.

5.3.6 Вычислить криволинейный интеграл $\oint_{\gamma} xy \, dl$, где γ – контур треугольника с вершинами в точках $A(2;-6)$, $B(2;5)$, $C(-4;-1)$.

5.3.7 Вычислить криволинейный интеграл $\int_{\gamma} \sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} \, dl$, где γ – дуга лемнискаты $r = 2\sqrt{\cos 2\varphi} \quad \left(0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}\right)$.

5.3.8 Вычислить криволинейный интеграл $\int_{\gamma} (x^2 + y^2) \, dl$, где γ – дуга кривой $x = 2(\cos t + t \sin t)$, $y = 2(\sin t - t \cos t)$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

5.3.9 Вычислить криволинейный интеграл $\int_{\gamma} \sqrt{1 + x} \, dl$, где γ – дуга кривой $x = \sin^2 t$, $y = \sin t \cos t$, $z = \cos t$, $0 \leq t \leq \pi/2$.

5.3.10 Вычислить криволинейный интеграл $\int_{\gamma} \sqrt{1+4y+9xz} dl$, где γ – дуга

кривой $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$, $0 \leq t \leq 1$.

5.3.11 Найти длину винтовой линии $x=4\cos t$, $y=4\sin t$, $z=3t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) с плотностью $\mu = xyz$.

5.3.12 Найти массу дуги кривой $y = \ln x$ с плотностью $\mu = x^2$, если концы дуги определяются следующими значениями x : $x_1 = \sqrt{8}$, $x_2 = 4\sqrt{5}$.

5.3.13 Найти массу дуги кривой $x=e^t \cos t$, $y=e^t \sin t$, $z=e^t$ с плотностью $\mu=1$, если $0 \leq t \leq 1$.

5.3.14 Найти центр тяжести дуги винтовой линии $x=4\cos t$, $y=4\sin t$, $z=3t$ ($0 \leq t \leq \pi/2$), если её линейная плотность в каждой точке пропорциональна произведению первых двух координат.

5.3.15 Вычислить криволинейный интеграл $\int_{\gamma} x^2 dx + xy^2 dy$, где γ – отрезок прямой от точки $A(0;1)$ до точки $B(1;2)$.

5.3.16 Вычислить криволинейный интеграл $\int_{\gamma} (x^3 + y) dx + (x + y^3) dy$, где γ – ломанная $ABCA$, причём $A(1;1)$, $B(1;2)$, $C(3;5)$.

5.3.17 Вычислить криволинейный интеграл $\int_{\gamma} x^2 dx + \frac{dy}{y^2}$, где γ – дуга кривой $y = \frac{1}{x}$ от точки $A(1;1)$ до точки $B(4;1/4)$.

5.3.18 Вычислить криволинейный интеграл $\int_{\gamma} y dx + x dy$, где γ – дуга астроида $x=2\cos^3 t$, $y=2\sin^3 t$ от точки $A(t_1)$ до точки $B(t_2)$, для которых $t_1=0$, $t_2=\pi/4$.

5.3.19 Вычислить криволинейный интеграл $\int_{\gamma} y^2 dx + (x^2 + z) dy + (y + z^2) dz$, где γ – отрезок прямой от точки $A(1;0;2)$ до точки $B(3;1;4)$.

5.3.20 Вычислить криволинейный интеграл $\int_{\gamma} yz dx + xz dy + xy dz$, где γ – дуга кривой $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ ($0 \leq t \leq 1$).

5.3.21 Вычислить криволинейный интеграл $\int_{\gamma} y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, где γ – линия пересечения сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ и цилиндра $x^2 + y^2 = 2x$ ($z \geq 0$). Обход при интегрировании осуществить против часовой стрелки, если смотреть из начала координат.

5.3.22 Найти работу, производимую силой $\vec{F} = 4x^6 \vec{i} + xy \vec{j}$ вдоль дуги кривой $y = x^3$ от точки $O(1;1)$ до точки $B(2;8)$.

5.3.23 Найти работу, производимую силой $\vec{F} = (y^2 - z^2)\vec{i} + x\vec{j} + yz\vec{k}$ вдоль дуги гиперболической винтовой линии $x = 5t$, $y = 8\text{cht}$, $z = 8\text{sht}$ ($0 \leq t \leq 1$).

5.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

5.4.1 Вычислить криволинейный интеграл первого рода.

5.4.1.1 $\int_{\gamma} \sqrt{x^2} dl$, где γ – дуга линии $y = \ln x$, $\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3}$.

5.4.1.2 $\int_{\gamma} (x + y) dl$, где γ – дуга линии $x = 2\cos^3 t$, $y = 2\sin^3 t$, $\frac{3\pi}{2} \leq t \leq \frac{7\pi}{4}$.

5.4.1.3 $\int_{\gamma} (x^2 + y^2) dl$, где γ – дуга линии $r = 1 - \cos \varphi$, $-\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq 0$.

5.4.1.4 $\int_{\gamma} (x^2 + y^2 - z) dl$, где γ – дуга линии $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = t$, $0 \leq t \leq 1$.

5.4.1.5 $\int_{\gamma} \sqrt{y^2} dl$, где γ – дуга линии $y = e^{2x}$, $0 \leq x \leq 1$.

5.4.1.6 $\int_{\gamma} x^2 dl$, где γ – дуга линии $x = 6(t - \sin t)$, $y = 6(1 - \cos t)$, $\frac{\pi}{3} \leq t \leq \frac{\pi}{2}$.

5.4.1.7 $\int_{\gamma} (x^2 + y^2) dl$, где γ – дуга линии $r = 7e^{\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \ln 7$.

5.4.1.8 $\int_{\gamma} \frac{dl}{\sqrt{x^2 + z^2}}$, где γ – отрезок прямой, соединяющий точки $O(0;0;0)$ и $A(1;2;3)$.

5.4.1.9 $\int_{\gamma} \cos x dl$, где γ – дуга линии $y = \ln \sin x$, $\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$.

5.4.1.10 $\int_{\gamma} (2x + y) dl$, где γ – дуга линии $x = \sqrt{2} \cos^2 t$, $y = \sqrt{2} \sin^2 t$, $\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{3}$.

5.4.1.11 $\int_{\gamma} \arctg \frac{y}{x} dl$, где γ – дуга линии $r = 2e^{\frac{4\varphi}{3}}$, $0 \leq \varphi \leq 1$.

5.4.1.12 $\int_{\gamma} (xy + z) dl$, где γ – дуга линии $x = \cos 2t$, $y = \sin 2t$, $z = 8t$, $\frac{\pi}{6} \leq t \leq \frac{\pi}{4}$.

5.4.1.13 $\int_{\gamma} \frac{\ln x dl}{\sqrt{1+x^2}}$, где γ – дуга линии $y = \ln \frac{1}{x}$, $\frac{1}{e} \leq x \leq e$.

$$5.4.1.14 \quad \int_{\gamma} x dl, \text{ где } \gamma - \text{ дуга линии } x = t - \sin t, y = 1 - \cos t, \frac{4\pi}{3} \leq t \leq \frac{3\pi}{2}.$$

$$5.4.1.15 \quad \int_{\gamma} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dl, \text{ где } \gamma - \text{ дуга линии } r = \varphi, 0 \leq \varphi \leq \sqrt{3}.$$

$$5.4.1.16 \quad \oint_{\gamma} (y^2 + z^2) dl, \text{ где } \gamma - \text{ дуга окружности } y^2 + z^2 = 9.$$

$$5.4.1.17 \quad \int_{\gamma} y dl, \text{ где } \gamma - \text{ дуга линии } y = \operatorname{ch} x, 0 \leq x \leq 1.$$

$$5.4.1.18 \quad \int_{\gamma} xy dl, \text{ где } \gamma - \text{ дуга линии } x = \sin t, y = \cos t, 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}.$$

$$5.4.1.19 \quad \int_{\gamma} \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dl, \text{ где } \gamma - \text{ дуга линии } r = 1 + \sin \varphi, 2\pi \leq \varphi \leq 3\pi.$$

$$5.4.1.20 \quad \oint_{\gamma} (x^2 + y^2) dl, \text{ где } \gamma - \text{ дуга окружности } x^2 + y^2 = \frac{1}{16}.$$

$$5.4.1.21 \quad \int_{\gamma} \frac{y dl}{1 + \operatorname{ch}^2 x}, \text{ где } \gamma - \text{ дуга линии } y = \operatorname{sh} x, 0 \leq x \leq 1.$$

$$5.4.1.22 \quad \int_{\gamma} \sqrt{\frac{x^2}{y^2}} dl, \text{ где } \gamma - \text{ дуга линии } x = \cos t, y = \sin t, \frac{2\pi}{3} \leq t \leq \frac{5\pi}{6}.$$

$$5.4.1.23 \quad \int_{\gamma} \sqrt{x^2 y^2} dl, \text{ где } \gamma - \text{ дуга линии } r = \sin \varphi, \frac{3\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{6}.$$

$$5.4.1.24 \quad \int_{\gamma} \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \text{ где } \gamma - \text{ отрезок прямой, соединяющий точки } A(2; 1; 3) \text{ и } B(5; -1; 9).$$

$$5.4.1.25 \quad \int_{\gamma} y^2 dl, \text{ где } \gamma - \text{ дуга линии } y = e^x, 0 \leq x \leq \ln 2.$$

$$5.4.1.26 \quad \int_{\gamma} (x + y) dl, \text{ где } \gamma - \text{ дуга линии } x = 4 \cos^3 2t, y = 4 \sin^3 2t, \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{3\pi}{8}.$$

$$5.4.1.27 \quad \int_{\gamma} \operatorname{arctg} \frac{x}{y} dl, \text{ где } \gamma - \text{ дуга линии } r = 1 - \sin \varphi, \frac{3\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{5\pi}{3}.$$

$$5.4.1.28 \quad \oint_{\gamma} (x^2 + z^2) dl, \text{ где } \gamma - \text{ дуга окружности } x^2 + z^2 = 16.$$

$$5.4.1.29 \quad \int_{\gamma} \sqrt{x^2} dl, \text{ где } \gamma - \text{ дуга линии } r = \cos \varphi, \frac{2\pi}{3} \leq \varphi \leq \pi.$$

$$5.4.1.30 \quad \int_{\gamma} \frac{\sqrt{y^2} dl}{1 + \sin^2 x}, \text{ где } \gamma - \text{ дуга линии } y = \cos x, \frac{5\pi}{6} \leq x \leq \pi.$$

5.4.2 Вычислить криволинейный интеграл второго рода $\int_{\gamma} \vec{F} \cdot \vec{dl}$ вдоль дуги

линии γ от точки S до точки T (линия l задана либо уравнением $y = f(x)$, если в условии задачи данного варианта указано уравнение, либо является прямой, проходящей через две точки S и T).

5.4.2.1 $\vec{F} = (2x^2 - 3y)\vec{i} + (3x - y)\vec{j} + z\vec{k}$, $S(2;3;5)$, $T(5;1;4)$.

5.4.2.2 $\vec{F} = (3x - y)\vec{i} + (2x + 5y^2)\vec{j}$, $f(x) = x^2$, $S(1;1)$, $T\left(\frac{3}{2}; \frac{9}{4}\right)$.

5.4.2.3 $\vec{F} = (4x^2 + 3y^2)\vec{i} + (2x - y)\vec{j}$, $S(1;4)$, $T(2;5)$.

5.4.2.4 $\vec{F} = (x^2 - y^2)\vec{i} + (2x^2 - 6y^3)\vec{j}$, $f(x) = x^2 + 4x - 1$, $S(1;4)$, $T(2;11)$.

5.4.2.5 $\vec{F} = (4x - y)\vec{i} + (3x^3 - 5z)\vec{j} + (2x + 6z)\vec{k}$, $S(4;3;2)$, $T(2;5;1)$.

5.4.2.6 $\vec{F} = (5x + 3y)\vec{i} + (4x + 4y^3)\vec{j}$, $f(x) = x^3$, $S(2;8)$, $T(3;27)$.

5.4.2.7 $\vec{F} = (x^3 + 5y)\vec{i} + (x^2 + 2y)\vec{j}$, $S(5;4)$, $T(6;7)$.

5.4.2.8 $\vec{F} = (x + y)\vec{i} + (x - y)\vec{j}$, $f(x) = 2x^2 + 5x + 2$, $S(0;2)$, $T(1;9)$.

5.4.2.9 $\vec{F} = (x^2 - z)\vec{i} + (3z - y)\vec{j} + (2x + z)\vec{k}$, $S(3;3;4)$, $T(6;7;8)$.

5.4.2.10 $\vec{F} = (2x + 5y)\vec{i} + (2x - 4y^2)\vec{j}$, $f(x) = x^2 - x$, $S\left(\frac{1}{2}; -\frac{1}{4}\right)$, $T(3;6)$.

5.4.2.11 $\vec{F} = (3x^2 + 5y^2)\vec{i} - (x^2 - 4y)\vec{j}$, $S(2;1)$, $T(4;3)$.

5.4.2.12 $\vec{F} = (2x - 5y)\vec{i} + (3x + 2y^2)\vec{j}$, $f(x) = 3x^2 - 10x + 3$, $S(1;-4)$, $T(3;0)$.

5.4.2.13 $\vec{F} = (y^2 - z)\vec{i} + (3z - x)\vec{j} + (2y + z)\vec{k}$, $S(2;1;6)$, $T(4;5;4)$.

5.4.2.14 $\vec{F} = (x^2 - 3y)\vec{i} - (4x - 5y^2)\vec{j}$, $f(x) = 4 - x^2$, $S(2;0)$, $T(1;3)$.

5.4.2.15 $\vec{F} = (2x^2 + y^3)\vec{i} - (x^3 - y^3)\vec{j}$, $S(3;7)$, $T(-2;-1)$.

5.4.2.16 $\vec{F} = x\vec{i} + (4x - y^2)\vec{j}$, $f(x) = x^2 - 10x + 9$, $S(1;0)$, $T(2;-7)$.

5.4.2.17 $\vec{F} = (y^2 - x)\vec{i} + (x + y - z)\vec{j} + x\vec{k}$, $S(3;2;1)$, $T(8;5;2)$.

5.4.2.18 $\vec{F} = (x^3 - 2y^2)\vec{i} - (5x + 4y^2)\vec{j}$, $f(x) = x - x^2$, $S\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right)$, $T(5;-20)$.

5.4.2.19 $\vec{F} = (4x + 2y^2)\vec{i} + 2(3x^2 - y^2)\vec{j}$, $S(2;5)$, $T(3;7)$.

5.4.2.20 $\vec{F} = y\vec{i} + (2x + 3y^2)\vec{j}$, $f(x) = 2x^2 - 9x + 1$, $S(2;-9)$, $T(0;1)$.

5.4.2.21 $\vec{F} = (y^2 - z^3)\vec{i} + (x^2 + y - z)\vec{j} + (x + z)\vec{k}$, $S(4;1;2)$, $T(2;4;7)$.

5.4.2.22 $\vec{F} = (x^3 + 4y^2)\vec{i} + 3 \cdot (2x - 3y^2)\vec{j}$, $f(x) = x^2 + 3x$, $S(0;0)$, $T(3;18)$.

5.4.2.23 $\vec{F} = (2x + 4y^2)\vec{i} - 5(4x^2 + y^3)\vec{j}$, $S(3;9)$, $T(6;8)$.

5.4.2.24 $\vec{F} = (x - y)\vec{i} + (x^2 - 5y^2)\vec{j}$, $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$, $S(1;0)$, $T(2;7)$.

$$5.4.2.25 \quad \vec{F} = (y^3 - z^2)\vec{i} + (x^2 + 2y - 3z)\vec{j} + (x + y)\vec{k}, \quad S(5;1;0), \quad T(4;2;1).$$

$$5.4.2.26 \quad \vec{F} = (x + 4y)\vec{i} + 3x\vec{j}, \quad f(x) = \sin x, \quad S(0;0), \quad T\left(\frac{\pi}{2};1\right).$$

$$5.4.2.27 \quad \vec{F} = \cos x \vec{i} - x \sin y \vec{j}, \quad S(2;2), \quad T(7;7).$$

$$5.4.2.28 \quad \vec{F} = (x - y)\vec{i} + 2xy \vec{j}, \quad f(x) = \sin 3x, \quad S\left(\frac{\pi}{3};0\right), \quad T\left(\frac{\pi}{2};-1\right).$$

$$5.4.2.29 \quad \vec{F} = \sin x \vec{i} + \cos y \vec{j} + \operatorname{tg} z \vec{k}, \quad S(2;4;1), \quad T(5;1;2).$$

$$5.4.2.30 \quad \vec{F} = \cos x \vec{i} + \sin y \vec{j}, \quad f(x) = x^2, \quad S\left(-\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right), \quad T(-2;4).$$

6 ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Содержание: поверхностные интегралы первого рода и их приложения, поверхностные интегралы второго рода и их приложения.

6.1 Теоретический материал по теме практического занятия

6.1.1 Поверхностные интегралы первого рода

Определение 6.1.1.1 Поверхностным интегралом первого рода (ПИ-1) от функции $f(x; y; z)$ по поверхности Σ называется предел интегральных сумм от этой функции по площади поверхности σ , при мелкости разбиения стремящегося к нулю и если этот предел существует и конечен.

$$\iint_{\Sigma} f(x; y; z) d\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\lambda_n \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i; y_i; z_i) \Delta \sigma_i. \quad (6.1.1.1)$$

Пусть поверхность $\Sigma: z = \varphi(x; y)$ проектируется на плоскость Oxy в область Σ_{xy} . Тогда вычисление ПИ-1 по поверхности Σ сводится к вычислению двойного интеграла.

$$\iint_{\Sigma} f(x; y; z) d\sigma = \iint_{\Sigma_{xy}} f(x; y; \varphi(x; y)) \sqrt{1 + (\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2} dx dy. \quad (6.1.1.2)$$

Площадь поверхности Σ :

$$Q = \iint_{\Sigma} d\sigma = \iint_{\Sigma_{xy}} \sqrt{1 + (\varphi'_x)^2 + (\varphi'_y)^2} dx dy. \quad (6.1.1.3)$$

Масса материальной поверхности Σ с плотностью $\mu = \mu(x; y; z)$:

$$m = \iint_{\Sigma} \mu(x; y; z) d\sigma. \quad (6.1.1.4)$$

6.1.2 Поверхностные интегралы второго рода

Пусть задана ориентируемая поверхность Σ , с единичным вектором нормали $\vec{n}_0$. Допустим, что на данной поверхности определена некоторая вектор-функция $\vec{a}(x; y; z) = (P(x; y; z); Q(x; y; z); R(x; y; z))$.

Определение 5.1.2.1 Поверхностным интегралом второго рода (ПИ-2) вектор-функции $\vec{a}(x; y; z)$ по ориентируемой поверхности Σ называется поверхностный интеграл первого рода от скалярной функции $\vec{a} \cdot \vec{n}_0 = a_n(x; y; z)$.

$$\iint_{\Sigma} (\vec{a} \cdot \vec{n}_0) d\sigma = \iint_{\Sigma} a_n d\sigma. \quad (6.2.1.1)$$

Используя свойства скалярного произведения, равенство (6.2.1.1) можно записать в виде

$$\iint_{\Sigma} (\vec{a} \cdot \vec{n}_0) d\sigma = \iint_{\Sigma} P(x; y; z) dydz + Q(x; y; z) dx dz + R(x; y; z) dx dy. \quad (6.2.1.2)$$

В подынтегральном выражении правой части стоит алгебраическая сумма. Знаки учитываются при вычислении поверхностного интеграла второго рода. При переходе от поверхностного интеграла второго рода к двойным интегралам перед ними берём знак «+», если угол между нормалью к поверхности и соответствующей осью острый, и знак «−» если угол является тупым.

Формула перехода от ПИ-2 к двойному интегралу имеет вид

$$\iint_{\Sigma} (\vec{a} \cdot \vec{n}_0) d\sigma = \iint_{\Sigma_{xy}} (\vec{a} \cdot \vec{n}) dx dy, \quad (6.2.1.3)$$

где область Σ_{xy} является проекцией поверхности Σ на плоскость Oxy ; поверхность Σ задаётся функцией $z = \varphi(x; y)$; нормальный вектор поверхности равен $\vec{n} = \pm \text{grad}(z - \varphi(x; y))$.

6.2 Примеры решения типовых задач

6.2.1 Вычислить поверхностный интеграл первого рода $\iint_{\Sigma} x d\sigma$, по поверхности Σ , ограниченной плоскостями $x + y + z = 1$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$.

Решение. Для вычисления поверхностного интеграла найдём частные производные заданной функции $z = 1 - x - y$. Их значения равны: $z'_x = -1$, $z'_y = -1$. Вычислим поверхностный интеграл.

$$\iint_{\Sigma} x d\sigma = \iint_{\Sigma_{xy}} x \sqrt{1 + (-1)^2 + (-1)^2} dx dy = \sqrt{3} \int_0^1 x dx \int_0^{1-x} dy = \sqrt{3} \int_0^1 (x - x^2) dx = \sqrt{3} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \frac{\sqrt{3}}{6}.$$

6.2.2 Вычислить поверхностный интеграл первого рода $\iint_{\Sigma} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} d\sigma$, где Σ – конечная часть поверхности $z = 1 - x^2 - y^2$, отсечённая плоскостью $z = 0$.

Решение. На рисунке 6.2.1 изображена заданная поверхность. Для вычисления поверхностного интеграла воспользуемся формулой (6.1.1.2). Найдём частные производные функции z : $\frac{\partial z}{\partial x} = -2x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -2y$.

Тогда дифференциал равен

$$d\sigma = \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} dx dy = \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy$$

Проекцией заданной части параболоида вращения $z = 1 - x^2 - y^2$ на плоскость Oxy является область, ограниченная окружностью $x^2 + y^2 = 1$.

Вычислим заданный поверхностный интеграл первого рода.

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} d\sigma &= \iint_G \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} \cdot \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy = \\ &= \iint_G (1 + 4x^2 + 4y^2) dx dy = I \end{aligned}$$

Для вычисления двойного интеграла перейдём к полярным координатам: $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$, $x^2 + y^2 = r^2$, $dx dy = r dr d\varphi$, $0 \leq r \leq 1$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

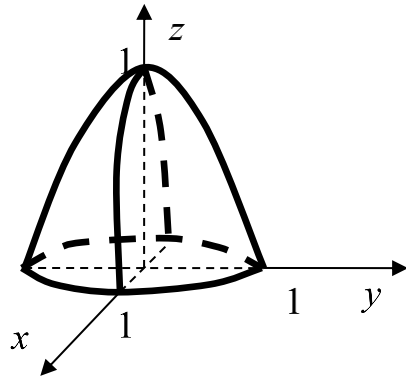


Рисунок 6.2.1 – Параболоид

$$\begin{aligned}
I &= \iint_G (1 + 4x^2 + 4y^2) dx dy = \iint_G (1 + 4r^2) r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (r + 4r^3) dr = \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{r^2}{2} + r^4 \right) \Big|_0^1 d\varphi = \frac{3}{2} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{3}{2} \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{3}{2} \cdot 2\pi = 3\pi.
\end{aligned}$$

6.2.3 Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint_{\Sigma} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy$, где Σ – внешняя сторона сферы $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2$.

Решение. Изобразим заданную сферу на рисунке 6.2.2. Исходный интеграл представляет сумму трёх интегралов.

$$I_1 = \iint_{\Sigma_1} x^2 dy dz, \quad I_2 = \iint_{\Sigma_2} y^2 dz dx, \quad I_3 = \iint_{\Sigma_3} z^2 dx dy.$$

Вычислим первый интеграл $I_1 = \iint_{\Sigma_1} x^2 dy dz$.

В этом случае уравнение сферы будет иметь вид:

$$x - a = \pm \sqrt{R^2 - (y - b)^2 - (z - c)^2},$$

где знак «плюс» берём, когда рассматриваем ближнюю полусферу, а знак «минус», когда дальнюю полусферу. Подынтегральную функцию представим в виде

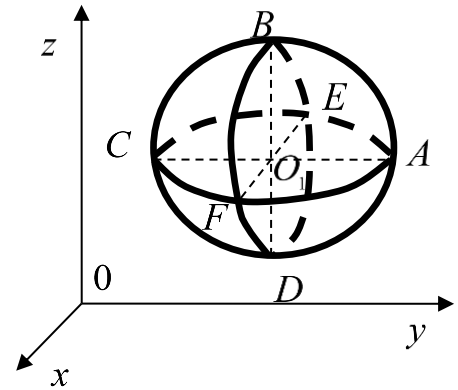


Рисунок 6.2.2 – Сфера

$$x^2 = (x - a)^2 + a^2 + 2a(x - a).$$

Обозначим через Σ_{11} внешнюю сторону ближней полусферы $ABCDF$ (рис. 6.2.2), через Σ_{12} – внешнюю сторону дальней полусферы; через G – проекцию каждой полусферы на плоскость Oyz (это круг, ограниченный окружностью $(y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$).

Учитывая, что выражение $x - a$ меняет знак при переходе от одной полусферы к другой, находим первый интеграл.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \iint_{\Sigma_1} x^2 dy dz = \iint_{\Sigma_{11}} [(x - a)^2 + a^2 + 2a(x - a)] dy dz - \\
&- \iint_{\Sigma_{12}} [(x - a)^2 + a^2 - 2a(x - a)] dy dz = 4a \iint_G (x - a) dy dz =
\end{aligned}$$

$$= 4a \iint_G \sqrt{R^2 - (y-b)^2 - (z-c)^2} dydz.$$

Для вычисления двойного интеграла переходим к полярным координатам по формулам: $y-b = r \cos \varphi$, $z-c = r \sin \varphi$.

При этом

$$(y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2, \quad dydz = r dr d\varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq R.$$

Тогда

$$\begin{aligned} I_1 &= 4a \iint_G \sqrt{R^2 - r^2} r dr d\varphi = 4a \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} r dr = \\ &= -2a \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^R \sqrt{R^2 - r^2} d(R^2 - r^2) = -\frac{4a}{3} \int_0^{2\pi} \sqrt{(R^2 - r^2)^3} \Big|_0^R d\varphi = \frac{4aR^3}{3} \int_0^{2\pi} d\varphi = \\ &= \frac{4aR^3}{3} \varphi \Big|_0^{2\pi} = \frac{8}{3} \pi a R^3. \end{aligned}$$

Аналогично вычисляем остальные два интеграла:

$$I_2 = \iint_{\Sigma_2} y^2 dzdx = 8\pi b R^3 / 3, \quad I_3 = \iint_{\Sigma_3} z^2 dxdy = 8\pi c R^3 / 3.$$

Следовательно,

$$\iint_{\sigma} x^2 dydz + y^2 dzdx + z^2 dxdy = I_1 + I_2 + I_3 = 8\pi R^3 (a + b + c) / 3.$$

6.2.4 Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint_{\Sigma} z dydz - 4y dx dz + 8x^2 dx dy$, где Σ – часть поверхности $z = x^2 + y^2 + 1$, отсечённой плоскостью $z = 2$, если нормаль $\vec{n}$ к поверхности Σ составляет с осью Oz тупой угол γ .

Решение. С помощью градиента находим вектор нормали к заданной поверхности: $\vec{n} = -(-2x; -2y; 1) = (2x; 2y; -1)$, так как $\cos \gamma < 0$. По условию задано векторное поле $\vec{a} = (z; -4y; 8x^2)$. По формуле (6.2.1.3) вычисляем заданный поверхностный интеграл второго рода.

$$\iint_{\Sigma} z dydz - 4y dx dz + 8x^2 dx dy = \iint_{\Sigma_{Oxy}} \vec{a} \cdot \vec{n} dxdy = \iint_{\Sigma_{Oxy}} (2xz - 8y^3 - 8x^2) dxdy =$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_{\Sigma_{Oxy}} (2x(x^2 + y^2 + 1) - 8(y^2 + x^2)) dx dy = \left[\begin{array}{lll} x = r \cos \varphi & 0 \leq r \leq 1 & dx dy = r d\varphi dr \\ y = r \sin \varphi & 0 \leq \varphi \leq 2\pi & x^2 + y^2 = r^2 \end{array} \right] = \\
&= \iint_{\Sigma_{Oxy}} (2r \cos \varphi (r^2 + 1) - 8r^2) r d\varphi dr = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (2r^4 \cos \varphi + 2r^2 \cos \varphi - 8r^3) dr = \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{2}{5} r^5 \cos \varphi + \frac{2}{3} r^3 \cos \varphi - 2r^4 \right) \bigg|_0^1 d\varphi = \int_0^{2\pi} \left(\frac{2}{5} \cos \varphi + \frac{2}{3} \cos \varphi - 2 \right) d\varphi = \\
&= \left(\frac{2}{5} \sin \varphi + \frac{2}{3} \sin \varphi - 2\varphi \right) \bigg|_0^{2\pi} = -4\pi.
\end{aligned}$$

6.3 Задания для решения на практическом занятии

6.3.1 Вычислить поверхностный интеграл первого рода $\iint_{\Sigma} xyz d\sigma$ где Σ – часть плоскости $x + y + z = 4$, расположенная в первом октанте.

6.3.2 Вычислить поверхностный интеграл $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + 3z^2) d\sigma$, где Σ – часть поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, отсечённая плоскостями $z = 0$, $z = 1$.

6.3.3 Вычислить поверхностный интеграл $\iint_{\Sigma} (xz + yz) d\sigma$, где Σ – часть поверхности $z = \sqrt{9 - x^2}$, отсечённая плоскостями $y = 0$, $y = 2$.

6.3.4 Вычислить поверхностный интеграл $\iint_{\Sigma} \sqrt{1 + 4x^2 + 4z^2} d\sigma$, где Σ – часть поверхности $y = 2 - x^2 - z^2$, отсечённая плоскостью $y = 0$.

6.3.5 Вычислить поверхностный интеграл $\iint_{\Sigma} \frac{d\sigma}{(1 + x + y + z)^2}$, где Σ – граница тетраэдра $x + y + z \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, $z \geq 0$.

6.3.6 Вычислить массу полусферы $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, если поверхностная плотность в каждой её точке $\mu = x^2 y^2$.

6.3.7 Вычислить площадь поверхности Σ , где Σ – верхняя сторона плоскости $x + y + z = 6$, вырезанной цилиндром $x^2/4 + y^2/9 = 1$, $z = 1$.

6.3.8 Вычислить поверхностный интеграл $\iint_{\Sigma} xdydz + ydxdz + zdx dy$, где

Σ – верхняя часть плоскости $x + y + z = 1$, расположенная в первом октанте.

6.3.9 Вычислить поверхностный интеграл $\iint_{\Sigma} xdydz + ydxdz + zdx dy$, где Σ

– внешняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

6.3.10 Вычислить поверхностный интеграл $\iint_{\Sigma} xzdydz + xydxdz + yzdx dy$,

где Σ – внешняя сторона поверхности $2x + 3y + 4z = 12$, расположенная в первом октанте.

6.3.11 Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint_{\Sigma} (x + y)dydz + (y - x)dxdz + (z - 2)dx dy$, где Σ – часть поверхности $z^2 = x^2 + y^2$,

отсекаемая плоскостями $z = 0$ и $z = 1$.

6.3.12 Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint_{\Sigma} xzdydz + yx^2dxdz + zy^2dx dy$, где Σ – верхняя сторона поверхности, распо-

ложенной в первом октанте и составленной из параболоида вращения $z = x^2 + y^2$, цилиндра $x^2 + y^2 = 1$ и координатных плоскостей.

6.3.13 Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint_{\Sigma} xzdydz + yx^2dxdz + zy^2dx dy$, где Σ – верхняя сторона поверхности, распо-

ложенной в первом октанте и составленной из параболоида вращения $z = x^2 + y^2$, цилиндра $x^2 + y^2 = 1$ и координатных плоскостей.

6.3.14 Вычислить поверхностный интеграл $\iint_{\Sigma} \frac{dydz}{x} + \frac{dxdz}{y} + \frac{dx dy}{z}$, где Σ – внешняя сторона эллипсоида $x^2/4 + y^2/9 + z^2/16 = 1$.

6.3.15 Вычислить поверхностный интеграл второго рода $\iint_{\Sigma} xdydz + zdx dy$,

где Σ – часть поверхности параболоида $z = x^2 + y^2$, отсекаемая плоскостью $z = 4$.

6.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

6.4.1 Задана функция $u = f(x; y; z)$ и поверхность Σ . Вычислить поверхностный интеграл первого рода от заданной функции по указанной поверхности.

6.4.1.1 $u = -x^3 y$; $\Sigma: z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $x \geq 0$, $-x\sqrt{3} \leq y \leq x$.

6.4.1.2 $u = -y^3 z$; $\Sigma: x = -\sqrt{1 - 9z^2 - 9y^2}/3$, $z \leq 0$, $-z\sqrt{3} \leq y \leq 0$.

- 6.4.1.3 $u = x^2 z^2$; $\Sigma: y = \sqrt{324 - 25x^2 - 25z^2}$, $z \leq 0$, $-z\sqrt{3} \leq y \leq z\sqrt{3}$.
- 6.4.1.4 $u = 3y - 2x$; $\Sigma: z = \sqrt{289 - x^2 - y^2}$, $x \leq 0$, $0 \leq y \leq x$.
- 6.4.1.5 $u = 2y^2 + 2z^2$; $\Sigma: x = \sqrt{256 - z^2 - y^2}$, $z \geq 0$, $-z \leq y \leq z\sqrt{3}$.
- 6.4.1.6 $u = -3x - 6z$; $\Sigma: y = -\sqrt{441 - x^2 - z^2}$, $z \leq 0$, $-z\sqrt{3} \leq x \leq z/\sqrt{3}$.
- 6.4.1.7 $u = xy$; $\Sigma: z = -\sqrt{529 - 16x^2 - 16y^2}/4$, $x \leq 0$, $-x \leq y \leq -x/\sqrt{3}$.
- 6.4.1.8 $u = y^2 z^2$; $\Sigma: x = \sqrt{49 - 36z^2 - 36y^2}/6$, $z \geq 0$, $-z/\sqrt{3} \leq y \leq 0$.
- 6.4.1.9 $u = x^2 z$; $\Sigma: y = \sqrt{1 - 49z^2 - 49x^2}/7$, $z \geq 0$, $0 \leq x \leq z\sqrt{3}$.
- 6.4.1.10 $u = x^3 y$; $\Sigma: z = \sqrt{484 - x^2 - y^2}$, $x \geq 0$, $0 \leq y \leq x\sqrt{3}$.
- 6.4.1.11 $u = y^3 z$; $\Sigma: x = -\sqrt{4 - z^2 - y^2}$, $z \geq 0$, $0 \leq y \leq z$.
- 6.4.1.12 $u = 2x^2 + 2z^2$; $\Sigma: y = \sqrt{9 - x^2 - z^2}$, $z \geq 0$, $z \leq x \leq z\sqrt{3}$.
- 6.4.1.13 $u = xy^2$; $\Sigma: z = -\sqrt{841 - 64x^2 - 64y^2}/8$, $x \geq 0$, $x \leq y \leq x\sqrt{3}$.
- 6.4.1.14 $u = 3y^2 + 3z^2$; $\Sigma: x = \sqrt{9 - z^2 - y^2}$, $z \geq 0$, $-z\sqrt{3} \leq y \leq 0$.
- 6.4.1.15 $u = 4x + 5z$; $\Sigma: y = \sqrt{16 - 100x^2 - 100z^2}/10$, $z \geq 0$, $0 \leq x \leq z$.
- 6.4.1.16 $u = xy$; $\Sigma: z = -\sqrt{225 - x^2 - y^2}$, $x \geq 0$, $0 \leq y \leq x/\sqrt{3}$.
- 6.4.1.17 $u = y^2 z$; $\Sigma: x = -\sqrt{196 - z^2 - y^2}$, $x \geq 0$, $0 \leq y \leq z/\sqrt{3}$.
- 6.4.1.18 $u = x^2 + z^2$; $\Sigma: y = -\sqrt{169 - x^2 - z^2}$, $z \geq 0$, $z \leq x \leq z\sqrt{3}$.
- 6.4.1.19 $u = xy^2$; $\Sigma: z = \sqrt{144 - x^2 - y^2}$, $x \geq 0$, $x/\sqrt{3} \leq y \leq x\sqrt{3}$.
- 6.4.1.20 $u = y^2 z$; $\Sigma: x = \sqrt{121 - z^2 - y^2}$, $z \geq 0$, $-z\sqrt{3} \leq y \leq z$.
- 6.4.1.21 $u = x^2 z^2$; $\Sigma: y = -\sqrt{100 - x^2 - z^2}$, $z \geq 0$, $-z \leq x \leq 0$.
- 6.4.1.22 $u = x - y$; $\Sigma: z = \sqrt{81 - x^2 - y^2}$, $z \leq 0$, $-x/\sqrt{3} \leq y \leq 0$.
- 6.4.1.23 $u = y^2 + z^2$; $\Sigma: x = \sqrt{64 - z^2 - y^2}$, $z \leq 0$, $-z/\sqrt{3} \leq y \leq z/\sqrt{3}$.
- 6.4.1.24 $u = x + z$; $\Sigma: y = \sqrt{49 - x^2 - z^2}$, $z \geq 0$, $0 \leq x \leq z/\sqrt{3}$.
- 6.4.1.25 $u = x^2 + y^2$; $\Sigma: z = -\sqrt{36 - x^2 - y^2}$, $x \leq 0$, $-x/\sqrt{3} \leq y \leq 0$.
- 6.4.1.26 $u = -zy$; $\Sigma: x = -\sqrt{25 - z^2 - y^2}$, $x \geq 0$, $-z\sqrt{3} \leq y \leq 0$.
- 6.4.1.27 $u = x^2 z$; $\Sigma: y = -\sqrt{16 - x^2 - z^2}$, $x \leq 0$, $-z\sqrt{3} \leq y \leq z/\sqrt{3}$.
- 6.4.1.28 $u = x^2 y^2$; $\Sigma: z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$, $x \geq 0$, $x/\sqrt{3} \leq y \leq x$.
- 6.4.1.29 $u = yz^2$; $\Sigma: x = \sqrt{81 - 4z^2 - 4y^2}/2$, $z \geq 0$, $-z \leq y \leq 0$.
- 6.4.1.30 $u = x^2 + z^2$; $\Sigma: y = -\sqrt{4 - 9x^2 - 9z^2}$, $z \leq 0$, $-z/\sqrt{3} \leq x \leq 0$.

6.4.2 Вычислить поверхностный интеграл $\iiint_{\Sigma} (\vec{a} \cdot \vec{n}_0) d\sigma$, где Σ – замкнутая

поверхность, $\vec{n}_0$ – внешняя нормаль к поверхности Σ , $\vec{a}$ – векторное поле.

6.4.2.1 $\vec{a} = (x - z^2)\vec{i} + (y + z^2)\vec{j} - x\vec{k}$, $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 1, z = 0, z \leq 0$.

6.4.2.2 $\vec{a} = (x + 2z^2)\vec{i} + (y - z^2)\vec{j} - y\vec{k}$, $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 4, z = 0, z \geq 0$.

6.4.2.3 $\vec{a} = (x - yz^2)\vec{i} + (xy + z^2)\vec{j} - xy\vec{k}$, $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 9, z = 0, z \leq 0$.

6.4.2.4 $\vec{a} = y\vec{i} + z^2\vec{j} + x\vec{k}$, $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 16, z = 0, z \geq 0$.

6.4.2.5 $\vec{a} = (x - yz^2)\vec{i} + (y + xz^2)\vec{j} - y\vec{k}$, $\Sigma: x^2 + y^2 = z^2, z = -1, z \leq 0$.

6.4.2.6 $\vec{a} = (y - yz^2)\vec{i} + x\vec{j} + (x + z^2)\vec{k}$, $\Sigma: x^2 + y^2 = z^2, z = 1, z \geq 0$.

6.4.2.7 $\vec{a} = (x + z)\vec{i} + (y + z)\vec{j} - z\vec{k}$, $\Sigma: z = -x^2 - y^2, z = -1$.

6.4.2.8 $\vec{a} = (x - z)\vec{i} + (y - z)\vec{j} + \vec{k}$, $\Sigma: z = x^2 + y^2, z = 1$.

6.4.2.9 $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, $\Sigma: z = \sqrt{18 - x^2 - y^2}, z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

6.4.2.10 $\vec{a} = y\vec{i} + z\vec{j} + x\vec{k}$, $\Sigma: z = -\sqrt{8 - x^2 - y^2}, z = -\sqrt{x^2 + y^2}$.

6.4.2.11 $\vec{a} = 2x\vec{i} + z\vec{j} + y\vec{k}$, $\Sigma: z = 2 - x^2 - y^2, z^2 = x^2 + y^2$.

6.4.2.12 $\vec{a} = 2y\vec{i} + 5z\vec{j} + x\vec{k}$, $\Sigma: z = 98 - x^2 - y^2, z^2 = x^2 + y^2, z \geq 0$.

6.4.2.13 $\vec{a} = (x - y)\vec{i} + (y - z)\vec{j} + (z - x)\vec{k}$, $\Sigma: z = x^2 + y^2 + 1, x^2 + y^2 = 1, z = 0$.

6.4.2.14 $\vec{a} = (y - z)\vec{i} + (z - x)\vec{j} + (x - y)\vec{k}$, $\Sigma: z = 54 - 3x^2 - 3y^2, z = 3x^2 + 3y^2$.

6.4.2.15 $\vec{a} = yz\vec{i} + 3xz\vec{j} + 4xy\vec{k}$, $\Sigma: z = x, x^2 + y^2 = 4, z = 0, z \geq 0$.

6.4.2.16 $\vec{a} = (x^2 - z)\vec{i} + (y^2 + z)\vec{j} - y\vec{k}$, $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 49, z = 0, z \leq 0$.

6.4.2.17 $\vec{a} = (y + z^2)\vec{i} + (x - z^2)\vec{j} - x\vec{k}$, $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 25, z = 0, z \geq 0$.

6.4.2.18 $\vec{a} = (x + z^2)\vec{i} + (xy - z^2)\vec{j} - xyz\vec{k}$, $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 36, z = 0, z \leq 0$.

6.4.2.19 $\vec{a} = xy\vec{i} + yz^2\vec{j} + xy\vec{k}$, $\Sigma: x^2 + y^2 + z^2 = 64, z = 0, z \geq 0$.

6.4.2.20 $\vec{a} = (x^2 - z^2)\vec{i} + (y^2 + z^2)\vec{j} - xy\vec{k}$, $\Sigma: x^2 + y^2 = z^2, z = -2, z \leq 0$.

6.4.2.21 $\vec{a} = (y - z^2)\vec{i} + y\vec{j} + (x - z^2)\vec{k}$, $\Sigma: x^2 + y^2 = z^2, z = 3, z \geq 0$.

6.4.2.22 $\vec{a} = (3x + 2z)\vec{i} + (3y - z)\vec{j} - 2z\vec{k}$, $\Sigma: z = -x^2 - y^2, z = -4$.

6.4.2.23 $\vec{a} = (3x - 2z)\vec{i} + (4y - 2z)\vec{j} + x\vec{k}$, $\Sigma: z = x^2 + y^2, z = 9$.

6.4.2.24 $\vec{a} = x^2\vec{i} + y^2\vec{j} + z^2\vec{k}$, $\Sigma: z = \sqrt{50 - x^2 - y^2}, z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

6.4.2.25 $\vec{a} = (x + z)\vec{i} + (x + 2z)\vec{j} + (x + 3z)\vec{k}$, $\Sigma: z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}, z = -\sqrt{x^2 + y^2}$.

6.4.2.26 $\vec{a} = 2y\vec{i} + 2z\vec{j} + xy\vec{k}$, $\Sigma: z = 8 - x^2 - y^2, z^2 = x^2 + y^2$.

6.4.2.27 $\vec{a} = y^2\vec{i} + z\vec{j} + x^2\vec{k}$, $\Sigma: z = 18 - x^2 - y^2, z^2 = x^2 + y^2$.

6.4.2.28 $\vec{a} = (y - z)\vec{i} + (z - x)\vec{j} + (y - x)\vec{k}$, $\Sigma: z = x^2 + y^2 + 2, x^2 + y^2 = 4, z = 0$.

6.4.2.29 $\vec{a} = z\vec{i} + x\vec{j} + y\vec{k}$, $\Sigma: z = 40 - 5x^2 - 5y^2, z = 5x^2 + 5y^2$.

6.4.2.30 $\vec{a} = xyz\vec{i} + 3x\vec{j} + y\vec{k}$, $\Sigma: z = x, x^2 + y^2 = 9, z = 0, z \geq 0$.

7 ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ПОЛЯ

Содержание: характеристики скалярного поля, характеристики векторного поля, поток и циркуляция векторного поля, потенциальные поля, потенциал векторного поля, соленоидальные поля, гармонические поля.

7.1 Теоретический материал по теме практического занятия

7.1.1 Дифференциальные характеристики полей

Если любой точке M из области Ω , по определённому правилу, сопоставляется некоторое действительное число $u(M)$, то говорят, что в данной области задано *скалярное поле*. Если любой точке M из области Ω , по определённому правилу, сопоставляется некоторый вектор $\vec{a}(M)$, то говорят, что в данной области задано *векторное поле*.

Предположим, задано пространственное скалярное поле, которое определяется функцией трёх переменных $f(x; y; z)$. *Поверхностью уровня* называется поверхность, в любой точке которой поле принимает постоянное значение. Таким образом, поверхность уровня имеет уравнение: $f(x; y; z) = C$. Если скалярное поле плоское, то оно определяется функцией двух переменных $f(x; y)$, и в данном случае имеем *линию уровня*, в любой точке которой поле принимает постоянное значение: $f(x; y) = C$.

Производной функции $f(x; y; z)$ по направлению вектора $\vec{l}$, которая вычисляется по формуле

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \gamma, \quad (7.1.1.1)$$

где $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ – направляющие косинусы (координаты единичного вектора $\vec{l}_0$).

Направление и наибольшая скорость возрастания поля характеризуется *градиентом*, который представляет собой вектор:

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{k}. \quad (7.1.1.2)$$

Производная функции по направлению вектора и градиент функции являются дифференциальными характеристиками скалярного поля.

Дивергенцией векторного поля $\vec{a}(M)$ в точке M называется скалярная величина, равная

$$\operatorname{div} \vec{a}(M) = \lim_{\substack{\Sigma \rightarrow M \\ (\Delta V \rightarrow 0)}} \frac{\oiint_{\Sigma} a_n d\sigma}{\Delta V}. \quad (7.1.1.3)$$

Ротором векторного поля $\vec{a}(M)$ в точке M по направлению нормального вектора $\vec{n}$ называется векторная величина

$$\operatorname{rot} \vec{a}(M) = \lim_{\substack{\gamma \rightarrow M \\ (\Delta \sigma \rightarrow 0)}} \frac{\oint_{\gamma} a_{\tau} dl}{\Delta \sigma}. \quad (7.1.1.4)$$

Введём символический вектор ∇ (читается «набла»):

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} = \left(\frac{\partial}{\partial x}; \frac{\partial}{\partial y}; \frac{\partial}{\partial z} \right). \quad (7.1.1.5)$$

Этот вектор называется оператором Гамильтона.

Выразим основные дифференциальные операции с помощью оператора Гамильтона.

Действие оператора на скалярную функцию u определяется по правилу

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) u = \frac{\partial u}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \vec{k} \quad (7.1.1.6)$$

Рассмотрим векторное поле $\vec{a}(M) = P(x; y; z) \vec{i} + Q(x; y; z) \vec{j} + R(x; y; z) \vec{k}$.

$$\operatorname{div} \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \cdot \vec{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \quad (7.1.1.7)$$

$$\operatorname{rot} \vec{a} = \nabla \times \vec{a} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \right) \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \quad (7.1.1.8)$$

7.1.2 Интегральные характеристики полей

Рассмотрим векторное поле $\vec{a}(M) = P(x; y; z)\vec{i} + Q(x; y; z)\vec{j} + R(x; y; z)\vec{k}$.

Определение 7.1.2.1 *Потоком* векторного поля $\vec{a}(x; y; z)$ через ориентируемую поверхность Σ называется поверхностный интеграл второго рода вектор-функции $\vec{a}(x; y; z)$ через заданную поверхность Σ .

$$\Pi = \iiint_{\Sigma} a_n d\sigma = \iint_{\Sigma} P dydz + Q dx dz + R dx dy. \quad (7.1.2.1)$$

Определение 7.1.2.2 *Циркуляцией* векторного поля $\vec{a}(x; y; z)$ по замкнутому ориентируемому контуру γ называется криволинейный интеграл второго рода вектор-функции по заданному ориентируемому контуру γ .

$$\mathcal{C} = \oint_{\gamma} a_{\tau} dl = \oint_{\gamma} P dx + Q dy + R dz. \quad (7.1.2.2)$$

Теорема Остроградского-Гаусса устанавливает связь между поверхностным интегралом второго рода через замкнутую поверхность и тройным интегралом по области, которую ограничивает данная замкнутая поверхность.

Теорема 7.1.2.1 Если векторное поле $\vec{a}(M)$ определено в замкнутой области Ω и имеет непрерывные частные производные от координат векторного поля, то поток векторного поля через внешнюю сторону гладкой замкнутой поверхности Σ , ограничивающую область Ω , равен тройному интегралу от дивергенции векторного поля по области Ω .

$$\Pi = \iiint_{\Sigma} a_n d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{a} dV. \quad (7.1.2.3)$$

Теорема Стокса устанавливает связь между поверхностным интегралом второго рода и криволинейным интегралом второго рода по замкнутому контуру.

Теорема 7.1.2.2 Если функции P , Q и R векторного поля $\vec{a}(x; y; z)$ непрерывны вместе со своими частными производными, то поверхностный интеграл второго рода по поверхности Σ от проекции ротора $\operatorname{rot}_n \vec{a}(M)$ на нормаль, равен циркуляции векторного поля вдоль контура γ , на который натянута данная поверхность, при соответствующей ориентации поверхности и направлении обхода контура.

$$\mathcal{C} = \oint_{\gamma} a_{\tau} dl = \iint_{\Sigma} \operatorname{rot}_n \vec{a} d\sigma = \iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \vec{a} \vec{d\sigma}. \quad (7.1.2.4)$$

Запишем формулу Стокса в декартовой системе координат:

$$\begin{aligned} & \oint_{\gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \\ & = \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dx dz + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy. \end{aligned} \quad (7.1.2.5)$$

Пусть задано плоское поле $\vec{a}(x; y) = (P(x; y); Q(x; y))$. Частным случаем формулы Стокса является формула Грина.

$$\iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{\gamma} Pdx + Qdy. \quad (7.1.2.6)$$

7.1.3 Виды полей

Рассмотрим векторное поле $\vec{a}(M) = P(x; y; z)\vec{i} + Q(x; y; z)\vec{j} + R(x; y; z)\vec{k}$.

Определение 7.1.3.1 Векторное поле $\vec{a}(M) = (P; Q; R)$ называется *потенциальным* в односвязной области Ω , если в каждой точке этой области ротор векторного поля равен нулю, то есть $\text{rot } \vec{a}(M) = 0$.

Потенциал векторного поля определяется по формуле

$$\varphi(x; y; z) = \int_{M_0 M} P dx + Q dy + R dz + C, \quad (7.1.3.1)$$

где $M_0(x_0; y_0; z_0)$ – некоторая фиксированная точка области Ω , $M(x; y; z)$ – любая точка области Ω , а C – произвольная константа.

Из формулы (7.1.3.1) следует формула для вычисления криволинейного интеграла второго рода, не зависящего от пути интегрирования:

$$\int_{AB} P dx + Q dy + R dz = \varphi(B) - \varphi(A), \quad (7.1.3.2)$$

где $\varphi(A)$ и $\varphi(B)$ – значение потенциала φ в начальной A и конечной B точках пути.

Определение 7.1.3.2 Векторное поле $\vec{a}(M) = (P; Q; R)$ называется *соленоидальным* в односвязной области Ω , если в каждой точке этой области дивергенция векторного поля равна нулю, то есть $\text{div } \vec{a}(M) = 0$.

Определение 7.1.3.3 Векторное поле $\vec{a}(M) = (P; Q; R)$ называется *гармоническим* в односвязной области Ω , если поле является потенциальным и соленоидальным в этой области, то есть $\text{rot } \vec{a}(M) = 0$ и $\text{div } \vec{a}(M) = 0$.

7.2 Примеры решения типовых задач

7.2.1 Вычислить поток векторного поля $\vec{a}(M) = (x + y - z)\vec{i} + (2x + y + z)\vec{j} + (x - y + z)\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью $6x + 3y + 4z - 12 = 0$ и координатными плоскостями, двумя способами: 1) используя определение потока; 2) с помощью формулы Остроградского-Гаусса.

Решение. 1. По определению поток векторного поля вычисляется с помощью поверхностного интеграла второго рода $\Pi = \iint_{\Sigma} \vec{a}(M) \cdot \vec{n}^0 d\sigma$, где Σ –

внешняя сторона поверхности пирамиды $OABC$ (рис. 7.2.1). Поток векторного поля через полную поверхность пирамиды $OABC$, в направлении внешней нормали, равен сумме потоков векторного поля через грани OAB , OBC , OAC и ABC :

$$\Pi_{OABC} = \Pi_{OAB} + \Pi_{OBC} + \Pi_{OAC} + \Pi_{ABC}.$$

Рассмотрим грань OAB , которая лежит в плоскости $z = 0$. Нормаль к этой грани $\vec{n}^0 = -\vec{k}$, $dS = dxdy$. Скалярное произведение векторного поля на нормальный единичный вектор равно

$$\vec{a}(M) \cdot \vec{n}^0 = ((x + y)\vec{i} + (2x + y)\vec{j} + (x - y)\vec{k}) \cdot (-\vec{k}) = y - x.$$

Тогда поток векторного поля через грань OAB равен

$$\begin{aligned} \Pi_{OAB} &= \iint_{\Delta OAB} (y - x) dxdy = \int_0^2 dx \int_0^{4-2x} (y - x) dy = \int_0^2 \left(\frac{y^2}{2} - xy \right) \Big|_0^{4-2x} dx = \int_0^2 (4x^2 - 12x + 8) dx = \\ &= \left(\frac{4}{3} x^3 - 6x^2 + 8x \right) \Big|_0^2 = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

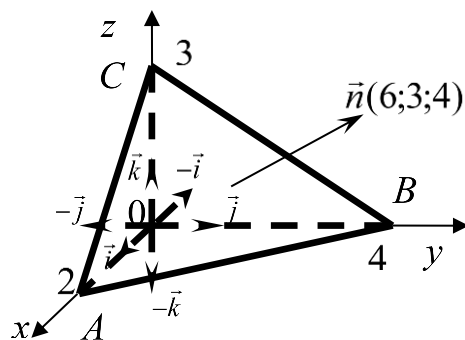


Рисунок 7.2.1 – Поток

Рассмотрим грань OBC , которая лежит в плоскости $x=0$. Нормаль к этой грани $\vec{n}^0 = -\vec{i}$, $dS = dydz$. Скалярное произведение векторного поля на нормальный единичный вектор равно

$$\vec{a}(M) \cdot \vec{n}^0 = ((y-z)\vec{i} + (y+z)\vec{j} + (z-y)\vec{k}) \cdot (-\vec{i}) = z-y.$$

Тогда поток векторного поля через грань OBC равен

$$\begin{aligned} \Pi_{OBC} &= \iint_{\Delta OBC} (z-y) dy dz = \int_0^4 dy \int_0^{3-\frac{3}{4}y} (z-y) dz = \int_0^4 \left(\frac{z^2}{2} - yz \right) \Big|_0^{3-\frac{3}{4}y} dy = \\ &= \int_0^4 \left(\frac{33}{32} y^2 - \frac{21}{4} y + \frac{9}{2} \right) dy = \left(\frac{11}{32} y^3 - \frac{21}{8} y^2 + \frac{9}{2} y \right) \Big|_0^4 = -2. \end{aligned}$$

Рассмотрим грань OAC , которая лежит в плоскости $y=0$. Нормаль к этой грани $\vec{n}^0 = -\vec{j}$, $dS = dx dz$. Скалярное произведение векторного поля на нормальный единичный вектор равно

$$\vec{a}(M) \cdot \vec{n}^0 = ((x-z)\vec{i} + (2x+z)\vec{j} + (x+z)\vec{k}) \cdot (-\vec{j}) = -2x-z.$$

Тогда поток векторного поля через грань OAC равен

$$\begin{aligned} \Pi_{OAC} &= - \iint_{\Delta OAC} (z+2x) dx dz = - \int_0^2 dx \int_0^{3-\frac{3}{2}x} (z+2x) dz = - \int_0^2 \left(\frac{z^2}{2} + 2xz \right) \Big|_0^{3-\frac{3}{2}x} dx \\ &= - \int_0^2 \left(-\frac{15}{8} x^2 + \frac{3}{2} x + \frac{9}{2} \right) dx = - \left(-\frac{5}{8} x^3 + \frac{3}{4} x^2 + \frac{9}{2} x \right) \Big|_0^2 = -7. \end{aligned}$$

Рассмотрим грань ABC , которая лежит в плоскости $6x+3y+4z-12=0$.

Нормаль к этой грани $\vec{n}^0 = \frac{6\vec{i} + 3\vec{j} + 4\vec{k}}{\sqrt{36+9+16}} = \frac{6}{\sqrt{61}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{61}}\vec{j} + \frac{4}{\sqrt{61}}\vec{k}$. Найдём

$dS = \sqrt{1+z_x'^2 + z_y'^2} dx dy$. По условию $z = 3 - \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}y$, следовательно, $z'_x = -\frac{3}{2}$,

$z'_y = -\frac{3}{4}$. Тогда $dS = \sqrt{1 + \frac{9}{4} + \frac{9}{16}} dx dy = \frac{\sqrt{61}}{4} dx dy$. Скалярное произведение век-

торного поля на нормальный единичный вектор равно

$$\vec{a}(M) \cdot \vec{n}^0 = ((x+y-z)\vec{i} + (2x+y+z)\vec{j} + (x-y+z)\vec{k}) \cdot \left(\frac{6}{\sqrt{61}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{61}}\vec{j} + \frac{4}{\sqrt{61}}\vec{k} \right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{61}} \left(15x + \frac{21}{2}y - 18 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}y + 9 - 2x - 7y + 12 \right) = \frac{1}{\sqrt{61}} \left(\frac{29}{2}x + \frac{17}{4}y + 3 \right).$$

Тогда поток векторного поля через грань ABC равен

$$\begin{aligned} \Pi_{ABC} &= \iint_{\Delta OAB} \frac{1}{\sqrt{61}} \left(\frac{29}{2}x + \frac{17}{4}y + 3 \right) \frac{\sqrt{61}}{4} dx dy = \int_0^2 dx \int_0^{4-2x} \left(\frac{29}{8}x + \frac{17}{16}y + \frac{3}{4} \right) dy = \\ &= \int_0^2 \left(\frac{29}{2}xy - \frac{17}{8}y^2 + 3 \right) \Big|_0^{4-2x} dx = \int_0^2 \left(-\frac{41}{8}x^2 + \frac{9}{2}x + \frac{23}{2} \right) dx = \\ &= \left(-\frac{41}{24}x^3 + \frac{9}{4}x^2 + \frac{23}{2}x \right) \Big|_0^2 = \frac{55}{3}. \end{aligned}$$

Следовательно, поток векторного поля через внешнюю поверхность пирамиды равен

$$\Pi_{OABC} = \Pi_{OAB} + \Pi_{OBC} + \Pi_{OAC} + \Pi_{ABC} = \frac{8}{3} - 2 - 7 + \frac{55}{3} = 12.$$

2. Вычислим поток векторного поля через поверхность пирамиды $OABC$ по формуле Остроградского-Гаусса (7.1.2.3):

$$\Pi = \iiint_{\Sigma} a_n d\sigma = \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \vec{a}(M) dV = \iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz.$$

Находим частные производные

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial(x+y-z)}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial(2x+y+z)}{\partial y} = 1; \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{\partial(x-y+z)}{\partial z} = 1.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \Pi_{OABC} &= \iiint_{\Omega} (1+1+1) dx dy dz = 3 \iiint_{\Omega} dx dy dz = 3 \int_0^2 dx \int_0^{4-2x} dy \int_0^{3-\frac{3}{2}x-\frac{3}{4}y} dz = \\ &= 3 \int_0^2 dx \int_0^{4-2x} \left(3 - \frac{3}{2}x - \frac{3}{4}y \right) dy = 3 \int_0^2 \left(3y - \frac{3}{2}xy - \frac{3}{8}y^2 \right) \Big|_0^{4-2x} dx = \end{aligned}$$

$$= 3 \int_0^2 \left(\frac{3}{2} x^2 - 6x + 6 \right) dx = 3 \left(\frac{1}{2} x^3 - 3x^2 + 6x \right) \Big|_0^2 = 3(4 - 12 + 12) - 0 = 12.$$

7.2.2 Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M) = (x + y - z)\vec{i} + (2x + y + z)\vec{j} + (x - y + z)\vec{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $6x + 3y + 4z - 12 = 0$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\vec{n}(6; 3; 4)$ этой плоскости двумя способами: 1) используя определение циркуляции; 2) с помощью формулы Стокса.

Решение. В результате пересечения плоскости π с координатными плоскостями получим треугольник ABC (рис. 7.2.2) и укажем на нём положительное направление обхода контура $ABCA$ в соответствии с условием задачи.

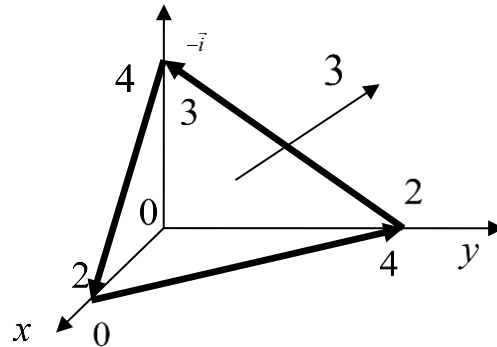


Рисунок 7.2.2 – Циркуляция

1. Вычислим циркуляцию векторного поля по формуле (7.1.2.2): $\mathcal{C} = \oint_{\gamma} a_{\tau} dl = \oint_{\gamma} \vec{a} \cdot \vec{dl}$. Используя свой-

ство аддитивности области интегрирования, получаем, что циркуляция по указанному контуру $ABCA$ равна

$$\mathcal{C} = \oint_{ABCA} \vec{a} \cdot \vec{dl} = \int_{AB} \vec{a} \cdot \vec{dl} + \int_{BC} \vec{a} \cdot \vec{dl} + \int_{CA} \vec{a} \cdot \vec{dl}.$$

На отрезке AB получаем: $z = 0$, $y = 4 - 2x$, $dy = -2dx$, x лежит от 2 до 0, $\vec{dl} = dx \cdot \vec{i} + dy \cdot \vec{j}$, векторное поле $\vec{a}(M) = (x + y)\vec{i} + (2x + y)\vec{j} + (x - y)\vec{k}$, скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{dl} = (x + y)dx + (2x + y)dy$,

$$\begin{aligned} \int_{AB} \vec{a} \cdot \vec{dl} &= \int_{AB} (x + y)dx + (2x + y)dy = \int_2^0 (x + 4 - 2x)dx + (2x + 4 - 2x) \cdot (-2)dx = \\ &= \int_2^0 (-x - 4)dx = \left(-\frac{x^2}{2} - 4x \right) \Big|_2^0 = 0 - (-2 - 8) = 10. \end{aligned}$$

На отрезке BC получаем: $x = 0$, $z = 3 - \frac{3}{4}y$, $dz = -\frac{3}{4}dy$, y лежит от 4 до 0, $\vec{dl} = dy \cdot \vec{j} + dz \cdot \vec{k}$, векторное поле $\vec{a}(M) = (y - z)\vec{i} + (y + z)\vec{j} + (z - y)\vec{k}$, скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{dl} = (y + z)dy + (z - y)dz$,

$$\begin{aligned}\int_{BC} \vec{a} \cdot \vec{dl} &= \int_{BC} (y+z)dy + (z-y)dz = \int_4^0 \left(y + 3 - \frac{3}{4}y \right) dy + \left(3 - \frac{3}{4}y - y \right) \cdot \left(-\frac{3}{4} \right) dy = \\ &= \int_4^0 \left(\frac{25}{16}y + \frac{3}{4} \right) dy = \left(\frac{25}{32}y^2 + \frac{3}{4}y \right) \Big|_4^0 = 0 - \left(\frac{25}{2} + 3 \right) = -\frac{31}{2}.\end{aligned}$$

На отрезке CA получаем: $y=0$, $z=3-\frac{3}{2}x$, $dz=-\frac{3}{2}dx$, x лежит от 0 до 2, $\vec{dl}=dx \cdot \vec{i} + dz \cdot \vec{k}$, векторное поле $\vec{a}(M)=(x-z)\vec{i} + (2x+z)\vec{j} + (x+z)\vec{k}$, скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{dl}=(x-z)dx + (x+z)dz$,

$$\begin{aligned}\int_{CA} \vec{a} \cdot \vec{dl} &= \int_{CA} (x-z)dx + (x+z)dz = \int_0^2 \left(x - 3 + \frac{3}{2}x \right) dx + \left(x + 3 - \frac{3}{2}x \right) \cdot \left(-\frac{3}{2} \right) dx = \\ &= \int_0^2 \left(\frac{13}{4}x - \frac{15}{2} \right) dx = \left(\frac{13}{8}x^2 - \frac{15}{2}x \right) \Big|_0^2 = \left(\frac{13}{2} - 15 \right) - 0 = -\frac{17}{2}.\end{aligned}$$

$$\text{Следовательно, } \mathcal{I} = 10 - \frac{31}{2} - \frac{17}{2} = -14.$$

2. Вычислим циркуляцию данного поля с помощью формулы Стокса (6.1.2.4). Для этого определим ротор векторного поля

$$\text{rot } \vec{a}(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x+y-z & 2x+y+z & x-y+z \end{vmatrix} = -2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}.$$

Нормальный единичный вектор заданной плоскости имеет вид $\vec{n}^0 = \frac{6}{\sqrt{61}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{61}}\vec{j} + \frac{4}{\sqrt{61}}\vec{k}$. Тогда

$$\text{rot } \vec{a}(M) \cdot \vec{n}^0 = (-2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) \cdot \left(\frac{6}{\sqrt{61}}\vec{i} + \frac{3}{\sqrt{61}}\vec{j} + \frac{4}{\sqrt{61}}\vec{k} \right) = -\frac{14}{\sqrt{61}}.$$

Элемент площади равен $dS = \sqrt{1+z_x'^2 + z_y'^2} dx dy = \frac{\sqrt{61}}{4} dx dy$.

Следовательно,

$$\begin{aligned}
U &= \iint_{\sigma} \left(-\frac{14}{\sqrt{61}} \right) dS = \iint_{OAB} \left(-\frac{14}{\sqrt{61}} \cdot \frac{\sqrt{61}}{4} \right) dx dy = -\frac{7}{2} \int_0^2 dx \int_0^{4-2x} dy = \\
&= -\frac{7}{2} \int_0^2 y \Big|_0^{4-2x} dx = -\frac{7}{2} \int_0^2 (4-2x) dx = -\frac{7}{2} (4x - x^2) \Big|_0^2 = -\frac{7}{2} \cdot (8-4) + \frac{7}{2} \cdot 0 = -14.
\end{aligned}$$

7.2.3 Проверить, является ли векторное поле $\vec{F}(M)$ потенциальным. В случае потенциальности поля найти его потенциал, если $\vec{F}(M) = (3yz + x^2)\vec{i} + (2y^2 + 3xz)\vec{j} + (z^2 + 3xy)\vec{k}$. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по линии, соединяющей точки $A(1;1;3)$ и $B(6;3;9)$.

Решение. Найдём ротор векторного поля $\vec{F}(M)$.

$$\begin{aligned}
\text{rot } \vec{a}(M) &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 3yz + x^2 & 2y^2 + 3xz & z^2 + 3xy \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial(z^2 + 3xy)}{\partial y} - \frac{\partial(2y^2 + 3xz)}{\partial z} \right) \vec{i} - \\
&\quad - \left(\frac{\partial(z^2 + 3xy)}{\partial x} - \frac{\partial(3yz + x^2)}{\partial z} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial(2y^2 + 3xz)}{\partial x} - \frac{\partial(3yz + x^2)}{\partial y} \right) \vec{k} = \\
&= (3x - 3x)\vec{i} - (3y - 3y)\vec{j} + (3z - 3z)\vec{k} = \vec{0}.
\end{aligned}$$

Ротор векторного поля $\vec{F}(M)$ равен нулю, следовательно, поле является потенциальным. Найдём потенциал $\varphi(x; y; z)$ векторного поля.

Так как функции $P(x; y; z) = 3yz + x^2$, $Q(x; y; z) = 2y^2 + 3xz$ и $R(x; y; z) = z^2 + 3xy$ непрерывны и имеют непрерывные частные производные во всех точках пространства R^3 , то в качестве точки M_0 выберем начало координат $O(0;0;0)$, а в качестве точки $M(X;Y;Z)$ – произвольную точку пространства R^3 (рис. 7.2.3). Криволинейный интеграл второго рода не зависит от формы пути интегрирования, поэтому его можно вычислять по любой ломаной кривой, например, по кривой $OABM$. Следовательно, потенциал векторного поля $\vec{F}(M) = (3yz + x^2)\vec{i} + (2y^2 + 3xz)\vec{j} + (z^2 + 3xy)\vec{k}$ равен:

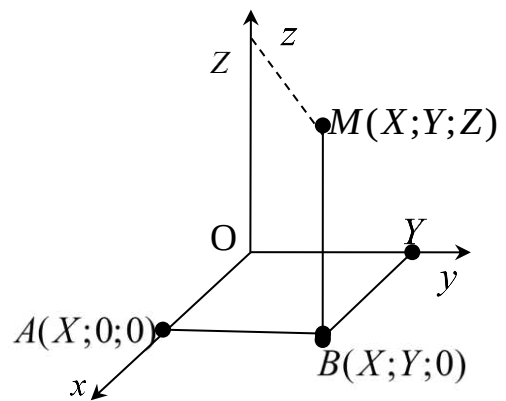


Рисунок 7.2.3 – Потенциал

$$\begin{aligned}
\varphi(X;Y;Z) &= \int_{OM} (3yz + x^2)dx + (2y^2 + 3xz)dy + (z^2 + 3xy)dz + C = \int_{OA} \dots + \int_{AB} \dots + \\
&+ \int_{BM} \dots + C = \left[\begin{array}{l} OA: y=0, z=0, dy=0, dz=0, 0 \leq x \leq X, \\ OB: x=X, z=0, dx=0, dz=0, 0 \leq y \leq Y, \\ OC: x=X, y=Y, dx=0, dy=0, 0 \leq z \leq Z, \end{array} \right] = \int_0^X x^2 dx + \int_0^Y 2y^2 dy + \\
&+ \int_0^Z (z^2 + 3XY)dz + C = \frac{x^3}{3} \Big|_0^X + \frac{2y^3}{3} \Big|_0^Y + \left(\frac{z^3}{3} + 3XYZ \right) \Big|_0^Z + C = \\
&= X^3/3 + 2Y^3/3 + Z^3/3 + 3XYZ + C.
\end{aligned}$$

Заменяя в последнем равенстве X, Y, Z на произвольные переменные x, y, z , записываем выражение для потенциала векторного поля: $\varphi(x; y; z) = x^3/3 + 2y^3/3 + z^3/3 + 3xyz + C$.

В потенциальном поле криволинейный интеграл второго рода не зависит от формы пути интегрирования. Следовательно,

$$\begin{aligned}
\int_{AB} (3yz + x^2)dx + (2y^2 + 3xz)dy + (z^2 + 3xy)dz &= \varphi(B) - \varphi(A) = \\
&= \frac{6^3}{3} + \frac{2 \cdot 3^3}{3} + \frac{9^3}{3} + 3 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 9 - \frac{1^3}{3} - \frac{2 \cdot 1^3}{3} - \frac{3^3}{3} - 3 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 3 = 576 - 19 = 557.
\end{aligned}$$

7.3 Задания для решения на практическом занятии

7.3.1 Вычислить производную функции $u = \ln(3 - x^2) + x \cdot y^2 \cdot z$ в точке $A(1; 3; 2)$ по направлению к точке $B(4; 7; 14)$.

7.3.2 Найти градиент функции $u = x^2yz - xyz^2 + xyz^2$ в точке.

7.3.3 Вычислить дивергенцию векторного поля $\vec{F}(M) = x^2z\vec{i} + xy^3\vec{j} - xz^4\vec{k}$ в точке $M_0(-2; 1; 2)$.

7.3.4 Найти ротор векторного поля $\vec{a}(M) = x^2yz\vec{i} + xzy^3\vec{j} + 2xy^2z^3\vec{k}$ в точке $M_0(3; 2; 1)$.

7.3.5 Найти градиент от дивергенции векторного поля $\vec{a} = (x^3; y^3; z^3)$.

7.3.6 Вычислить поток векторного поля $\vec{a}(M) = (x - y)\vec{i} + (x + y)\vec{j} + z^2\vec{k}$ через поверхность цилиндрического тела, ограниченного поверхностями $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$ и $z = 2$, в направлении внешней нормали.

7.3.7 Найти поток векторного поля $\vec{a}(M) = x\vec{i} - 2y\vec{j} - z\vec{k}$ через замкнутую поверхность Σ , ограниченную поверхностями $z = 1 - x^2 - y^2$ и $z = 0$, в направлении внешней нормали.

7.3.8 Вычислить поток векторного поля $\vec{a}(M) = z\vec{i} + (x + y)\vec{j} + y\vec{k}$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью $\pi: 2x + y + 2z = 2$ и координатными плоскостями, двумя способами: 1) используя определение потока; 2) с помощью формулы Остроградского-Гаусса.

7.3.9 Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M) = z^2\vec{i} + x^2\vec{j} + y^2\vec{k}$ по сечению сферы $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ плоскостью $x + y + z = 2$ в положительном направлении обхода относительно нормального вектора плоскости.

7.3.10 Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M) = zy^2\vec{i} + xz^2\vec{j} + yx^2\vec{k}$ по контуру пересечения параболоида $y = x^2 + z^2$ плоскостью $y = 16$ в положительном направлении обхода относительно орта $\vec{j}$.

7.3.11 Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a} = 3x\vec{i} + (y + z)\vec{j} + (x - z)\vec{k}$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $x + 3y + z = 3$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора этой плоскости двумя способами: 1) используя определение циркуляции; 2) с помощью формулы Стокса.

7.3.12 Найти потенциал φ векторного поля $\vec{a}(M) = yz\vec{i} + xz\vec{j} + (xy + 1)\vec{k}$ и вычислить криволинейный интеграл $\int_{(1;1;1)}^{(2;3;4)} yz dx + xz dy + (xy + 1) dz$.

7.3.13 Проверить, является ли векторное поле $\vec{F}(M) = 2xyz\vec{i} + x^2z\vec{j} + x^2y\vec{k}$ потенциальным. В случае потенциальности поля найти его потенциал. Вычислить криволинейный интеграл второго рода по дуге линии, соединяющей точки $A(1; -1; 2)$ и $B(-2; 4; 2)$.

7.3.14 Проверить, является ли векторное поле $\vec{a}(M) = 3x^2y\vec{i} - 2xy^2\vec{j} - 2xyz\vec{k}$ соленоидальным.

7.3.15 Проверить, является ли векторное поле $\vec{a}(M) = 3yz\vec{i} + 3xz\vec{j} + 3xy\vec{k}$ гармоническим. Если поле гармоническое, то найти его потенциал.

7.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

7.4.1 Вычислить поток векторного поля $\vec{a}(M)$ через внешнюю поверхность пирамиды, образуемую плоскостью π и координатными плоскостями, двумя способами: а) используя определение потока; б) с помощью формулы Остроградского-Гаусса. Вычислить циркуляцию векторного поля $\vec{a}(M)$ по контуру треугольника, полученного в результате пересечения плоскости $\pi: Ax + By + Cz + D = 0$ с координатными плоскостями, при положительном направлении обхода относительно нормального вектора $\vec{n}(A; B; C)$ этой плоскости двумя способами: а) используя определение циркуляции; б) с помощью формулы Стокса.

7.4.1.1 $\vec{a}(M) = (x - z)\vec{i} + (y + z)\vec{j} + (2x - y + 2z)\vec{k}, \quad \pi: x + 2y + 3z = 6.$

7.4.1.2 $\vec{a}(M) = (3x - 2z)\vec{i} + (2y - 4z)\vec{j} + (x - 5y + z)\vec{k}, \quad \pi: 2x - 3y + 4z = 12.$

7.4.1.3 $\vec{a}(M) = (x + 2y - z)\vec{i} + (4x + 2z)\vec{j} + (3x - 2y + 3z)\vec{k}, \quad \pi: 2x + 3y - 5z = 30.$

7.4.1.4 $\vec{a}(M) = (5x + 4y)\vec{i} + (x - 2y - 3z)\vec{j} + (3x + 4z)\vec{k}, \quad \pi: -3x + 4y + 6z = 12.$

7.4.1.5 $\vec{a}(M) = (2y + 5z)\vec{i} + (3y - 3z)\vec{j} + (2x - y)\vec{k}, \quad \pi: 2x - 4y - 5z = 20.$

7.4.1.6 $\vec{a}(M) = (3x - 4y)\vec{i} + (2x - z)\vec{j} + (3x - 2y + z)\vec{k}, \quad \pi: -3x + 2y - 7z = 42.$

7.4.1.7 $\vec{a}(M) = x\vec{i} + (y - 2z)\vec{j} + (-x - y + 3z)\vec{k}, \quad \pi: -x - 3y + 5z = 15.$

7.4.1.8 $\vec{a}(M) = (2x + 4z)\vec{i} + (x - 4y + z)\vec{j} + (2x - 3y + z)\vec{k}, \quad \pi: x + 2y + 3z = -12.$

7.4.1.9 $\vec{a}(M) = (3x - 2z)\vec{i} + (4y + 5z)\vec{j} + (6x - 2y + z)\vec{k}, \quad \pi: 2x + 3y + 6z = 18.$

7.4.1.10 $\vec{a}(M) = (2x - 3z)\vec{i} + (4y - 2z)\vec{j} + (2x - 3y + 7z)\vec{k}, \quad \pi: 5x - 4y + 2z = 20.$

7.4.1.11 $\vec{a}(M) = (x + 3y - 2z)\vec{i} + (2x + 3z)\vec{j} + (2x - 3y + 4z)\vec{k}, \quad \pi: 6x + y - 2z = 6.$

7.4.1.12 $\vec{a}(M) = (4x + 5y)\vec{i} + (3x - y - 2z)\vec{j} + (4x + 3z)\vec{k}, \quad \pi: -4x + 2y + 5z = 20.$

7.4.1.13 $\vec{a}(M) = (5y + 6z)\vec{i} + (7y - 4z)\vec{j} + (x - 2y)\vec{k}, \quad \pi: 3x - 5y - 6z = 30.$

7.4.1.14 $\vec{a}(M) = (4x - y)\vec{i} + (3x - y)\vec{j} + (2x - 2y + 3z)\vec{k}, \quad \pi: -4x + 7y - 7z = 28.$

7.4.1.15 $\vec{a}(M) = 2y\vec{i} + (z - 2y)\vec{j} + (3x - y + 2z)\vec{k}, \quad \pi: -3x - 4y + 6z = 12.$

7.4.1.16 $\vec{a}(M) = (3y - 4z)\vec{i} + (2x + 3z)\vec{j} + (x - 4y + 3z)\vec{k}, \quad \pi: 2x + 4y + 5z = 40.$

7.4.1.17 $\vec{a}(M) = (4x - 5z)\vec{i} + (3y + 2z)\vec{j} + (3x - 2y + z)\vec{k}, \quad \pi: 3x + y + 5z = 15.$

7.4.1.18 $\vec{a}(M) = (3x - 2z)\vec{i} + (2y + 3z)\vec{j} + (3x + 2y + z)\vec{k}, \quad \pi: x - 2y + 3z = 6.$

7.4.1.19 $\vec{a}(M) = (3x + 2y + z)\vec{i} + (2x + 3z)\vec{j} + (x - y + z)\vec{k}, \quad \pi: 4x + 5y - 8z = 40.$

7.4.1.20 $\vec{a}(M) = (6x + 3y)\vec{i} + (2x - 5y - z)\vec{j} + (4x + 5z)\vec{k}, \quad \pi: -4x + y + 2z = 4.$

7.4.1.21 $\vec{a}(M) = (2y + 3z)\vec{i} + (3y - 7z)\vec{j} + (3x - 2y)\vec{k}, \quad \pi: 3x - 4y - 5z = 60.$

7.4.1.22 $\vec{a}(M) = (x - y)\vec{i} + (x - z)\vec{j} + (x - y - z)\vec{k}, \quad \pi: -2x + 4y - 3z = 24.$

7.4.1.23 $\vec{a}(M) = 3z\vec{i} + (2y - z)\vec{j} + (-3x - 3y + z)\vec{k}, \quad \pi: -2x - 5y + 10z = 10.$

- 7.4.1.24 $\vec{a}(M) = (3x + 5z)\vec{i} + (6x - 3y + 2z)\vec{j} + (x - y + z)\vec{k}$, $\pi: 2x + 2y + 3z = -18$.
- 7.4.1.25 $\vec{a}(M) = (4x - 5z)\vec{i} + (4y + z)\vec{j} + (3x - y + z)\vec{k}$, $\pi: 3x + 2y + 3z = 24$.
- 7.4.1.26 $\vec{a}(M) = (2x - 5z)\vec{i} + (5y - 2z)\vec{j} + (3x - 2y + z)\vec{k}$, $\pi: 3x - 4y + 2z = 12$.
- 7.4.1.27 $\vec{a}(M) = (4x + 2y - 3z)\vec{i} + (5x + 6z)\vec{j} + (2x - y + 2z)\vec{k}$, $\pi: 3x + 4y - z = 24$.
- 7.4.1.28 $\vec{a}(M) = (x + 3y)\vec{i} + (2x - 3y - 4z)\vec{j} + (5x + z)\vec{k}$, $\pi: -4x + 5y + z = 20$.
- 7.4.1.29 $\vec{a}(M) = (2x - 3z)\vec{i} + (y - 4z)\vec{j} + (3x - 2y)\vec{k}$, $\pi: 12x - 4y - 5z = 60$.
- 7.4.1.30 $\vec{a}(M) = (4x - 3y)\vec{i} + (3x - 2z)\vec{j} + (x - y + 3z)\vec{k}$, $\pi: -6x + 4y - 3z = 24$.

7.4.2 Определите вид векторного поля $\vec{a}(M)$. В случае потенциальности поля найти его потенциал.

- 7.4.2.1 $\vec{a}(M) = (2xy - 2yz)\vec{i} + (x^2 - 2xz)\vec{j} + (z^2 - 2xy)\vec{k}$.
- 7.4.2.2 $\vec{a}(M) = (x + z)\vec{i} + 2yz\vec{j} + (x + y^2)\vec{k}$.
- 7.4.2.3 $\vec{a}(M) = (2xy + 2xz)\vec{i} + (x^2 + y^2)\vec{j} + (z^2 + x^2)\vec{k}$.
- 7.4.2.4 $\vec{a}(M) = (x + z^2)\vec{i} + 2yz\vec{j} + (y^2 - 2xz)\vec{k}$.
- 7.4.2.5 $\vec{a}(M) = (3yz + 2x)\vec{i} + (3xz + 2yz^2)\vec{j} + (2y^2z + 3xy)\vec{k}$.
- 7.4.2.6 $\vec{a}(M) = yz\vec{i} + xz\vec{j} + xy\vec{k}$.
- 7.4.2.7 $\vec{a}(M) = (y^2z - yz^2)\vec{i} + (2xyz - xz^2)\vec{j} + (xy^2 - 2xyz)\vec{k}$.
- 7.4.2.8 $\vec{a}(M) = -2yz\vec{i} + (2yz - 2xz)\vec{j} + (y^2 - 2xy)\vec{k}$.
- 7.4.2.9 $\vec{a}(M) = 4yz\vec{i} + (z^2 + 4xz)\vec{j} + (2yz + 4xy)\vec{k}$.
- 7.4.2.10 $\vec{a}(M) = (y + z)\vec{i} + (x + z)\vec{j} + (x + y)\vec{k}$.
- 7.4.2.11 $\vec{a}(M) = -yz\vec{i} + (yz^2 - xz)\vec{j} + (y^2z - xy)\vec{k}$.
- 7.4.2.12 $\vec{a}(M) = 4yz\vec{i} + (4xz - yz^2)\vec{j} + (4xy - zy^2)\vec{k}$.
- 7.4.2.13 $\vec{a}(M) = (3x + yz)\vec{i} + (3y^2z - z^3 + xz)\vec{j} + (y^3 - 3yz^2 + xy)\vec{k}$.
- 7.4.2.14 $\vec{a}(M) = (2xy - 2yz)\vec{i} + (x^2 - 2xz)\vec{j} + (z^2 - 2xy)\vec{k}$.
- 7.4.2.15 $\vec{a}(M) = (yz + 2)\vec{i} + (xz - 1)\vec{j} + (xy - 3)\vec{k}$.
- 7.4.2.16 $\vec{a}(M) = 2yz\vec{i} + (2yz - z^2 + 2xz)\vec{j} + (2xy + y^2 - 2yz)\vec{k}$.
- 7.4.2.17 $\vec{a}(M) = (4yz + 4)\vec{i} + (yz^2 + 4xz)\vec{j} + (4xy + y^2z)\vec{k}$.
- 7.4.2.18 $\vec{a}(M) = 2yz\vec{i} + (2xz + 2yz)\vec{j} + (y^2 + 2xy)\vec{k}$.
- 7.4.2.19 $\vec{a}(M) = -x^2\vec{i} + 2yz\vec{j} + y^2\vec{k}$.
- 7.4.2.20 $\vec{a}(M) = (3 - y - z)\vec{i} + (4 - x - z)\vec{j} + (5 - x - y)\vec{k}$.
- 7.4.2.21 $\vec{a}(M) = (y^2z + 2yz^2)\vec{i} + (2xyz + 2xz^2)\vec{j} + (xy^2 + 4xyz)\vec{k}$.
- 7.4.2.22 $\vec{a}(M) = -y^2z\vec{i} + (z^2 - 2xyz)\vec{j} + (2yz - xy^2)\vec{k}$.

$$7.4.2.23 \quad \vec{a}(M) = (y^2z^2 - y^3z)\vec{i} + (2xyz^2 - 3xy^2z)\vec{j} + (2xy^2z - xy^3)\vec{k}.$$

$$7.4.2.24 \quad \vec{a}(M) = yz\vec{i} + (xz + 2yz + 2z^2)\vec{j} + (xy + y^2 + 4yz)\vec{k}.$$

$$7.4.2.25 \quad \vec{a}(M) = (1 - yz)\vec{i} + (2 - xz)\vec{j} + (3 - xy)\vec{k}.$$

$$7.4.2.26 \quad \vec{a}(M) = 2yz\vec{i} + (3yz^2 + 2xz)\vec{j} + (3y^2z + 2xy)\vec{k}.$$

$$7.4.2.27 \quad \vec{a}(M) = 2xyz\vec{i} + (x^2z + 3y^2z + z^3)\vec{j} + (x^2y + y^3z + 3yz^2)\vec{k}.$$

$$7.4.2.28 \quad \vec{a}(M) = (7 + yz)\vec{i} + (2 + xz)\vec{j} + (5 + xy)\vec{k}.$$

$$7.4.2.29 \quad \vec{a}(M) = yz\vec{i} + (xz - 2yz + z^2)\vec{j} + (xy - y^2 + 2yz)\vec{k}.$$

$$7.4.2.30 \quad \vec{a}(M) = (5 + 2y + 2z)\vec{i} + (7 + 2x + 2z)\vec{j} + (4 + 2x + 2y)\vec{k}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Альсевич, Л. А. Математический анализ. Последовательности, функции, интегралы. Практикум. : учебное пособие / Л. А. Альсевич, С. Г. Красовский. – Минск : Вышэйшая школа, 2021. – 471 с.
2. Березкина, Н. С. Математика для инженеров: примеры и задачи. : учебное пособие. В 4 частях. Ч. 3 / Н. С. Березкина, Е. А. Ровба ; УО «ГрГУ им. Я. Купалы», Факультет математики и информатики, Кафедра фундаментальной и прикладной математики ; под ред. Е. А. Ровбы. – Минск : РИВШ, 2019. – 371 с.
3. Березкина, Н. С. Математика для инженеров: примеры и задачи. : учебное пособие. В 4 частях. Ч. 4 / Н. С. Березкина, С. А. Минюк, Е. А. Наумович, Е. А. Ровба ; УО «ГрГУ им. Я. Купалы», Факультет математики и информатики. – Минск : РИВШ, 2020. – 357 с.
4. Герасимович, А. И. Математический анализ. Справочное пособие. В 2 частях. Ч. 2 / А. И. Герасимович, Н. П. Кеда, М. П. Сугак. – Минск : Вышэйшая школа, 1990. – 272 с.
5. Жевняк, Р. М. Высшая математика. В 5 частях. Ч. 2 / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Вышэйшая школа, 1985. – 221 с.
6. Жевняк, Р. М. Высшая математика. В 5 частях. Ч. 4 / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Вышэйшая школа, 1987. – 240 с.
7. Индивидуальные задания по высшей математике. Учебное пособие. В 4 ч. Ч. 3. Ряды. Кратные и криволинейные интегралы. Элементы теории поля / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юроть ; под ред. А. П. Рябушко. – Изд. 6-е, испр. – Минск : Вышэйшая школа, 2013. – 367 с.
8. Математика. Дифференциальные уравнения и системы дифференциальных уравнений. Операционное исчисление : практикум / сост.: А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2019. – 101 с.
9. Математика. Кратные интегралы. Элементы теории поля. Ряды : практикум / сост.: А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2021. – 107 с.
10. Ровба, Е. А. Математика для инженеров: примеры и задачи. Учебное пособие. В 4 частях. Ч. 2 / Е. А. Ровба, Н. С. Березкина ; УО «ГрГУ им. Я. Купалы ; под ред. Е. А. Ровбы. – Минск : РИВШ, 2019. – 386 с.
11. Рябушко, А. П. Индивидуальные задания по высшей математике. Учебное пособие. В 4 ч. Ч. 4. Операционное исчисление. Элементы теории устойчивости. Теория вероятностей. Математическая статистика / А. П. Рябушко. – Изд. 4-е – Минск : Вышэйшая школа, 2013. – 336 с.

Приложение А

Вспомогательные таблицы

Таблица А.1 – Таблица производных основных элементарных функций

1)	$C' = 0$, где $C = Const$;	2)	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$;
3)	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, $a > 0$, $a \neq 1$;	4)	$(e^x)' = e^x$;
5)	$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$;	6)	$(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $x > 0$;
7)	$(\sin x)' = \cos x$;	8)	$(\cos x)' = -\sin x$;
9)	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;	10)	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$, $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;
11)	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $ x < 1$;	12)	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $ x < 1$;
13)	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$;	14)	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$;
15)	$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$;	16)	$(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$;
17)	$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$;	18)	$(\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$, $x \neq 0$.

Таблица А.2 – Таблица основных неопределённых интегралов

1)	$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$;	2)	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$, $x \neq 0$;
3)	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$;	4)	$\int e^x dx = e^x + C$;
5)	$\int \sin x dx = -\cos x + C$;	6)	$\int \cos x dx = \sin x + C$;
7)	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$, $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;	8)	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$, $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;
9)	$\int \frac{dx}{\sin x} = \ln \left \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right + C$, $x \neq \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;	10)	$\int \frac{dx}{\cos x} = \ln \left \operatorname{tg} \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right + C$, $x \neq \pi/2 + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$;
11)	$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C$, $a \neq 0$;	12)	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$, $ x < a $;
13)	$\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a} \ln \left \frac{x+a}{x-a} \right + C$;	14)	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right + C$;
15)	$\int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$;	16)	$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C$;
17)	$\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C$;	18)	$\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C$, $x \neq 0$.

Учебное издание

**МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ.
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА И
ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА**

Практикум

Составители:

Коваленко Александр Вильямович
Дмитриев Александр Петрович

Редактор *Р.А. Никифорова*
Корректор *А.С. Прокопюк*
Компьютерная верстка *А.В. Коваленко*

Подписано к печати 25.06.2026. Формат 60х90 ¹/₁₆. Усл. печ. листов 5,0.
Уч.-изд. листов 6,2. Тираж 80 экз. Заказ 179.

Учреждение образования «Витебский государственный технологический университет»
210038, г. Витебск, Московский пр., 72.

Отпечатано на ризографе учреждения образования

«Витебский государственный технологический университет».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/172 от 12 февраля 2014 г.

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 3/1497 от 30 мая 2017 г.