

Министерство образования Республики Беларусь
Учреждение образования
«Витебский государственный технологический университет»

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

В 2-х частях
ЧАСТЬ 1

Практикум для студентов специальностей
6-05-0716-01 «Метрология, стандартизация и контроль качества»,
6-05-0723-02 «Технологии и проектирование одежды и обуви»,
6-05-0713-04 «Автоматизация технологических процессов и производств»,
7-07-0712-02 «Теплоэнергетика и теплотехника»

Витебск
2026

УДК 687.03 (075)
ББК 35.184Я7
Л68

Р е ц е н з е н т ы:

заведующий кафедрой «Информационные системы и технологии»
кандидат технических наук, доцент Казаков В. Е.;

директор государственного предприятия «НТПВГТУ» Луцейкович В. И.

Одобрено кафедрой «Технология машиностроения» УО «ВГТУ»,
протокол № 8 от 20.03.2026.

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом
УО «ВГТУ», протокол № 8 от 28.04.2026.

Буткевич, В. Г.

Л68 Теоретическая и прикладная механика : практикум. В 2-х частях. Часть 1 /
Сост. В. Г. Буткевич, Г. И. Москалев, Т. А. Мачихо. – Витебск : УО «ВГТУ»,
2026. – 93 с.

В практикуме дана краткая теория, приведен порядок выполнения различных видов задач и вопросы для самоконтроля.

Практикум составлен для студентов механических и технологических специальностей дневной и заочной форм обучения.

УДК 687.03(075)
ББК 35.184Я7

© УО «ВГТУ», 2026

СОДЕРЖАНИЕ

Раздел 1. Статика твердого тела	5
Задачи	9
Раздел 2. Деформация растяжения и сжатия. Основные положения растяжения и сжатия	18
Задачи	23
Раздел 3 Сдвиг и кручение	29
Задачи	37
Раздел 4 Деформация изгиба.....	42
Задачи	49
Раздел 5 Геометрический и кинематический расчеты зубчатых передач.....	53
5.1 Геометрический расчет зубчатых передач	53
Задачи	57
5.2 Кинематический расчет зубчатых передач.....	58
Задачи	62
5.3 Эвольвентное зацепление	73
5.4 Силы взаимодействия в эвольвентном зацеплении.....	83
ПРИЛОЖЕНИЕ А. Данные для расчета	89
Список использованных источников	92

ВВЕДЕНИЕ

Техническая механика является одной из общеинженерных дисциплин, изучаемых студентами технических специальностей высших учебных заведений не машиностроительного профиля. В результате изучения дисциплины студенты приобретают объем знаний, позволяющих изучить и математически описать физику и механику материалов и процессов, сопровождающих работу различных видов механизмов. У них формируются также основы навыков по расчету и конструированию типовых деталей и узлов механических устройств.

Развитию у студентов умений применять базовые научно-теоретические знания для решения теоретических и практических задач способствуют практические занятия. Для этой цели разработано настоящее пособие, в котором представлены задачи, относящиеся к таким разделам дисциплины, как основы расчетов на прочность и жесткость, кинематическое исследование механизмов, точность механизмов и др. В сборнике, кроме задач по всем темам, представлены индивидуальные задания, выполнение которых будет способствовать развитию у студентов навыков самостоятельной работы.

Раздел 1. Статика твердого тела

Определение реакций в опорах при действии на механическую систему плоской системы сил

Свободное твердое тело, т. е. тело, на которое не действуют другие тела, может совершать под действием сил произвольные движения в пространстве. Вступление твердого тела в контакт с другими телами приводит к ограничению его возможных движений. Тела, ограничивающие перемещения твердого тела, называют *связями*. Со стороны связей на твердое тело действуют силы, называемые *реакциями связей*. Величина и направление реакций связей зависят от задаваемых сил и характера ограничений. Тело, лишенное всяких возможностей перемещаться, становится неподвижным, т. е. находится в покое, а система сил, действующих на тело, называется *уравновешенной*. При этом в состав системы сил входят как заданные силы, так и заранее неизвестные реакции связей, определение которых является одной из задач механики.

Рассмотрим механическую систему в виде закрепленного на опорах стержня, на который действует плоская система заданных сил. Стержень, закрепленный на опорах и нагруженный плоской системой сил, называется *балкой*. Существует три типа опор и три типа балок. На рисунке 1.1 изображены следующие опоры:

- а) шарнирно-подвижная;
- б) шарнирно-неподвижная;
- в) жесткозакрепленная.

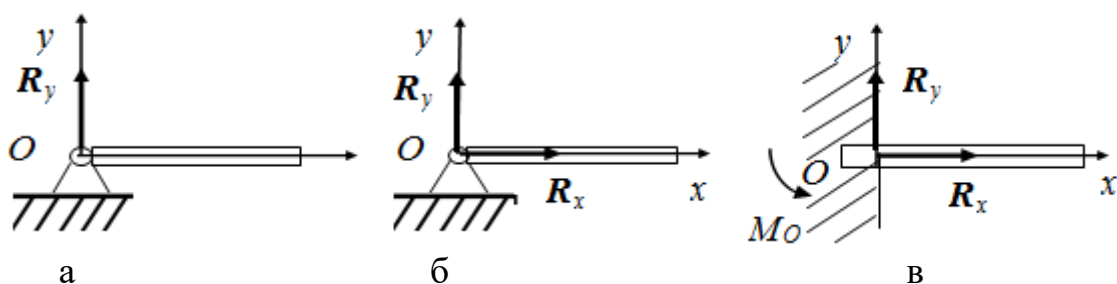


Рисунок 1.1 – Типы опор

В зависимости от способа крепления стержня (условия опирания) различают три типа балок (рис. 1.2):

- а) шарнирно-закрепленная;
- б) шарнирно-консольная;
- в) консольная (консоль).

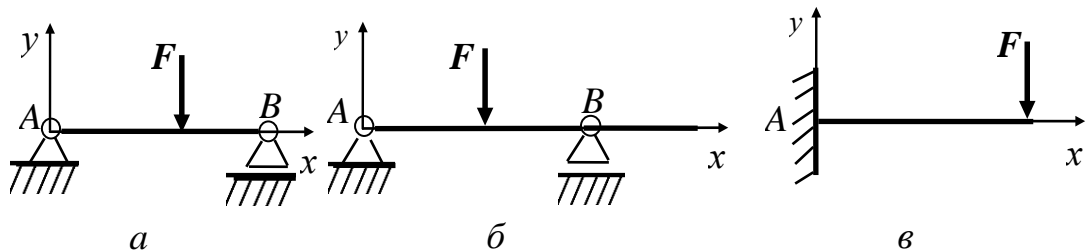


Рисунок 1.2 – Типы балок в зависимости от способа крепления

При действии на балку внешней нагрузки в опорах возникают реакции, по направлению совпадающие с направлением запрещенного данной опорой перемещения балки. Так шарнирно-подвижная опора (см. рис. 1.1 а) исключает перемещение балки в направлении оси OY , что обуславливает появление реакции опоры R_y .

Для шарнирно-неподвижной опоры, исключающей перемещение балки в направлении осей OX и OY (см. рис. 1.1 б), будут возникать реакции R_x и R_y . При жесткозакрепленной опоре (см. рис. 1.1 в), исключающей как перемещение, так и поворот сечения балки, наряду с реакциями R_x и R_y возникает и реактивный момент M_0 .

Для нахождения реакций связей при действии плоской системы сил используют три уравнения равновесия:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad \sum F_{iy} = 0; \quad \sum m_z(F_i) = 0, \text{ т. е.} \quad (1.1)$$

- сумма проекций всех сил на ось X равна нулю;
- сумма проекций всех сил на ось Y равна нулю;
- сумма моментов всех сил относительно оси Z равна нулю.

Учитывая, что начало осей координат можно совместить с любой точкой, то последнее уравнение возможно заменить уравнением моментов сил относительно произвольной точки.

Пример 1.1 Определить опорные реакции двухконсольной балки (рис. 1.3), нагруженной сосредоточенной силой $P = 8$ кН, направленной под углом $\alpha = 60^\circ$ к оси балки, сосредоточенным моментом $M = 16$ кНм и распределенной нагрузкой интенсивностью $q = 2$ кН/м. Для определения длин участков балки принять $a = 1$ м.

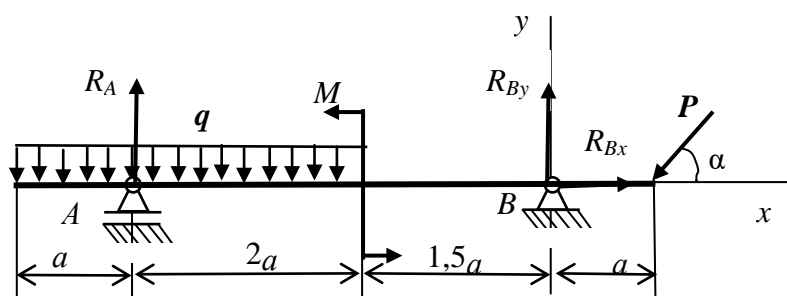


Рисунок 1.3 – Расчетная схема двухконсольной балки

Решение. В шарнирно подвижной опоре A балки реакция R_A будет направлена перпендикулярно оси балки. Выберем направление реакции R_A вверх – в положительном направлении оси y . Для шарнирно неподвижной опоры B разложим реакцию R_B на две составляющие: R_{Bx} и R_{By} , направив их в положительном направлении осей, соответственно, x и y .

Балка нагружена плоской системой сил, условия равновесия для которой записываются в виде: $\Sigma F_{ix} = 0$; $\Sigma F_{iy} = 0$; $\Sigma m_z(F_i) = 0$. Запишем условие равновесия системы сил, действующих на балку, в проекциях этих сил на ось x .

Отличные от нуля проекции на ось x имеют только сила P и реакция опоры R_B . $\Sigma F_{ix} = R_{Bx} - P \cos \alpha = 0$. Откуда

$$R_{Bx} = P \cos \alpha = 8 \cos 60^\circ = 4 \text{ (кН)}. \quad (1.2)$$

Для нахождения реакции R_A и вертикальной составляющей R_{By} реакции R_B будем использовать уравнение моментов сил. Записав уравнение относительно точки A (из уравнения исключается реакция R_A), определим R_{By} , а из уравнения моментов сил относительно точки B (из уравнения исключается R_B) определим R_A . Положительным примем момент силы, направленный против часовой стрелки, отрицательным – по часовой стрелке.

$$\Sigma m_A(F_i) = 0,5qa^2 - 2qa^2 + M + 3,5a R_{By} - 4,5a P \sin \alpha = 0; \quad (1.3)$$

$$R_{By} = (-0,5qa^2 + 2qa^2 - M + 4,5a P \sin \alpha) / 3,5a = 5,193 \text{ (кН)}. \quad (1.4)$$

$$\Sigma m_B(F_i) = 9 qa^2 + M - 3,5a R_A - a P \sin \alpha = 0; \quad (1.5)$$

$$R_A = (9 qa^2 + M - a P \sin \alpha) / 3,5a = 7,735 \text{ (кН)}. \quad (1.6)$$

Для проверки правильности определения значений R_A и R_{By} воспользуемся уравнением для суммы проекций всех сил на ось y . При правильном определении значений R_A и R_{By} эта сумма будет равна нулю. В нашем случае

$$\Sigma F_{iy} = R_A - 3aq + R_{By} - P \sin \alpha = 7,735 - 6 + 5,193 - 8 \cdot 0,866 = 0. \quad (1.7)$$

Опорная реакция R_A и составляющая R_{By} опорной реакции R_B определены верно.

$$\text{Ответ: } R_A = 7,735 \text{ кН; } R_B = (R_{Bx}^2 + R_{By}^2)^{1/2} = (4^2 + 5,193^2)^{1/2} = 6,555 \text{ (кН)}.$$

Пример 1.2. Определить реакции заделки A жестко закрепленной балки (рис. 1.4), на которую действует сила $P = 15$ кН, сосредоточенный момент

$M = 12$ кНм и распределенная нагрузка интенсивностью $q = 6$ кН/м. Для определения длин участков балки примем значение $a = 1$ м.

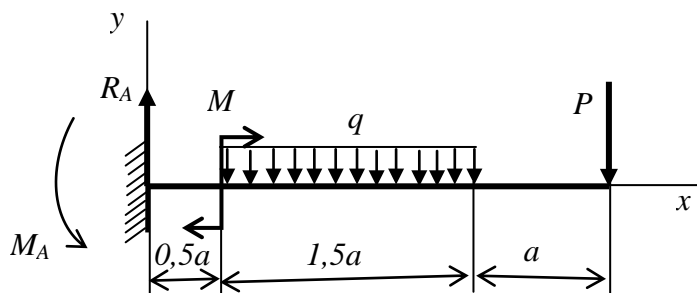


Рисунок 1.4 – Расчетная схема жестко закрепленной балки

Решение. Жесткое закрепление балки исключает в точке A как линейное перемещение, так и поворот сечения. Следовательно, в точке A будет присутствовать реакция R_A и реактивный момент M_A . Реакция R_A будет перпендикулярна оси x , т. к. другие внешние силы, действующие на балку, не имеют отличные от нуля проекции на ось x .

Величину реакции R_A определим из условия $\Sigma F_{iy} = 0$.

$$\Sigma F_{iy} = R_A - 1,5aq - P = 0; \text{ отсюда } R_A = 1,5aq + P = 1,5 \cdot 1 \cdot 6 + 15 = 24 \text{ (кН)} \quad (1.8)$$

Для определения значения реактивного момента M_A запишем уравнение моментов сил относительно точки A :

$$\Sigma m_A(F_i) = M_A - M - 1,5aq \cdot 1,25a - 3aP = 0, \text{ отсюда} \quad (1.9)$$

$$M_A = M + 1,5aq \cdot 1,25a + 3aP = 12 + 1,5 \cdot 6 \cdot 1,25 + 3 \cdot 15 = 68,25 \text{ (кНм)}. \quad (1.10)$$

Ответ: $R_A = 24$ кН, $M_A = 68,25$ кНм.

Задачи

1.1 Стержни AC и BC соединены между собой и с вертикальной стеной посредством шарниров. На шарнирный болт C действует вертикальная сила $P = 1000$ Н. Определить реакции этих стержней на шарнирный болт C , если углы, составляемые P стержнями со стеной, равны: $\alpha = 30^\circ$ и $\beta = 60^\circ$. Ответ: 866 Н; 500 Н.

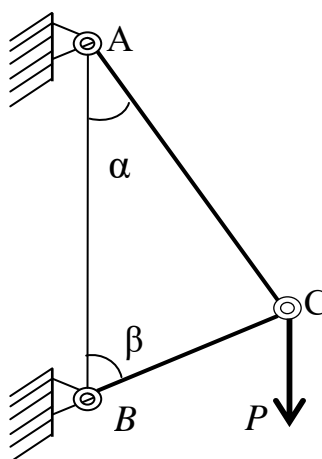


Рисунок 1.5 – Расчетная схема стержней, соединенных шарнирами

1.2 Уличный фонарь подвешен в точке B к середине троса ABC , прикрепленного концами к крюкам A и C , находящимся на одной горизонтали. Определить натяжения T_1 и T_2 в частях троса AB и BC , если вес фонаря равен 150 Н, длина всего троса ABC равна 20 м и отклонение точки его подвеса от горизонтали $BD = 0,1$ м. Весом троса пренебречь.

Ответ: $T_1 = T_2 = 7,5$ кН

1.3 Через два блока A и B , находящихся на одной горизонтальной прямой $AB = l$, перекинута веревка $CAEBD$. К концам C и D веревки подвешены гири весом p каждая, а к точке E – гиря весом P . Определить, пренебрегая трением на блоках и их размерами, расстояние x от точки E до прямой AB в положении равновесия. Весом веревки пренебречь.

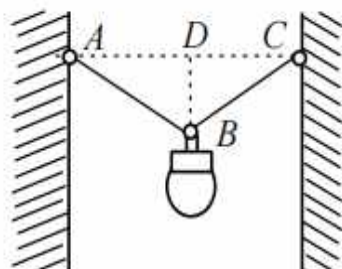


Рисунок 1.6 – Схема подвеса уличного фонаря на тросе

Ответ: $\frac{Pl}{2\sqrt{4p^2 - P^2}}$.

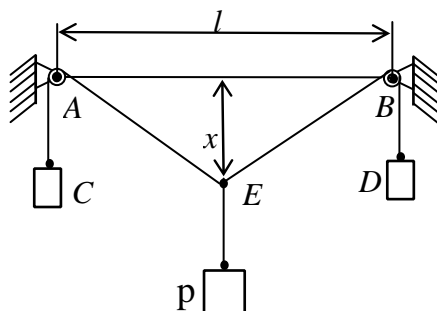


Рисунок 1.7 – Расчетная схема системы с двумя блоками

1.4 К веревке AB , один конец которой закреплен в точке A , привязаны в точке B груз P и веревка BCD , перекинутая через блок; к концу ее D привязана гиря Q весом 100 Н. Определить, пренебрегая трением на блоке, натяжение T веревки AB и величину груза P , если в положении равновесия углы, образуемые веревками с вертикалью, равны: $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 60^\circ$.

Ответ: $T = 122$ Н; $P = 137$ Н.

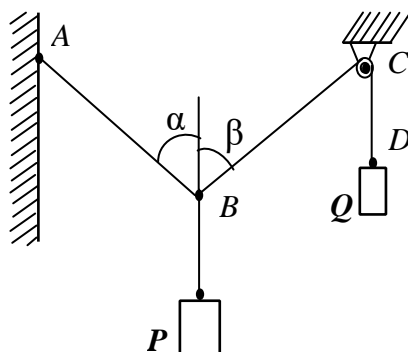


Рисунок 1.8 – Схема определения натяжения веревки и величины груза

1.5 Шарик B весом P подвешен к неподвижной точке A посредством нити AB и лежит на поверхности гладкой сферы радиусом r ; расстояние от точки A до поверхности сферы $AC = d$, длина нити $AB = l$, прямая AO вертикальна. Определить натяжение T нити и реакцию Q сферы. Радиусом шарика пренебречь. Ответ: $T = P \frac{l}{d+r}$; $Q = P \frac{r}{d+r}$

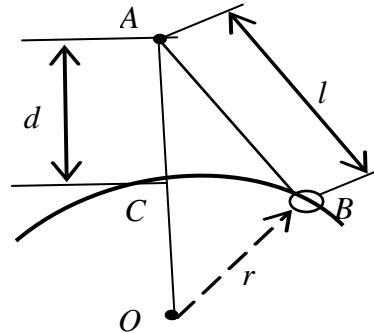


Рисунок 1.9 – Расчетная схема шарика на гладкой сфере

1.6 Балка AB поддерживается в горизонтальном положении стержнем CD ; крепления в A , C и D – шарнирные. Определить реакции опор A и D , если на конце балки действует вертикальная сила $P = 50$ кН. Размеры указаны на чертеже. Весом пренебречь.

Ответ: $R_A = 79$ кН; $R_D = 106$ кН.

1.7 Балка AB шарнирно закреплена на опоре A , у конца B она положена на катки. В середине балки, под углом 45° к ее оси, действует сила $P = 20$ кН. Определить реакции опор для случаев a и b , взяв размеры из чертежей и пренебрегая весом балки.

Ответ: $a) R_A = 15,8$ кН; $R_B = 7,1$ кН; $b) R_A = 22,4$ кН; $R_B = 10$ кН.

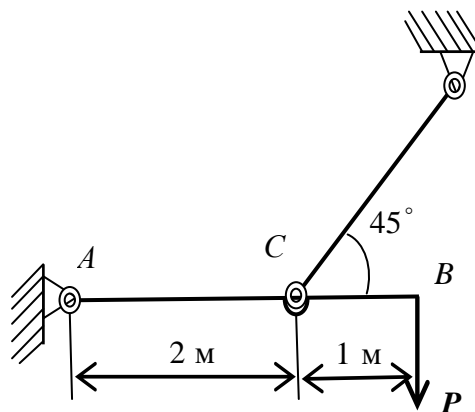


Рисунок 1.10 – Расчетная схема балки со стержневой опорой

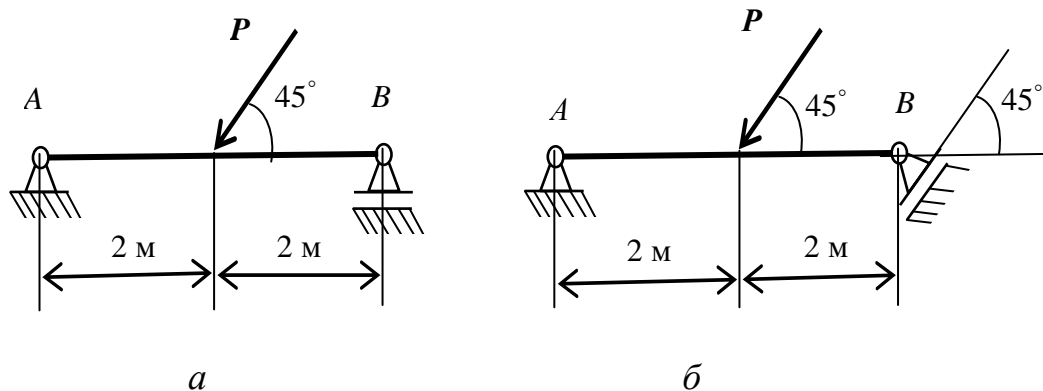


Рисунок 1.11 – Расчетная схема балки с шарнирной и катковой опорами

1.8 Электрический провод ACB натянут между двумя столбами так, что образует пологую кривую, стрела провисания которой $CD = f = 1$ м. Расстояние между столбами $AB = l = 40$ м. Вес провода $Q = 0,4$ кН. Определить натяжения провода: T_C в средней точке, T_A и T_B на концах. При решении задачи считать, что вес каждой половины провода приложен на расстоянии $l/4$ от ближайшего столба.

Ответ: $T_C = Ql/(8f) = 2$ кН; $T_A = T_B = 2,01$ кН.

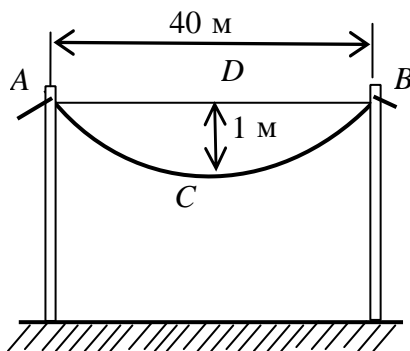


Рисунок 1.12 – Схема провисания электрического провода

1.9 Прямолинейный однородный брус AB и невесомый стержень BC с криволинейной осью произвольного очертания соединены шарнирно в точке B и также соединены с опорами A и C , расположенными на одной горизонтали AC . Прямые AB и BC образуют с прямой AC углы $\alpha = 45^\circ$. Определить реакции опор A и C .

Ответ: $R_A = \frac{\sqrt{10}}{4} P$; $R_C = \frac{\sqrt{2}}{4}$;

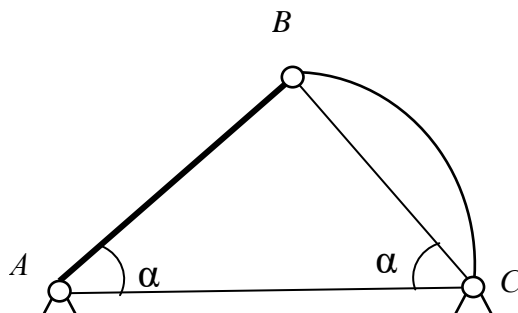


Рисунок 1.13 – Расчетная схема системы из бруса и стержня

1.10 Однородный стержень AB , длина которого 1 м, а вес 20 Н, подвешен горизонтально на двух параллельных веревках AC и BD . К стержню в точке E на расстоянии $AE = 0,25$ м подвешен груз $P = 120$ Н. Определить натяжение веревок T_C и T_D . Ответ: $T_C = 100$ Н; $T_D = 40$ Н.

1

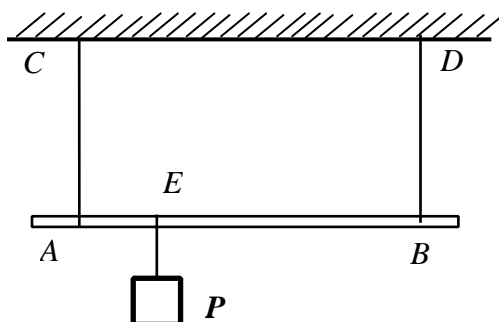


Рисунок 1.14 – Расчетная схема стержня, подвешенного на двух веревках

1.11 Балка AB длиной 10 м и весом 2 кН лежит на двух опорах C и D . Опора C отстоит от конца A на 2 м, опора D от конца B – на 3 м. Концы балки A и B оттягиваются вертикально вверх посредством перекинутого через блок троса, на котором подвешен груз Q весом 3 кН. На расстоянии 3 м от конца A к балке подвешен груз P весом 8 кН. Определить реакции опор, пренебрегая трением на блоке.

Ответ: $R_C = 3$ кН; $R_D = 4$ кН.

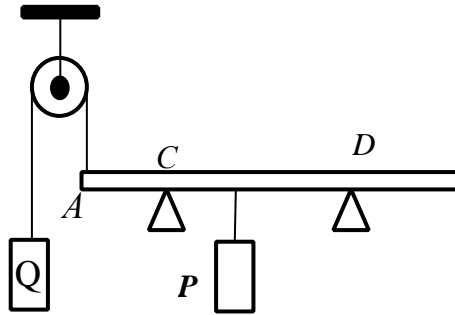


Рисунок 1.15 – Расчетная схема балки с блоком и опорными реакциями

1.12 Однородная горизонтальная балка длиной 4 м и весом 5 кН заложена в стену, толщина которой равна 0,5 м, так, что опирается на нее в точках A и B . Определить реакции в этих точках, если к свободному концу балки C подвешен груз P весом 40 кН. Ответ: $R_A = 340$ кН; $R_B = 295$ кН.

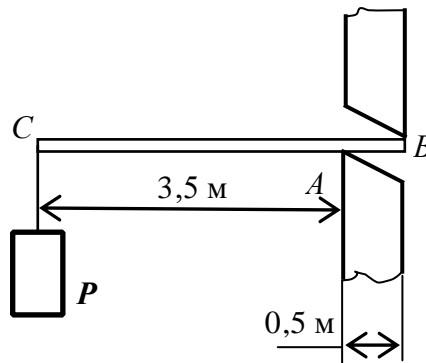


Рисунок 1.16 – Расчетная схема балки, заделанной в стену

1.13 Горизонтальная балка, поддерживающая балкон, подвергается действию равномерно распределенной нагрузки интенсивностью $q = 2$ кН/м. На балку у свободного конца передается нагрузка от колонны $P = 2$ кН. Расстояние оси колонны от стены $l = 1,5$ м. Определить реакции заделки.

Ответ: $R = 5$ кН; $M = 5,25$ кНм.

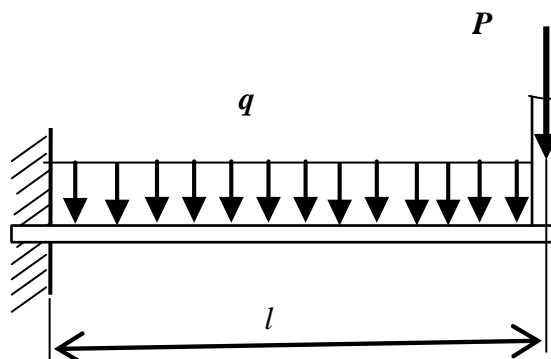


Рисунок 1.17 – Расчетная схема балки с равномерно распределенной нагрузкой

1.14 На двухконсольную Q горизонтальную балку действует пара сил (P , P), на левую консоль – равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q , а в точке D правой консоли – вертикальная нагрузка Q . Определить реакции опор, если $P = 10$ кН, $Q = 20$ кН, $q = 20$ кН/м, $a = 0,8$ м.

Ответ: $R_A = 15,2$ кН; $R_B = 21,2$ кН.

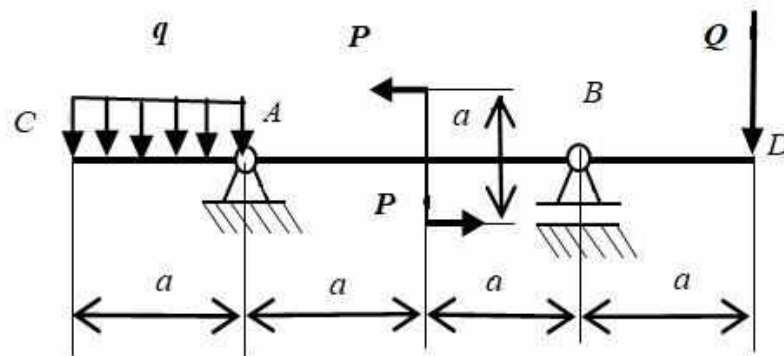


Рисунок 1.18 – Расчетная схема двухконсольной балки

1.15 Определить реакции опор A и B балки, находящейся под действием одной сосредоточенной силы и пары сил. Нагрузка и размеры указаны на рисунке к задаче.

Ответ: $X_A = 20$ кН; $Y_A = -43,2$ кН; $Y_B = 77,8$ кН.

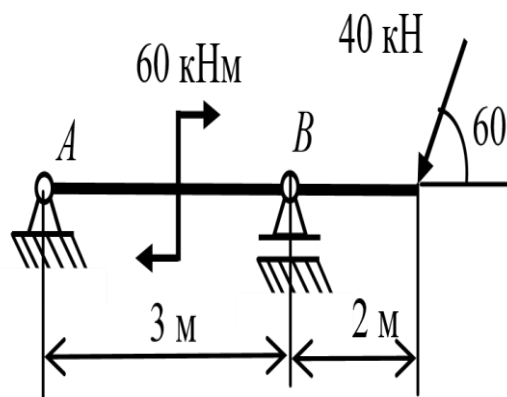


Рисунок 1.19 – Расчетная схема балки с сосредоточенной силой и парой сил

1.16 Определить реакции опор A и B балки, находящейся под действием двух сосредоточенных сил и равномерно распределенной нагрузки. Интенсивность распределенной нагрузки, величины сил и размеры указаны на рисунке к задаче.

Ответ: $X_A = 26$ кН; $Y_A = 42$ кН; $X_B = 156$ кН.

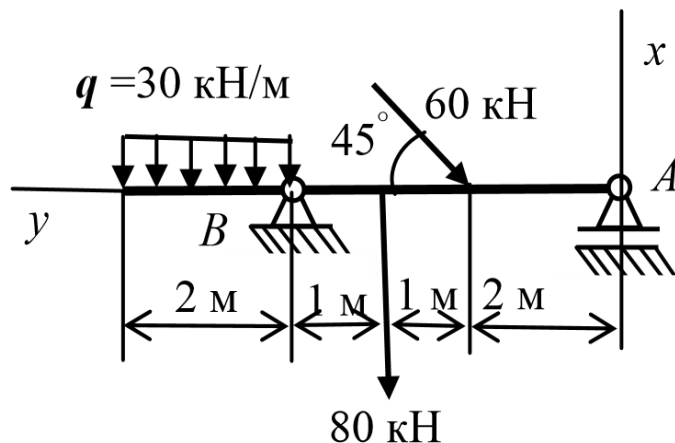


Рисунок 1.20 – Расчетная схема балки с комбинированной нагрузкой

1.17 Определить реакции заделки консольной балки, изображенной на рисунке к задаче и находящейся под действием сосредоточенной силы и пары сил. Ответ: $X = 10 \text{ кН}$; $Y = 17,3 \text{ кН}$; $M = 4,7 \text{ кНм}$.

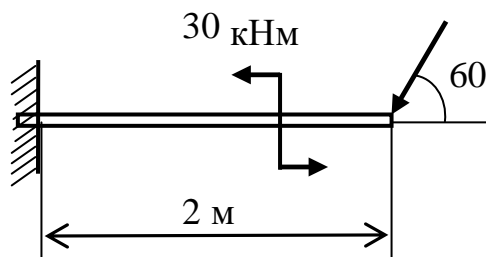


Рисунок 1.21 – Расчетная схема консольной балки

1.18 Определить реакции заделки консольной балки, изображенной на рисунке к задаче и находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки, сосредоточенной силы и пары сил.

Ответ: $X = 28 \text{ кН}$; $Y = 17 \text{ кН}$; $M = -53,5 \text{ кНм}$

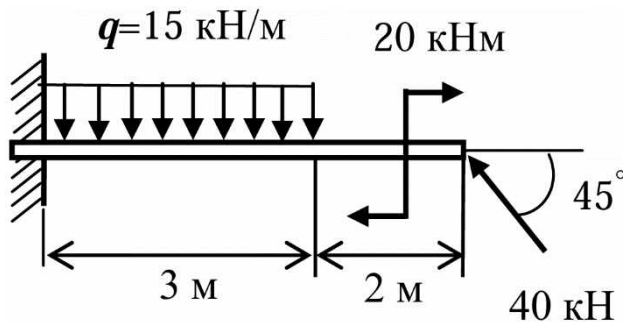


Рисунок 1.22 – Расчетная схема консольной балки с комбинированной нагрузкой

1.19 Определить реакции заделки консольной балки, изображенной на рисунке к задаче и находящейся под действием равномерно распределенной нагрузки, одной сосредоточенной силы и двух пар сил.

Ответ: $X = 118$ кН; $Y = -28$ кН; $M = -868$ кНм.

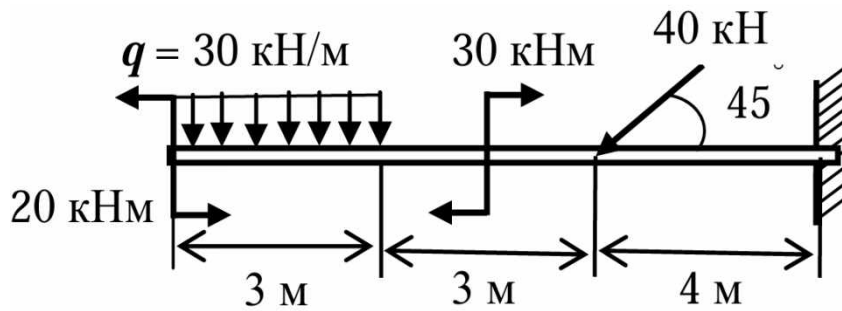


Рисунок 1.23 – Расчетная схема консольной балки с несколькими нагрузками

1.20 Определить реакции опор A и B горизонтальной балки AB , если на нее действует сосредоточенная сила P , пара сил с моментом m и равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q . Схемы десяти типов балок даны на рисунке к задаче, а числовые данные для расчета приведены в таблице 1.1.

Таблица 1.1 – Исходные данные для расчета реакций в опорах

Величина	Варианты									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P , кН	2	12	14	16	18	20	22	24	26	28
q , кН/м	8	7,5	7	6,5	6	5,5	5	4,5	4	3,5
m , Н м	8000	7500	7000	6500	6000	5500	5000	4500	4000	3500
l , м	8	8	7	7	6	6	5	5	4	4
d_1 , м	4	4	4	3	3	3	2	2	2	2
d_2 , м	3	3	3	2	2	2	1	1	1	1
α , рад	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/6$

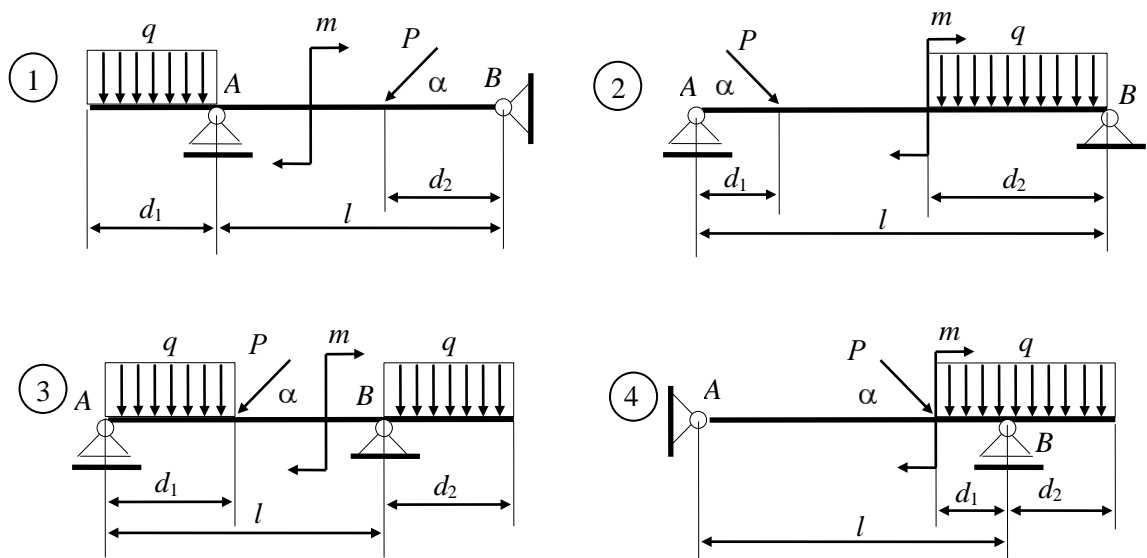


Рисунок 1.24.1 – Схемы десяти типов балок для расчета опорных реакций

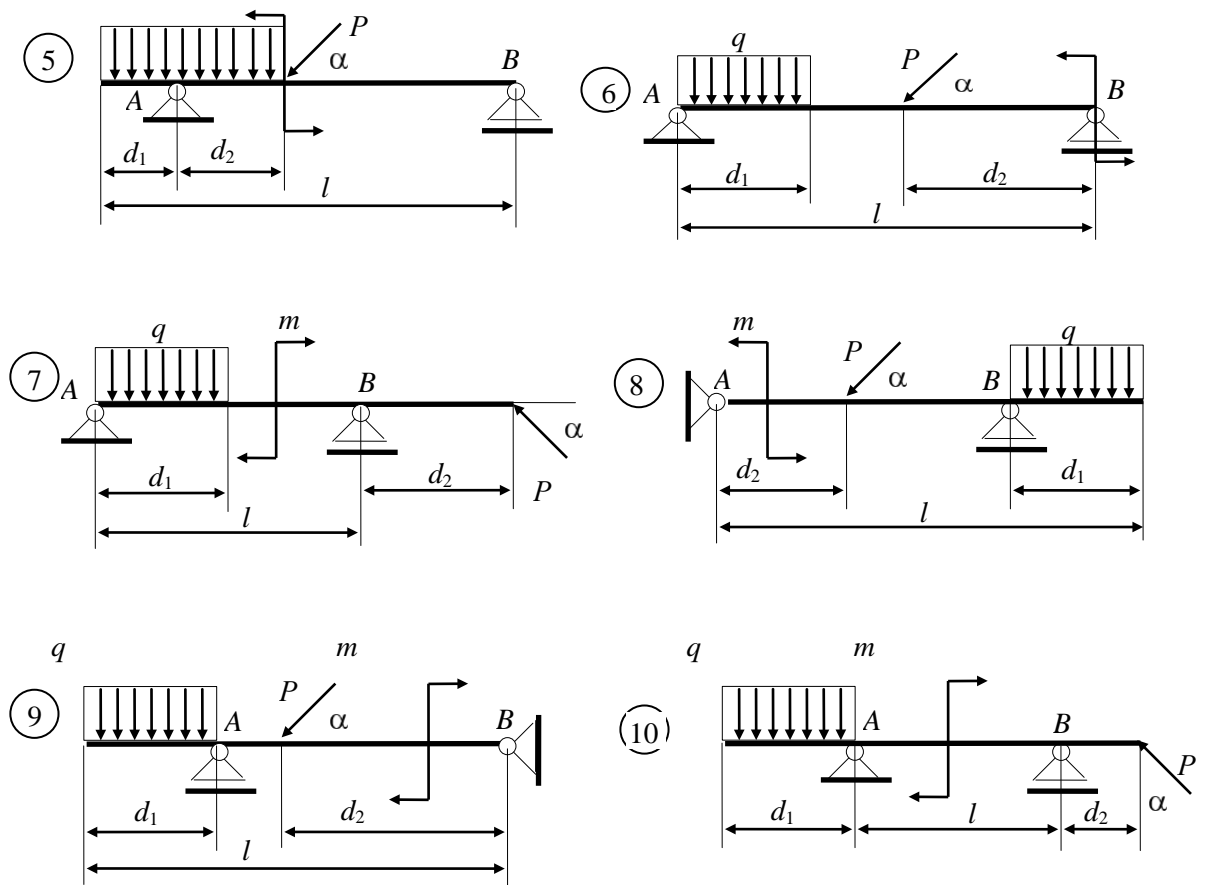


Рисунок 1.24.2 – Схемы десяти типов балок для расчета опорных реакций (продолжение)

Раздел 2. Деформация растяжения и сжатия. Основные положения растяжения и сжатия

Внутренние силы упругости, возникающие в материале образца, подвергнутого деформации растяжения или сжатия, характеризуются одной из составляющих главного вектора внутренних сил упругости – нормальной силой. Нормальная сила направлена перпендикулярно поперечному сечению образца в направлении деформации.

Для нахождения внутренних сил используется метод сечений. В соответствии с этим методом нормальная сила N , действующая в данном сечении, будет равна сумме проекций всех внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения, на нормаль к сечению. Это утверждение математически запишется в виде

$$N = \sum_1^n F_i + \sum_1^k \int q_i dx, \quad (2.1)$$

где F_i – проекция на нормаль к сечению i -й силы из n внешних сосредоточенных сил; q_i – интенсивность i -й распределенной силы из k внешних распределенных сил.

Интегрирование производится по длине каждого участка, на который действует распределенная сила интенсивностью q_i , а суммирование – по всем участкам.

Оценкой интенсивности внутренних сил упругости, действующих по некоторому сечению тела, является нормальное напряжение σ , определяемое как нормальная сила, действующая на единице площади и приложенная в данной точке сечения. При выполнении расчетов принимают, что нормальные напряжения как при растяжении, так и при сжатии тела равномерно распределяются по его сечению. Тогда нормальные напряжения определяются как отношение нормальной силы N к площади сечения S , т. е.

$$\sigma = \frac{N}{S}. \quad (2.2)$$

Деформация стержня характеризуется абсолютными и относительными деформациями. Если $\Delta l = l_1 - l$ и $\Delta d = d - d_1$ соответственно абсолютные продольная и поперечная деформации стержня при его растяжении, то $\varepsilon = \Delta l/l$ и $\mu = \Delta d/d$ будут соответственно относительной продольной и относительной поперечной деформациями. Здесь l и d – длина и поперечный размер стержня до деформации, а l_1 и d_1 – после деформации. Отношение относительной поперечной деформации к относительной продольной называется коэффициентом Пуассона ν : $\nu = \mu/\varepsilon$. Коэффициент Пуассона характеризует упругие свойства материала и для большинства материалов (металлов) является величиной постоянной ($0 \leq \nu \leq 0,5$).

В соответствии с законом Гука нормальные напряжения при деформации растяжения (сжатия) пропорциональны относительным деформациям, т. е. $\sigma = E \varepsilon$. Коэффициент пропорциональности E , называемый модулем упругости 1-го рода, характеризует упругие свойства материала деформируемого тела. Если учесть, что $\sigma = N/S$, а $\varepsilon = \Delta l/l$, то можно перейти от выражения закона Гука в относительных величинах к выражению в абсолютных величинах в виде

$$\Delta l = \frac{Nl}{ES}. \quad (2.3)$$

Произведение ES называется жесткостью стержня при растяжении (сжатии). Этот параметр учитывает влияние на деформацию стержня как свойств материала, так и его конструктивных особенностей (площади сечения). Чем больше жесткость – тем меньше деформация тела.

Для тел (стержней), состоящих из нескольких участков, в пределах которых значения E , N и S постоянные, величина деформации всего тела будет определяться как сумма деформаций всех его участков, т. е.

$$\Delta l = \sum \Delta l_i = \sum \frac{N_i l_i}{E_i S_i}. \quad (2.4)$$

Понятия «деформация» и «перемещение» не всегда обозначают одно и то же. Возможно, что некоторая часть тела может не деформироваться, но перемещаться за счет деформации других частей тела.

Расчеты на прочность при деформации растяжения (сжатия) заключаются в определении нормальных напряжений, действующих в сечениях, и сравнении их значений со значениями предельно допустимых напряжений для материала данного тела, т. е.

$$\zeta = N/S \leq [\zeta], \quad (2.5)$$

где $[\zeta]$ – предельно допустимое напряжение для материала деформируемого тела. Из последнего выражения можно найти предельное значение нормальной силы $[N] \leq S[\zeta]$, или минимально допустимое значение площади сечения $S \geq N/[\zeta]$.

Пример 2.1 Определить напряжения в сечениях 1–1 и 2–2 и полное удлинение стального стержня, нагруженного силами $P_1 = 20$ кН, $P_2 = P_3 = 10$ кН, как показано на рисунке к примеру, если площадь его поперечного сечения равна $S = 400$ мм². Принять модуль упругости стали равным $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

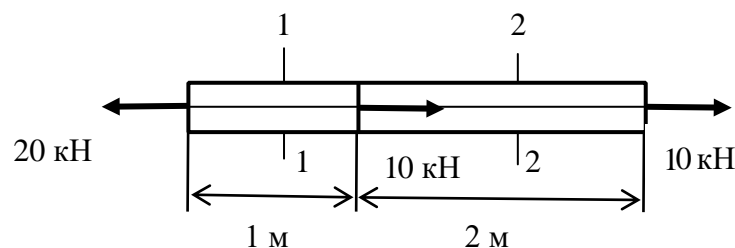


Рисунок 2.1 – Расчетная схема стального стержня, нагруженного сосредоточенными силами

Решение: мысленно рассекаем стержень сечением 1–1 и отбрасываем, например, его правую часть. Для того, чтобы уравновесить внешнюю силу P_1 , приложенную к оставшейся левой части, равнодействующая внутренних сил в сечении 1–1 должна по модулю равняться силе P_1 и быть направленной вправо, в наружную сторону от оставшейся части. Таким образом, в сечении 1–1 усилие растягивающее и равно $N_1 = P_1 = 20$ кН. Путем подобных рассуждений устанавливаем, что в сечении 2–2 усилие тоже растягивающее и равно $N_2 = 10$ кН.

Теперь определим напряжения. В сечении 1–1 оно равно

$$\sigma_{1-1} = \frac{N_1}{S} = \frac{2 \cdot 10^4}{400} = 50 \frac{H}{\text{мм}^2} = 50 \text{ МПа}, \quad (2.6)$$

а в сечении 2-2

$$\sigma_{2-2} = \frac{N_2}{S} = \frac{1 \cdot 10^4}{400} = 25 \frac{H}{\text{мм}^2} = 25 \text{ МПа}. \quad (2.7)$$

Так как усилие в левом участке (длиной 1 м) не равно усилию в правом участке (длиной 2 м), то деформации каждого участка надо определить отдельно. Полная деформация стержня получится путем суммирования (алгебраического, если они разных знаков) деформаций отдельных участков. В нашем случае

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 = \frac{N_1 l_1}{ES} + \frac{N_2 l_2}{ES} = \frac{2 \cdot 10^4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 400} + \frac{1 \cdot 10^4 \cdot 2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 400} = 0,5 \text{ мм}.$$

Ответ: $\zeta_{1-1} = 50 \text{ МПа}$, $\zeta_{2-2} = 25 \text{ МПа}$, $\Delta l = 0,5 \text{ мм}$.

Пример 2.2 Стальной стержень круглого сечения растягивается усилием 100 кН. Относительное удлинение не должно превышать 1/2000, а напряжение не должно быть больше 120 МПа. Найти наименьший диаметр стержня, удовлетворяющий этим требованиям.

Решение: выразим относительную деформацию через нагрузку P , площадь поперечного сечения $\pi d^2/4$ и модуль упругости E и приравняем ее заданной допускаемой относительной деформации $[\varepsilon]$:

$$\frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}} \leq [\varepsilon]. \quad (2.8)$$

Отсюда найдем необходимый диаметр, удовлетворяющий данному условию:

$$d = 2 \sqrt{\frac{P}{\pi E [\varepsilon]}} = 2 \sqrt{\frac{10^5 \cdot 2 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 2 \cdot 10^5}} = 35,7 \text{ мм}. \quad (2.9)$$

Теперь независимо от предыдущего решения напишем условие прочности через

P , $\pi d^2/4$ и $[\zeta]$:

$$\frac{P}{\frac{\pi d^2}{4}} \leq [\sigma], \quad (2.10)$$

откуда:

$$d = 2 \sqrt{\frac{P}{\pi [\sigma]}} = 2 \sqrt{\frac{10^5}{3,14 \cdot 120}} = 32,5 \text{ мм}. \quad (2.11)$$

Из двух найденных диаметров необходимо взять больший, т. е. 35,7 мм, так как меньший диаметр не будет удовлетворять условию жесткости.

Ответ: $d = 35,7$ мм.

Пример 2.3 Между неподвижными точками A и B , расстояние между которыми равно 2 м (рисунок к примеру), горизонтально натянута стальная проволока диаметром 1 мм. Какую необходимо приложить силу P в точке C по середине длины проволоки и какое в этом случае возникает напряжение в ней, если смещение точки C по направлению силы P достигнет 45 мм? Собственным весом проволоки пренебречь.

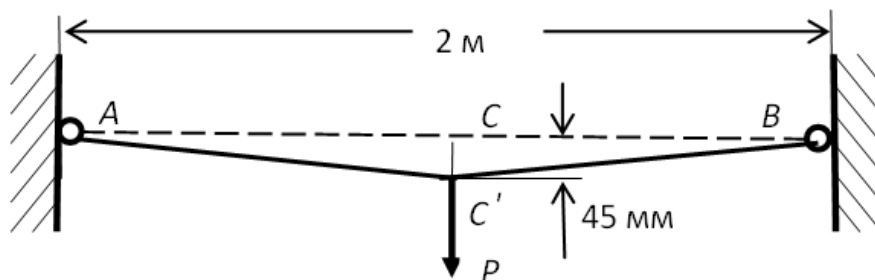


Рисунок 2.2 – Схема определения смещения стальной проволоки под действием силы

Решение. Абсолютное удлинение одной половины проволоки после приложения силы P будет равно разности длин CB и $C'B$:

$$\Delta l = \sqrt{1000^2 + 45^2} - 1000 = 1 \text{ мм.} \quad (2.12)$$

Ее относительное удлинение составит

$$\varepsilon = \frac{1}{1000} = 0,001. \quad (2.13)$$

Тогда напряжение в проволоке мы можем получить, используя закон Гука:

$$\zeta = E\varepsilon = 2 \cdot 10^5 \cdot 0,001 = 200 \text{ МПа.} \quad (2.14)$$

Зная напряжение, определяем усилие в проволоке:

$$N = \zeta S = 200 \cdot 3,14 \cdot 1^2 / 4 = 157 \text{ Н.} \quad (2.15)$$

Точка C' будет находиться в равновесии под действием силы P и двух усилий N . Из подобия треугольника сил и треугольника $C'SB$ находим, что

$$\frac{\frac{P}{2}}{45} = \frac{N}{1001}, \quad (2.16)$$

$$P = 2 \cdot 45 \frac{N}{1001} = \frac{9 \cdot 157}{1001} = 14,1 \text{ Н}. \quad (2.17)$$

Ответ: $P = 14,1 \text{ Н}$.

Задачи

2.1 Определить напряжения во всех участках изображенного на рисунке к задаче стального стержня и полную его деформацию, если площадь поперечного сечения равна $S = 10^3 \text{ мм}^2$, а приложенные силы равны по модулю $P_1 = 40 \text{ кН}$, $P_2 = P_3 = 20 \text{ кН}$. Модуль упругости стали $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

Ответ: в левом участке $\zeta = 40 \text{ МПа}$; в среднем – $\zeta = 0$; в правом участке $\zeta = -20 \text{ МПа}$; $\Delta l = 0$.

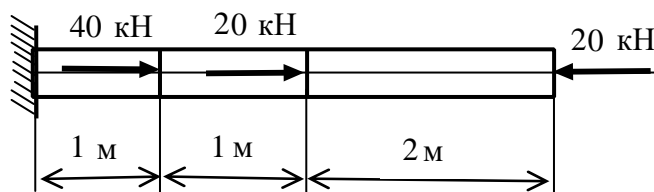


Рисунок 2.3 – Расчетная схема стального стержня под действием сосредоточенных сил

2.2 Определить напряжения в обеих частях изображенного на рисунке к задаче стержня, а также полное его удлинение при действии растягивающей силы $P = 40 \text{ кН}$. Материал стержня – сталь ($E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$), сечение – круглое. Ответ: в левой части $\zeta = 127,6 \text{ МПа}$; в правой – $\zeta = 31,9 \text{ МПа}$; $\Delta l = 0,575 \text{ мм}$.

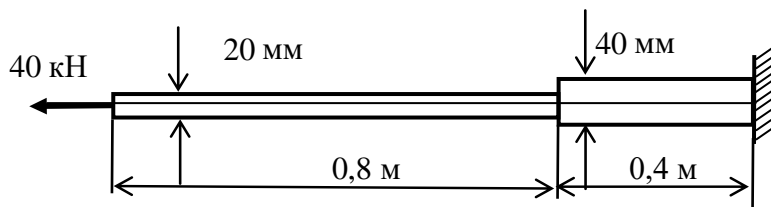


Рисунок 2.4 – Расчетная схема стержня, подверженного растяжению

2.3 Во время испытания проволоки диаметром 1,2 мм и длиной 0,1 м под нагрузкой 100 Н было измерено удлинение 0,044 мм. Чему равен модуль упругости материала проволоки? Ответ: $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$.

2.4 Изображенный на рисунке к задаче стальной стержень имеет в правой части сплошное круглое, а в левой части – кольцевое сечение. Определить напряжения в обеих частях стержня и полное его удлинение, если $d = 2$ мм, $D = 4$ мм, $l_1 = 0,02$ м, $l_2 = 0,04$ м, $P = 1$ кН. Ответ: в левом участке $\zeta = 106,16$ МПа, в правом – $\zeta = 79,62$ МПа, $\Delta l = 0,0266$ мм.

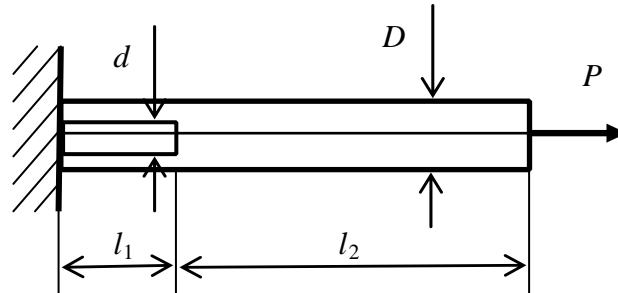


Рисунок 2.5 – Расчетная схема стального стержня с различными сечениями

2.5 Под действием приложенной нагрузки составной стержень квадратного сечения удлинится на 0,2 мм. Модуль упругости алюминия принять равным $0,75 \cdot 10^5$ МПа, а бронзы – $1,1 \cdot 10^5$ МПа. Определить величину нагрузки P , если стороны квадратов $a = 20$ мм, $b = 50$ мм, $l = 0,1$ м.

Ответ: $P = 37,3$ кН.

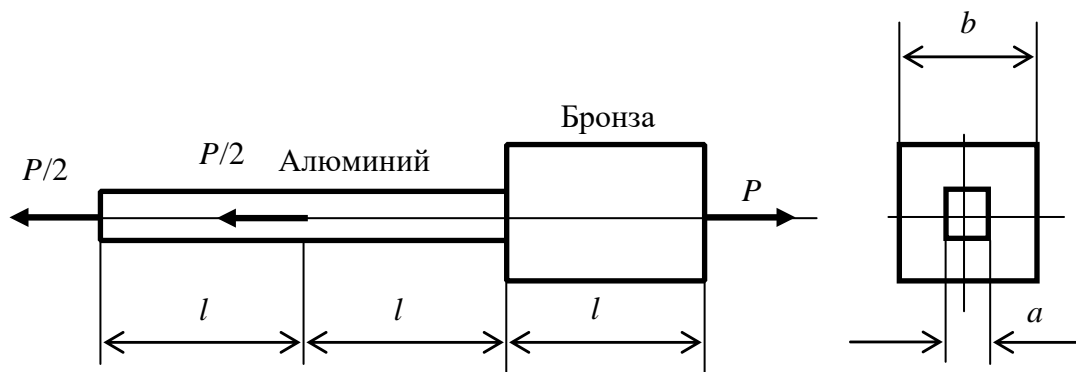


Рисунок 2.6 – Расчетная схема составного стержня квадратного сечения

2.6 Определить величину изменения диаметра D тонкого кольца с поперечным сечением S , выполненного из материала с модулем E , под влиянием равномерно распределенного внутреннего давления интенсивностью q . Ответ:

$$\Delta D = \frac{qD^2}{2ES}$$

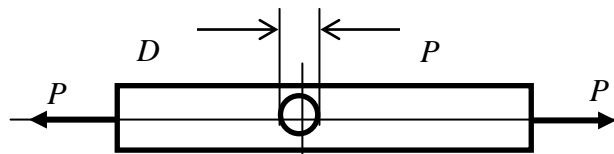


Рисунок 2.7 – Расчетная схема стержня с ослабленным сечением

2.7 Стержень квадратного поперечного сечения растягивается силами $P = 1,5$ кН. Он ослаблен сквозным отверстием диаметром $d = 2$ мм. Чему должна равняться сторона сечения a при допуссаемом напряжении для материала стержня, равном $1 \cdot 10^2$ МПа?

Ответ: $a = 5$ мм.

2.8 Тонкая, бесконечно длинная упругая лента, площадь поперечного сечения которой S и погонный вес q , свободно лежит на шероховатой поверхности. Определить силу P , необходимую для смещения конца ленты на δ . Коэффициент трения ленты по поверхности μ , модуль упругости материала ленты E .

Ответ: $P = \sqrt{2\delta ESq\mu}$.

2.9 К двум стержням одинакового поперечного сечения площадью $S = 10$ мм², наклоненным к горизонту под углом $\alpha = 30^\circ$, подвешен груз G . Определить безопасную величину этого груза, если допуссаемое напряжение для материала стержней равно $[\zeta] = 0,6 \cdot 10^2$ МПа, а модуль упругости $E = 1 \cdot 10^5$ МПа.

Ответ: $G = 0,6 \cdot 10^2$ Н.

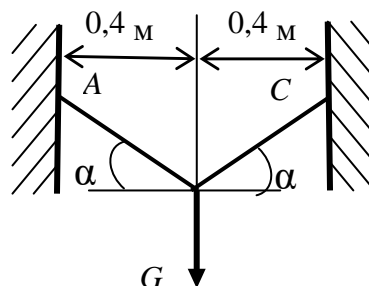


Рисунок 2.8 – Расчетная схема подвеса груза на двух стержнях

2.10 Определить в предыдущей задаче перемещение δ точки B подвеса груза G .

Ответ: $\delta = 2,8$ мм.

2.11 Построить эпюры продольных сил, нормальных напряжений и перемещений поперечных сечений для стержней, схемы которых приведены на рисунке к задаче. Площадь поперечных сечений участков стержней S и $2S$.

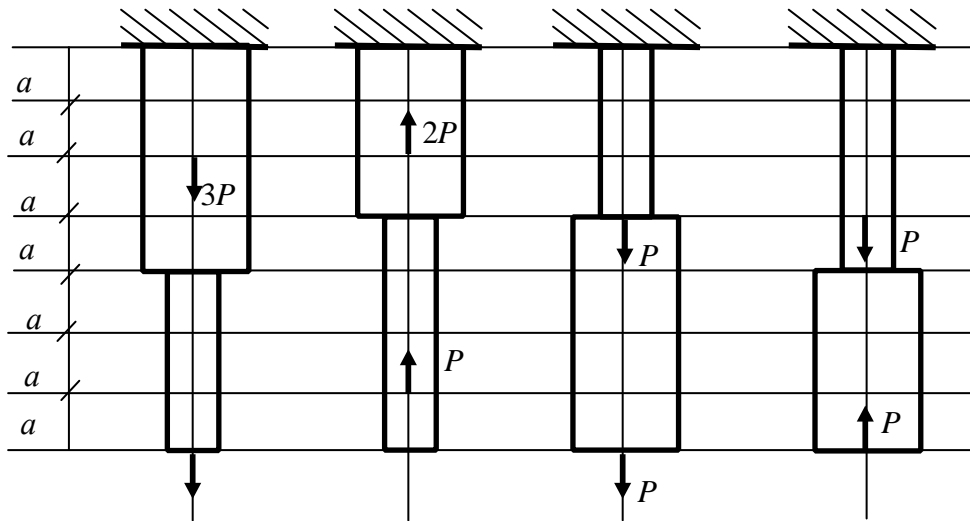


Рисунок 2.9 – Расчетные схемы стержней для построения эпюр

2.12 Груз подвешен к стальной проволоке, размеры которой до деформации были следующими: $l = 3$ м и $d = 1,6$ мм. Удлинение проволоки оказалось равным 1,5 мм. Затем тот же груз был подвешен к медной проволоке длиной $l_1 = 1,8$ м и диаметром $d_1 = 3,2$ мм. Ее удлинение получилось равным 0,39 мм. Определить модуль упругости медной проволоки, если модуль стальной $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Ответ: $E_1 = 1,15 \cdot 10^5$ МПа.

2.13 Жесткий стержень AB нагружен силой P и поддерживается стальной тягой DC круглого поперечного сечения диаметром 20 мм. Определить наибольшую допустимую нагрузку P и опускание точки B . Допускаемое напряжение для материала стержня CD равно 160 МПа.

Ответ: $P = 1,2 \cdot 10^4$ Н, $\delta_B = 4,17$ мм.

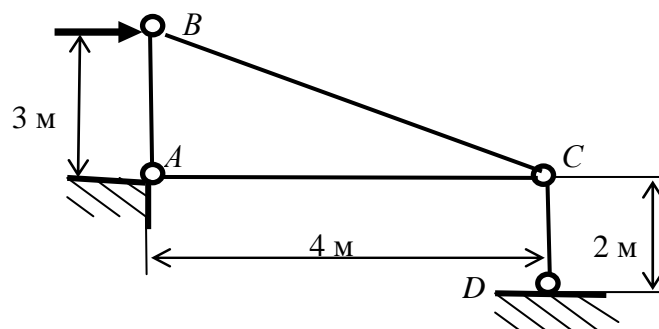


Рисунок 2.10 – Расчетная схема жесткого стержня с тягой

2.14 В изображенной на рисунке к задаче конструкции все стержни стальные, одинакового поперечного сечения, площадью $3 \cdot 10^4$ мм². Сила $P = 10$ кН. Определить напряжения в стержнях.

Ответ: $\zeta_{AB} = 25$ МПа, $\zeta_{AC} = 33,3$ МПа, $\zeta_{BC} = -41,7$ МПа, $\zeta_{CD} = -25$ МПа.

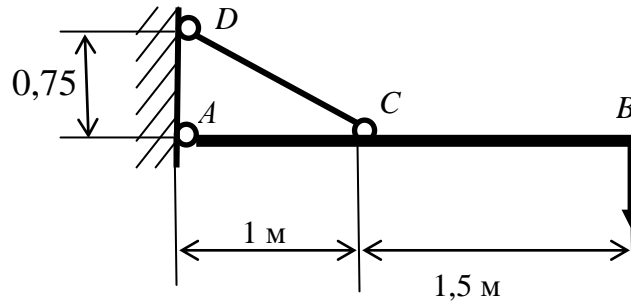


Рисунок 2.11 – Расчетная схема стержневой конструкции

2.15 Груз P подвешен на двух стержнях, как изображено на рисунке. Угол $\alpha = 30^\circ$. Стержень AC – стальной, круглого поперечного сечения, диаметром 30 мм, с допускаемым напряжением для материала $[\zeta] = 10$ МПа, стержень CB – алюминиевый, диаметром 40 мм и с $[\zeta] = 60$ МПа. Какой наибольший груз P можно подвесить на этих стержнях? Ответ: $P = 130$ кН.

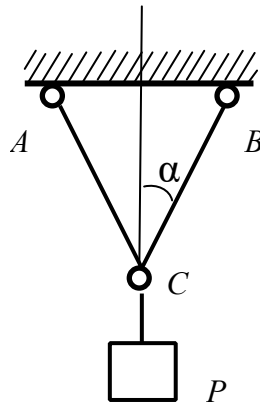


Рисунок 2.12 – Расчетная схема подвеса груза на двух стержнях

2.16 Стальной стержень круглого поперечного сечения ($d = 32$ мм и $l = 0,35$ м) был растянут на испытательной машине усилием 135 кН. Было замерено уменьшение диаметра, равное 0,0062 мм, и на длине 0,05 м удлинение, равное 0,04 мм. Определить модуль упругости и коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона). Ответ: $E = 2,1 \cdot 10^5$ МПа, $\nu = 0,242$.

2.17 Стальной стержень длиной 6 м растянут силой 200 кН, модуль упругости материала $E = 2 \cdot 10^5$ МПа, коэффициент поперечной деформации (коэффициент Пуассона) $\nu = 0,25$. Определить увеличение объема стержня.

Ответ: $\Delta V = 3 \cdot 10^3$ мм³.

2.18 Между неподвижными точками A и B горизонтально натянута стальная проволока диаметром 1 мм. К точке C по середине длины проволоки подвешивается постепенно увеличивающаяся нагрузка P . Когда удлинение

проволоки достигло 0,5 %, она порвалась. Чему в этот момент равен груз P , какова величина опускания точки C и какой величины напряжение в проволоке в момент разрыва? Собственным весом проволоки пренебречь. Считать, что проволока наклепана и до момента разрыва она имеет лишь упругие деформации.

Ответ: $P = 157$ Н, $CC' = 100$ мм, $\zeta = 10^3$ МПа.

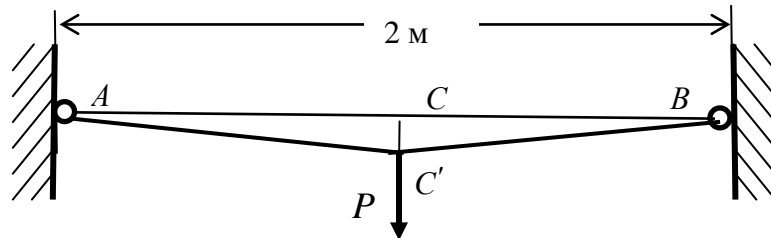


Рисунок 2.13 – Расчетная схема натяжения проволоки под нагрузкой

2.19 Груз $G = 1,6$ кН подвешивается на двух стальных проволоках AB и AC одинаковой длины; расстояние l составляет $5h$. Определить необходимый диаметр проволок при допуске напряжении 100 МПа и величину опускания точки A после приложения нагрузки. Определить этот диаметр также в предположении, что $l_1 = 10h$. Собственным весом проволок пренебречь в обоих случаях.

Ответ: $d = 5,25$ мм, $d_1 = 7,21$ мм, $\Delta h = 0,0007l$.

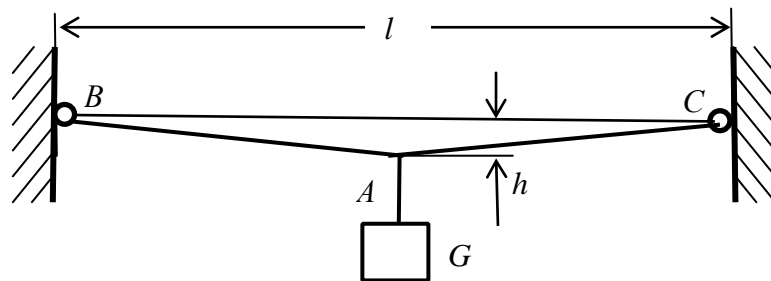


Рисунок 2.14 – Расчетная схема определения диаметра и опускания проволок, подвешенных на грузе

Раздел 3 Сдвиг и кручение

Срез и смятие. Если внутренние нормальные силы вызывают деформацию растяжения (сжатия), то лежащие в плоскости сечения поперечные силы сдвигают одну часть тела относительно другой, вызывая деформацию сдвига. Деформация сдвига проявляется в искажении первоначально прямого угла между двумя условными взаимно перпендикулярными волокнами, взятыми в сечении деформируемого тела. Величина искажения определяется углом сдвига γ .

Характеристикой интенсивности поперечных сил Q при сдвиге являются касательные напряжения η , определяемые как величина поперечной силы, действующей на единице площади сечения тела. Считая, что поперечная сила Q равна внешней силе F , при равномерном распределении касательных напряжений по сечению площадью S , их величина определяется выражением

$$\tau = \frac{F}{S}. \quad (3.1)$$

Между касательным напряжением η и углом сдвига γ существует пропорциональная зависимость, называемая законом Гука для деформации сдвига:

$$\eta = G \gamma, \quad (3.2)$$

G – модуль упругости 2-го рода (модуль сдвига). Его величина связана с модулем упругости 1-го рода E выражением

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad (3.3)$$

где ν – коэффициент Пуассона.

При сдвиге разрушение детали называется срезом. Условие прочности при сдвиге запишется в виде

$$\tau = \frac{F}{S} \geq [\tau], \quad (3.4)$$

где $[\eta]$ – предельно допускаемые напряжения для материала деформируемого тела при сдвиге, принимаемые чаще всего как часть предельно допускаемых напряжений при растяжении: $[\eta] = (0,5 - 0,6) [\zeta]$.

При большой нагрузке и небольшой толщине соединяемых деталей в зоне их контакта с соединительной деталью возникают большие давления, которые могут вызвать смятие контактирующих поверхностей соединяемых деталей. Давление, возникающее между контактирующими поверхностями

соединительной и соединяемых деталей, характеризуется *напряжением смятия* $\zeta_{см}$.

Обычно все расчеты на срез сопровождаются проверочными расчетами на смятие. При этом полагают, что напряжения смятия равномерно распределены по контактной поверхности соединяемых деталей площадью $S_{см}$. Условие прочности на смятие имеет вид

$$\sigma_{см} = \frac{F}{S_{см}} \leq [\sigma_{см}], \quad (3.5)$$

где $[\zeta_{см}]$ – допускаемое напряжение смятия.

Кручение. При деформации кручения круглых цилиндрических стержней диаметром d в их поперечных сечениях действуют касательные напряжения, линейно распределенные по сечению в соответствии с зависимостью

$$\tau = \frac{T \cdot \rho}{I_{\rho}}, \quad (3.6)$$

где T – крутящий момент, действующий в поперечном сечении стержня; ρ – текущее значение радиуса сечения ($0 \leq \rho \leq d/2$); $I_{\rho} = \pi d^4/32 \approx 0,1d^4$ – полярный момент инерции сечения.

Максимальные касательные напряжения при кручении цилиндрического стержня возникают на его поверхности, т.е. при $\rho = d/2$, и определяются выражением

$$\tau_{\max} = \frac{T \cdot d}{2I_{\rho}} = \frac{T}{W_{\rho}}, \quad (3.7)$$

где W_{ρ} – полярный момент сопротивления поперечного сечения стержня (для круглого сечения $W_{\rho} = \pi d^3/16 \approx 0,2d^3$).

Расчеты на прочность при кручении ведут из условия

$$\tau_{\max} = \frac{T}{W_{\rho}} \leq [\tau]. \quad (3.8)$$

При закручивании цилиндрического стержня диаметром d и длиной l двумя внешними моментами T , приложенными в его торцевых сечениях, эти сечения повернутся одно относительно другого на угол θ , определяемый выражением

$$\varphi = \frac{T \cdot l}{GI_{\rho}}. \quad (3.9)$$

Произведение GI_p называется жесткостью стержня (поперечного сечения стержня) при кручении. Чем больше жесткость, тем меньше угол, на который повернутся сечения одно относительно другого.

Если T , G и I_p в выражении для угла поворота сечения изменяются по длине стержня, то угол поворота крайних сечений стержня θ определяется как сумма углов θ_i поворота крайних сечений его i -х участков, где значения T , G и I_p будут постоянны, т. е.

$$\varphi = \sum \varphi_i = \sum \frac{T_i l_i}{G_i I_{pi}}. \quad (3.10)$$

Угол поворота сечений стержня, расстояние между которыми равно единице длины, называется относительным углом поворота θ . Относительный угол определяет жесткость стержня при кручении и определяется выражением

$$\theta = \frac{\varphi}{l} = \frac{T}{GI_p}. \quad (3.11)$$

Если необходимо ограничить значение относительного угла поворота предельно допустимым значением $[\theta]$, то расчет размеров деформируемого стержня (вала) производят исходя из условия жесткости

$$\theta = \frac{T}{GI_p} \leq [\theta]. \quad (3.12)$$

Вращающийся цилиндрический стержень, предназначенный для крепления вращающихся деталей и испытующий деформацию кручения, называется валом. Мощность N , передаваемая валом, связана с крутящим моментом T и скоростью вращения вала n (обороты/мин) выражением

$$N = T \frac{\pi n}{30} \quad (3.13)$$

Пример 3.1 Установленный в круглых захватах разрывной машины стальной образец (рисунок к примеру) был испытан на растяжение. Определить наибольшие напряжения сдвига и смятия, которые возникнут в головке образца при испытании и сравнить с предельно допускаемыми, если предел прочности и при растяжении образца $\zeta_B = 500$ МПа.

Решение. Находим нагрузку P_B , соответствующую пределу прочности при растяжении:

$$P_B = \frac{\pi d^2}{4} \sigma_B = \frac{\pi (6 \cdot 10^{-3})^2}{4} 500 \cdot 10^6 = 14200(\text{Н}) = 14,2 (\text{кН}).$$

Под действием силы P_B возникает напряжение сдвига по цилиндрической поверхности, которое при достижении предела прочности на срез может срезать головку, и напряжение смятия по опорному кольцу головки.

Площадь сдвига (среза)

$$S_{\text{см}} = \frac{\pi(d_1^2 - d^2)}{4} = \frac{3,14(12^2 - 6^2)}{4} = 85(\text{мм}^2).$$

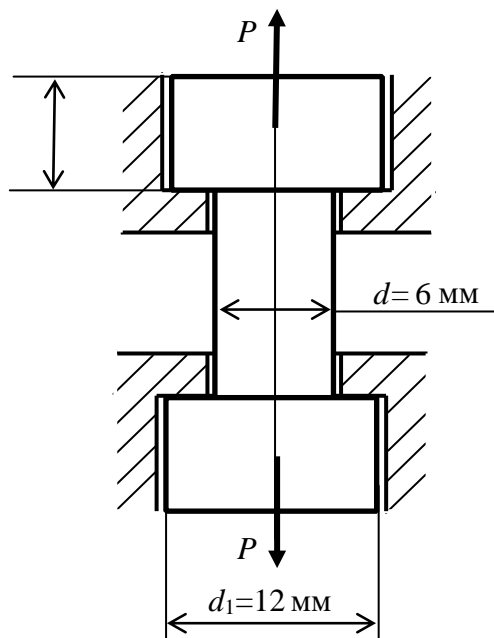


Рисунок 3.1 – Расчетная схема стального образца для определения напряжений сдвига и смятия

$$\sigma_{\text{см}} = \frac{P_{\text{В}}}{I_{\text{см}}} = \frac{14200}{85} = 167 \text{ (МПа)}.$$

$$S_{\text{ср}} = \pi dh = 3,14 \cdot 6 \cdot 7 = 132 \text{ (мм}^2\text{)}.$$

Напряжение сдвига (среза) в головке образца.

Напряжения смятия по опорному кольцу образца.

Ответ: $\eta = 107 \text{ МПа}$, $\zeta_{\text{см}} = 167 \text{ МПа}$.

$$\tau = \frac{P_{\text{В}}}{S_{\text{ср}}} = \frac{14200}{132} = 107 \text{ (МПа)}.$$

Пример 3.2 Определить необходимое количество n заклепок диаметром $d = 20 \text{ мм}$ для соединения внахлестку двух листов толщиной $t_1 = 8 \text{ мм}$ и $t_2 = 10 \text{ мм}$. Сила P , растягивающая соединение, равна 200 кН . Допускаемые напряжения: на срез $[\eta] = 140 \text{ МПа}$, на смятие $[\zeta_{\text{см}}] = 320 \text{ МПа}$.

Ответ: $n = 5$.

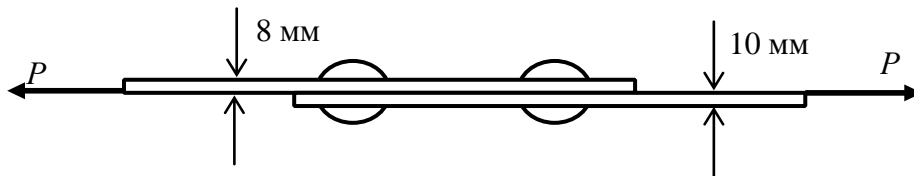


Рисунок 3.2 – Схема заклепочного соединения для определения необходимого количества заклепок

Решение: из уравнения прочности на срез необходимое число заклепок

$$n \geq \frac{P}{\frac{\pi d^2}{4} [\tau]} = \frac{2 \cdot 10^5}{\pi \frac{20^2}{4} 140} = 4,53 \approx 5.$$

Из уравнения прочности на смятие необходимое число заклепок

$$n \geq \frac{P}{t_1 d [\sigma_{см}]} = \frac{2 \cdot 10^5}{8 \cdot 20 \cdot 320} = 3,9 \approx 4.$$

Ответ: 5 заклепок.

Пример 3.3 Полый стальной вал имеет наружный диаметр $d_1 = 100$ мм, а внутренний $d_2 = 50$ мм. Какую мощность передает этот вал при вращении со скоростью $n = 80$ об/мин, если при этом он закручивается на угол $1,8^\circ$ на длине $2,7$ м? Каково наибольшее касательное напряжение в стержне?

Решение. Крутящий момент T , воспринимаемый валом, можно определить из формулы

$$T = \frac{\varphi J_p G}{l}. \quad (3.14)$$

Мощность N связана с крутящим моментом T и скоростью вращения n в об/мин выражением:

$$N = T \frac{\pi n}{30} \quad (3.15)$$

После подстановки вместо T его значения из (а), получим

$$N = \frac{\varphi J_p G \pi n}{30 l} \quad (3.16)$$

Угол θ выражаем в радианах

$$\theta = 1,8^\circ = 1,8\pi/180 = \pi/100. \quad (3.17)$$

Полярный момент инерции кольцевого сечения вала для нашего случая, когда $d_1/d_2 = 2$, равен

$$J_{\rho} = \frac{\pi}{32} (d_1^4 - d_2^4) = \frac{15}{512} \pi d_1^4. \quad (3.18)$$

Тогда, приняв значение модуля сдвига для стали равным $G = 8 \cdot 10^4$ МПа, получим значение мощности, передаваемой валом,

$$N = \frac{\pi \cdot 15 \cdot \pi \cdot 0,1^4 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 10^6 \cdot \pi \cdot 80}{100 \cdot 512 \cdot 30 \cdot 2,7} = 71,67 \text{ кВт}. \quad (3.19)$$

Наибольшее касательное напряжение выражается формулой

$$\tau_{\max} = \frac{Tr_1}{J_{\rho}}, \quad (3.20)$$

где $r_1 = d_1/2$.

Подставляя вместо T его значение, выраженное через мощность N и

$$\tau_{\max} = \frac{30Nr_1}{\pi n J_{\rho}} = \frac{30 \cdot 71,67 \cdot 10^3 \cdot 0,05 \cdot 512}{3,14 \cdot 80 \cdot 15 \cdot 3,14 \cdot 0,1^4} = 46,5 \text{ МПа}.$$

заданное число оборотов, получаем

Ответ: $N = 71,67$ кВт, $\tau_{\max} = 46,5$ МПа.

Пример 3.4. На ступенчатом валу (рисунок к примеру) жестко закреплены четыре зубчатых колеса. Ведущее колесо сообщает валу вращающий момент $T_1 = 2,3$ кНм. Другие зубчатые колеса передают на валы, параллельные первому, вращающие моменты: $T_2 = 0,4$ кНм, $T_3 = 1,1$ кНм, $T_4 = 0,8$ кНм. Требуется определить крутящие моменты, действующие на участках I, II, III вала, построить эпюру крутящих моментов, определить диаметры ступеней вала и построить эпюру углов поворота поперечных сечений вала. Примем допускаемое касательное напряжение $[\eta] = 30$ МПа, модуль упругости второго рода $G = 8 \cdot 10^4$ МПа и длины участков вала $a = 120$ мм, $b = 180$ мм, $c = 100$ мм.

Решение. Для определения внутренних крутящих моментов воспользуемся методом сечений. Выполним на некотором участке сечение вала плоскостью, перпендикулярной его оси.

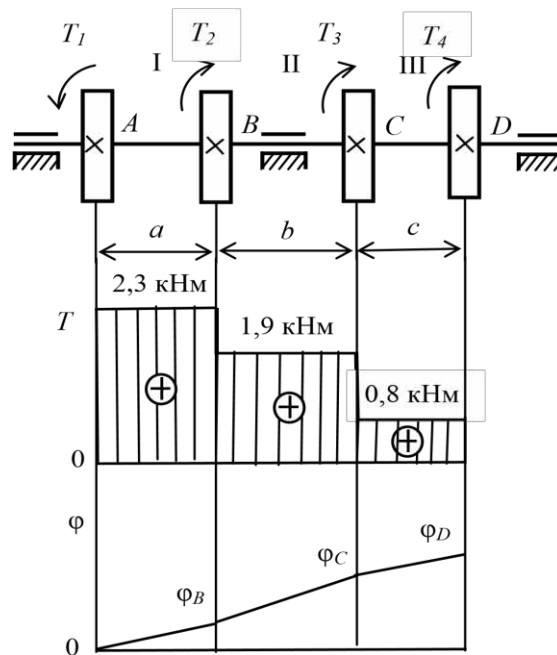


Рисунок 3.3 – Схема ступенчатого вала с эпюрами крутящих моментов и углов закручивания

Отбросим правую часть вала, а действие отброшенной части на оставшуюся заменим внутренним крутящим моментом, действующим в сечении вала.

Внутренний крутящий момент будет равен сумме всех внешних крутящих моментов, расположенных слева от сечения. Будем считать внешний крутящий момент положительным, если он направлен против хода часовой стрелки, и отрицательным – если по ходу.

Знак внутреннего крутящего момента будет соответствовать знаку равнодействующего момента, равного сумме всех внешних крутящих моментов, расположенных слева от сечения.

Выполнив сечение на участке I, мы получим для внутреннего крутящего момента значение $T_I = T_1 = 2,3$ кНм. На участке II будет действовать крутящий момент $T_{II} = T_1 - T_2 = 1,9$ кНм, а на III – $T_{III} = T_1 - T_2 - T_3 = 0,8$ кНм.

Эпюра крутящих моментов показана на рисунке 3.3.

Диаметры ступеней вала будем определять из условия прочности:

$$\tau_{max} = \frac{T}{W_\rho} \leq [\tau],$$

где $W_\rho = \pi d^3/16$ – полярный момент сопротивления сечения вала. Тогда диаметр вала определится из выражения

$$d \geq 1,72 \sqrt[3]{\frac{T}{[\tau]}}. \quad (3.21)$$

Для крутящего момента необходимо брать абсолютное значение.

Определяем диаметр вала на I участке:

принимая $d_I = 75$ мм; $d_{II} = 70$ мм;

$$d_I \geq 1,72 \sqrt[3]{\frac{2,3 \cdot 10^3}{30 \cdot 10^6}} = 7,31 \cdot 10^{-2} (\text{м}); \quad (3.22)$$

на втором участке:

$$d_{II} \geq 1,72 \sqrt[3]{\frac{1,9 \cdot 10^3}{30 \cdot 10^6}} = 6,62 \cdot 10^{-2} (\text{м}) \quad (3.23)$$

на третьем участке:

$$d_{III} \geq 1,72 \sqrt[3]{\frac{0,8 \cdot 10^3}{30 \cdot 10^6}} = 5,12 \cdot 10^{-2} (\text{м}); \text{ принимаем } d_{III} = 55 \text{ мм.} \quad (3.24)$$

Углы закручивания I, II и III участков вала будем определять по формуле $\theta = Tl/GI_\rho$. Предварительно вычислим значения полярных моментов инерции поперечных сечений каждого участка вала.

$$I_{\rho I} = \pi(d_I)^4/32 = 3,14 \cdot 75^4/32 = 310,5 \cdot 10^4 (\text{мм}^4); \quad (3.25)$$

$$I_{\rho II} = \pi(d_{II})^4/32 = 3,14 \cdot 70^4/32 = 235,6 \cdot 10^4 (\text{мм}^4); \quad (3.26)$$

$$I_{\rho III} = \pi(d_{III})^4/32 = 3,14 \cdot 55^4/32 = 89,8 \cdot 10^4 (\text{мм}^4). \quad (3.27)$$

Вычислим для каждого участка вала углы поворота правых крайних сечений по отношению к левым крайним: θ_{BA} , θ_{CB} и θ_{DC} .

$$\varphi_{BA} = \frac{T_I a}{GI_{\rho I}} = \frac{2,1 \cdot 10^6 \cdot 120}{8 \cdot 10^4 \cdot 310,5 \cdot 10^4} = 0,1 \cdot 10^{-2} \text{ рад} = 0,057' \quad (3.28)$$

$$\varphi_{BA} = \frac{T_{II} a}{GI_{\rho II}} = \frac{1,9 \cdot 10^6 \cdot 180}{8 \cdot 10^4 \cdot 235,6 \cdot 10^4} = 0,18 \cdot 10^{-2} \text{ рад} = 0,1^\circ; \quad (3.29)$$

$$\varphi_{DC} = \frac{T_{III} c}{GI_{\rho III}} = \frac{0,8 \cdot 10^6 \cdot 100}{8 \cdot 10^4 \cdot 89,8 \cdot 10^4} = 0,11 \cdot 10^{-2} \text{ рад} = 0,063^\circ. \quad (3.30)$$

При построении эпюры углов закручивания примем за нуль угол поворота сечения вала, содержащего точку *A*. На рисунке 3.3 представлена эпюра углов закручивания вала. Полный угол закручивания вала

$$\varphi = \varphi_{BA} + \varphi_{CB} + \varphi_{DC} = 0,057^\circ + 0,1^\circ + 0,063^\circ = 0,22^\circ. \quad (3.31)$$

Задачи

3.1 Определить величину силы P , требуемой для продавливания пуансоном штампа в упругом контакте толщиной 0,22 мм, выполненном из бериллиевой бронзы, отверстия диаметром 4,2 мм, если предел прочности на срез для бериллиевой бронзы составляет 600 МПа.

Ответ: $P = 1,74$ кН.

3.2 Выбрать диаметр и определить необходимое число n заклепок, прикрепляющих стальную полосу к косынке. Проверить прочность полосы с учетом ослабления ее заклепочными отверстиями, если $P = 6$ кН, ширина полосы $b = 30$ мм, а ее толщина меньше толщины косынки и составляет $t = 2$ мм. Допускаемые напряжения: для материала полосы $[\zeta] = 160$ МПа, для материала заклепок $[\eta] = 100$ МПа (на срез) и $[\zeta_{см}] = 260$ МПа (на смятие).

Ответ: $d = 7$ мм, $n = 2$.

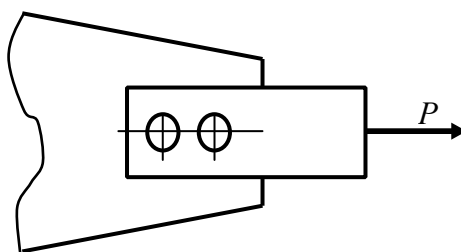


Рисунок 3.4 – Расчетная схема продавливания отверстия пуансоном

3.3 Проверить прочность зубьев храпового колеса на срез и смятие, если нормальное давление на зуб в момент торможения равно $P = 2$ кН и распределено по рабочей поверхности зуба, размеры которой следующие: ширина $t = 4$ мм, высота $h = 5$ мм, окружная длина зуба в основании $a = 8$ мм.

Допускаемые напряжения на срез $[\eta] = 70$ МПа и на смятие $[\zeta_{см}] = 120$ МПа.

Ответ: $\eta = 62,5$ МПа, $\zeta_{см} = 100$ МПа.

3.4 Определить максимальную толщину t листа из электротехнической стали (предел прочности на срез составляет 300 МПа), из которого можно выштамповать трансформаторную пластину заданной формы, если усилие, действующее на пуансон штампа, равно 360 кН.

Ответ: $t = 2$ мм.

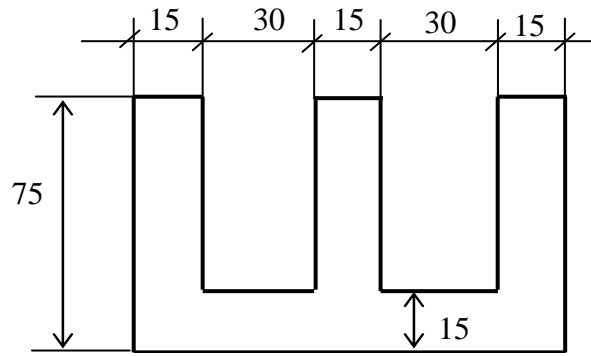


Рисунок 3.5 – Схема выштамповки трансформаторной пластины

3.5 Для соединения зубчатого колеса с валом применено склеивание клеем, для которого допустимое напряжение среза $[\eta] = 20$ МПа. Определить величину максимального момента T , передаваемого валом, если диаметр вала в месте склеивания $d = 12$ мм, а ширина поверхности колеса, контактирующей со склеиваемой поверхностью вала, $b = 10$ мм.

Ответ: $T = 45,2$ Нм.

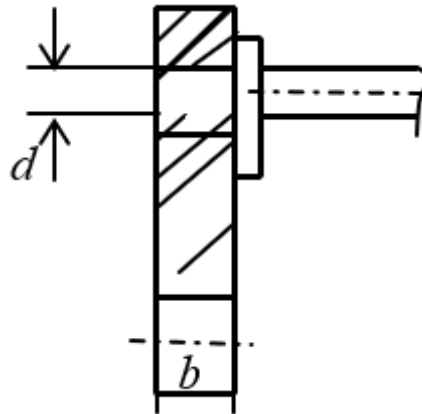


Рисунок 3.6 – Схема склеивания зубчатого колеса с валом

3.6 Определить необходимую длину l фланговых швов для соединения внахлестку двух листов разной ширины. Усилие, испытываемое соединением, $P = 150$ кН. Допускаемое напряжение на срез для сварки равно 110 МПа.

Толщина узкого листа 10 мм, а широкого 8 мм.

Ответ: $l \approx 100$ мм.

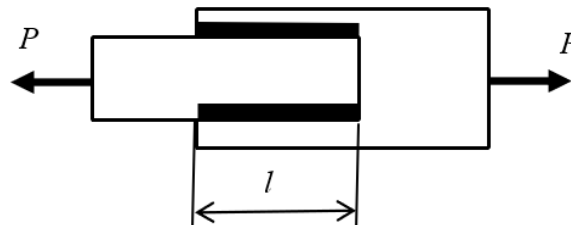


Рисунок 3.7 – Схема сварного соединения внахлестку фланговыми швами

3.7 Определить минимальную длину x , необходимую для приварки листа в соединении, изображенном на рисунке к задаче, если растягивающее

напряжение в листе равно 140 МПа, а допускаемое напряжение на срез для сварки $[\eta_s] = 80$ МПа.

Ответ: $x = 75$ мм.

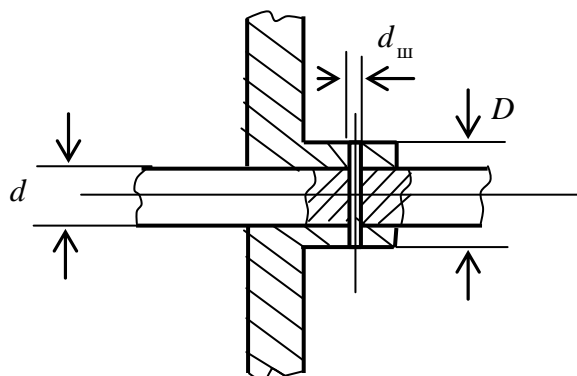


Рисунок 3.8 – Расчетная схема сварного соединения

3.8 Вал передает крутящий момент $T = 0,35$ Нм. Определить напряжения среза и смятия для штифта и сравнить с допускаемыми, если $d_{ш} = 1,5$ мм, $d = 10$ мм, $D = 13$ мм. Допускаемые напряжения: на срез $[\eta] = 70$ МПа, на смятие $[\zeta_{см}] = 120$ МПа.

Ответ: $\eta = 20$ МПа, $\zeta_{см} = 15,5$ МПа.

3.9 Напряжения у поверхности вала, испытующего деформацию кручения, равны 80 МПа. Чему равны касательные напряжения в том же поперечном сечении на расстоянии четверти радиуса от поверхности вала? Ответ: $\eta = 60$ МПа.

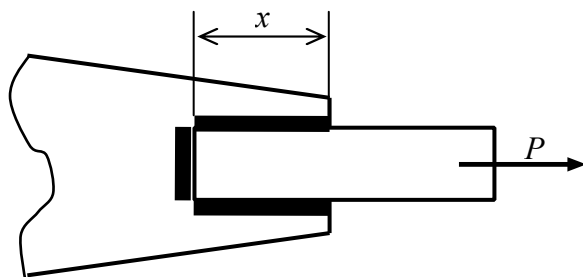


Рисунок 3.9 – Расчетная схема вала со штифтом, подверженного крутящему моменту

3.10 Определить диаметр сплошного вала круглого сечения, передающего крутящий момент $T = 16$ Нм, если допускаемое напряжение для материала вала на срез $[\eta] = 80$ МПа, а допустимый относительный угол закручивания вала $[\theta] = 0,15$. Модуль сдвига принять равным $G = 8 \cdot 10^4$ МПа.

Ответ: $d = 10$ мм.

3.11 К стержню круглого поперечного сечения, защемленному правым концом, приложены два одинаковых крутящих момента T . Диаметр левого участка стержня $d_1 = 8$ мм, диаметр правого участка $d_2 = 12$ мм. Наибольшее касательное напряжение в стержне на правом участке составляет $\tau_{2_{\max}} = 80$ МПа. Чему равно наибольшее касательное напряжение на левом участке стержня?

Ответ: $=135$ МПа.

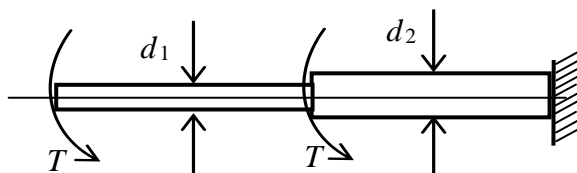


Рисунок 3.10 – Расчетная схема стержня круглого сечения, защемленного с одного конца, подверженного крутящим моментам

3.12 Сравнить вес сплошных валов одинаковой длины, стального и алюминиевого сплава, спроектированных с одинаковым углом закручивания при одинаковых крутящих моментах. Модуль упругости при сдвиге алюминиевого сплава равен $2,7 \cdot 10^4$ МПа, стали – $8 \cdot 10^4$ МПа, а объемные веса соответственно $2,6 \cdot 10^4$ Н/м³ и $7,8 \cdot 10^4$ Н/м³.

Ответ: Стальной вал на 75 % тяжелее вала из алюминиевого сплава.

3.13 Определить наименьший диаметр стального вала, передающего 13,23 кВт при 120 об/мин, если допускаемый угол закручивания равен 1° на длине, равной 15 диаметрам вала. Как велики при этом будут наибольшие касательные напряжения? Модуль сдвига для стали принять равным $8 \cdot 10^4$ МПа.

Ответ: $d_{\min} = 49$ мм, $\tau_{\max} = 46,6$ МПа.

3.14 Определить диаметр сплошного вала, передающего 330,75 кВт при 300 об/мин. Угол закручивания не должен превышать 1° на 2 м длины вала, а наибольшее касательное напряжение – 40 МПа. Модуль сдвига для стали принять равным $8 \cdot 10^4$ МПа.

Ответ: $d = 112$ мм.

3.15 Сплошной вал диаметром 100 мм и длиной 6 м закручен на угол 4° . Чему равно наибольшее касательное напряжение, если $G = 8 \cdot 10^4$ МПа?

Ответ: $\tau_{\max} = 46,6$ МПа.

3.16 Сплошной вал диаметром 90 мм при скорости вращения 150 об/мин передает 36,75 кВт. Длина вала между шкивами составляет 4 м. Модуль $G = 8 \cdot 10^4$ МПа. Определить наибольшее касательное напряжение в вале и угол, на который один шкив повернется относительно другого.

Ответ: $\tau_{\max} = 16,7$ МПа, $\theta = 1^\circ 4'$.

3.17 Стержень из мягкой стали диаметром 25 мм удлиняется на 0,113 мм на длине 0,2 м при растяжении его силой 6 кН. Этот же стержень закручивается на угол $0,55^\circ$ на длине 0,15 м при нагружении его крутящим моментом, равным 200 Нм. Определить величину модулей упругости E , G и коэффициента Пуассона ν .

Ответ: $E = 2,16 \cdot 10^5$ МПа, $G = 8,16 \cdot 10^4$ МПа, $\nu = 0,32$.

3.18 Определить наружный диаметр полого стального вала, передающего 7,056 МВт при 110 об/мин, если допускаемое касательное напряжение равно 56 МПа, а внутренний диаметр составляет 0,6 от внешнего.

Ответ: $d = 402$ мм.

3.19 Полый стальной вал длиной 1,8 м нагружен крутящим моментом 6 кНм. Определить наружный и внутренний диаметры вала, если угол закручивания не должен превосходить 2° , а касательное напряжение 70 МПа.

Ответ: $d_1 = 90,4$ мм, $d_2 = 72,4$ мм.

3.20 К стальному ступенчатому валу, имеющему сплошное поперечное сечение, приложены четыре момента. Левый конец вала жестко закреплен в опоре, а правый конец – свободен и его торец имеет угловые перемещения относительно левого конца. Требуется:

- 1) построить эпюру крутящих моментов по длине вала;
- 2) при заданном значении допускаемого напряжения на кручение определить диаметры d_1 и d_2 вала из расчета на прочность, полученные значения округлить;
- 3) построить эпюру максимальных напряжений кручения по длине вала;
- 4) построить эпюру углов закручивания, приняв $G \approx 0,4E$. Для стали модуль упругости первого рода считать равным $E = 2 \cdot 10^5$ МН/м².

Числовые данные для расчетов приведены в таблице 3.1.

Таблица 3.1 – Исходные данные для расчета ступенчатого вала

Варианты	Расстояния, м			Моменты, кН м				[τ], МПа
	a	b	c	T_1	T_2	T_3	T_4	
1	1,0	1,0	1,0	5,1	2,1	1,1	0,1	30
2	1,1	1,1	1,1	5,2	2,2	1,2	0,2	30
3	1,2	1,2	1,2	5,3	2,3	1,3	0,3	35
4	1,3	1,3	1,3	5,4	2,4	1,4	0,4	35
5	1,4	1,4	1,4	5,5	2,5	1,5	0,5	40
6	1,5	1,5	1,5	5,6	2,6	1,6	0,6	40
7	1,6	1,6	1,6	5,7	2,7	1,7	0,7	45
8	1,7	1,7	1,7	5,8	2,8	1,8	0,8	45
9	1,8	1,8	1,8	5,9	2,9	1,9	0,9	50
10	1,9	1,9	1,9	6,0	3,0	2,0	1,0	50

Раздел 4 Деформация изгиба

Деформацией изгиба называется искривление продольной оси стержня, возникающее в результате действия внешних силовых нагрузок.

Деформация стержня под действием сил и моментов сил, расположенных в одной плоскости, причем линии действия сил перпендикулярны первоначальному положению оси стержня, называется *плоским изгибом*.

Стержень, закрепленный на опорах и испытывающий деформацию изгиба, называется *балкой*.

Деформация стержня, при которой в его поперечных сечениях присутствуют только изгибающие моменты M , называется *чистым изгибом*. При *поперечном изгибе* в поперечных сечениях стержня присутствуют как изгибающие моменты M , так и поперечные силы Q .

Изгибающий момент M , действующий в произвольном поперечном сечении балки, равен алгебраической сумме моментов всех внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения, взятых относительно центра сечения. Знак изгибающего момента определяется по направлению изгиба балки: если под действием момента внешних сил и изгибающего момента

участок балки изгибается выпуклостью вниз, то изгибающий момент положителен, если вверх, то отрицателен.

Поперечная сила Q в произвольном сечении изогнутой балки равна алгебраической сумме (равнодействующей) всех внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения. Знак поперечной силы будет соответствовать знаку равнодействующей внешних сил.

Графики, представляющие распределение по длине балки поперечных сил и изгибающих моментов, называются *эпюрами* соответственно поперечных сил и изгибающих моментов. Процесс построения эпюр можно разбить на следующие этапы:

1. Определение реакций в опорах.
2. Разбивка балки на участки с постоянной (неизменяющейся) либо с монотонно изменяющейся нагрузкой.
3. Составление уравнений поперечных сил $Q(x)$ и изгибающих моментов $M(x)$ для каждого участка балки.
4. Построение по полученным для каждого участка балки уравнениям $Q(x)$ и $M(x)$ эпюр поперечных сил и изгибающих моментов.
5. Проверка правильности построения эпюр.

Для определения реакций в опорах используют уравнения равновесия плоской системы сил.

При составлении уравнений $Q(x)$ и $M(x)$ необходимо исходить из определений, данных для поперечной силы Q и изгибающего момента M , как алгебраических сумм соответственно всех внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения, и моментов этих сил.

При построении эпюр необходимо определить значения поперечных сил и изгибающих моментов в начале и в конце каждого участка, на которые разбита балка.

При проверке правильности построения эпюр необходимо помнить, что эпюры поперечных сил и изгибающих моментов должны начинаться с нуля и возвращаться в нуль. Если в некоторой точке балки приложена сосредоточенная сила F , то на эпюре поперечных сил в сечении, проходящем через эту точку, должен быть скачок на величину силы F . Наличие на схеме нагружения балки внешнего сосредоточенного момента m приведет к скачку на эпюре изгибающих моментов на величину этого момента. Кроме этого, при изгибе должны выполняться соотношения между распределенной нагрузкой $q(x)$, поперечной силой $Q(x)$ и изгибающим моментом $M(x)$, определяемые следующими дифференциальными зависимостями:

$$Q = \frac{dM}{dx}, \quad q(x) = \frac{dQ}{dx}, \quad q(x) = \frac{d^2M}{dx^2}. \quad (4.1)$$

В соответствии с приведенными дифференциальными зависимостями при переходе для некоторого сечения балки эпюры поперечных сил через нуль эпюра изгибающих моментов в этом сечении будет иметь экстремальное

значение. Возможны два случая перехода через нуль эпюры поперечных сил: скачком, если в этом сечении приложена внешняя сосредоточенная сила, и плавный (линейный) переход, если на данном участке балки действует распределенная нагрузка. В первом случае на эпюре изгибающих моментов будет излом, во втором – экстремум параболы. Эпюра изгибающих моментов будет иметь в этом сечении максимум, если на эпюре поперечных сил меняется знак силы с «+» на «-», и минимум, если знак силы меняется с «-» на «+». Если исходить из дифференциальной зависимости между распределенной нагрузкой и изгибающим моментом, действующими на данном участке балки, то эпюра изгибающего момента будет иметь максимум при отрицательной распределенной нагрузке и минимум – при положительной.

Построение эпюр поперечных сил и изгибающих моментов позволяет определить те сечения балки, где значения поперечных сил и изгибающих моментов имеют максимальные по модулю значения. Такие сечения называют *опасными сечениями*. Для опасных сечений определяются значения касательных и нормальных напряжений, которые не должны превышать предельно допустимых значений соответственно касательных $[\eta]$ и нормальных $[\zeta]$ напряжений для материала балки. Для балок простых сечений, например, прямоугольного или круглого, действующие в сечениях касательные напряжения много меньше нормальных и поэтому расчет балок простых поперечных сечений можно вести только по нормальным напряжениям.

Если представить балку, как состоящую из продольных волокон, то при ее изгибе волокна, находящиеся со стороны выпуклости, будут испытывать растяжение (удлинение), а со стороны вогнутости – сжатие (укорочение). Поскольку одни волокна удлиняются, а другие укорачиваются, то между ними в средней части балки будут находиться волокна, длина которых при изгибе не изменяется. Слой, содержащий волокна, длина которых при изгибе не изменяется, называется *нейтральным слоем*. Чем дальше расположено волокно от нейтрального слоя, тем больше изменяется его длина, тем больше нормальные напряжения, действующие в этой точке поперечного сечения балки. Для волокна, удаленного от нейтрального слоя на расстоянии y , нормальное напряжение определяется выражением

$$\sigma = \frac{M \cdot y}{I_z}, \quad (4.2)$$

где M – изгибающий момент; I_z – момент инерции поперечного сечения балки относительно оси z , лежащей в нейтральном слое (нейтральной оси).

Максимальные напряжения будут испытывать волокна, наиболее удаленные от нейтрального слоя. Эти напряжения определяются из уравнения

$$\sigma_{\max} = \frac{M \cdot y_{\max}}{I_z} = \frac{M}{W_z}, \quad (4.3)$$

где W_z – момент сопротивления поперечного сечения балки относительно нейтральной оси ($W_z = I_z/y_{\max}$).

Условие прочности при изгибе запишется в виде

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_z} \leq [\sigma]. \quad (4.4)$$

Осевой момент сопротивления сечения балки круглого сечения диаметром d определяется выражением

$$W_z = \frac{\pi d^3}{32}, \quad (4.5)$$

а для балки с прямоугольным сечением шириной b и высотой h – выражением

$$W_z = \frac{bh^2}{6}. \quad (4.6)$$

Пример 4.1 Шарнирно опертая балка длиной $l = 5a$ загружена на длине $4a$ равномерно распределенной нагрузкой с интенсивностью q и парой сил с моментом $M_0 = qa^2$, приложенной на расстоянии a от левой опоры. Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов и подсчитать их наибольшие по абсолютному значению величины.

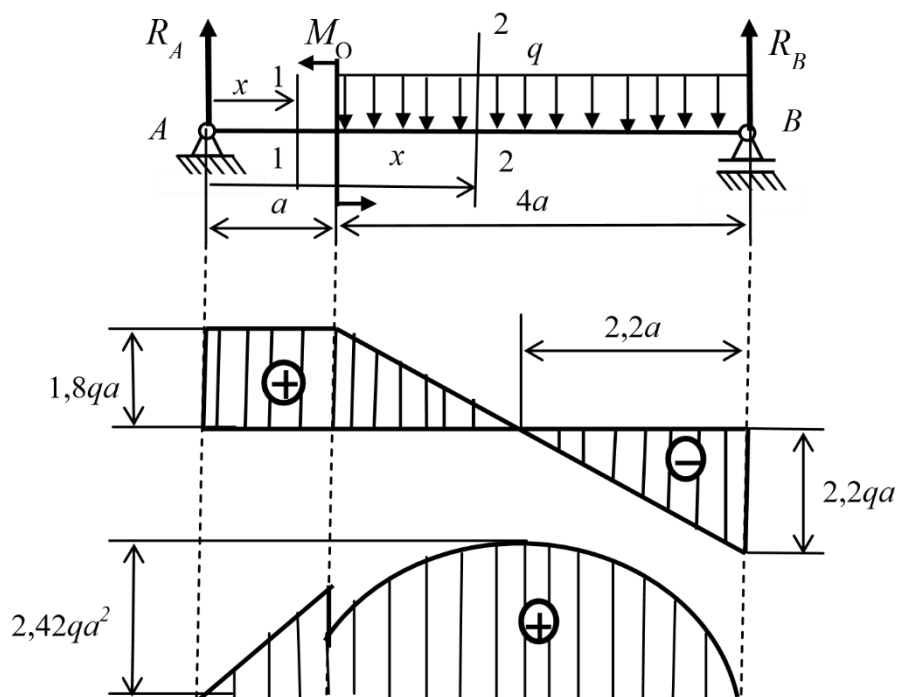


Рисунок 4.1 – Расчетная схема шарнирно опертой балки с эпюрами поперечных сил и изгибающих моментов

Решение. 1. *Определение опорных реакций.* Изобразим на рисунке реакции опор R_A и R_B , направив их вверх. Горизонтальная реакция в шарнирно подвижной опоре A равна нулю, так как рассматривается плоский изгиб, при котором все силы перпендикулярны первоначальному положению оси балки. Для нахождения реакций в опорах составим уравнения равновесия в форме моментов сил относительно точек A и B :

$$\sum M_B = 0; R_A 5a - M_0 - q4a2a = 0; R_A = \frac{1}{5a}(8qa^2 + M_0) = 1,8qa;$$

$$\sum M_A = 0; -R_B 5a + q4a(2a + a) - M_0 = 0;$$

$$R_B = -\frac{1}{5a}(12qa^2 - M_0) = 2,2qa.$$

Проверка правильности вычисления опорных реакций:

$$\sum Y = 0; R_A + R_B - q4a = 0; 1,8qa + 2,2qa - 4qa = 0.$$

Реакции определены правильно.

2. *Составление выражений $Q(x)$ и $M(x)$.* На схеме балки можно выделить два участка: 1-й участок балки от точки A до точки C , на котором внешняя нагрузка не изменяется, и 2-й участок от точки C до точки B , на котором действует равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q . Для составления уравнений, выражающих законы изменения поперечных сил и изгибающих моментов, рассмотрим два сечения: 1–1 на 1-ом участке и 2–2 на 2-ом участке балки.

Выражения для $Q(x)$ и $M(x)$, действующих в сечениях балки, будем составлять, рассматривая силы, расположенные слева от сечений. Положение сечений будет определяться координатой x , отсчитываемой от точки A , принятой за начало координат. Выражения $Q(x)$ и $M(x)$:

для первого участка ($0 \leq x \leq a$)

$$Q_1 = R_A = 1,8qa, M_1 = R_A x = 1,8qax;$$

для второго участка ($a \leq x \leq 5a$)

$$Q_2 = R_A - q(x - a), M_2 = R_A x - M_0 - q(x - a)(x - a)/2.$$

Полученные зависимости показывают, что на первом участке обе эпюры являются линейными уравнениями; на втором участке эпюра M описывается нелинейным уравнением (параболой).

3. *Построение эпюр Q и M .* При построении линейных зависимостей достаточно дать переменной x два значения, например, в начале и в конце участка. В случае нелинейной зависимости следует дать переменной x не менее трех значений.

Построение эпюры Q .

1-й участок ($0 \leq x \leq a$):

$$x = 0, Q_1(0) = R_A = 1,8qa; x = a, Q_1(a) = R_A = 1,8qa.$$

2-й участок ($a \leq x \leq 5a$):

$$x = a, Q_2(a) = R_A = 1,8qa; x = 5a, Q_2(5a) = R_A - q(5a - a) = -2,2qa.$$

По полученным значениям строим эпюру поперечных сил. Максимальное по модулю значение поперечная сила будет принимать на конце второго участка, т. е. $Q_{\max} = / Q_2(5a) / = 2,2 qa$.

Для нахождения координаты x_1 точки пересечения эпюрой оси абсцисс приравняем выражение для поперечной силы второго участка нулю. $Q_2(x_1) = R_A - q(x_1 - a) = 0$, откуда $x_1 = (R_A + qa)/q = 2,8a$.

Построение эпюры M.

1-й участок ($0 \leq x \leq a$):

$$x = 0, M_1(0) = 0; \quad x = a, M_1(a) = R_A a = 1,8qa^2.$$

2-й участок ($a \leq x \leq 5a$):

$x = a, M_2(a) = R_A a - M_O = 1,8qa^2 - qa^2 = 0,8qa^2$; $x = 5a, M_2(5a) = R_A 5a - M_O - q(5a - a)(5a - a)/2 = 0$; в качестве третьей точки возьмем точку с координатой $x = x_1$. Учитывая, что $Q = dM/dx$, то при $Q = 0$ изгибающий момент будет иметь экстремальное значение (в нашем случае максимальное), т. е. $M_2(x_1) = M_{\max} = M_2(2,8a) = R_A 2,8a - M_O - q(2,8a - a)(2,8a - a)/2 = 2,42 qa^2$. По полученным значениям строим эпюру изгибающих моментов.

4. Проверка правильности построения эпюр.

Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов должны начинаться с нуля и возвращаться в нуль. В нашем случае эпюра поперечных сил начинается с нуля скачком на величину реакции в опоре A и возвращается в нуль реакцией в опоре B .

Эпюра изгибающих моментов также начинается с нуля и возвращается в нуль. В точке, где поперечная сила принимает нулевое значение, эпюра изгибающих моментов принимает экстремальное (максимальное) значение, т. е. выполняются дифференциальные зависимости при изгибе.

Пример 4.2. Жестко закрепленная (консольная) балка длиной $l = 2,5$ м нагружена моментом $M = 5$ кНм, сосредоточенной силой $P = 15$ кН, приложенной на расстоянии $a = 1$ м от левого конца балки, и равномерно распределенной на длине $b = 1$ м нагрузкой интенсивностью $q = 10$ кН/м (рис. к примеру 4.2). Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов.

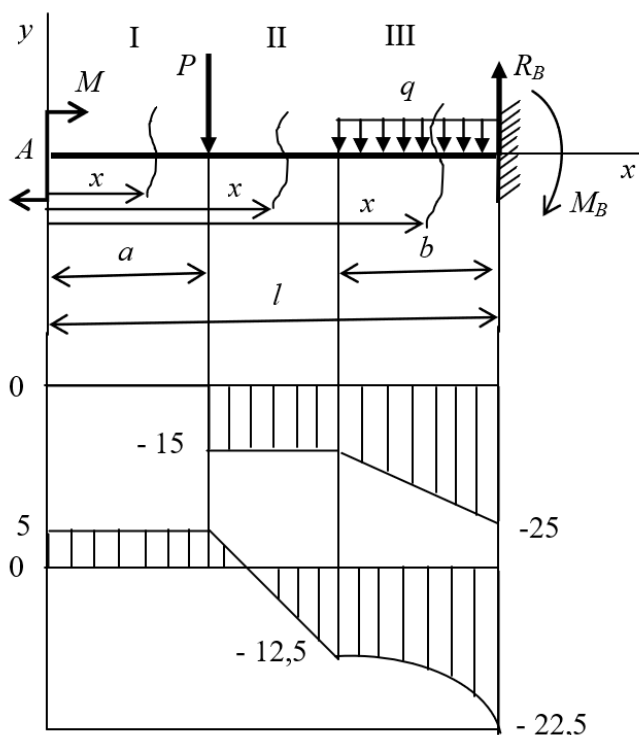


Рисунок 4.2 – Расчетная схема консольной балки с эпюрами поперечных сил и изгибающих моментов

Решение. 1. *Определение опорных реакций.* При составлении уравнений для поперечных сил и изгибающих моментов будем идти от свободного конца балки (точка A) к заделке (точка B). В этом случае опорные реакции можно не определять. Значение реакции R_B и реактивного момента M_B определим из уравнений поперечных сил и изгибающего момента для последнего участка балки.

2. *Разбивка балки на участки с постоянной, либо монотонно изменяющейся нагрузкой.* Для заданной схемы балки выделим три участка: I – от точки приложения момента M до точки приложения сосредоточенной силы P ; II – от точки приложения сосредоточенной силы P до начала участка с распределенной нагрузкой; III – участок, где распределена нагрузка интенсивностью q . На первом и втором участках внешняя нагрузка не меняется (постоянная), а на третьем участке нагрузка меняется монотонно: с увеличением длины участка нагрузка линейно растет.

3. *Составление уравнений $Q(x)$ и $M(x)$.* Уравнения для поперечных сил $Q(x)$ и изгибающих моментов $M(x)$, действующих в поперечных сечениях балки на каждом из трех ее участков, будем составлять, рассматривая силы расположенные слева от сечения. Положение сечения будет определяться координатой x , отсчитываемой от точки A , принятой за начало координат. Выражения для $Q(x)$ и $M(x)$: – для первого участка ($0 \leq x \leq a$):

$$Q_I = 0; M_I = M;$$

для второго участка ($a \leq x \leq l - b$):

$$Q_{II} = -P; M_{II} = M - P(x - a);$$

для третьего участка ($(l - b) \leq x \leq l$):

$$Q_{III} = -P - q(x - l + b); M_{III} = M - P(x - a) - 0,5(x - l + b)^2.$$

4. Построение эюр поперечных сил Q и изгибающих моментов M .

Построение эюры поперечных сил:

участок I: $Q_I = 0$;

участок II: $Q_{II} = -P = -15$ кН;

участок III: на данном участке поперечная сила линейно зависит от координаты x . Для построения линейной зависимости найдем значение поперечной силы Q_{III} в двух точках: в начале ($x = l - b$) и в конце ($x = l$) участка: $Q_{III}(l - b) = -P = -15$ кН; $Q_{III}(l) = -P - qb = -25$ кН.

По полученным значениям строим эюру поперечных сил (рис. к примеру 4.2).

Построение эюры изгибающих моментов:

участок I: $M_I = M = 5$ кНм;

участок II: для построения линейной зависимости найдем значения изгибающего момента в начале и в конце второго участка:

$$M_{II}(a) = M = 5 \text{ кНм}; M_{II}(l - b) = M - P(l - b - a) = -12,5 \text{ кНм};$$

участок III: на этом участке мы имеем нелинейную зависимость изгибающего момента от координаты x (параболу). Для построения кривой найдем значения изгибающего момента в начале и в конце участка. Кривая на третьем участке будет иметь выпуклость, т.к. вторая производная от изгибающего момента по координате отрицательная: $d^2M/dx^2 = q < 0$.

5. Проверка правильности построения эюр. Эюры поперечных сил и изгибающих моментов должны начинаться с нуля и возвращаться в нуль. В нашем случае обе эюры начинаются с нуля. Эюру поперечных сил вернет в нуль реакция R_B опоры. Следовательно, реакция опоры будет равна $R_B = 25$ кН и направлена вверх. Эюру изгибающих моментов вернет в нуль положительный реактивный момент, равный $M_B = 22,5$ кНм.

Задачи

4.1 Построить эюры поперечных сил и изгибающих моментов для балок, жестко закрепленных одним концом и загруженных, как показано на рисунке к задаче.

Подсчитать наибольшие по абсолютному значению величины поперечных сил и изгибающих моментов, если $P = 20$ кН, $q = 20$ кН/м, $M_O = 40$ кНм и $l = 2$ м.

Ответ: а) $Q = 20$ кН, $M = 40$ кНм; б) $Q = 0$, $M = 40$ кНм; в) $Q = 40$ кН, $M = 40$ кНм; г) $Q = 40$ кН, $M = 20$ кНм; д) $Q = 40$ кН, $M = 60$ кНм; е) $Q = 20$ кН, $M = 20$ кНм.

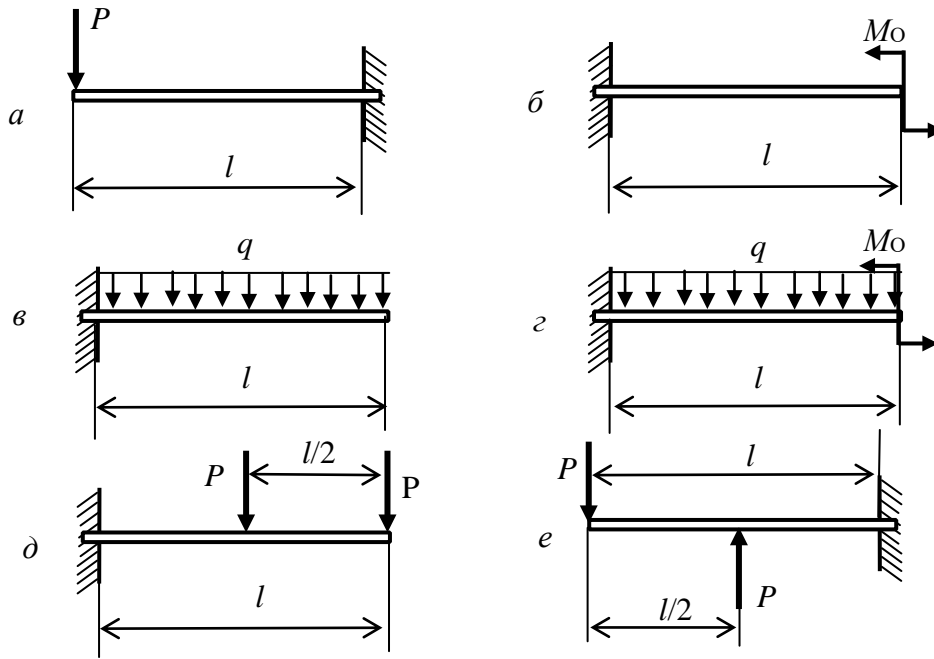


Рисунок 4.3 – Расчетные схемы консольных балок для определения поперечных сил и изгибающих моментов

4.2 Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для консольных балок (рисунок к задаче), приняв $P = 3$ кН, $P_1 = 2$ кН, $q = 2$ кН/м, $M_0 = 1$ кНм, $l = 2$ м, $a = 1$ м. Определить абсолютные значения опорных реакций.

- Ответ: а) $M_A = 2$ кНм; $R_A = 1$ кН.
 б) $M_A = 2$ кНм; $R_A = 3$ кН.
 в) $M_A = 2$ кНм; $R_A = 0$.
 г) $M_A = 3$ кНм; $R_A = 4$ кН.

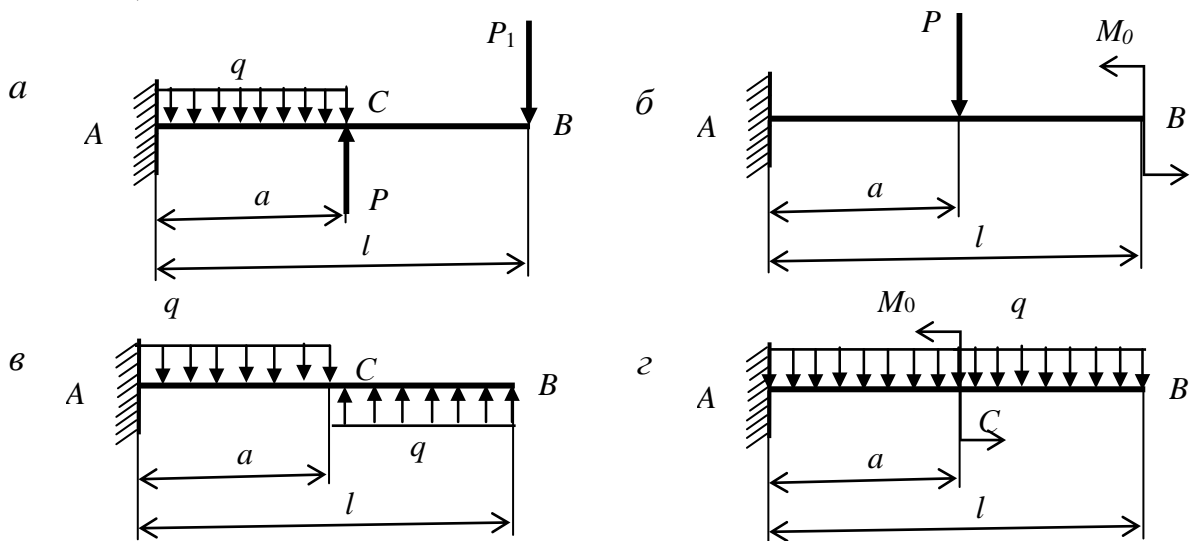


Рисунок 4.4 – Расчетные схемы консольных балок для определения опорных реакций, поперечных сил и изгибающих моментов

4.3 Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для шарнирно закрепленных балок, нагруженных, как показано на рисунке к задаче. Найти максимальные по модулю значения Q и M при следующих данных:

$P = 60$ кН, $q = 20$ кН/м, $M_0 = 60$ кНм, $l = 3$ м. Ответ: а) $Q = 30$ кН, $M = 45$ кНм; б) $Q = 30$ кН, $M = 22,5$ кНм; в) $Q = 20$ кН, $M = 60$ кНм; г) $Q = 40$ кН, $M = 60$ кНм.

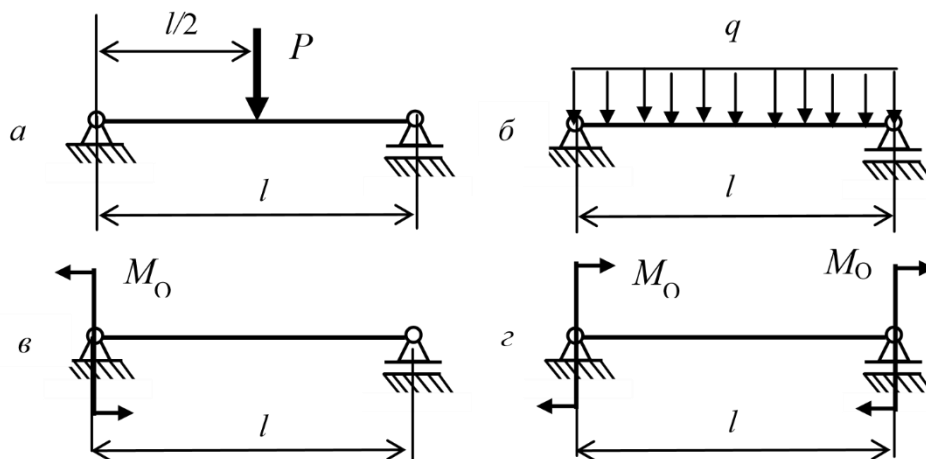


Рисунок 4.5 – Расчетные схемы шарнирно опертых балок с эпюрами поперечных сил и изгибающих моментов

4.4 Построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов для шарнирно закрепленных балок (рисунок к задаче). Найти для каждой балки выражения для поперечной силы Q и изгибающего момента M , действующих в поперечных сечениях, проходящих через точки, соответственно, A и C .

Ответ: а) $Q_A = qa$; $M_C = qa^2/2$; б) $Q_A = q(l - 2a)/2$; $M_C = q(l^2 - 4a^2)/8$; в) $Q_A = 0$; $M_C = ql^2/16$; г) $Q_A = ql/4$; $M_C = 0$.

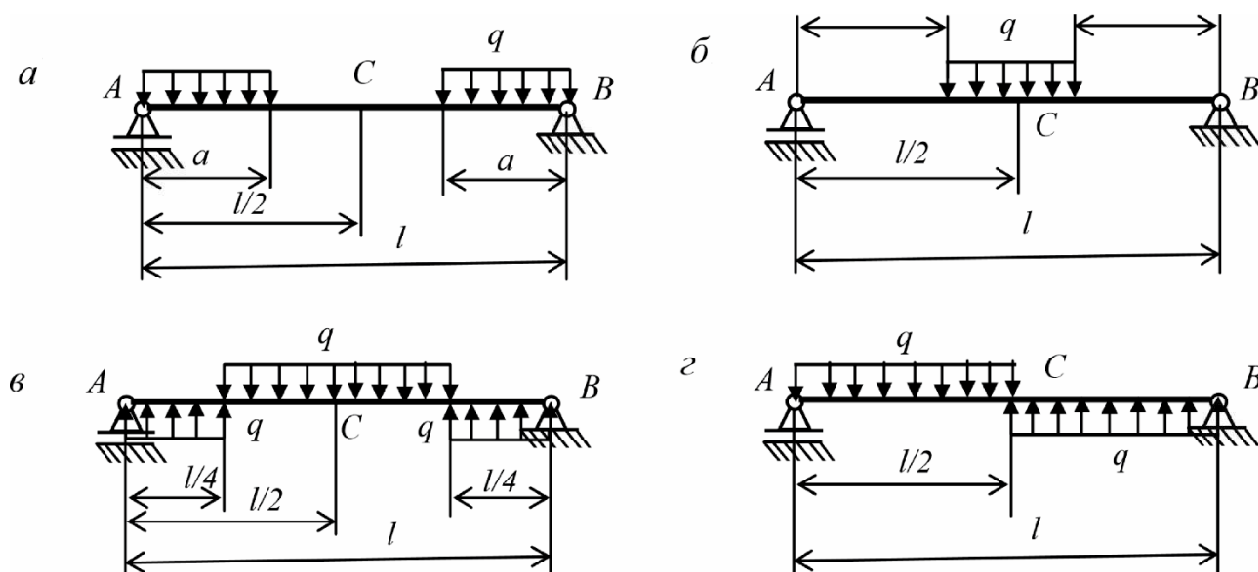


Рисунок 4.6 – Расчетные схемы шарнирно опертых балок с эпюрами поперечных сил и изгибающих моментов

4.5 Для заданной схемы балки (рисунок к задаче 4.5) требуется написать в общем виде выражения для поперечной силы Q и изгибающего момента M , действующих в поперечных сечениях каждого участка балки, построить эпюры Q и M , найти M_{\max} и подобрать по таблице А.1 приложения А стальную балку двутаврового поперечного сечения при $[\zeta] = 160$ МПа. Данные взять из таблицы 4.1.

Таблица 4.1 – Исходные данные для расчета балки

Варианты	Данные величин						
	a , м	b , м	c , м	l , м	F , кН	M , кН·м	q , кН/м
1	2,0	3,2	1,8	10	20	7	22
2	2,2	3,4	1,9	10	19	7	21
3	2,4	3,6	2,0	11	18	8	20
4	2,6	3,8	2,1	11	16	8	19
5	2,8	4,0	2,2	12	15	9	18
6	3,0	4,2	2,3	12	14	9	17
7	3,2	4,4	2,4	13	13	10	16
8	3,4	4,6	2,5	13	12	10	15
9	3,6	4,8	2,6	14	11	11	14
10	3,8	5,0	2,7	14	10	11	13

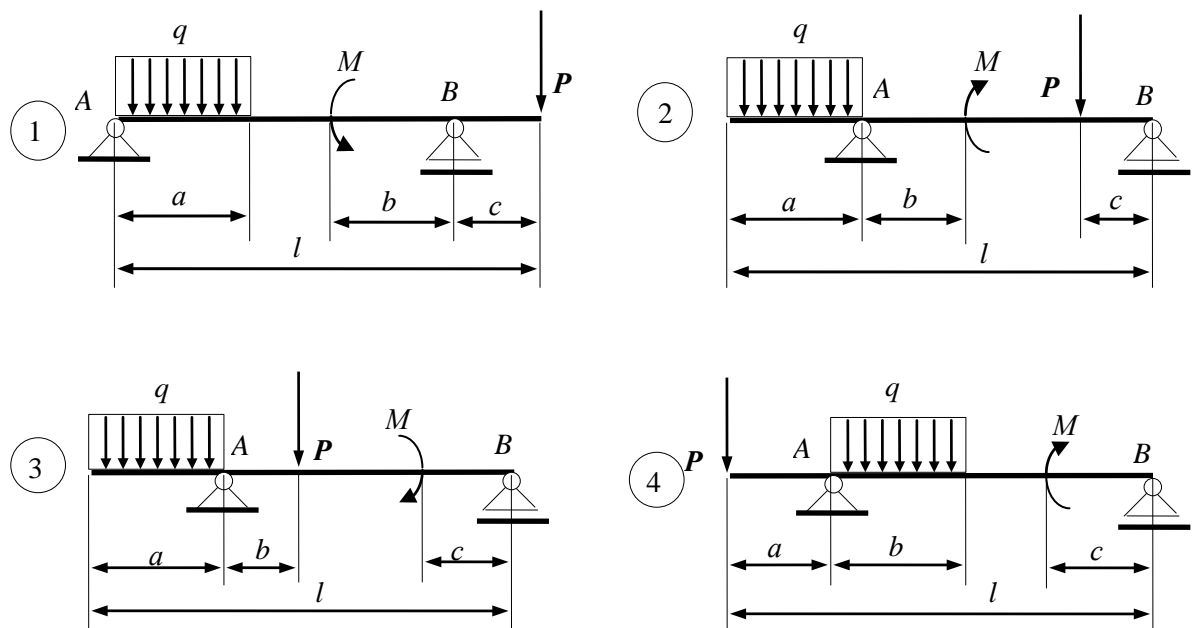


Рисунок 4.7.1 – Расчетная схема консольной балки с эпюрами поперечных сил и изгибающих моментов

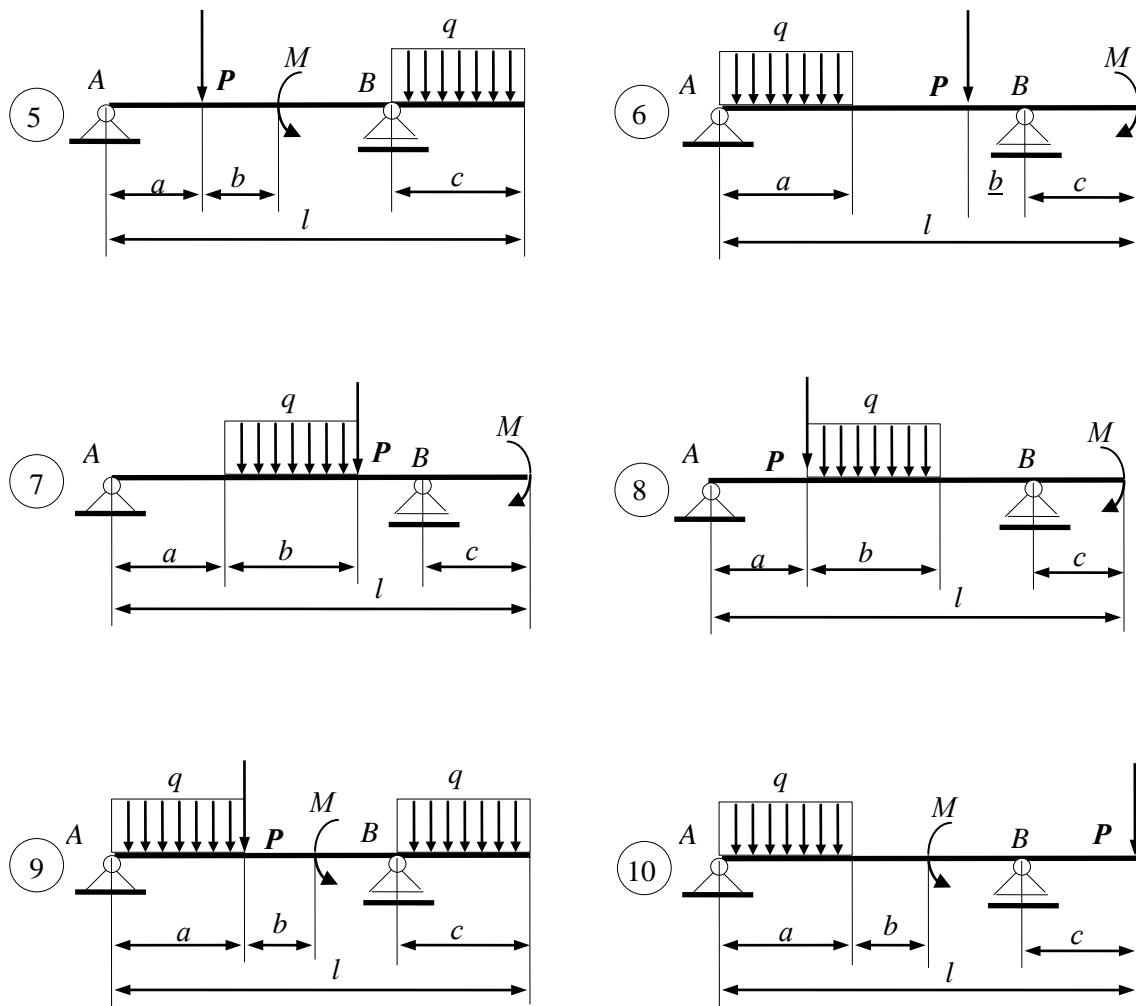


Рисунок 4.7.2 – Расчетная схема консольной балки с эпюрами поперечных сил и изгибающих моментов (продолжение)

Раздел 5 Геометрический и кинематический расчеты зубчатых передач

5.1 Геометрический расчет зубчатых передач

Передача движения в зубчатых передачах осуществляется за счет зацепления зубьев, которыми оснащены колеса. Та часть зубчатого колеса, где располагаются зубья, называется *венцом* (рис. 5.1). Венец представляет собой чередование зубьев и расположенных между ними впадин. Зубья колеса располагаются между окружностью диаметром d_a , очерчивающей вершины зубьев (*окружность вершин*), и окружностью диаметром d , ограничивающей основания впадин (*окружность впадин*). Если окружность вершин находится снаружи окружности впадин, то мы имеем зубчатое колесо с *внешними зубьями*. У зубчатого колеса с *внутренними зубьями* окружность вершин находится внутри окружности впадин. Между окружностями вершин и впадин располагается окружность диаметром d (*делительная окружность*), которая

делит зуб на две части: часть зуба высотой h_a , расположенная между делительной окружностью и окружностью вершин, называется *головкой зуба*, а часть зуба высотой h_f , заключенная между делительной окружностью и окружностью впадин, называется *ножкой зуба*. Полная высота зуба h определится выражением $h = h_a + h_f$.

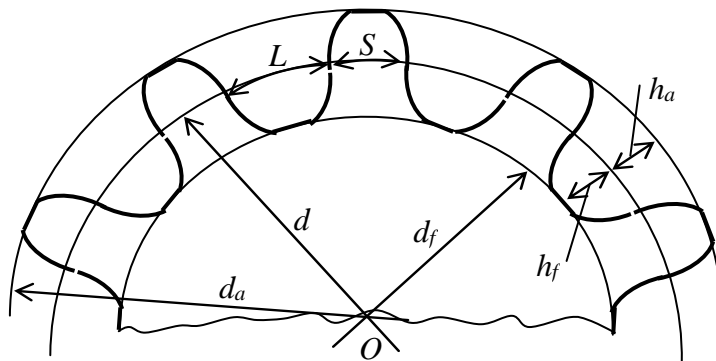


Рисунок 5.1 – Зубчатое колесо

Диаметры окружностей вершин и впадин связаны с делительной окружностью следующими выражениями:

$$d_a = d \pm 2h_a; \quad d_f = d \pm 2h_f, \quad (5.1)$$

где верхний знак относится к зубчатому колесу с внешними зубьями, а нижний – к колесу с внутренними зубьями.

Расстояние c между окружностью вершин одного зубчатого колеса и окружностью впадин другого называется *радиальным зазором* зубчатой передачи. Этот зазор необходим для исключения заклинивания зубчатой передачи вследствие температурных изменений размеров, ошибок ее изготовления и сборки. Радиальный зазор в зубчатой передаче обеспечивается за счет разницы в высотах ножки и головки зуба, равной величине радиального зазора: $c = h_f - h_a$.

Расстояние p между одноименными профилями двух соседних зубьев, измеренное по дуге делительной окружности, называют *окружным шагом* зубьев. Для обеспечения передачи движения от одного зубчатого колеса к другому окружной шаг этих колес должен быть одинаков, т. е. $p_1 = p_2 = p$. Зубчатые колеса, имеющие одинаковый окружной шаг, называются *сопряженными* или *парными* колесами.

При взаимодействии сопряженных колес для каждого из них можно выделить условные окружности, перекатываемые одна относительно другой без скольжения. Такие окружности называются *начальными*.

При проектировании зубчатых колес принимают, что делительные окружности совпадают с начальными. Такие совпадения возможны при условии отсутствия погрешностей в изготовлении и сборке зубчатых передач.

Необходимо также отметить, что понятие начальных окружностей имеет смысл при рассмотрении кинематики двух контактирующих звеньев, а понятие делительной окружности относится к каждому отдельно взятому зубчатому колесу и связано с его геометрией: делительная окружность делит зуб на головку и ножку.

Если число зубьев двух сопряженных колес равно z_1 и z_2 , а окружной шаг p , то для этих колес будут справедливы следующие равенства:

$$\pi d_1 = z_1 p \text{ и } \pi d_2 = z_2 p. \quad (5.2)$$

Разделив второе равенство на первое, получим следующее соотношение:

$$d_2/d_1 = z_2/z_1, \quad (5.3)$$

в соответствии с которым отношение диаметров начальных окружностей сопряженных зубчатых колес равно отношению числа зубьев этих колес. Следствием перекатывания без скольжения начальных окружностей, совпадающих с делительными окружностями сопряженных колес, является равенство линейных скоростей точек контакта этих окружностей, т. е. $V_1 = V_2$. Так как $V_1 = \omega_1 d_1/2$ и $V_2 = \omega_2 d_2/2$, для передаточного отношения с учетом (5.3) получим выражение в виде:

$$i_{1-2} = \omega_1/\omega_2 = z_2/z_1. \quad (5.4)$$

В соответствии с (5.2) диаметр делительной окружности зубчатого колеса можно выразить через окружной шаг p и число зубьев z : $d = (p/\pi)z$. Для получения определенности в вычислении диаметра d (π неопределимое число) вводится параметр $m = p/\pi$, названный *окружным модулем*, или просто *модулем*. Тогда диаметр делительной окружности определится выражением

$$d = mz. \quad (5.5)$$

Значения модуля выбираются из стандартного ряда значений модулей. Зубчатые колеса со значением модуля $m < 1$ мм принято называть мелко модульными. В механизмах приборных устройств используются мелко модульные зубчатые передачи.

Расчет геометрических размеров зубчатых передач производят по формулам, в которых используются относительные величины, и параметры зацепления выражаются через модуль m . Относительными величинами являются коэффициенты головки зуба h_a^* и радиального зазора c^* . В частности, высота делительной головки зуба h_a , т. е. расстояние между окружностью вершин и делительной окружностью, и радиальный зазор зубчатой передачи выражаются через модуль по следующим формулам:

$$h_a = h_a^* m; c = c^* m. \quad (5.6)$$

Тогда расстояние между делительной окружностью и окружностью впадин, являющееся высотой делительной ножки зуба, найдется из выражения

$$h_f = h_a + c = (h_a^* + c^*) m, \quad (5.7)$$

а высота зуба h – из выражения

$$h = h_a + h_f = (2h_a^* + c^*) m. \quad (5.8)$$

Выражения для определения диаметров окружностей вершин зубьев (d_a) и впадин (d_f), а также межосевого расстояния a (диаметры делительных окружностей приняты равными диаметрам начальных окружностей) запишутся через модуль и относительные коэффициенты в следующем виде:

$$d_a = d \pm 2h_a = m(z \pm 2h_a^*); \quad (5.9)$$

$$a = (d_1 \pm d_2)/2 = m(z_1 \pm z_2)/2, \quad (5.10)$$

где z_1, z_2 – число зубьев сопряженных зубчатых колес; d, d_1, d_2 – диаметры делительных окружностей; верхний знак в выражениях (5.9, 5.10) для колес с внешними зубьями, нижний – для колес с внутренними зубьями; в выражениях (5.9, 5.10) верхний знак для внешнего зацепления зубчатых колес, нижний – для внутреннего зацепления.

Пример 5.1. В зубчатой передаче с внутренним зацеплением, состоящей из двух цилиндрических колес 1 и 2 (рис. 5.2), числа зубьев которых равны $z_1 = 17, z_2 = 51$, а модуль зацепления равен $m = 0,5$ мм, определить диаметры делительной окружности d , окружности вершин зубьев d_a , окружности впадин d_f для каждого колеса, а также межосевое расстояние a . Принять значения коэффициента головки зуба равным $h_a^* = 1$, а коэффициента радиального зазора – $c^* = 0,5$.

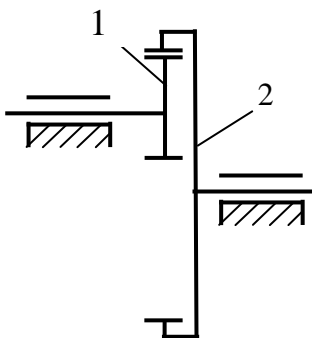


Рисунок 5.2 –
Схема зубчатой
передачи с
внутренним
зацеплением

Решение. Определим диаметры делительной окружности d_1 , окружностей вершин зубьев d_{a1} и впадин d_{f1} колеса 1 с внешними зубьями:

$$d_1 = mz_1 = 0,5 \cdot 17 = 8,5 \text{ (мм)}; d_{a1} = m(z_1 + 2h_a^*) = 0,5(17 + 2) = 9,5 \text{ (мм)}; d_{f1} = m(z_1 - 2(h_a^* + c^*)) = 0,5(17 - 2(1 + 0,5)) = 7 \text{ (мм)}.$$

Найдем значения диаметров делительной окружности d_2 , окружностей вершин зубьев d_{a2} и впадин (К примеру 5.1) d_{f2} колеса 2 с внутренними зубьями:

$$d_2 = mz_2 = 0,5 \cdot 51 = 25,5 \text{ (мм)}; d_{a2} = m(z_2 - 2h_a^*) = 0,5(51 - 2) = 24,5 \text{ (мм)}; d_{f2} = m(z_2 + 2(h_a^* + c^*)) = 0,5(51 + 2(1 + 0,5)) = 27 \text{ (мм)}.$$

Вычислим межосевое расстояние a :

$$a = 0,5m(z_2 - z_1) = 0,5 \cdot 0,5(51 - 17) = 8,5 \text{ (мм)}.$$

Задачи

5.1 В зубчатой передаче с внешним зацеплением, состоящей из двух колес с числом зубьев $z_1 = 20$ и $z_2 = 80$, определить диаметры делительных окружностей d_1, d_2 , окружностей вершин зубьев d_{a1}, d_{a2} , окружности впадин второго колеса d_{f2} и межосевое расстояние a , если известно значение диаметра окружности впадин первого колеса $d_{f1} = 7$ мм. Принять значения коэффициентов головки зуба и радиального зазора равными $h_a^* = 1, c^* = 0,25$.

5.2 Для колеса с внешними зубьями, имеющего число зубьев $z = 35$ и диаметр окружности вершин зубьев $d_a = 18,5$ мм, определить значение модуля m , диаметр делительной окружности d и диаметр окружности впадин d_f . Принять значения коэффициентов головки зуба и радиального зазора равными $h_a^* = 1, c^* = 0,25$.

5.3 Известен диаметр окружности вершин зубьев колеса с внутренними зубьями $d_a = 30,4$ мм и число зубьев $z = 78$. Определить модуль зацепления m , диаметр делительной окружности d и диаметр окружности впадин d_f , если коэффициент головки зуба равен $h_a^* = 1$, а коэффициентов радиального зазора – $c^* = 0,25$.

5.4 Для колеса с внешними зубьями модуль $m = 0,5$ мм, диаметр окружности вершин зубьев $d_a = 30$ мм. Приняв значения коэффициентов головки зуба и радиального зазора равными соответственно $h_a^* = 1, c^* = 0,25$, определить число зубьев z колеса, делительный диаметр d и диаметр окружности впадин d_f .

5.5 Цилиндрическая шестерня имеет число зубьев $z = 21$ и диаметр окружности впадин $d_f = 7,32$ мм. Для коэффициентов головки зуба и радиального зазора, равных соответственно $h_a^* = 1, c^* = 0,35$, определить модуль m зубчатого колеса, диаметры делительной окружности d и окружности вершин зубьев d_a .

5.6 Передаточное отношение для пары зубчатых колес равно $i_{1-2} = 3,8$, а модуль зацепления $m = 0,6$ мм. Определить межосевое расстояние a и число зубьев z_1, z_2 колес, если делительный диаметр шестерни равен $d_1 = 15$ мм.

5.7 Определить модуль m зубчатой передачи, состоящей из двух колес, и число зубьев z_1, z_2 этих колес, если межосевое расстояние $a = 42,5$ мм, а диаметры окружностей вершин зубьев равны $d_{a1} = 23$ мм, $d_{a2} = 66$ мм. Коэффициент высоты головки зуба принять равным $h_a^* = 1$.

5.2 Кинематический расчет зубчатых передач

Кинематическое исследование зубчатых передач заключается в определении передаточного отношения. Передаточное отношение i – это отношение угловой скорости на входе $\omega_{\text{вх}}$ к угловой скорости на выходе $\omega_{\text{вых}}$ передачи:

$$i = \omega_{\text{вх}} / \omega_{\text{вых}}. \quad (5.11)$$

Для зубчатых передач отношение угловых скоростей может быть выражено через соответствующее отношение числа зубьев зубчатых колес передачи. Так для пары зубчатых колес с числом зубьев z_1 и z_2 передаточное отношение определится выражением

$$i = \omega_{\text{вх}} / \omega_{\text{вых}} = \pm z_2 / z_1, \quad (5.12)$$

где знак « $-$ » берется при внешнем зацеплении зубчатых колес, а знак « $+$ » – при внутреннем зацеплении.

Для n -ступенчатой зубчатой передачи общее передаточное отношение определяется как произведение передаточных отношений отдельных ступеней: $i = i_1 i_2 \dots i_n$.

Если n -ступенчатая зубчатая передача состоит из $2n$ зубчатых колес числом зубьев z_1, z_2, \dots, z_{2n} , закрепленных на валах, вращающихся в неподвижных опорах, то передаточное отношение определится выражением

$$i = \omega_{\text{вх}} / \omega_{\text{вых}} = (-1)^k \frac{z_2 z_4 \dots z_{2n}}{z_1 z_3 \dots z_{2n-1}}, \quad (5.13)$$

где k – число внешних зацеплений зубчатых колес в передаче.

Для планетарных передач, у которых хотя бы одно колесо имеет подвижную ось, передаточное отношение определяется по формуле Виллиса:

$$i_{lk-H} = 1 - i_{Hk-l}, \quad (5.14)$$

где i_{k-H}^l – искомое передаточное отношение от k -го звена к звену H (водилу) при неподвижном звене l ; i_{k-l}^H – передаточное отношение от k -го звена к звену l при неподвижном водиле H .

Если входным звеном планетарной передачи является водило H , то передаточное отношение от водила к k -му звену определится как обратное отношение:

$$i_{H-k} = 1 / i_{k-H}. \quad (5.15)$$

Пример 5.2 Для редуктора, представленного на рисунке, определить передаточное отношение i_{1-7} , если $z_1 = 20$, $z_2 = 80$, $z_3 = 17$, $z_4 = 51$, $z_5 = 20$, $z_6 = 48$.

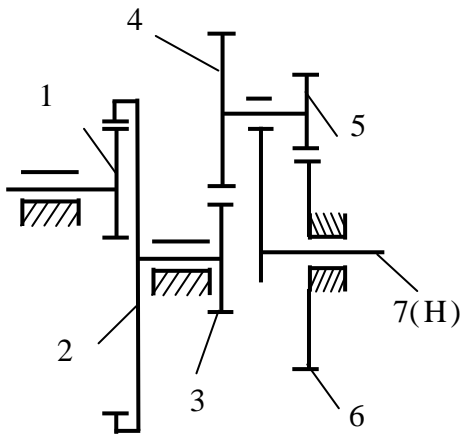


Рисунок 5.3 – Схема двухступенчатого редуктора с планетарной передачей

Решение. Данный редуктор состоит из двух ступеней: рядовой цилиндрической передачи, состоящей из колес 1 и 2, и планетарной передачи, содержащей зубчатые колеса 3 – 6 и водило 7(H). Передаточное отношение редуктора будет равно произведению передаточных отношений ступеней, т. е. $i_{1-7} = i_{1-2} \cdot i_{3-7}$. Для первой ступени $i_{1-2} = \omega_1/\omega_2 = z_2/z_1 = 80/20 = 4$. Передаточное отношение для первой ступени положительное, так как мы имеем внутреннее зацепление зубчатых колес (колесо 2 с внутренними зубьями).

Для определения передаточного отношения планетарной ступени воспользуемся формулой Виллиса: $i_{k-n}^l = 1 - i_{k-l}^n$. В нашем случае $k = 3$, $n = 7$, $l = 6$. Неподвижным является колесо 6.

Тогда передаточное отношение планетарной передачи определится:

$$i_{3-7}^6 = \omega_3/\omega_7 = 1 - i_{3-6}^7 = 1 - ((-z_4/z_3)(-z_6/z_5)) = 1 - 51 \cdot 48/17 \cdot 20 = -6,2.$$

Передаточное отношение редуктора будет равно:

$$i_{1-7} = \omega_1/\omega_7 = i_{1-2} \cdot i_{3-7} = 4 \cdot (-6,2) = -24,8.$$

Ответ: $i_{1-7} = -24,8$.

Пример 5.3 Для представленного на рисунке редуктора подсчитать передаточное отношение i_{1-5} , если $z_1 = z_4 = 30$, $z_2 = z_5 = 20$, $z_3 = 80$.

Решение. Устанавливаем, что редуктор двухступенчатый: первая ступень (не планетарная) – от колеса 1 к колесу 2; вторая (планетарная) – от водила H к колесу 5.

Подсчитываем передаточные отношения отдельных ступеней. Для первой ступени имеем

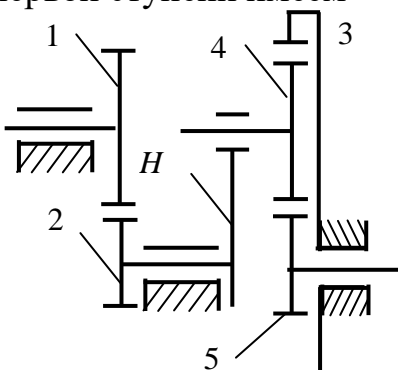


Рисунок 5.4 – Схема двухступенчатого редуктора с планетарной передачей

$$i_{1-2} = \omega_1/\omega_2 = z_2/z_1 = 20/30 = 2/3;$$

для второй ступени

$$i_{H-5} = \frac{\omega_H}{\omega_5} = \frac{1}{i_{5-H}^H} = \frac{1}{1 - i_{5-3}^H} = \frac{1}{1 + \frac{z_3}{z_5}} = \frac{1}{5}.$$

Передаточное отношение редуктора

$$i_{1-5} = i_{1-2} i_{H-5} = -\frac{2}{3} \frac{1}{5} = -\frac{1}{7,5}.$$

$$i_{1-5} = -1/7,5 \approx -0,143.$$

Пример 5.4 Рассчитать одноступенчатый зубчатый механизм с цилиндрическими колесами, если заданы момент на выходном валу механизма (момент сопротивления) $T_{\text{вых}} = 0,4$ Н, частота вращения выходного вала механизма $n_{\text{вых}} = 310$ мин⁻¹ и передаточное отношение $i = 4,13$. Принять коэффициент полезного действия механизма, учитывающий потери в зубчатом зацеплении, подшипниках и муфте, соединяющей вал электродвигателя с входным валом механизма, равным $\eta = 0,84$.

Необходимо рассчитать геометрические параметры (d, d_a, d_f, h, h_a, h_f) шестерни 1 и ведомого колеса 2, определить мощность $N_{\text{дв}}$ и частоту вращения $n_{\text{дв}}$ электродвигателя.

Решение. Рассчитываемый механизм служит для уменьшения скорости вращения электродвигателя в i число раз и состоит из пары находящихся в зацеплении цилиндрических зубчатых колес (шестерни 1 и колеса 2). Зубчатые колеса устанавливаются на валах, которые поддерживаются в требуемом положении опорами. Каждый вал имеет две опоры (скольжения или качения), закрепленные в корпусе. Быстроходный вал редуктора соединен с валом электродвигателя муфтой.

Определяем требуемую мощность $N_{\text{дв}}$ электродвигателя, приняв коэффициент полезного действия электромеханического привода для выбранной схемы равным $\eta = 0,84$,

$$N_{\text{дв}} = kN_{\text{вых}}/\eta \text{ [Вт]},$$

где k – коэффициент запаса, учитывающий необходимость преодоления динамических нагрузок в момент разгона, принимаемый равным 1,05–1,1; $N_{\text{вых}} = T_{\text{вых}} \cdot \omega_{\text{вых}}$ – требуемая мощность на выходном валу; $\omega_{\text{вых}} = 2\pi n_{\text{вых}}/60$ – угловая скорость выходного вала, рад/с; $n_{\text{вых}}$ – угловая скорость выходного вала в об/мин; $T_{\text{вых}}$ – момент на выходном валу, Нм.

Скорость вращения выходного вала в рад/с равна

$$\omega_{\text{вых}} = (2 \cdot 3,14 \cdot 310)/60 = 32,45 \text{ рад/с.}$$

Подставив значения $\eta, T_{\text{вых}}, \omega_{\text{вых}}$ в выражение для мощности двигателя и приняв $k = 1,1$, получим

$$N_{\text{дв}} = (k \cdot T_{\text{вых}} \cdot \omega_{\text{вых}})/\eta = (1,1 \cdot 0,4 \cdot 32,45) = 17,02 \text{ Вт.}$$

Частота вращения электродвигателя

$$n_{\text{дв}} = n_{\text{вых}} \cdot i = 310 \cdot 4,13 = 1280,3 \text{ об/мин.}$$

Из серии двигателей, имеющих скорости вращения 1250, 1280, 1300 об/мин выбираем электродвигатель с $n = 1280$ об/мин и мощностью $N \geq 17$ Вт.

Выбираем число зубьев z_1 шестерни. Так как $z_{\min} = 17$, а рекомендуемое значение числа зубьев шестерни 18–30, принимаем $z_1 = 20$. Число зубьев зубчатого колеса определяем по формуле

$$z_2 = z_1 \cdot i = 20 \cdot 4,13 = 82,6.$$

Так как колесо должно иметь целое число зубьев, принимаем $z_2 = 82$. Тогда фактическое передаточное отношение зубчатой передачи

$$i_{\phi} = z_2/z_1 = 82/20 = 4,1.$$

Относительная погрешность передаточного отношения зубчатой передачи

$$\Delta i = \frac{(|i - i_{\phi}|) \cdot 100\%}{i} = \frac{(4,13 - 4,1) \cdot 100\%}{4,13} = 0,73 \%$$

Допустимая погрешность Δi передаточного отношения не должна превышать 3,5 %.

Выбираем значение модуля m зацепления из стандартного ряда модулей (0,15; 0,2; 0,25; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,8; 1,0; 1,25 мм). Применение малых модулей позволяет уменьшить габариты колес или при сохранении габаритов увеличить плавность передачи за счет увеличения числа зубьев. Принимаем $m = 0,5$ мм.

Предполагая прямозубый тип зубчатых колес, определим диаметр делительной окружности колеса (ведомого звена):

$$d_2 = m \cdot z_2 = 0,5 \cdot 82 = 41 \text{ мм.}$$

Линейная скорость зубчатого колеса в зацеплении

$$v = \omega_{\text{вых}} \cdot d_2/2 = (32,45 \cdot 41)/(2 \cdot 10^{-3}) = 0,66 \text{ м/с.}$$

При линейных скоростях $v < 6$ м/с принимают тип передачи – прямозубая.

У зубчатых колес со стандартной (нормальной) высотой зуба коэффициент высоты головки зуба $h_a^* = 1$, а коэффициент радиального зазора c^* зубьев в зацеплении зависит от модуля и равен

$$c^* = 0,5 \text{ при } m \leq 0,5 \text{ мм;}$$

$$c^* = 0,35 \text{ при } 0,5 < m < 1,0;$$

$$c^* = 0,25 \text{ при } m \geq 1,0 \text{ мм.}$$

Высота головки зубьев колес:

$$h_a = h_a^* \cdot m = 1 \cdot 0,5 = 0,5 \text{ мм.}$$

Высота ножки зубьев колес:

$$h_f = m(h_a^* + c^*) = 0,5(1 + 0,5) = 0,75 \text{ мм.}$$

Диаметры делительных окружностей зубчатых колес:

шестерни $d_1 = m \cdot z_1 = 0,5 \cdot 20 = 10 \text{ мм,}$

колеса $d_2 = m \cdot z_2 = 0,5 \cdot 82 = 41 \text{ мм.}$

Диаметры окружностей вершин зубьев колес:

шестерни $d_{a1} = d_1 + 2h_a = 10 + 2 \cdot 0,5 = 11 \text{ мм,}$

колеса $d_{a2} = d_2 + 2h_a = 41 + 2 \cdot 0,5 = 42 \text{ мм.}$

Диаметры окружностей впадин зубьев колес:

шестерни $d_{f1} = d_1 - 2h_f = 10 - 2 \cdot 0,5 = 8,5 \text{ мм,}$

колеса $d_{f2} = d_2 - 2h_f = 41 - 2 \cdot 0,5 = 39,5 \text{ мм.}$

Межосевое расстояние a зубчатой передачи:

$$a = (d_1 + d_2)/2 = (10 + 41)/2 = 25,5 \text{ мм.}$$

Задачи

5.1 Определить передаточное отношение i_{1-3} зубчатой передачи, если числа зубьев колес равны $z_1 = 20$, $z_2 = 30$, $z_3 = 40$. Ответ: $i_{1-3} = 2$.

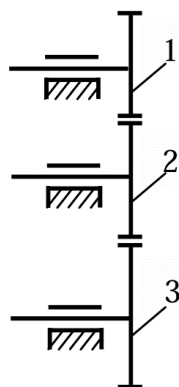


Рисунок 5.5 – Расчетная схема зубчатой передачи для определения передаточного отношения для задачи 5.1

5.2 Определить передаточное отношение i_{1-6} зубчатой передачи, если числа зубьев равны $z_1 = 16$, $z_2 = 48$, $z_3 = 20$, $z_4 = 40$, $z_5 = 13$, $z_6 = 26$.

Ответ: $i_{1-6} = -12$.

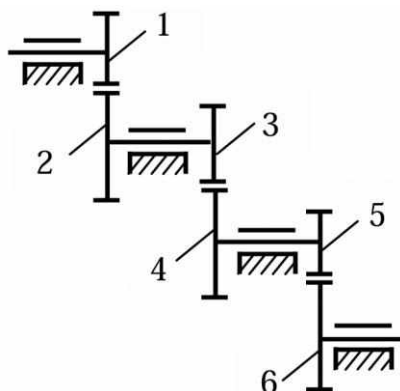


Рисунок 5.6 – Расчетная схема зубчатой передачи для определения передаточного отношения для задачи 5.2

5.3 Определить передаточное отношение i_{1-3} зубчатой передачи, если числа зубьев колес равны $z_1 = z_2 = 20$, $z_3 = 60$. Ответ: $i_{1-3} = -3$.

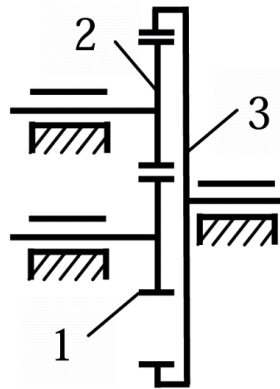


Рисунок 5.7 – Расчетная схема зубчатой передачи для определения передаточного отношения для задачи 5.3

5.4 Редуктор скорости, служащий для замедления вращения и передающий вращение вала I валу II, состоит из четырех шестерен с соответствующим числом зубьев: $z_1 = 10$, $z_2 = 60$, $z_3 = 12$, $z_4 = 70$. Определить передаточное отношение механизма. Ответ: $i_{I-II} = \omega_I/\omega_{II} = 35$.

5.5 В представленном на рисунке к задаче планетарном зубчатом механизме (редуктор Джемса) известно количество зубьев центральных колес:

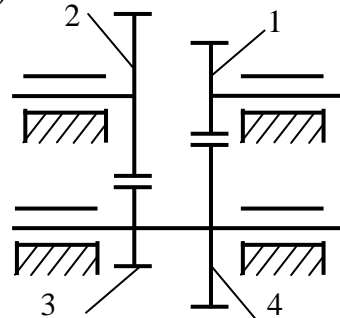


Рисунок 5.8 – Схема редуктора скорости

$z_1 = 20$, $z_3 = 80$. Определить количество зубьев сателлита z_2 и передаточное отношение i_{1-H} всего механизма. Ответ: $z_2 = 30$, $i_{1-H} = 5$.

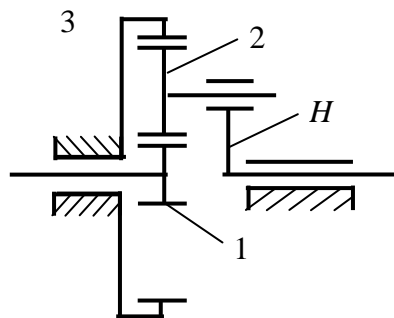


Рисунок 5.9 – Схема планетарного зубчатого механизма (редуктор Джемса)

5.6 Для редуктора Давида (см. рисунок к задаче) подсчитать передаточное отношение i_{H-1} при $z_1 = z_3 = 100$, $z_2 = 99$, $z_4 = 101$. Ответ: $i_{H-1} = 10000$.

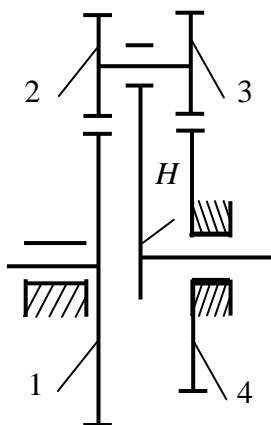


Рисунок 5.10 – Схема редуктора Давида

5.7 Определить передаточное отношение i_{1-H} редуктора Давида, если числа зубьев колес равны $z_1 = 24$, $z_2 = 36$, $z_3 = 12$, $z_4 = 48$. Ответ: $i_{1-H} = -5$.

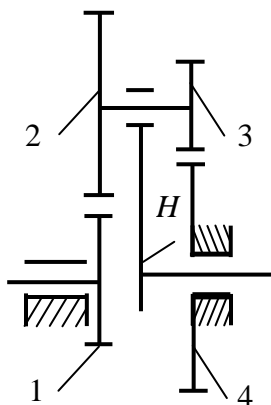


Рисунок 5.11 – Схема редуктора Давида для определения передаточного отношения

5.8 На рисунке к задаче показаны 10 схем зубчатых передач. Входное колесо 1 в данный момент имеет угловую скорость ω_1 и постоянное угловое ускорение ε_1 , направленное по движению или против движения. Определить: передаточное отношение между входным и выходным звеньями и его знак (если их оси вращения параллельны).

Угловую скорость и угловое ускорение выходного звена, их направления показать на схеме передачи; время, в течение которого угловая скорость увеличится в два раза (если движение ускоренное) или уменьшится до нуля (если движение замедленное); общий коэффициент полезного действия передачи.

В таблицах 5.1–5.10 заданных величин z – число зубьев колес приводится с индексом, соответствующим их номеру на схеме механизма, для червяка z – число заходов, а направление витков червяка указано буквами: л – левое, п – правое.

Для расчетов принять следующие значения КПД (учитывающего потери и в зацеплении, и в подшипниках): для пары цилиндрических колес $\eta_{ц} = 0,97$; для пары конических колес $\eta_{к} = 0,95$; для планетарной передачи с внешними зацеплениями ее колес $\eta_{п} = 0,95$, а для имеющей внутреннее зацепление одной из пар $\eta_{п} = 0,96$; для червячной передачи при одно-, двух- и трехзаходном червяке – соответственно $\eta_{ч} = 0,7; 0,75; 0,8$.

Для решения задачи нужно определить, из каких видов передач состоит заданное сложное соединение зубчатых колес, уметь находить планетарную передачу с ее характерными звеньями – водилом и сателлитами, разделять передачи на плоские и пространственные (с непараллельными осями вращения). Нужно понимать, когда направления вращения можно определять по алгебраическим знакам передаточного отношения, а когда для этого необходимо применять простановку стрелок на схеме. Очень важны показанные направления угловой скорости и углового ускорения – по ним определяют характер движения (ускоренное, замедленное).

5.9 Рассчитать одноступенчатый зубчатый механизм с цилиндрическими зубчатыми колесами. В таблице к задаче заданы момент $T_{\text{вых}}$ на выходном валу механизма (момент сопротивления), частота вращения выходного вала зубчатого механизма и передаточное отношение i механизма. Принять коэффициент полезного действия механизма, учитывающий потери в зубчатом зацеплении, подшипниках и муфте, соединяющей вал электродвигателя с входным валом механизма, равным $\eta = 0,84$.

Необходимо рассчитать геометрические параметры (d, d_a, d_f, h, h_a, h_f) шестерни 1 и ведомого колеса 2, определить мощность $N_{\text{дв}}$ и частоту вращения $n_{\text{дв}}$ электродвигателя.

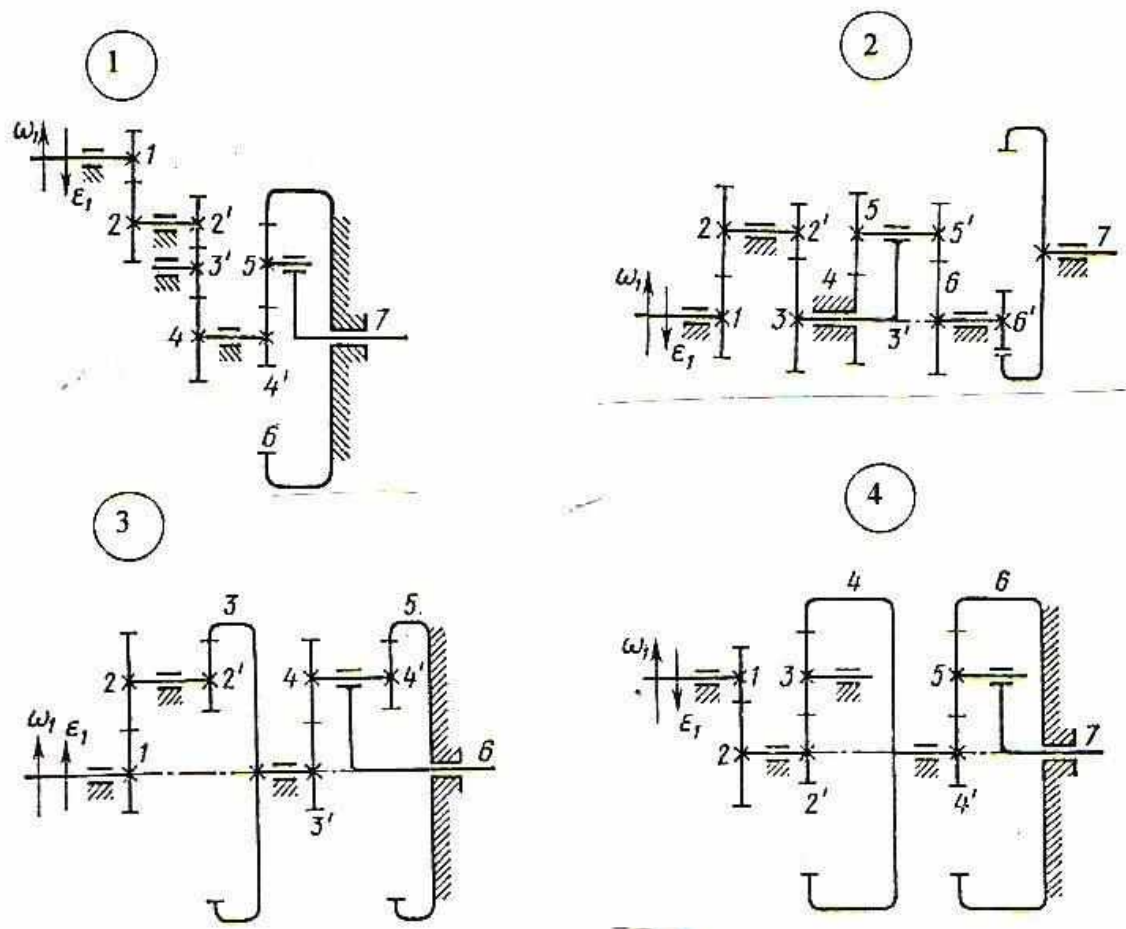


Рисунок 5.12.1 – Схема одноступенчатого зубчатого механизма

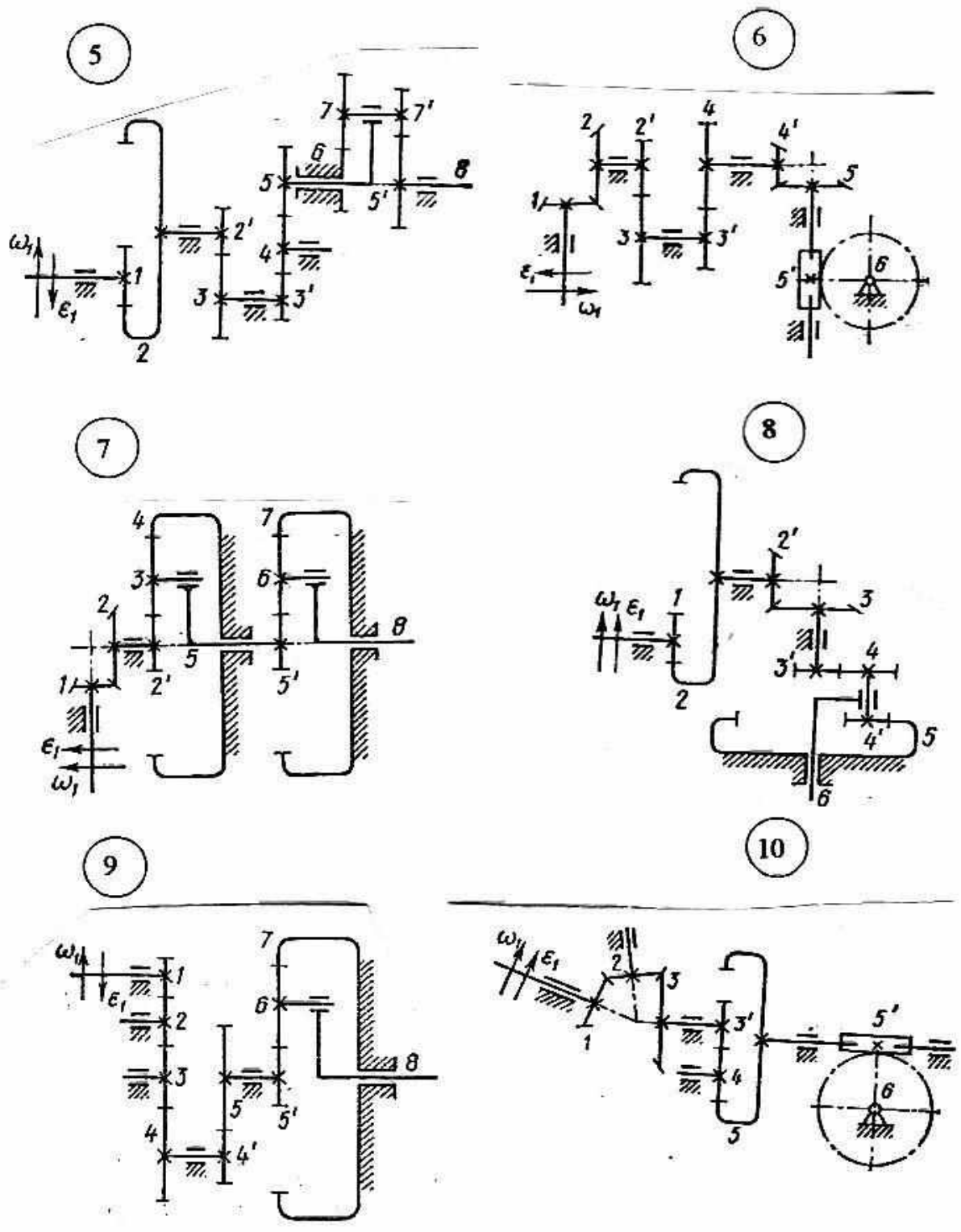


Рисунок 5.12.2 – Схема одноступенчатого зубчатого механизма (продолжение)

Таблица 5.1 – Исходные данные для расчета механизма по схеме 1

Величина	Варианты									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
z_1	15	16	14	14	17	18	14	15	16	14
z_2	20	30	24	20	34	24	20	30	28	26
z_2'	14	15	14	15	17	15	15	14	14	15
z_4	20	20	28	21	24	26	36	38	40	43
z_4'	15	14	14	16	15	18	14	18	19	20
z_5	21	22	21	22	21	25	22	26	25	40
z_6	57	58	56	60	57	68	58	70	69	100
ω_1 , рад/с	280	180	240	250	300	250	150	200	350	100
ε_1 , рад/с ²	50	60	180	125	75	50	100	50	40	20

Таблица 5.2 – Исходные данные для расчета механизма по схеме 2

Величина	Варианты									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
z_1	22	14	25	18	21	20	16	18	16	20
z_2	23	22	6	30	28	30	28	28	24	21
z_2'	22	16	5	16	17	18	16	15	18	20
z_3	23	26	6	26	30	28	24	32	30	21
z_4	22	28	6	24	31	32	29	31	21	20
z_5	23	27	5	25	32	31	30	30	22	21
z_5'	22	28	6	24	31	32	29	31	21	20
z_6	23	27	5	25	32	31	30	30	22	21
z_6'	32	29	6	28	30	25	22	23	24	20
z_7	42	39	8	37	40	37	45	42	40	65
ω_1 , рад/с	150	380	20	290	20	300	280	350	250	400
ε_1 , рад/с ²	75	285	160	100	80	100	210	70	50	200

Таблица 5.3 – Исходные данные для расчета механизма по схеме 3

Величина	Варианты									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
z_1, z_3'	20	23	24	17	22	19	14	16	18	20
z_2, z_4	40	30	38	25	36	36	26	40	30	28
z_2', z_4'	22	21	22	20	26	26	21	20	22	20
z_3, z_5	82	74	84	62	84	79	61	76	70	68
$\omega_1, \text{рад/с}$	320	190	220	180	200	240	300	260	340	280
$\varepsilon_1, \text{рад/с}^2$	80	95	165	200	50	180	200	130	285	210

Таблица 5.4 – Исходные данные для расчета механизма по схеме 4

Величина	Варианты									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
z_1	15	17	14	19	16	18	14	18	14	18
z_2	24	32	24	28	30	27	21	31	19	25
z_2', z_4'	30	25	20	20	25	21	30	29	34	42
z_3, z_5	20	30	40	30	21	20	21	21	20	20
z_4, z_6	70	85	100	80	67	61	72	71	74	82
$\omega_1, \text{рад/с}$	260	240	240	350	400	220	150	150	300	200
$\varepsilon_1, \text{рад/с}^2$	195	100	180	200	50	55	60	200	200	50

Таблица 5.5 – Исходные данные для расчета механизма по схеме 5

Величина	Варианты									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
z_1	29	30	27	26	25	24	23	22	21	20
z_2	39	40	40	36	37	40	42	46	56	65
z_2'	20	15	20	16	17	16	15	17	15	14
z_3	29	32	31	24	25	23	28	26	30	26
z_3'	19	21	22	15	16	15	16	13	14	15
z_5	29	31	30	22	23	21	22	20	24	25
z_6	31	30	18	17	20	19	26	25	21	20
z_7	30	31	17	18	19	20	25	26	20	21
z_7'	31	30	18	17	20	19	26	25	21	20
z_8	30	31	17	18	19	20	25	26	20	21
$\omega_1, \text{рад/с}$	300	260	120	280	225	100	350	150	300	200
$\varepsilon_1, \text{рад/с}^2$	150	65	200	120	50	50	200	1009	75	40

Таблица 5.6 – Исходные данные для расчета механизма по схеме 6

Величина	Варианты									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
z_1	22	17	20	17	21	18	20	18	17	17
z_2	30	23	21	25	24	21	24	30	17	20
z_2'	16	14	15	15	16	17	15	16	14	14
z_3	28	23	24	20	30	24	28	20	20	16
z_3'	15	15	14	16	14	14	17	18	15	15
z_4	31	28	24	24	21	20	30	32	20	20
z'	19	18	17	18	19	18	17	18	17	18
z_5	28	27	32	31	32	28	30	32	26	28
z_5'	2, л	3, п	2, л	1, п	3, л	2, п	1, л	3, п	2, л	1, п
z_6	50	33	38	40	42	40	30	36	30	50
ω_1 , рад/с	380	320	350	320	280	250	300	400	150	350
ε_1 , рад/с ²	190	80	70	80	70	125	60	250	50	100

Таблица 5.7 – Исходные данные для расчета механизма по схеме 7

Величина	Варианты									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
z_1	18	19	16	17	18	13	14	14	16	15
z_2	25	28	31	27	39	24	27	20	30	25
z_2', z_5'	40	35	28	30	18	22	25	20	20	21
z_3, z_6	20	20	20	20	24	36	20	40	30	20
z_4, z_7	80	75	68	70	66	94	65	100	80	61
ω_1 , рад/с	320	360	400	180	350	320	280	120	300	250
ε_1 , рад/с ²	80	60	50	90	200	240	75	40	200	100

Таблица 5.8 – Исходные данные для расчета механизма по схеме 8

Величина	Варианты									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
z_1	22	22	21	21	26	25	21	22	22	20
z_2	50	45	60	55	36	38	60	50	60	62
z_2'	18	14	18	17	16	14	15	16	17	15
z_3	29	26	32	30	24	26	24	24	30	28
z_3'	16	17	23	24	20	20	15	18	16	15
z_4	40	27	30	38	40	30	26	28	24	25
z_4'	20	20	21	22	22	20	20	21	21	22
z_5	76	64	74	84	82	70	61	67	61	62
ω_1 , рад/с	240	320	400	280	350	300	150	200	250	180
ε_1 , рад/с ²	180	240	100	210	200	75	25	100	50	90

Таблица 5.9 – Исходные данные для расчета механизма по схеме 9

Величина	Варианты									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
z_1	20	14	15	19	17	14	15	18	15	14
z_4	30	26	25	26	28	21	20	30	21	30
z_4'	18	14	15	18	16	17	16	14	15	14
z_5	24	26	27	30	24	24	23	21	30	26
z_5'	15	15	14	16	15	14	15	14	18	20
z_6	35	30	26	30	24	23	21	22	21	25
z_7	85	75	66	76	63	60	57	58	60	70
ω_1 рад/с	210	280	400	180	220	240	250	350	200	150
ε_1 , рад/с ²	630	140	250	45	550	60	400	70	500	60

Таблица 5.10 – Исходные данные для расчета механизма по схеме 10

Величина	Варианты									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
z_1	19	18	20	17	18	19	17	18	18	17
z_3	27	24	32	30	25	30	27	30	25	28
z_3'	21	20	16	14	14	15	17	15	16	15
z_5	52	50	42	46	50	49	48	45	50	45
z_5'	3, п	2, л	1, п	2, л	1, п	3, л	2, п	1, л	2, п	3, л
z_6	33	34	50	32	29	36	40	28	28	30
$\omega_1, \text{рад/с}$	150	200	350	240	300	350	250	100	200	180
$\varepsilon_1, \text{рад/с}^2$	500	250	700	600	500	175	125	60	50	60

Таблица 5.11 – Исходные данные к задаче 5.9

№ варианта	Момент $T_{\text{вых}}, \text{Нм}$	Частота вращения $n_{\text{вых}}, \text{мин}^{-1}$	Переда- точное отношение i	№ варианта	Момент $T_{\text{вых}}, \text{Нм}$	Частота вращения $n_{\text{вых}}, \text{мин}^{-1}$	Переда- точное отношение i
1	0,6	160	8,0	15	0,6	235	5,45
2	0,5	165	7,76	16	0,5	240	5,33
3	0,4	170	7,53	17	0,4	245	5,22
4	0,3	175	7,31	18	0,3	250	5,12
5	0,2	180	7,11	19	0,2	255	5,02
6	0,6	185	6,91	20	0,6	260	4,92
7	0,5	190	6,74	21	0,5	265	4,83
8	0,4	195	6,56	22	0,4	270	4,74
9	0,3	200	6,40	23	0,3	275	4,65
10	0,2	205	6,24	24	0,2	280	4,57
11	0,6	210	6,09	25	0,6	285	4,49
12	0,5	215	5,95	26	0,5	290	4,41
13	0,4	220	5,82	27	0,4	295	4,34
14	0,3	225	5,69	28	0,3	300	4,27

5.3 Эвольвентное зацепление

Рабочие поверхности зубьев цилиндрических колес

«Положим» на поверхность кругового цилиндра (основного) касательную образующую плоскость (рис. 5.13), на ней проведем равноотстоящие прямые, параллельные оси цилиндра и покатаем касательную плоскость (не допуская проскальзывания!) по основному цилиндру. Всякая точка любой из прямых $A-A$, A_1-A_1 , A_2-A_2 , ... опишет эвольвенту круга, сами прямые – боковые (рабочие) эвольвентные поверхности \mathcal{E} , \mathcal{E}_1 , прямых зубьев цилиндрического зубчатого колеса.

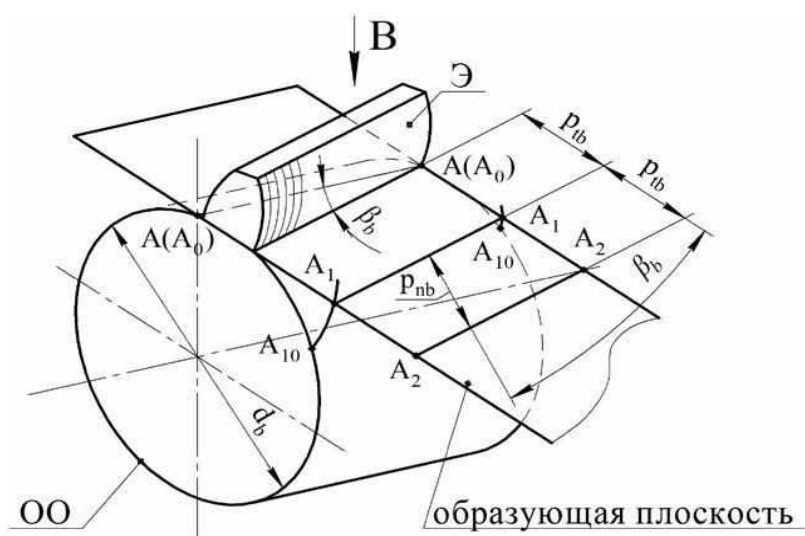


Рисунок 5.13 – Образование рабочих поверхностей прямых зубьев цилиндрического колеса

Если равноотстоящие на образующей плоскости прямые $A-A$, A_1-A_1 , A_2-A_2 , ... проведены под углом β_b к оси основного цилиндра, всякая точка любой из этих прямых по прежнему опишет эвольвенту круга, но зубья получатся (рис. 5.14) винтовыми (косыми).

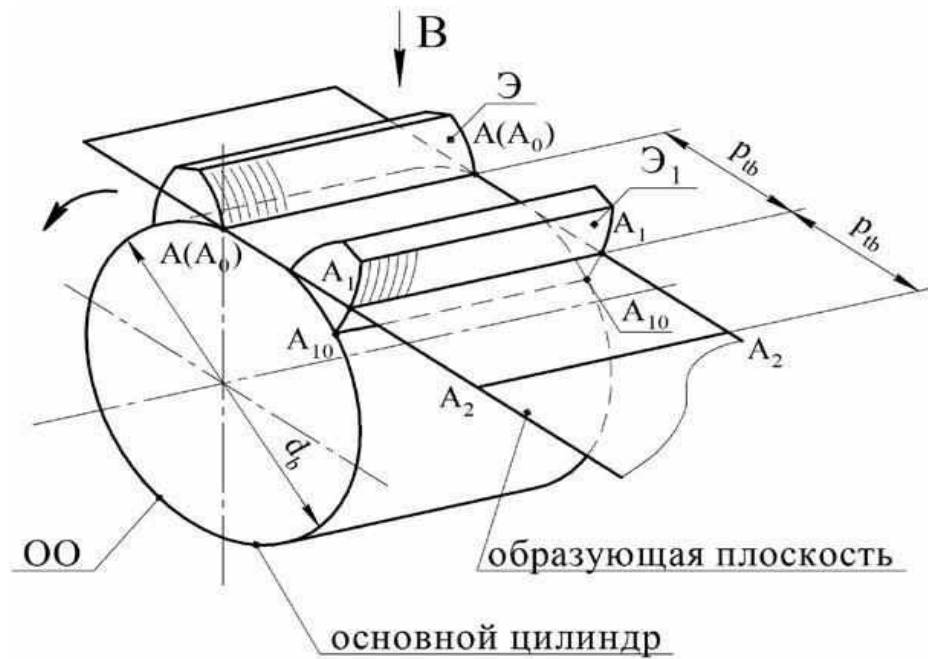


Рисунок 5.14 – Образование косых зубьев цилиндрических колес

Эвольвента круга и ее свойства

«Положим» на круг (основную окружность OO) касательную (рис. 5.15) и покатаем ее без скольжения по OO . Всякая точка касательной опишет эвольвенту круга – на рисунке показаны две эвольвенты (\mathcal{E} , \mathcal{E}_1), описанные точками B и B_1 , совпадающими вначале с точками касания A и A_1 . Вообразим, что отрезок касательной BB_1 получился сматыванием нити, лежавшей на дуге AA_1 , получим равенство

$$BB_1 = AA_1$$

и аналогичные равенства

$$\begin{aligned} A'B_1 &= A'A_1, \\ A'B &= A'A, \\ A''B'' &= A''A. \end{aligned} \quad (5.16)$$

Если касательную $A'B'$ «покачивать» вокруг точки касания A' , точка B' опишет бесконечно короткую дугу окружности, совпадающую с дугой \mathcal{E} , – отрезок $A'B'$ – радиус кривизны \mathcal{E} в точке B' , точка A' – центр кривизны, прямая $A'B'$ – нормаль \mathcal{E} . Желая построить нормаль к \mathcal{E} , например, в точке B'' , строим касательную NN ($B''A''$) к OO .

Вычтем из первого равенства (5.17) второе:

$$\begin{aligned} A'B_1' - A'B' &= A'A_1 - A'A, \\ B'B_1' &= AA_1 \end{aligned} \quad (5.17)$$

$B'B_1'$ – расстояние между эвольвентами \mathcal{E} и \mathcal{E}_1 , измеренное вдоль любой из касательных к основной окружности – их общей нормали, равно длине дуги OO , ограниченной основаниями эвольвент A и A_1 .

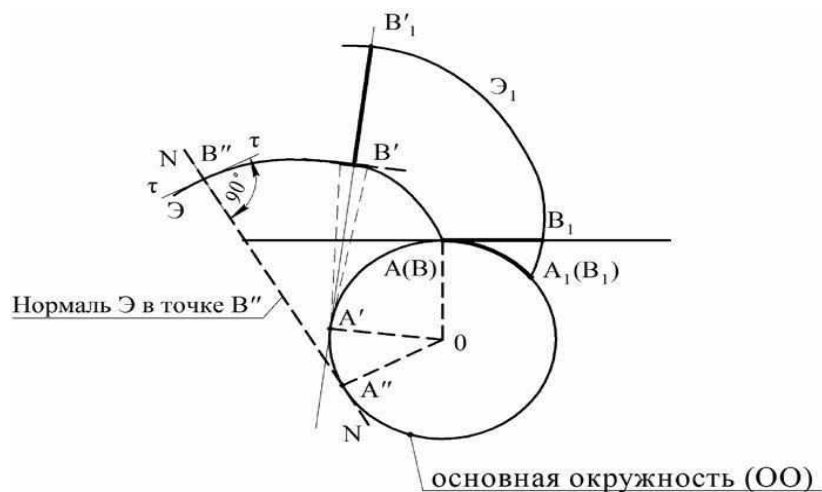


Рисунок 5.15 – Эвольвента круга

Взглянем на основные цилиндры с образующими плоскостями (рис. 5.13, 5.14) по стрелке B , найдем, что отрезки AA_1 равны дугам A_0A_{10} , то есть окружной шаг зацепления на основной окружности P_{tb} , равный длине ее дуги A_0A_{10} , можно измерить на касательной к OO (на образующей плоскости).

Эвольвентное зацепление

Построим (рис. 5.16) линию центров O_1O_2 цилиндрических колес с прямыми зубьями, глядя на них «в профиль». Положим: зацепляющиеся зубья соприкасаются в точке P – полюсе зацепления. Проведем через полюс прямую NN , опустим на нее перпендикуляры O_1A и O_2B . Радиусами O_1A и O_2B опишем окружности, взяв их за основные OO_1 и OO_2 . Перекатим (без скольжения) прямую NN по OO_1 и OO_2 – точка P прямой NN – общей касательной к основным окружностям опишет эвольвенты \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 – профили зацепляющихся зубьев.

Построенные профили соприкасаются в точке P , располагая общей касательной и, следовательно, общей нормалью – общей касательной к OO_1 и OO_2 – прямой NN . По мере вращения зацепляющихся колес точка контакта профилей их зубьев перемещается, но остается на общей нормали к эвольвентам \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 – на прямой NN (AB) – прямой зацепления, угол – угол зацепления.

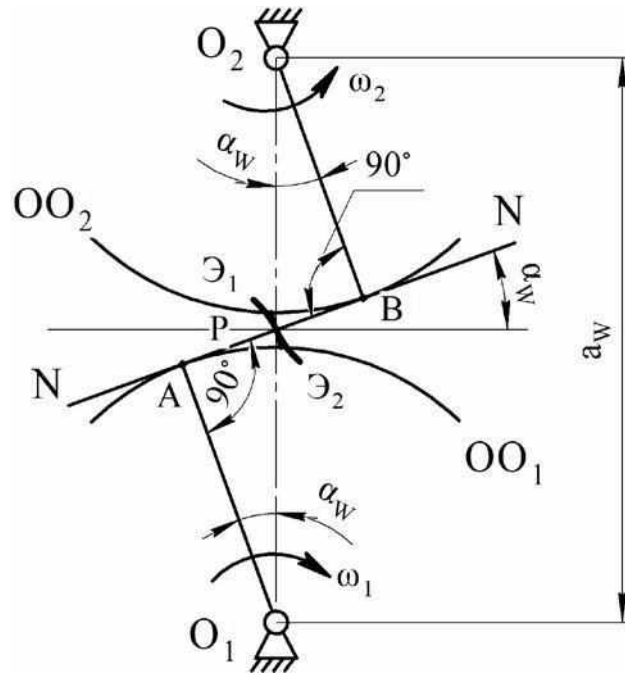


Рисунок 5.16 – Построение эвольвентного зацепления

Передаточное отношение

Зацепляющиеся эвольвенты образуют в плоском механизме (3-го семейства) зубчатой передачи кинематическую пару IV класса. Действительно, к трем «запрещенным движениям» добавляется четвертое – встречное движение \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 (рис. 5.16) вдоль общей нормали NN' : твердые зубья не способны проникать друг в друга и не могут разъединиться, не разрушая кинематической пары.

Высшая пара IV класса, образованная выпуклыми кривыми, может быть заменена в рассматриваемый момент их совместного движения нормальным к ним звеном AB (рис. 5.16), входящим в две вращательные пары A и B в центрах их кривизны. Тем самым зубчатая передача заменяется шарнирным четырехзвенником O_1ABO_2 (рис. 5.17).

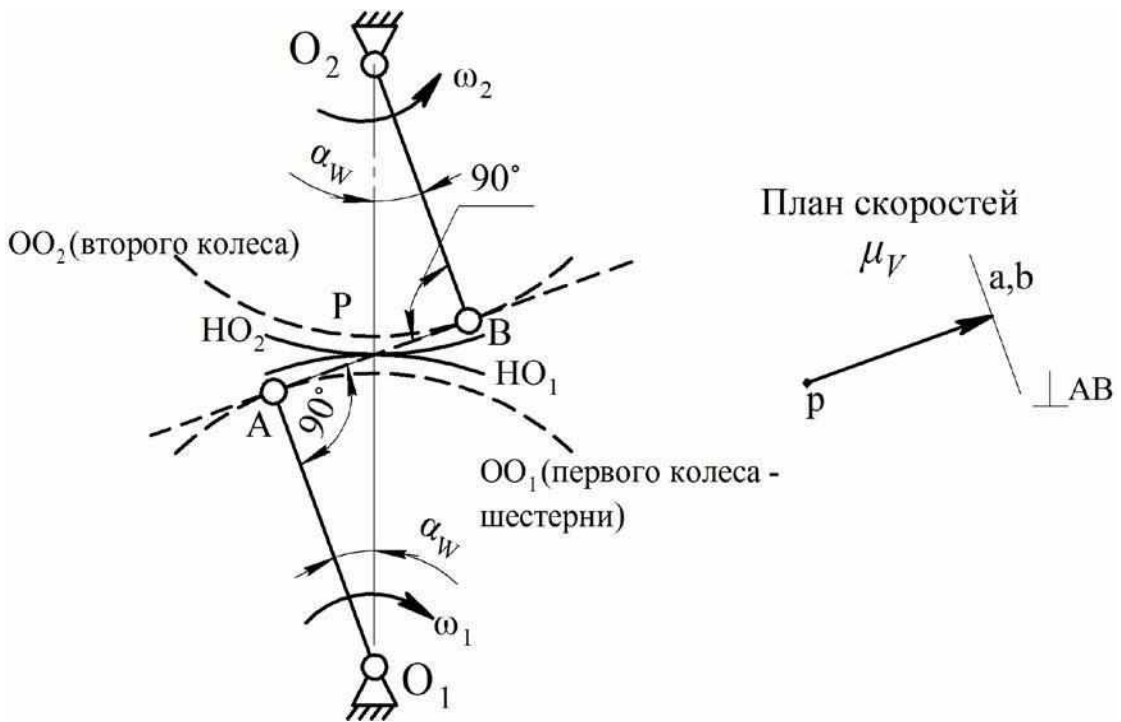


Рисунок 5.17 – Механизм, заменяющий передачу, и его план скоростей

В любой момент зацепления центры кривизны эвольвент \mathcal{E}_1 и \mathcal{E}_2 находятся в точках A и B – заменяющий механизм во все время зацепления один и тот же. Построим (рис. 5.17) план скоростей механизма. Из произвольно взятого полюса p строим вектор $(p)_a$, изображающий скорость точки A , направленную в сторону вращения первого колеса перпендикулярно радиусу O_1A . Ее величина

$$V_A = \omega_1 O_1A_1.$$

Масштаб плана скоростей

$$\alpha_V = \frac{V_a}{(p_a)}.$$

Скорость точки B

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + V_{BA},$$

где \vec{V}_{BA} – скорость точки B во вращении шатуна AB вокруг точки A , перпендикулярная прямой AB , – из точки a проводим перпендикуляр к AB до пересечения в точке b с прямой, параллельной вектору \vec{V}_B (перпендикулярной радиусу O_2B). Точка b совпала с точкой a , скорость \vec{V}_B равна скорости \vec{V}_A , или вращательные скорости точек основных окружностей зацепляющихся колес одинаковы:

$$\omega_1 O_1A = \omega_2 O_2B, \quad (5.18)$$

откуда передаточное отношение

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2B}{O_1A}.$$

Используя соотношение, следующее из подобия треугольников O_1AP и O_2BP ,

$$\frac{O_2B}{O_1A} = \frac{O_2P}{O_1P}$$

получим для передаточного отношения (5.19) еще одно выражение:

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2P}{O_1P}.$$

Выражение (5.20) может быть переписано:

$$\omega_1 O_1P = \omega_2 O_2P, \quad (5.19)$$

то есть скорости окружностей HO_1 и HO_2 зацепляющихся колес, соприкасающихся (рис. 5.17) в полюсе P , одинаковы; эти (начальные) окружности перекатываются друг по другу без скольжения.

Основные размеры эвольвентных колес

При нарезании эвольвентных колес методом обкатки инструментальной рейкой (рис. 5.18) заготовке колеса и рейке сообщают то же относительное движение, которое они имели бы, находясь в правильном зацеплении. Рейка движется возвратно-поступательно в направлении, параллельном оси нарезаемого колеса (перпендикулярно плоскости рисунка), заготовка же катится без скольжения по некоторой (начальной) прямой рейки. Соответствующая начальная окружность будущего колеса называется делительной (ДО), окружный шаг зацепления на ней p_t равен шагу стандартной инструментальной рейки.

$$P = \pi m. \quad (5.20)$$

где m – стандартный модуль зацепления. Число зубьев нарезаемого колеса (прямозубого)

$$z = \frac{\pi d}{P_t} = \frac{\pi d}{P} = \frac{d}{m}, \quad (5.21)$$

d – диаметр делительной окружности.

Диаметр основной окружности OO (рис. 5.18)

$$d_b = 2 \cdot OA = d \cos \alpha, \quad (5.22)$$

окружный шаг на ней

$$P_{tb} = \frac{\pi d_b}{z} = \frac{\pi d}{z} \cos \alpha,$$

или

$$P_{tb} = P_t \cos \alpha = P \cos \alpha, \quad (5.23)$$

где $\alpha = 20^\circ$ – стандартный угол зацепления.

Если за начальную прямую берется модульная прямая (МП на рис. 5.18), нарезанное колесо называется нулевым – на его делительной окружности толщины зубьев равны ширинам впадин. Если модульной рейке (и модульной прямой) сообщается положительное смещение ($x_m > 0$), ширина впадин на начальной прямой (НП) рейки становится больше толщины зубьев, а толщина зубьев на делительной окружности колеса больше ширины впадин. Такие колеса называются положительными. Толщина зубьев на делительных окружностях отрицательных колес (смещение $x_m < 0$), наоборот, меньше ширины впадин.

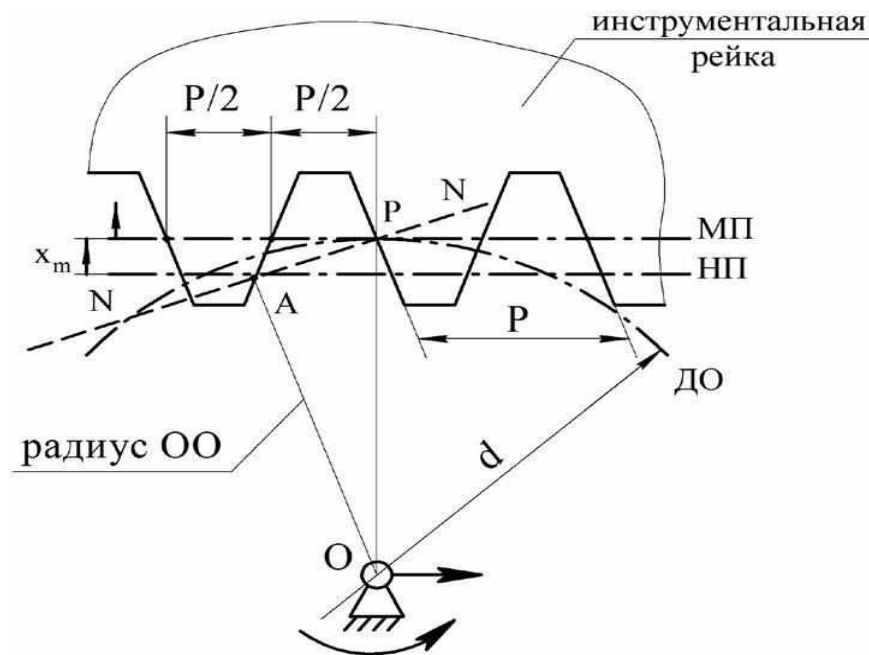


Рисунок 5.18 – Нарезается нулевое колесо

Косозубые колеса (рис. 5.14) можно нарезать прямозубой инструментальной рейкой, показанной на рисунке 5.18, повернув ее относительно заготовки на угол β .

Шаг рейки P (5.21) воспроизведет на делительном цилиндре нарезаемого колеса нормальный шаг P_n (рис. 5.14), нормальный модуль зацепления колеса $m_n = P_n/\pi$ будет равен стандартному модулю рейки $m = P/\pi$.

Понятно, что зацепляться могут только колеса, нарезанные рейками с равными шагами P (с равными модулями m). Диаметры делительных окружностей прямозубых зацепляющихся колес (см. формулу (5.22))

$$d_1 = mz_1, \quad d_2 = mz_2; \quad (5.24)$$

диаметры основных окружностей (5.23)

$$d_{b1} = d_1 \cos \alpha, \quad d_{b2} = d_2 \cos \alpha;$$

диаметры начальных окружностей (рис 5.21)

$$d_{W1} = 2 \cdot \frac{O_1A}{\cos \alpha_W} = \frac{d_{b1}}{\cos \alpha_W}, \quad d_{W2} = \frac{d_{b2}}{\cos \alpha_W} \quad (5.25)$$

или

$$d_{W1} = -\frac{d_1 \cos \alpha}{\cos \alpha_W} = -\frac{mz_1 \cos \alpha}{\cos \alpha_W}, \quad d_{W2} = \frac{mz_2 \cos \alpha}{\cos \alpha_W}. \quad (5.26)$$

Межосевое расстояние (рис. 5.16)

$$a_W = \frac{d_{W1}}{2} + \frac{d_{W2}}{2} = \frac{m(z_1 + z_2) \cos \alpha}{2 \cos \alpha_W}. \quad (5.27)$$

Передаточное отношение (5.18)

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2P}{O_1P} = \frac{d_{W2}/2}{d_{W1}/2} = \frac{mz_2 \cos \alpha}{\cos \alpha_W} \cdot \frac{\cos \alpha_W}{mz_1 \cos \alpha} = \frac{z_2}{z_1} \quad (5.28)$$

равно передаточному числу $u = z_2 / z_1$. Впрочем, выражение (5.28) можно получить из равенства шагов зацепления на начальных окружностях. Как следует из формул (5.26, 5.20), шаги

$$P_{W1} = \frac{\pi d_{W1}}{z_1} = \frac{\pi m \cos \alpha}{\cos \alpha_W} = \frac{P \cos \alpha}{\cos \alpha_W};$$

$$P_{W2} = \frac{\pi d_{W2}}{z_2} = \frac{\pi m \cos \alpha}{\cos \alpha_W} = \frac{P \cos \alpha}{\cos \alpha_W};$$

$$P_{W1} = P_{W2},$$

где P – шаг стандартной рейки. Передаточное отношение (5.19)

$$i = \frac{O_2P}{O_1P} = \frac{d_{W2}/2}{d_{W1}/2} = \frac{\pi d_{W2}}{\pi d_{W1}} = \frac{P_{W1}z}{P_{W2}z_1} = \frac{z}{z_1}.$$

Если зацепляются нулевые колеса (стандартное зацепление), угол зацепления $\alpha_w = \alpha$, тогда начальные диаметры (5.25, 5.27) равны делительным (5.24): делительные окружности нулевых колес соприкасаются в полюсе зацепления, перекатываясь друг по другу без скольжения. Также будет и в случае колес, нарезанных со смещением, – если смещения рейки (рис. 5.18) $x_1m = x_2m$.

Профили зубьев эвольвентных колес ограничены (рис. 5.19) окружностями вершин зубьев, впадина между ними – окружностями впадин. Диаметры этих окружностей нулевых колес

$$d_a = d + 2m \quad (5.29)$$

$$d_f = d - 2,5m,$$

где d – диаметр делительных окружностей (5.25), m – стандартный модуль зацепления (на делительной окружности).

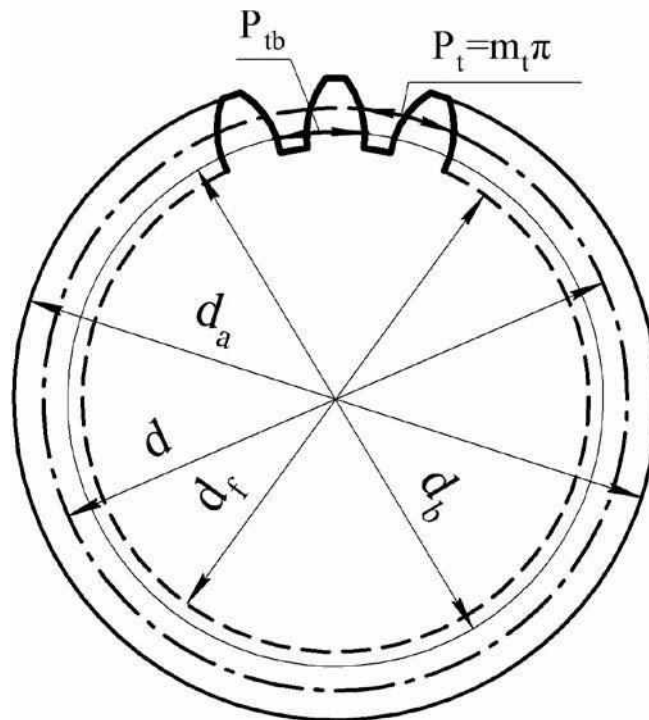


Рисунок 5.19 – Эвольвентное цилиндрическое колесо: диаметры и шаги зацепления

Число зубьев косозубого колеса

$$z = \frac{\pi d}{P_t} \quad (5.30)$$

где окружной шаг на делительном цилиндре (рис. 5.14)

$$P_t = \frac{P_n}{\cos \beta} = \frac{\pi m_n}{\cos \beta} = \frac{\pi m}{\cos \beta} = \pi m_t$$

то есть окружной модуль на делительном цилиндре

$$m_t = \frac{m_n}{\cos \beta} = \frac{m}{\cos \beta} \quad (5.31)$$

число зубьев

$$z = \frac{\pi d}{\pi m_t} = \frac{d}{m} \cos \alpha \quad (5.32)$$

где m – стандартный модуль.

Формулы (5.24) приобретают вид

$$d_1 = \frac{mz_1}{\cos \beta}, \quad d_2 = -\frac{mz_2}{\cos \beta}$$

Начальные диаметры получаются по формулам (5.26), если подставить в них окружной модуль (5.16) и углы зацепления α_t и α_{tW} :

$$\tan \alpha_t = \frac{b}{h \cos \beta} = \frac{bh}{\cos \beta} \cdot \tan \alpha \quad (5.33)$$

Передаточное отношение

$$i = \frac{O_2P}{O_1P} = \frac{d_{W2}}{d_{W1}} = \frac{mz_2 \cdot \frac{\cos \alpha_t}{\cos \alpha_{tW}}}{m_t z_1 \cdot \frac{\cos \alpha_{tW}}{\cos \alpha_t}} = \frac{z_2}{z_1} = u$$

Формула (5.28) справедлива и в этом случае косозубого колеса.

Межосевое расстояние находится по формуле (5.27), если заменить в ней модуль m окружным модулем (5.16), а углы α и α_w углами α_t и α_{tW} в соотношении (5.16).

Формулы (5.17) не изменяются.

5.4 Силы взаимодействия в эвольвентном зацеплении

Коэффициент торцевого перекрытия

Зацепление эвольвентных профилей зубьев начинается в точке A и заканчивается в точке B (рис. 5.21), отрезок AB называется теоретической линией зацепления. Однако эвольвентные профили «срезаны» окружностями вершин зубьев – практическая линия зацепления изображается отрезком ab .

Эвольвентный профиль зуба шестерни изображен на рисунке 5.20 в двух положениях: первое отвечает входу в зацепление в точке a , второе – выходу из зацепления в точке b . Из закона (5.16) следуют равенства

$$\begin{aligned} Aa &= AA_1, \\ Ab &= AA_2. \end{aligned}$$

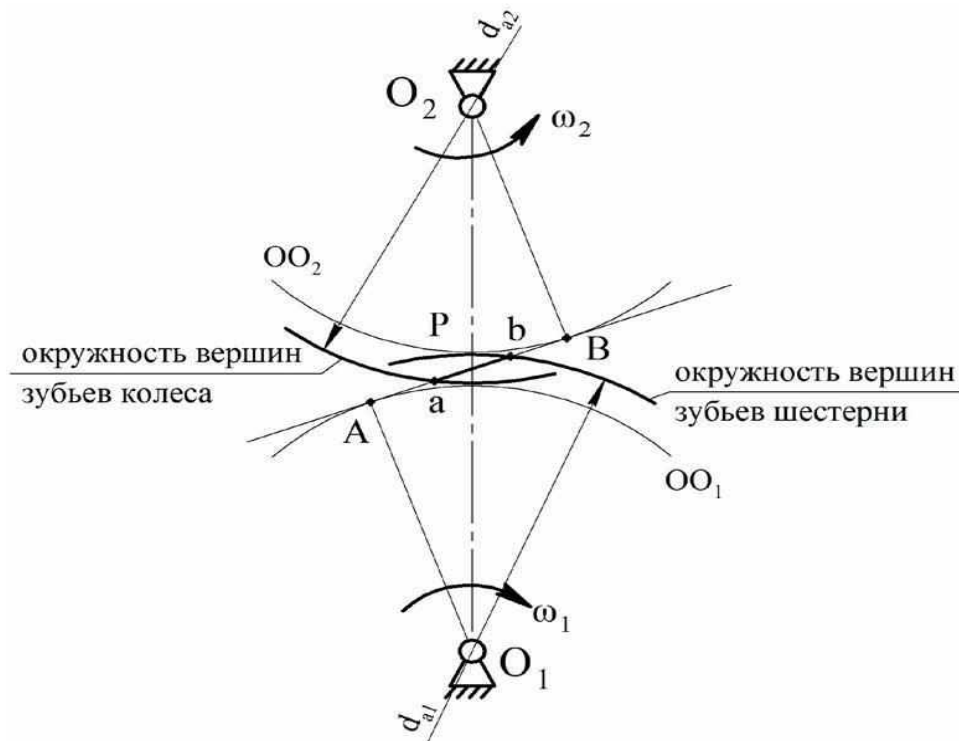


Рисунок 5.20 – Теоретическая и практическая линии зацепления

Вычитая первое равенство из второго, найдем, что путь, пройденный основанием эвольвентного профиля \mathcal{E} по основной окружности OO (дуга зацепления) равен длине линии зацепления ab :

$$A_1A = ab.$$

В этом равенстве нетрудно узнать равенство (5.17). Аналогичным образом путь, пройденный эвольвентным профилем зуба колеса, находящимся в зацеплении с профилем зуба шестерни на рисунке 5.20, по основной окружности OO_2 (рис. 5.20) равен длине линии зацепления ab .

Зацепляющиеся зубья проходят по своим основным окружностям равные пути – равные дуги зацепления.

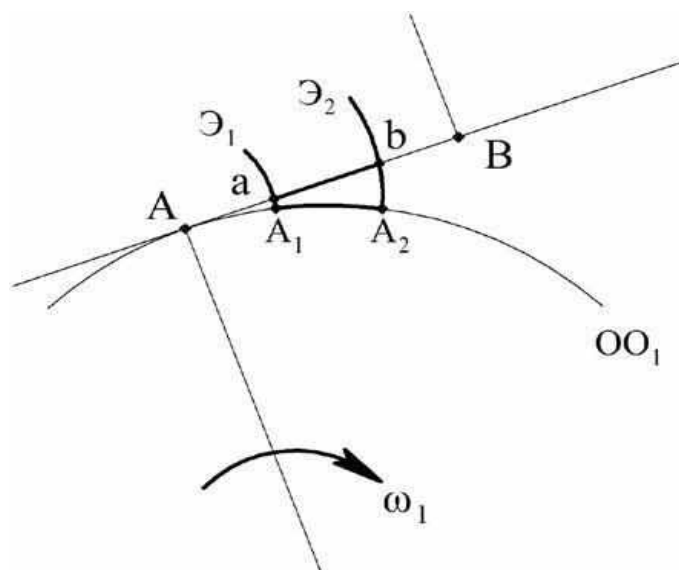


Рисунок 5.21 – Дуга зацепления и длина линии зацепления

Непрерывное зацепление будет обеспечено, если шаг зацепления на основных окружностях зацепляющихся колес будет меньше дуг зацепления, равных g_α – длине линии ab . Коэффициент торцевого перекрытия

$$\varepsilon_\alpha = \frac{g_\alpha}{P_{tb}} > 1 \quad (5.34)$$

Зацепление прямозубых колес

Если взглянуть по стрелке А (рис. 5.22) на образующую (рис. 5.17) плоскость АВ, увидим контактные линии двух пар зубьев 1 и 2, перемещающиеся в поле зацепления. Пока контактная линия 1–1 первой пары не выходит за пределы незаштрихованной зоны 1'1"1"1', контактная линия 2–2 второй пары находится в зоне 2'2"2"2', и зацепление колёс двухпарное. Когда же контактная линия первой пары оказывается в заштрихованной зоне 1"2'2'1", зацепление становится однопарным. Нагрузка, воспринимаемая двумя парами зубьев, мгновенно передаётся на одну пару и, наоборот, с одной пары на две, сопровождаясь ударами и шумом.

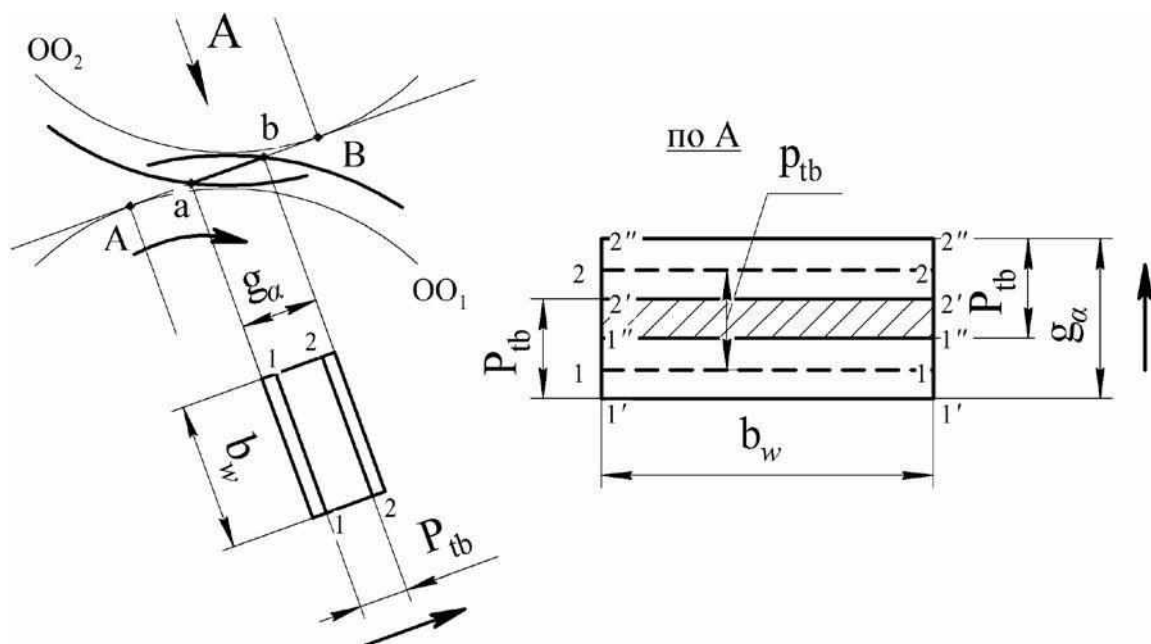


Рисунок 5.22 – Поле зацепления прямозубых колес

Зацепление косозубых колес

На рисунке 5.23 представлено поле зацепления косозубых колёс. Косые зубья входят в поле и выходят из него постепенно – косозубое зацепление плавное, шума от него значительно меньше. Более того, выход из зацепления зуба 3–3 (см. контактную линию 3'–3'') своей частью 3'–3'' восполняется входом в зацепление зуба 1–1 (см. контактную линию 1'–1''). В зацеплении всегда находятся две пары зубьев (а то и больше). Если коэффициент торцевого перекрытия (5.34) – целое число, суммарная длина контактных линий (рис. 5.24)

$$l_{\Sigma} = \varepsilon_{\alpha} \cdot \frac{b_w}{\cos \beta_b}, \quad (5.35)$$

постоянная, удельная нагрузка на зубья не изменяется. Однако, стандарт рекомендует придерживаться коэффициента перекрытия не целого. Но и в этом случае можно добиться постоянства величины (5.35), требуя (рис. 5.24) целых значений коэффициента осевого перекрытия

$$\varepsilon_{\alpha} = \left[1,88 - 3,2 \left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) \right] \cos \alpha,$$

$$\varepsilon_{\beta} = - \frac{b_w}{P_{xb}} \quad (5.36)$$

Осевой шаг P_{xb} на основном цилиндре находится из рассмотрения треугольников 2–3–2 и BCD на рисунке 5.24.

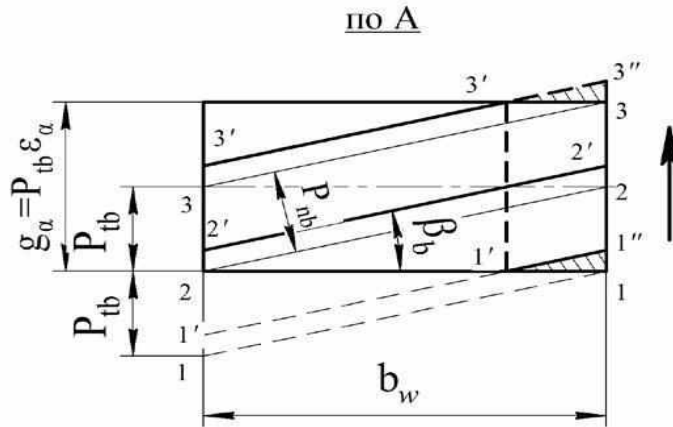


Рисунок 5.23 – Косозубое зацепление с целым коэффициентом торцевого перекрытия ($\epsilon_\alpha = 2$): заштрихованные площади равны – убыль контактных линий 3'- 3'' равна прибыли 1'- 1''

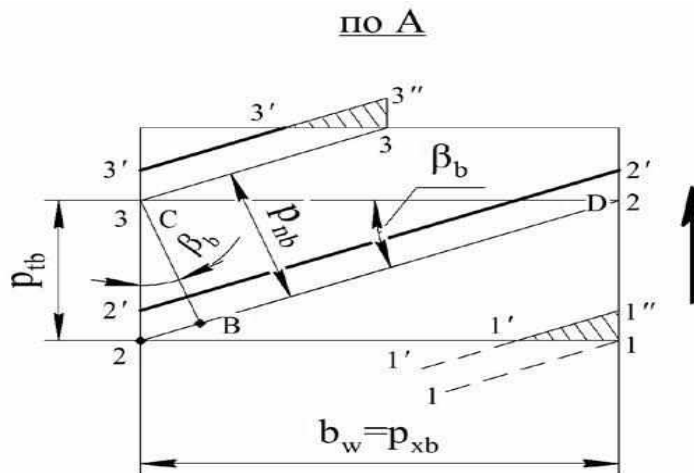


Рисунок 5.24 – Косозубое зацепление с целым коэффициентом осевого перекрытия ($\epsilon_\beta = 1$): заштрихованные площади равны – убыль контактных линий 3'- 3'' равна прибыли 1'- 1''

$$P_{xb} = \frac{P_{tb}}{\tan \beta_b} = \frac{P_{nb}}{\sin \beta_b}.$$

Коэффициент осевого перекрытия (5.36)

$$\epsilon_\beta = \frac{b_w \sin \beta_b}{P_{nb}} \sim \frac{b_w \sin \beta}{P_n}, \quad (5.37)$$

где β и $P_n = \pi m_n = \pi m$ – угол наклона зубьев и нормальный (стандартный) шаг на делительном цилиндре. Требуя целых значений 1, 2, ... коэффициента (5.37), найдем подходящий для этого угол β :

$$\beta = \arcsin \left(\frac{\epsilon_\beta \pi m}{b_w} \right). \quad (5.38)$$

Силы в косозубом зацеплении

Зубчатое колесо испытывает в зацеплении давление шестерни. Нормальная сила F_{n2} – равнодействующая давлений на зубья колеса, направлена по общей нормали к поверхностям зацепляющихся зубьев в сторону вращения колеса. Нормальная сила F_{n1} – это равнодействующая сил давления, действующих на зубья шестерни направлена противоположно силе F_{n2} (равна ей по величине).

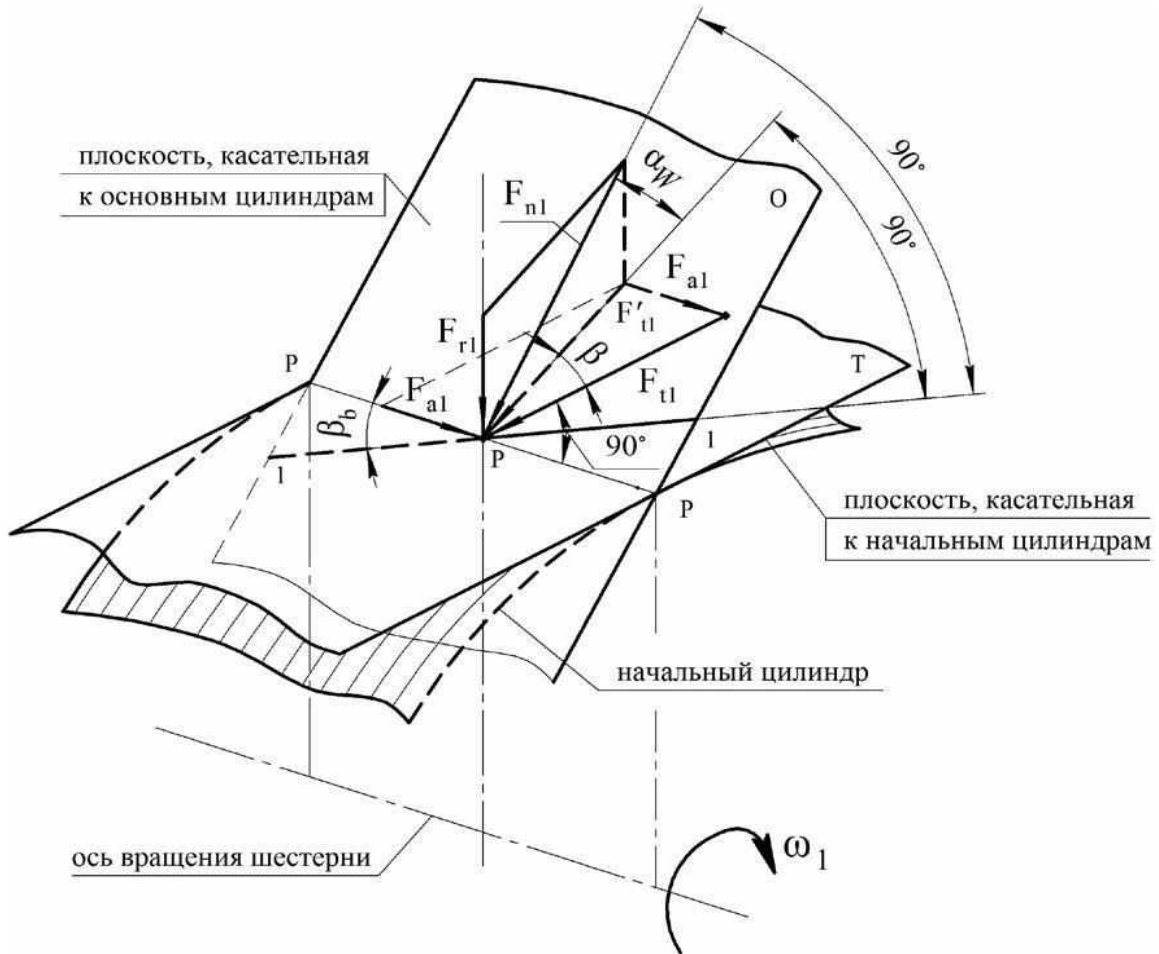


Рисунок 5.25 – Силы в косозубом зацеплении, действующие на шестерню

На рисунке 5.25 показаны две плоскости T и O : касательная к начальным цилиндрам зацепляющихся колес и касательная к основным цилиндрам. Во второй располагается поле зацепления (рис. 5.23) и контактная линия (на рисунке показана линия 1-1, проходящая через полюс P). Равнодействующую давлений на зубья шестерни, находящиеся в зацеплении, прилагают в полюсе. Разложим ее на составляющие: действующую перпендикулярно плоскости T и действующую в плоскости T первая сила (F_{rl}) называется радиальной, вторая – (F'_{tl}) – квазиокружной. Эту вторую силу разлагаем на составляющие:

первая – осевая сила (F_{al}), действует вдоль линии касания PP начальных цилиндров,

вторая – окружная сила (F_{t1}), действует перпендикулярно к ней.

Силы F_{r1} и F_{a1} , пересекающие ось вращения шестерни и параллельные ей, не создают вращающих моментов. Момент полезного сопротивления создаётся окружной силой.

$$F_{t1} = \frac{2T_1}{d_1} \quad (5.39)$$

Осевая сила (рис. 5.26)

$$F_{a1} = F_{t1} \tan \beta, \quad (5.40)$$

радиальная сила

$$F_{r1} = F'_{t1} \tan \alpha_w = \frac{F_{t1}}{\cos \beta} \cdot \tan \alpha_w \quad (5.41)$$

Исходная нормальная сила

$$F_{n1} = \frac{F'_{t1}}{\cos \alpha_w} = \frac{F_{t1}}{\cos \beta \cos \alpha_w} \quad (5.42)$$

Осевая сила (5.40), передающаяся на подшипники в опорах, тем больше, чем больше угол наклона зубьев β (5.38). Во избежание больших нагрузок на подшипники рекомендуют принимать $\beta = 8..20^\circ$. Другая причина указанных ограничений – снижение с ростом угла β коэффициента торцевого перекрытия $\varepsilon_\alpha = \frac{g_\alpha}{P_{tb}}$ из-за роста окружного шага (рис. 5.24), где P_{tb} :

$$P_{tb} = \frac{P_{nb}}{\cos \beta_b} \quad (5.43)$$

ПРИЛОЖЕНИЕ А
Данные для расчета

Таблица А.1 – Двутавры

Номер балки	Размеры сечения, мм		Площадь сечения, см ²	Момент сопротивления при изгибе W_x , см ³
	высота h	толщина s		
10	100	4,5	12,0	39,7
12	120	4,8	14,7	54,8
14	140	4,9	17,4	81,7
16	160	5,0	20,2	109
18	180	5,1	23,4	143
20	200	5,2	26,8	184
22	220	5,4	30,6	232
24	240	5,6	34,8	289
27	270	6,0	40,2	371
30	300	6,5	46,5	472
33	330	7,0	53,8	597
36	360	7,5	61,9	743
40	400	8,3	72,6	953
45	450	9,0	84,7	1231
50	500	10,0	100,0	1589

Таблица А.2 – Допускаемые напряжения для сварных швов

Вид сварки и марка электрода	Стыковые швы		Угловые швы [η] _{ср}
	[ζ'] _р	[ζ'] _{сж}	
Ручная сварка, электроды Э34	0,6[σ] _р	0,7 5[σ] _р	0,5[σ] _р
Ручная сварка, электроды Э42 и Э50	0,9[σ] _р	[σ] _р	0,6[σ] _р
Автоматическая и полуавтоматическая сварка под слоем флюса. Сварка в среде защитного газа, ручная электродами высшего качества (Э42А; Э50А)	[σ] _р	[σ] _р	0,65[σ] _р

Примечания:

1. [σ]_р – допускаемое напряжение на растяжение основного металла конструкции (например, для стали Ст3 [σ]_р = 160 МПа);
2. [ζ']_р , [ζ']_{сж} – допускаемые напряжения для стыкового шва при растяжении и при сжатии соответственно;
3. [η]_{ср} – допускаемое напряжение среза для углового шва.

Таблица А.3 – Основные размеры (мм) метрической резьбы

Внешний диаметр d	Средний диаметр d_2	Внутренний диаметр d_1	Шаг резьбы p
M6	5,350	4,91	1,0
M8	7,188	6,64	1,25
M10	9,026	8,38	1,5
M12	10,863	10,10	1,75
M14	12,701	11,83	2,0
M16	14,701	13,83	2,0
M18	16,380	15,29	2,5
M20	18,380	17,29	2,5
M22	20,380	19,29	2,5
M24	22,050	20,75	3,0
M27	25,050	23,75	3,0
M30	27,730	26,21	3,5

Сортамент и механические свойства пружинных проволок

1. Проволока стальная углеродистая пружинная (ГОСТ 9389-75), применяемая для изготовления пружин, навиваемых в холодном состоянии. Марка стали стандартом не регламентируется.

Сортамент проволоки, мм: 0,14; 0,15; 0,16; 0,18; 0,20; 0,22; 0,25; 0,28; 0,30; 0,32; 0,36; 0,40; 0,45; 0,50; 0,56; 0,60; 0,63; 0,70...2,10 (через 0,1 кроме 1,30); 2,30; 2,50; 2,80; 3,00 и далее до 8,00.

Модуль упругости второго рода (модуль сдвига) $G = 8 \cdot 10^4$ МПа. Предельно допускаемое касательное напряжение принять $[\eta] = 500$ МПа.

2. Проволока стальная легированная пружинная (ГОСТ 1463-78) для пружин, подвергающихся термообработке после навивки, изготавливается из сталей марок 60СГА, 63С2А, 70С3А.

Сортамент проволоки, мм: 0,50; 0,56; 0,60; 0,63; 0,71; 0,80; 0,90; 1,0; 1,1; 1,2; 1,25; 1,3; 1,4; 1,5; 1,6; 1,8; 2,0; 2,2; 2,5; 2,8; 3,0; и далее до 14,0.

Модуль сдвига для всех сталей принять равным $G = 8 \cdot 10^4$ МПа. Предельно допускаемые касательные напряжения принять:

Сталь 60СГА – $[\eta] = 550$ МПа; сталь 63С2А – $[\eta] = 550$ МПа; сталь 70С3А – $[\eta] = 625$ МПа.

3. Проволока из кремне-марганцевой бронзы (ГОСТ 5222-72) выпускается из материала марки БрКМц3-1 круглого и квадратного сечения. Сортамент круглой проволоки, мм: 0,10; 0,12; 0,15; 0,18; 0,20...0,90 (через 0,05); 1,0...1,8 (через 0,1); 2,0; 2,2; 2,4; 2,5; 2,6; 2,8; 3,0; 3,2; 3,5; 3,8; 4,0; 4,2; 4,5; 4,8; 5,0...10,0 (через 0,5).

Модуль упругости второго рода (модуль сдвига) $G = 4 \cdot 10^4$ МПа. Предельно допускаемое касательное напряжение принять $[\eta] = 220$ МПа.

Список использованных источников

1. Артоболевский, И. И. Сборник задач по теории механизмов и машин / И. И. Артоболевский, Б. В. Эдельштейн. – Москва : Наука, 1975.– 307 с.
2. Беляев, Н. М. Сборник задач по сопротивлению материалов / Н. М. Беляев. – Москва : Наука, 1966. – 340 с.
3. Вышинский, Н. В. Сборник задач по курсу «Механика» / Н. В. Вышинский, С. А. Журавель. – Минск : БГУИР, 1994. – 299 с.
4. Вышинский, Н. В. Техническая механика: учебное пособие / Н. В. Вышинский. – Минск : ИВЦ Минфина, 2006. – 227 с.
5. Вышинский, Н. В. Техническая механика. Сборник задач: пособие / Н. В. Вышинский. – Минск : БГУИР, 2017. – 177 с.
6. Гузенков, П. Г. Детали машин / П. Г. Гузенков. – Москва: Высшая школа, 1982. – 387 с.
7. Красковский, Е. Я. Расчет и конструирование механизмов приборов и вычислительных систем / Е. Я. Красковский, Ю. А. Дружинин, Е. М. Филатов. – Москва: Высшая школа, 1991. – 268 с.
8. Мещерский, И. В. Сборник задач по теоретической механике / И. В. Мещерский. – Москва: Наука, 1986. – 276 с.
9. Народецкая, М. Э. Техническая механика и детали машин и приборов / М. Э. Народецкая, Б. А. Торбан, А. И. Аркуша. – М : Машиностроение, 1982. – 298 с.
10. Соколовская, В. П. Механика. Практикум по решению задач / В. П. Соколовская. – Минск : ООО «Новое знание», 2006. – 142 с.

Учебное издание

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

В 2-х частях

Часть 1

Практикум

Составители:

Буткевич Вячеслав Гарьевич

Москалев Геннадий Иванович

Мачихо Татьяна Афанасьевна

Редактор *Р.А. Никифорова*

Корректор *А.С. Прокопюк*

Компьютерная правка *В.Г. Буткевич*

Подписано в печать 21.05.2026. Формат 60x90¹/₁₆. Усл. печ. листов 5,8.

Уч.-изд. листов 7,4. Тираж 80 экз. Заказ № 119.

Учреждение образования «Витебский государственный технологический университет»

210038, г. Витебск, Московский пр-т, 72.

Отпечатано на ризографе учреждения образования

«Витебский государственный технологический университет».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,

Распространителя печатных изданий № 1/172 от 12 февраля 2014 г.

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,

Распространителя печатных изданий № 3/1497 от 30 мая 2017 г.