

МИНИСТЕРСТВО ВЫСШЕГО И СРЕДНЕГО СПЕЦИАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ БССР

ВИТЕБСКИЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ЛЕГКОЙ ПРОМЫШЛЕННОСТИ

У Д К 531.0, 49.1

№ гос. регистрации 7648339

Инв. № Б971428 04.АВГ81

" УТВЕРЖДАЮ "



Проректор по научной работе

доцент к.т.н. *Горбачик В.Е.* ГОРБАЧИК В.Е./

" 16. " марта 1981 г.

О Т Ч Е Т

по научно-исследовательской работе

МЕТОДЫ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛОВ В ТЕОРИИ

УПРУГОСТИ

(заключительный отчет)

ГБ - 76 -45

шифр темы

Начальник научно-исследовательского сектора, инженер

/ПРАВДИВЫЙ И.Е./

Зав. кафедрой сопротивления материа-
лов и теоретической механики, доцент

/ЛОКТИОНОВ А.В./

Руководитель темы, доцент

/ФЕДОСЕЕВ Г.Н./

Библиотека ВГТУ



Витебск 1981 г.

Список исполнителей:

1. ФЕДОСЕЕВ Г.Н. - доцент
2. КАЛИНИН А.А. - доцент
3. ШИЖИН В.П. - доцент

Реферат

За истекшее пятилетие 1976 - 1980 г.г. научно-исследовательская работа авторов настоящего отчета была, в основном, посвящена решению ряда осесимметричных и плоских краевых задач теории упругости. Метод решения, использованный авторами, - активно развивающийся в последние годы метод потенциала.

Численно решены задачи о шаровой полости в бесконечном упругом пространстве, заполненной тяжелой жидкостью; ряд задач об упругом пространстве и полупространстве с двумя сферическими полостями: о сжатии такого пространства; о двух полостях в тяжелом полупространстве; в случаях, когда одна из полостей заполнена жидкостью или сжатым газом.

Кроме этого разработан упрощенный алгоритм решения СИУ и рассмотрен переход к смешанной осесимметричной задаче, а также рассмотрено решение задач теории упругости при помощи формулы Сомилиана.

Введение.

Классический подход к построению интегральных уравнений основных краевых задач теории упругости заключается в представлении решения уравнений Ламе в виде эластопотенциалов [1].

Рассмотрим замкнутую поверхность S , разграничивающую две области в трехмерном евклидовом пространстве E_3 , в котором непрерывно распределена классическая изотропная упругая среда с постоянными G, ν . Конечную область обозначим D^+ , бесконечную - D^- . Назовем, следуя В.Д.Купрадзе [1], первой внутренней (внешней) краевую задачу, в которой регулярное решение уравнений статики в $D^+ (D^-)$ требуется найти при заданных перемещениях точек границы S . Задача, в которой регулярное решение в области $D^+ (D^-)$ находится по заданным на границе S усилиям, называется второй внутренней (внешней). Обозначим эти задачи, соответственно, I^+, I^- и II^+, II^- . Наконец, возможны задачи, в которых на части границы S заданы усилия, в остальной же области границы - перемещения (смешанные граничные условия).

Поле перемещений в бесконечном упругом пространстве, вызванных единичной силой, приложенной в точке y , определяется матрицей Кельвина [1]

$$K(x, y) = \parallel K_{ij}(x, y) \parallel_{3 \times 3} \quad (I)$$

Если усилия $\mu(y)$ распределены по поверхности S , перемещение точек бесконечного упругого пространства дается интегралом

$$v(x) = \int_S K(x, y) \mu(y) dS,$$

который называется эластопотенциалом простого слоя. Если на матрицу Кельвина (I) воздействовать оператором напряжения [1]

$$T\left(\frac{\partial}{\partial y}, n\right) = \parallel T_{jk}\left(\frac{\partial}{\partial y}, n\right) \parallel_{3 \times 3},$$

где n - единичный вектор нормали к площадке, на которой ищется напряжение, получится интеграл, называемый эластопотенциалом двойного слоя:

$$w(x) = \int_S \left[T\left(\frac{\partial}{\partial y}, n\right) K(x, y) \right] \mu(y) dS. \quad (2)$$

Интегральные уравнения задач I^+ , I^- получаются путем представления вектора перемещения интегралом (2) (с учётом предельных свойств и граничных условий $u(x) = f(x)$, $x \in S$):

$$\mu(x) - \eta \int_S \left[T\left(\frac{\partial}{\partial y}, n\right) K(x, y) \right]^* \mu(y) dS = f(x). \quad (3)$$

Представление вектора перемещения эластопотенциалом простого слоя приводит к интегральным уравнениям задач Π^+ и Π^- :

$$\mu(x) + \eta \int_S \left[T\left(\frac{\partial}{\partial x}, n\right) K(x, y) \right] \mu(y) dS = f(x). \quad (4)$$

В уравнениях (3-4) коэффициент $\eta = I$ (в случае внутренней задачи) и $\eta = -I$ (в случае внешней задачи).

Д.Д.Копейкиным предложен другой путь построения СИУ [2], базирующийся на использовании бигармонических потенциалов простого и двойного слоя:

$$g(x) = \int_S \mu(y) \frac{r}{2} dS, \quad (5)$$

$$h(x) = \int_S \mu(y) \frac{d}{dn} \left(\frac{r}{2} \right) dS,$$

$$r = |y - x|,$$

где n - внешняя нормаль к границе S в точке y .
 Исследованы предельные свойства потенциалов (5), а также предельные свойства вторых производных бигармонического потенциала двойного слоя и третьих производных бигармонического потенциала простого слоя.

Рассматривая общее решение уравнений теории упругости в форме, предложенной Б.Г.Галеркиным [3],

$$V = \nabla^2 \Phi - \frac{1}{2(1-\nu)} \text{grad div } \Phi, \quad (6)$$

где Φ - функция напряжения, и подставляя в выражение (6) вместо функции напряжения бигармонический потенциал простого или двойного слоя (5), получим интегральные представления вектора перемещения

$$v(x) = \int_S \left[\Gamma\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{r}{2} \right] \mu(y) dS, \quad (7)$$

$$v'(x) = \int_S \left[\Gamma\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{d}{dn} \frac{r}{2} \right] \mu(y) dS.$$

В выражениях (7)

$$\Gamma\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \left\| \Gamma_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \right\|_{3 \times 3},$$

$$\Gamma_{ij}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \delta_{ij} \nabla^2 - \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}$$

- матричный дифференциальный оператор Б.Г.Галеркина (δ_{ij} - символы Кронекера). Выражения (7) являются эластопотенциалами, разрешающими, соответственно, вторую и первую краевые задачи теории упругости. Интегральные уравнения этих задач:

$$\frac{\pi D}{1-\nu} \mu(x) - \int_S \left[\Gamma\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{d}{dn} \left(\frac{r}{2}\right) \right] \mu(y) dS = f(x),$$

$$\frac{2\pi G}{h} \mu(x) - \int_S \left[T\left(\frac{\partial}{\partial x}, n\right) \Gamma\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) \frac{r}{2} \right] \mu(y) dS = f(x),$$

где коэффициент η имеет смысл, установленный в уравнениях (3-4), а D - некоторая матрица. Заметим, что эластопотенциал простого слоя, построенный при помощи бигармонического потенциала простого слоя, тождествен эластопотенциалу, построенному на основе матрицы Кельвина. Потенциал $w(x)(2)$ является многослойным и отличается от потенциала $v(x)(7)$.

И в первом, и во втором случае интегральные уравнения задачи являются сингулярными (СИУ), т.е. ядра их имеют особенность вида $1/r^2$. Интегралы в этих уравнениях имеют смысл, если $S \in L_1(\alpha)$ и $\mu \in C^{0,\alpha} [1]$.

Иной подход к составлению интегральных уравнений теории упругости основывается на использовании формулы Сомилиана (являющейся аналогом формулы Грина теории гармонических функций), выражающей упругое смещение точки области через полные граничные условия,

$$\eta v(x) = - \int_S T(x,y) v(y) dS + \int_S K(x,y) t(y) dS. \quad (8)$$

В формуле (8) $K(x,y)$ - матрица Кельвина, $T(x,y)$ - матрица усилий, $v(y)$ и $t(y)$ - перемещения и усилия на границе S , а коэффициент $\eta = 0$, если $x \in D^-$; $\eta = 0,5$, $x \in S$, и $\eta = 1$, если $x \in D^+$.

Непосредственное использование формулы (8) приводит к СИУ в случае второй краевой задачи и к интегральным уравнениям первого рода со слабообобщенными ядрами в случае задачи I.

Напряжения в этом случае вычисляются по формуле напряжения, полученной на основе формулы Сомилиана. В формуле напряжения при этом появляются интегралы, прямые значения которых в точках границы не существуют, а существуют только их предельные значения. Как именно, определить эти предельные значения, в настоящее время не известно. В литературе наметились различные подходы к приближен-

ному вычислению напряжений на границе области, которые, впрочем, все основаны на экстраполяции напряжений, действующих во внутренних точках области [4, 5, 6] .

ГЛАВА I.

Прямое решение второй краевой задачи для шаровой области.

§ I. Уравнения второй осесимметричной краевой задачи для шаровой области.

Интегральные уравнения второй краевой задачи для тела вращения имеют вид [7]

$$\mu_{io}(x) + \frac{h}{4\pi(1-\nu)} \int_S \sum_{j=1}^3 \mu_{jo}(y) m_{ij}^o(y) dS_y = \frac{h}{2\pi G} \rho_{io}(x). \quad (9)$$

В уравнениях (9) μ_{io} - проекции вектора плотности потенциала простого слоя на оси цилиндрической системы координат с началом в параметрической точке x . ρ_{io} - заданная на поверхности S нагрузка, m_{ij}^o - элементы ядровой матрицы.

Рассмотрим задачу, в которой нагрузки заданы функциями, независимыми от окружной координаты ϑ . Значит, и плотности μ_j не зависят от ϑ . Это обстоятельство позволяет в уравнениях (9) выполнить интегрирование по окружной координате и тем самым двумерные интегралы уравнений заменить одномерными. После этого интегральные уравнения второй осесимметричной краевой задачи принимают вид

$$\mu_{io}(x) + \frac{h}{4\pi(1-\nu)} \int_L \sum_{k=1}^2 \mu_k(y) \sum_{j=1}^2 \alpha_{jo} A_{ij}^k dL = \frac{h}{2\pi G} \rho_{io}(x). \quad (10)$$

В уравнениях (10) L - контур тела вращения, α_{jo} - направляющие косинусы нормали $n(x)$ в системе координат ρ_0, t_0, z_0 , а ядра интегральных формул для напряжений

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Купрадзе В.Д., Гегелиа Т.Г., Башелейшвили М.О, Бурчуладзе Т.В. Трехмерные задачи математической теории упругости. Изд. Тбилис. ун-та, 1963.
2. Копейкин Ю.Д. Интегральные уравнения пространственных задач статики упругого тела. Прикладная механика, АН УССР, т.1. вып. 5, 1965.
3. Галеркин Б.Г., Равновесие упругой сферической оболочки. ПММ, 6, 1942.
4. Верожский Ю.В. Применение метода потенциала для решения задач теории упругости. Изд. КИСИ, 1975.
5. Перлин П.И. Численный метод решения сингулярных интегральных уравнений основных пространственных задач теории упругости. МТТ, 3, 1975.
6. Сноу Д.У. Метод граничных интегральных уравнений. Изд. "Мир", 1978.
7. Копейкин Ю.Д., Мартыничук В.Д. Интегральные уравнения второй краевой задачи о равновесии упругого тела вращения. Прикладная механика, АН УССР, т.3. вып.2 1967.
8. Cruse T.A. *Some classical elastic sphere problem solved numerically by integral equations. Carnegie-Mellon University. Trans. ASME, E39, N 1, 1972.*
9. Янке Е., Энде Ф., Леш Ф. Специальные функции. Изд. "Наука", 1964.

СОДЕРЖАНИЕ

Список исполнителей	стр. 1
Реферат	стр. 2
Введение	стр. 3
Глава I. Прямое решение второй краевой задачи для шаровой области.	
§ 1. Уравнения второй осесимметричной краевой задачи для шаровой области.	стр. 8
§ 2. Алгоритм замены СИУ алгебраическим аналогом	стр. 12
§ 3. Описание программы численного решения второй краевой задачи для двусвязной области.	стр. 16
§ 4. Исследование напряженного состояния двусвязной области.	стр. 26
Глава II. Упрощенный алгоритм решения СИУ и переход к смешанной осесимметричной задаче.	
§ 1. Упрощенный алгоритм решения СИУ.	стр. 38
§ 2. Уравнения смешанной осесимметричной задачи.	стр. 39
Глава III. Решение задач теории упругости при помощи формулы Сомилиана	стр. 43
Литература	стр. 47

