

ПРИМЕНЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ К РАСЧЕТУ ПЛОЩАДИ ТЕРРИТОРИИ ГЕОГРАФИЧЕСКИХ ОБЪЕКТОВ

Зикеев В. В., студ., Рубаник О. Е., ст. преп.

*Витебский государственный технологический университет,
г. Витебск, Республика Беларусь*

Реферат. В статье описывается методика расчета площади территории географического объекта при помощи математических методов на примере Крымского полуострова. Для этого используется следующий инструментарий: аппроксимация, определенный интеграл, формулы площадей плоских фигур. Описывается построение системы координат на карте полуострова. Приводится погрешность вычислений.

Ключевые слова: площадь, система координат, аппроксимация, определенный интеграл.

Математика включает в себя большое количество инструментов, которые можно применять в разных сферах жизнедеятельности. Например, достаточно большое число прикладных задач предполагают нахождение площадей плоских фигур. Немаловажно, что в случае необходимости можно найти погрешность вычислений или провести вычисления с заданной погрешностью.

В качестве примера приведем расчет площади Крымского полуострова и найдем погрешность вычислений. Введем систему координат следующим образом: ось ординат – с юга на север, ось абсцисс – с запада на восток, $(0;0)$ – пересечение. Протяженность: запад-восток – 326 км, север-юг – 205 км [3] (рис. 1).

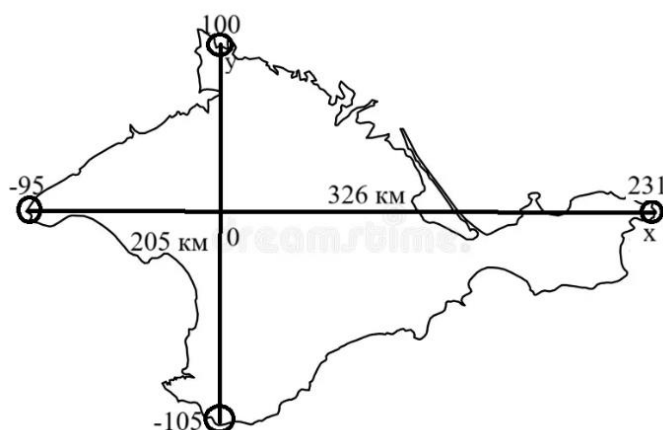


Рисунок 1 – Введение осей координат

Для расчета площади будем использовать такие инструменты, как аппроксимация и определенный интеграл.

Аппроксимация или приближение – научный метод, состоящий в замене одних объектов другими, в каком-то смысле близкими к исходным, но более простыми. Аппроксимация позволяет исследовать числовые характеристики и качественные свойства объекта, сводя задачу к изучению более простых или более удобных объектов. В данной задаче это весьма актуально, поскольку функционально точно повторить неровную береговую линию проблематично.

Начнем с нахождения площади юго-восточного участка. Аппроксимируем береговую линию прямой, проходящей через точки $(231;0)$ и $(0;-105)$, так как в этом случае будем ориентироваться на то, что участки суши, находящиеся за пределами графика прямой, будут компенсировать участки моря (то есть недостающие участки суши) в пределах графика (рис. 2).

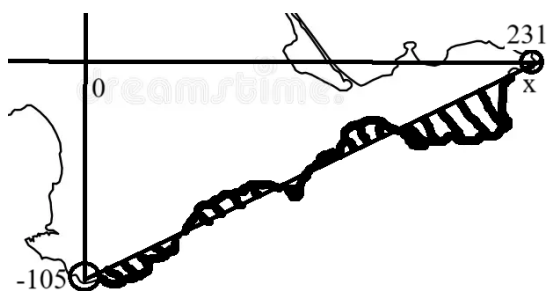


Рисунок 2 – Юго-восточная часть Крымского полуострова

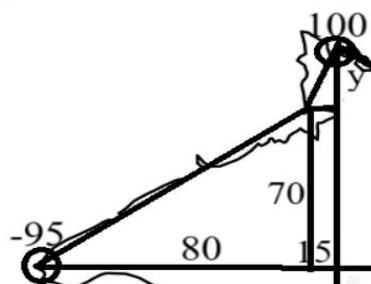


Рисунок 3 – Северо-западная часть Крымского полуострова

Воспользовавшись уравнением прямой в отрезках, составим уравнение аппроксимирующей прямой:

$$\frac{x}{231} - \frac{y}{105} = 1,$$

где 231 км – расстояние от точки (0;0) до крайней восточной точки, 105 км – от той же точки, но до крайней южной точки полуострова. Преобразуем уравнение к виду:

$$y = \frac{105}{231}x - 105 \text{ или } y = \frac{35}{77}x - 105.$$

Далее для нахождения площади юго-восточного участка полуострова воспользуемся определенным интегралом:

$$S_1 = - \int_0^{231} \left(\frac{35}{77}x - 105 \right) dx = - \left(\frac{35x^2}{154} - 105x \right) \Big|_0^{231} = - \frac{35 \cdot 231^2}{154} + 105 \cdot 231 = 12127,5 \text{ (км}^2\text{)}.$$

Теперь рассчитаем площадь северо-западного участка. Здесь можно обойтись простыми методами, а именно разделить этот участок на два прямоугольных треугольника и один прямоугольник (рис. 3). Первый треугольник имеет катеты 80 и 70 км. Рассчитаем его площадь как половину произведения катетов – 2800 км². Второй треугольник имеет катеты 30 и 15 км, следовательно, его площадь составляет 225 км². И, наконец, площадь прямоугольника с шириной 15 км и длиной 70 км составляет 1050 км². Таким образом, площадь северо-западной части полуострова

$$S_2 = 2800 + 225 + 1050 = 4075 \text{ (км}^2\text{)}.$$

Перейдем на юго-западный участок полуострова. Используем аппроксимацию – для этого вполне подходит график функции обратной пропорциональности $y = 500/x$ (рис. 4).

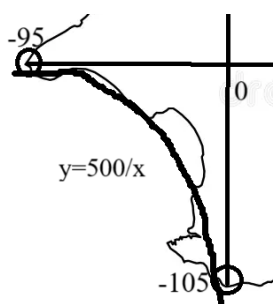


Рисунок 4 – Юго-западная часть Крымского полуострова

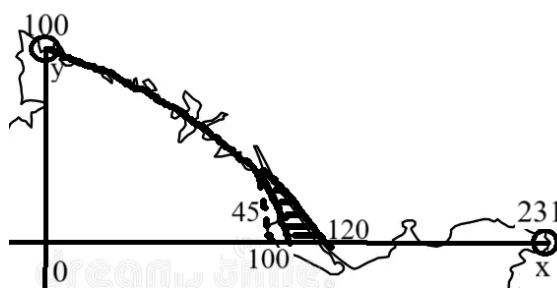


Рисунок 5 – Северо-восточная часть Крымского полуострова

Далее для нахождения площади опять воспользуемся определенным интегралом. Причем учитывая особенность области определения обратной пропорциональности, для корректных вычислений верхний предел интегрирования возьмем равным 1, как самое

близкое к нулю натуральное число.

$$S_3 = - \int_{-95}^1 \frac{500}{x} dx = -500 \ln|x||_{-95}^1 = -500(\ln 1 - \ln 95) \approx -500 \cdot (-4,554) = 2277 \text{ (км}^2\text{)}.$$

Остается рассчитать лишь площадь северо-восточного участка. Данная территория напоминает сектор круга, иногда выходя за его пределы, но, учитывая водные тела и тот факт, что до этого уже применялся метод аппроксимации, используем этот сектор, дополненный тупоугольным треугольником (закрашен на рис. 5).

Рассчитаем площадь тупоугольного треугольника. Поскольку основание треугольника имеет длину 20 км, если рассчитать расстояние по прямой от озера Сиваш до берега Азовского моря, и высоту – 45 км, то площадь будет равна 450 км².

Далее найдем площадь сектора круга. Исключительно из соображений представления разнообразия использования математических инструментов, выберем не самый простой способ, а именно – с помощью перехода к полярным координатам.

Поскольку радиус окружности, ограничивающей сектор, равен 100 км (расстояние от начала координат до вершины тупоугольного треугольника), то уравнение такой окружности имеет вид:

$$x^2 + y^2 = 100^2.$$

Перейдя к полярным координатам с помощью формулы:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \end{cases}$$

получим уравнение окружности в полярных координатах:

$$r = 100.$$

Тогда площадь сектора:

$$S_{\text{сект}} = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^2(\varphi) d\varphi = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} 100^2 d\varphi = \frac{1}{2} \cdot 10000 \cdot \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 5000 \cdot \frac{\pi}{2} = 2500\pi \approx 7854 \text{ (км}^2\text{)}.$$

В итоге площадь северо-восточного участка полуострова

$$S_4 = 450 + 7854 = 8303 \text{ (км}^2\text{)}.$$

Таким образом, площадь Крымского полуострова составляет примерно:

$$S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 12127,5 + 4075 + 2277 + 8303 = 26783 \text{ (км}^2\text{)}.$$

Найдем погрешность вычислений, приняв за точное значение 26880 км² [3]:

$$\Delta = \frac{26880 - 26783}{26880} \cdot 100\% = 0,36\%.$$

Таким образом, учитывая весьма маленькую погрешность вычислений, есть основание считать все рассмотренные математические инструментарию действенными и практически применимыми.

Список использованных источников

1. География Крыма [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.pprcrimea.ru/index.php/ru/home/geografiya-kruma/>. – Дата доступа: 09.02.2025.
2. Зенков, А. В. Численные методы: учебное пособие / А. В. Зенков. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2016. – 124 с.
3. Характеристика субъекта. Главное управление МЧС России по Республике Крым [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <https://82.mchs.gov.ru/glavnoe-upravlenie/harakteristika-subekta/>. – Дата доступа: 12.02.2025.