3. Лубенцова, В. С. Математические модели и методы в логистике / Под ред. В. П. Радченко. – Самара : Изд-во Самарского государственного технического университета, 2008. – 157 с.
4. Решение транспортных задач [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://knowledge.allbest.ru/emodel/3c0b65625a2ac69b5c53b89421216c26_0.html. – Дата доступа: 15.03.2025.

УДК 519.1

ПОСТРОЕНИЕ БУЛЕВОЙ ФУНКЦИИ ГАМИЛЬТОНОВА ГРАФА

Скоков М. А., студ., Гречаников А. А., студ., Коваленко А. В., ст. преп.

Витебский государственный технологический университет,
г. Витебск, Республика Беларусь

Реферат. *В работе рассмотрен алгоритм построения гамильтоновых графов. Создана логическая модель гамильтоновости графа. На основании построенной математической модели сгенерировано булево выражения сетевой структуры для гамильтонова цикла, включающего все вершины графа, которые инцидентны двум его рёбрам.*

Ключевые слова: граф, гамильтоновый граф, гамильтоновый цикл, дизъюнкция, инцидентность, конъюнкция, маршрут, цикл.

В данной статье рассматриваются гамильтоновы графы. Эти графы используются в различных отраслях, включая компьютерные сети, логистику, экономику, социологию, транспорт и в других областях. Гамильтоновы графы применяются для определения оптимальных маршрутов, оптимизации сетевых устройств, определения наикратчайшего пути между заданными объектами.

Пусть имеется неориентированный граф $G=\langle V;E\rangle$, где V – множество вершин графа, E – множество его рёбер. Выбираем произвольную вершину $v_i \in V$ графа G. В данной работе будем рассматривать маршрут, проходящий по рёбрам графа и имеющий начало в вершине v_i. Предположим, что этот путь проходит через все вершины графа и заканчивается в первоначальной вершине v_i. Такой выбранный маршрут будет представлять собой гамильтонов цикл. Но граф, который имеет, по крайней мере, один гамильтонов цикл, является гамильтоновым графом. В связи с этим возникла задача построения логической модели гамильтонова графа.

Для создания математической модели гамильтонова графа необходимо построить такую булеву функцию $F=F_1 \wedge F_2$, которая принимает значение единица, если граф является гамильтоновым, и принимает значение нуль, если в графе нет гамильтоновых циклов. Функция F_1 принимает значение равное единице, если каждая вершина графа инцидентно ровно двум рёбрам гамильтонова граф, а функция F_2 принимает значение единица, если гамильтонов цикл будет включать все вершины графа.

Каждая булева функция определяется булевыми переменными. Поэтому необходимо каждому ребру $e \in E$ графа G поставить в соответствие булеву переменную $x \in \{0;1\}$. Если ребро входит в гамильтонов цикл, то ему будет соответствовать булева переменная равная единице. В противном случае, булева переменная равна нулю.

Создадим логическую модель булевой функции F_1, для чего выбираем некоторую вершину $v_i \in V$ графа G, которая имеет локальную степень $\deg v_i$, то есть этой вершине инцидентны рёбра $e_{i1}, e_{i2}, \ldots, e_{i\deg v_i}$. Тот факт, что данной вершине инцидентно ровно два ребра, можно отобразить следующим образом. Например, если рёбра e_{i1} и e_{i2} принадлежат гамильтонову циклу, а другие рёбра не принадлежат ему, то этот признак можно представить в виде конъюнкции

$$K_{12} = x_{i1} \wedge x_{i2} \wedge \overline{x_{i3}} \wedge \ldots \wedge \overline{x_{i\,\deg v_i}}. \qquad (1)$$

В этой конъюнкции только две переменные – x_{i1} и x_{i2}, которые соответствуют рёбрам e_{i1} и e_{i2}, принадлежащим гамильтонову циклу, не имеют отрицаний. Все остальные переменные, которые соответствуют другим рёбрам, инцидентным вершине v_i, связаны отрицанием. Эта конъюнкция принимает значение единица, если переменные x_{i1} и x_{i2} принимают единичные значения, а все другие переменные конъюнкции равны нулю.

Однако заранее неизвестно, какая пара рёбер, инцидентных вершине v_i, принадлежит гамильтонову циклу. Поэтому следует включить в функцию F_1 все конъюнкции вида K_{pq}, где $p, q \in \{1,\ 2, \ldots, \deg v_i\}$. Для любой вершины только одна конъюнкция типа (1) будет равна единице. Таким образом, первое требование для рассматриваемой вершины будет выполнено, если мы составим дизъюнкцию таких конъюнкций. В результате, полученная дизъюнкция обеспечивает выполнение первого требования для одной вершины. Обозначим полученную дизъюнкцию D_i. Тогда функцию F_1 можно записать как конъюнкцию всех n дизъюнкций $D_i(i = \overline{1, n})$, где n – число вершин графа G :

$$F_1 = D_1 \wedge D_2 \wedge \ldots \wedge D_n \qquad (2)$$

Рассмотрим гамильтонов граф G сетевой структуры, изображённый на рисунке 1.

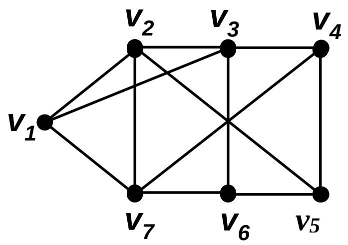

Рисунок 1 – Гамильтонов граф

Построим функцию F_1 для заданного графа сетевой структуры, для чего введём булевы переменные:

$v_1 - v_2$	$\rightarrow$	x_1	$v_3 - v_4$	$\rightarrow$	x_7
$v_1 - v_3$	$\rightarrow$	x_2	$v_3 - v_6$	$\rightarrow$	x_8
$v_1 - v_7$	$\rightarrow$	x_3	$v_4 - v_5$	$\rightarrow$	x_9
$v_2 - v_3$	$\rightarrow$	x_4	$v_4 - v_7$	$\rightarrow$	x_{10}
$v_2 - v_5$	$\rightarrow$	x_5	$v_5 - v_6$	$\rightarrow$	x_{11}
$v_2 - v_7$	$\rightarrow$	x_6	$v_6 - v_7$	$\rightarrow$	x_{12}

Составляем дизъюнкцию конъюнкций для всех вершин графа.

Вершинам v_i будут соответствовать булевы функции D_i $\left(i = \overline{1;7}\right)$:

$$D_1 = x_1 \wedge x_2 \wedge \neg x_3 \vee x_1 \wedge \neg x_2 \wedge x_3 \vee \neg x_1 \wedge x_2 \wedge x_3 ..$$

$$D_2 = x_1 \wedge x_4 \wedge \neg x_5 \wedge \neg x_6 \vee x_1 \wedge \neg x_4 \wedge x_5 \wedge \neg x_6 \vee \neg x_1 \wedge x_4 \wedge x_5 \wedge \neg x_6 \vee x_1 \wedge \neg x_4 \wedge \neg x_5 \wedge x_6 \vee$$
$$\vee \neg x_1 \wedge x_4 \wedge \neg x_5 \wedge x_6 \vee \neg x_1 \wedge \neg x_4 \wedge x_5 \wedge x_6 .$$

$$D_3 = x_2 \wedge x_4 \wedge \neg x_7 \wedge \neg x_8 \vee x_2 \wedge \neg x_4 \wedge x_7 \wedge \neg x_8 \vee \neg x_2 \wedge x_4 \wedge x_7 \wedge \neg x_8 \vee x_2 \wedge \neg x_4 \wedge \neg x_7 \wedge x_8 \vee$$
$$\vee \neg x_2 \wedge x_4 \wedge \neg x_7 \wedge x_8 \vee \neg x_2 \wedge \neg x_4 \wedge x_7 \wedge x_8 .$$

$$D_4 = x_7 \wedge x_9 \wedge \neg x_{10} \vee x_7 \wedge \neg x_9 \wedge x_{10} \vee \neg x_7 \wedge x_9 \wedge x_{10} .$$

$$D_5 = x_5 \wedge x_9 \wedge \neg x_{11} \vee x_5 \wedge \neg x_9 \wedge x_{11} \vee \neg x_5 \wedge x_9 \wedge x_{11} .$$

$$D_6 = x_8 \wedge x_{11} \wedge \neg x_{12} \vee x_8 \wedge \neg x_{11} \wedge x_{12} \vee \neg x_8 \wedge x_{11} \wedge x_{12} .$$

$$D_7 = x_3 \wedge x_6 \wedge \neg x_{10} \wedge \neg x_{12} \vee x_3 \wedge \neg x_6 \wedge x_{10} \wedge \neg x_{12} \vee \neg x_3 \wedge x_6 \wedge x_{10} \wedge \neg x_{12} \vee x_3 \wedge \neg x_6 \wedge \neg x_{10} \wedge x_{12} \vee$$
$$\vee \neg x_3 \wedge x_6 \wedge \neg x_{10} \wedge x_{12} \vee \neg x_3 \wedge \neg x_6 \wedge x_{10} \wedge x_{12}.$$

Тогда булеву функцию F_1, согласно формуле (2), записываем как конъюнкцию семи дизъюнкций:

$$F_1 = D_1 \wedge D_2 \wedge D_3 \wedge D_4 \wedge D_5 \wedge D_6 \wedge D_7 .$$

Для записи булевой функции гамильтонова графа одной функции F_1 недостаточно. Функция F_1 содержит информацию обо всех разбиениях графа G на непересекающиеся циклы, в том числе и о гамильтоновых циклах, если они присутствуют в графе.

Построим теперь логическое выражение для функций F_2.

При наличии любого цикла графа G, не содержащего все вершины этого графа, имеются, по крайней мере, два ребра гамильтонова цикла, если он существует, которые соединяют две разные вершины заданного цикла с вершинами, не входящими в данный цикл.

Таким образом, для построения функции F_2 необходимо выделить все циклы такие, что множество вершин каждого из них есть подмножество множества всех вершин графа G, и для каждого такого цикла построить дизъюнкцию. Членами такой дизъюнкции являются двухэлементные конъюнкции, каждая из которых содержит две булевы переменные без отрицания. Эти переменные соответствуют двум ребрам, которые соединяют две различные вершины цикла с графовыми вершинами вне этого цикла.

Для графа, который содержит n, число циклов равно

$$C_n^3 + C_n^4 + ... + C_n^{n-1} = 2^n - \frac{n(n-1)}{2} - n - 2,$$

где $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$ – число сочетаний из элементов n по m элементам.

В нашем случае для графа, изображённого на рисунке 1, получаем, что для построения функции F_2 необходимо построить 98 циклов, каждый из которых описывается дизъюнкцией конъюнкций.

Рассмотрим, например, цикл $v_1 - v_3 - v_6$. Описанная выше дизъюнкция для указанного цикла имеет вид:

$$D'_{136} = x_1 \wedge x_4 \vee x_1 \wedge x_7 \vee x_1 \wedge x_{11} \vee x_1 \wedge x_{12} \vee x_3 \wedge x_3 \vee x_3 \wedge x_7 \vee x_3 \wedge x_{11} \vee x_3 \wedge x_{12} \vee x_4 \wedge x_{11} \vee$$
$$\vee x_4 \wedge x_{12} \vee x_7 \wedge x_{11} \vee x_7 \wedge x_{12}.$$

Для цикла $v_1 - v_2 - v_7$ дизъюнкция будет следующая:

$$D'_{127} = x_2 \wedge x_4 \vee x_2 \wedge x_5 \vee x_2 \wedge x_{10} \vee x_2 \wedge x_{12} \vee x_4 \wedge x_{10} \vee x_4 \wedge x_{12} \vee x_5 \wedge x_{10} \vee x_5 \wedge x_{12} .$$

Аналогично, определяются дизъюнкции других циклов.

Построенная в статье логическая модель гамильтоновости, определённая по булевой формуле $F = F_1 \wedge F_2$, для заданного графа сетевой структуры, служит основой построения алгоритмов поиска гамильтонова цикла в графе.

Список использованных источников

1. Авдошин, С. М. Дискретная математика. Алгоритмы: теория и практика / С. М. Авдошин, А. А. Набебин. – М: ДМК Пресс, 2019. – 282 с.