

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
ВИТЕБСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 530.145.6: 517

№ госрегистрации 19961286

Инв. №

УТВЕРЖДАЮ

Проректор по научной работе

С.М. Литовский



1996 г.

ОТЧЕТ
О НАУЧНО-ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКОЙ РАБОТЕ

“Решение волновых уравнений в нелинейных средах”

ГБ-214

Начальник НИС

Зав.кафедрой физики,
руководитель темы

С.А. Беликов

И.Е. Андрушкевич

Витебск-1996

Библиотека ВГТУ



Содержание.

Список исполнителей	3
Введение	4
Обобщенный метод Фурье	7
Адаптация обобщенного метода Фурье применительно к уравнению Гельмгольца	11
Обобщенный метод Фурье и разделяющие ортогональные системы координат	17
Двукратное применение подхода Скоробогатько ...	25
Заключение	34
Литература	35

Список исполнителей.

Андрушкевич Иосиф Евгеньевич

к.ф.-м.н., доцент, заведующий
кафедрой физики, научный
руководитель ;

Жизневский Валерий Анатольевич

ассистент кафедры физики;

Мальшев Алексей Леонидович

лаборант кафедры физики
Витебского государственного
университета;

Кузнецов Андрей Александрович

ассистент кафедры физики;

Заливко Денис Васильевич

студент 2-го курса ;

Сметанин Олег Евгеньевич

студент 3-го курса.

1. Введение.

Успех решения многочисленных задач теоретической и прикладной физики в огромной мере определяется прогрессом исследований волновых уравнений.

В классическом понимании волновое уравнение - уравнение с частными производными вида

$$\left. \begin{aligned} \Delta \Psi - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} &= 0, \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}, \\ c &= const, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

описывающее колебательные процессы и процессы распространения волн. В физике понятие "волновое уравнение" гораздо шире, и к нему относят уравнения для электромагнитного поля, акустические уравнения, ряд уравнений квантовой механики, теории гравитации и т.д.

Нас будут интересовать уравнения, описывающие электромагнитные и акустические поля. Будем рассматривать стационарные задачи. Конечно же, в каждом конкретном случае приходится иметь дело с конкретными уравнениями, имеющими свою специфику. Однако общим для всех их является прежде всего то, что к настоящему времени существуют три подхода к получению их решений: метод интегрального представления, метод разделения переменных и численные методы. При решении прикладных задач, как

правило, используются численные методы, легко реализуемые на ЭВМ. Объясняется это тем, что аналитические решения удается получить только в простейших случаях. Численные методы в этом смысле являются универсальными, однако они не лишены и ряда существенных недостатков: численные методы исключают возможность применения результатов и методов качественной теории дифференциальных уравнений. В случае же нелинейных уравнений (а именно с такими приходится иметь дело при рассмотрении физических явлений в нелинейных средах), когда, вообще говоря, решение не является единственным, принципиальной становится проблема корректности решений, полученных численными методами.

Все вышесказанное обуславливает необходимость разработки методов, позволяющих получать аналитические решения (пусть даже и приближенные). И в этом случае метод разделения переменных обладает рядом преимуществ в сравнении с методом интегрального представления, ибо решение уравнений в частных производных с его помощью в конечном итоге сводится (в случае успеха) к решению систем обыкновенных дифференциальных уравнений, а следовательно, становится возможным применение результатов и методов качественной теории для обыкновенных дифференциальных уравнений к уравнениям с частными производными.

Классический метод Фурье разделения переменных, предложенный Ж. Д'Аламбером в 18 веке для решения волнового уравнения (1) и развитый Ж. Фурье и М.В. Остроградским в 19 веке [1,2], приводит к успеху только в простейших случаях (см.[3]). Многообещающим и перспективным является обобщенный метод Фурье, идеология которого предложена в [4] и нашла свое развитие в работах исполнителей данного отчета.

Следует констатировать факт: обобщенный метод Фурье, его возможности еще не исследованы.

В этой связи в качестве метода исследования в данной работе избран обобщенный метод Фурье (по В.Я. Скоробогатько).

Известно также, что уравнение Гельмгольца (УГ)

$$\Delta\psi + k\psi = 0, k = \text{const} \quad (2)$$

является своего рода индикатором успешности попыток получения решений волновых уравнений методом разделения переменных: если в (2) переменные не делятся, то не удастся разделить переменные и в других уравнениях. Именно для уравнения (2) в [3] были открыты 11 разделяющихся ортогональных систем координат (ОСК), оказавшиеся таковыми и для других волновых уравнений. При $k=0$ УГ переходит в уравнение Лапласа. Уравнение Пуассона - частный случай неоднородного УГ. В общем случае ряд прикладных задач сводится к решению уравнения (2), где $k = k(x, y, z)$ - функция, определяемая физическими параметрами среды и зависящая от пространственных координат, а в нелинейных средах - и от волновой функции ψ .

Вышеизложенное и предопределило объект исследования. Им стало уравнение (2).

Литература.

1. Бицадзе А.В. Уравнения математической физики. М. 1976.
2. Миллер У. Симметрия и разделение переменных. М. 1981.
3. Ф.М. Морс, Г. Фишбах. Методы теоретической физики. Т.1. Москва. ИИЛ. 1958.
4. В.Я.Скоробогатько. Исследования по качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными. Киев. Наукова думка. 1980.
5. Отчет о научно-исследовательской работе (ГБ - 226) "Построение приближенных аналитических решений уравнений Максвелла в неоднородных средах методом разделения переменных" (№ госрегистрации 19961295).
6. Андрушкевич И.Е., Шилкин Г.В. О критериях делимости переменных в уравнении Дирака в гравитационных полях. ТМФ. 1987. №2.
7. B.R.Iyer, C.V. Vischveschwara. Separability of the Dirac equation in a class of perfect fluid space-times with local rotational symmetry. J.Math.Phys. 26(5), May 1985.
8. Levin S.A. Principles of nonlinear superposition. - J. Math. Anal. and Appl., 1970, 30, № 1.

Библиотека ВГУ

