

**ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА**

*Курс лекций*

**Витебск  
2015**

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**  
**УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ**  
**"ВИТЕБСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ**  
**УНИВЕРСИТЕТ"**

**ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА**

***КУРС ЛЕКЦИЙ***

для студентов специальности 1-53 01 01-05  
"Автоматизация технологических процессов и производств (легкая  
промышленность)"  
дневной формы обучения

**Витебск**  
**2015**

УДК 531.3 (075.8)

ББК 22.2

П75

Рецензент :

Кузнецов А.А., доктор технических наук, заведующий кафедрой  
"Автоматизация технологических процессов и производств" УО "ВГТУ"

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом  
УО "ВГТУ", протокол № 5 от 16.06. 2014 г.

**П75 Прикладная механика** : курс лекций / сост. : Г. Н. Федосеев, Д. В.  
Корнеенко. – Витебск : УО «ВГТУ», 2015. – 169 с.

ISBN 978-985-481-364-6

В курсе лекций приводятся основные положения кинематики и динамики плоских механизмов, расчеты деталей механических передач на прочность, выносливость, износостойкость и долговечность, а также сведения о приведении масс, сил и жесткостей упругих связей в электроприводах с рассмотрением динамики двухмассовой схемы привода (на примере пуска электродвигателя).

УДК 531.3 (075.8)

ББК 22.2

ISBN 978-985-481-364-6

© Федосеев Г.Н., Корнеенко Д.В., 2015

© УО "ВГТУ", 2015

## Содержание

Лекция 1. Понятие о механизме.....	7
1.1 Классификация кинематических пар [2, с. 31] .....	7
1.2 Структурные формулы механизмов .....	9
1.3 Примеры плоских механизмов 3-го семейства .....	10
1.4 Примеры механизмов 4-го семейства .....	11
Лекция 2. Плоские механизмы с низшими парами V класса.....	13
2.1 Структурные группы Ассур .....	13
2.2 Структурные группы второго класса .....	13
2.3 Примеры групп других классов.....	13
2.4 Класс механизма.....	14
2.5 Класс рычажного 4-звенного механизма (рис. 1.10).....	14
2.6 Пример .....	15
2.7 Плоские механизмы с высшими парами IV класса.....	16
Лекция 3. План скоростей плоского механизма.....	17
3.1 Условие существования кривошипа в четырехзвенных механизмах .....	17
3.2 План скоростей .....	19
3.3 Ошибки механизмов .....	21
Лекция 4. План ускорений плоского механизма .....	23
4.1 План ускорений кулисного механизма .....	23
4.2 План ускорений кривошипно-ползунного механизма .....	26
4.3 План ускорений кривошипно-коромыслового механизма.....	28
Лекция 5. Силовой анализ механизма .....	30
5.1 Силовой анализ группы Ассур.....	30
5.2 Силовой анализ ведущего звена .....	32
5.3 Ошибка положения из-за зазора в кинематической паре.....	34
Лекция 6. Электропривод .....	36
6.1 Передаточное отношение .....	36
6.2 Коэффициент полезного действия (КПД) .....	37
6.3 Выбор электродвигателя привода .....	39
6.4 Передаточные отношения передач привода .....	39
6.5 Мощности на валах привода; частоты вращения валов; моменты, вращающие валы.....	40
Лекция 7. Эвольвентное зацепление .....	40
7.1 Рабочие поверхности зубьев цилиндрических колес.....	40
7.2 Эвольвента круга и ее свойства.....	41
7.3 Эвольвентное зацепление .....	43
7.4 Передаточное отношение .....	43
7.5 Основные размеры эвольвентных колес.....	45
Лекция 8. Силы взаимодействия в эвольвентном зацеплении.....	49
8.1 Коэффициент торцевого перекрытия .....	49
8.2 Зацепление прямозубых колес .....	51
8.3 Зацепление косозубых колес.....	51

8.4 Силы в косозубом зацеплении .....	53
Лекция 9. Контактные напряжения в цилиндрических колесах .....	54
9.1 Удельная расчетная окружная сила.....	54
9.2 Контактные напряжения .....	56
9.3 Эквивалентное цилиндрическое прямозубое колесо.....	57
9.4 Условие прочности в контактном взаимодействии зубьев .....	59
9.5 Допускаемые контактные напряжения.....	62
Лекция 10. Передачи зацеплением с непараллельными валами.....	64
10.1 Конические передачи (с пересекающимися валами).....	64
10.2 Эквивалентные цилиндрические колеса.....	66
10.3 Силы в зацеплении конических колес.....	67
10.4 Контактные напряжения, расчет на прочность .....	68
10.5 Червячная передача.....	69
10.6 Силы в червячной передаче .....	71
Лекция 11. Геометрические характеристики плоских фигур .....	72
11.1 Статические моменты площади .....	72
11.2 Моменты инерции.....	73
11.3 Геометрические характеристики простейших фигур.....	74
11.4 Брус (стержень).....	78
Лекция 12. Внутренние силовые факторы в поперечном сечении бруса.....	78
12.1 Внутренние силовые факторы .....	78
12.2 Внутренние силовые факторы в поперечном сечении вала редуктора... ..	80
12.3 Напряженное состояние в точке бруса (рис. 12.1) .....	82
12.4 Выражение внутренних силовых факторов через напряжения в поперечном сечении бруса .....	83
Лекция 13. Нормальные напряжения в поперечном сечении.....	85
13.1 Гипотеза плоских сечений .....	85
13.2 Гипотеза о ненадавливании продольных волокон .....	86
13.3 Закон Гука .....	86
13.4 Распределение нормальных напряжений в поперечном сечении бруса.. ..	87
13.5 Принцип независимости действия сил .....	88
13.6 Простые и сложные деформации бруса .....	88
13.7 Условие прочности при растяжении (сжатии).....	89
13.8 Нормальные напряжения при прямом изгибе .....	90
Лекция 14. Нормальные напряжения в статических и динамических задачах .....	92
14.1 Нормальные напряжения смятия в шпоночных соединениях .....	92
14.2 Нормальные напряжения при изгибе прямых зубьев зубчатых передач .....	94
14.3 Нормальные напряжения при изгибе косых зубьев .....	96
14.4 Открытая зубчатая передача: проектный расчет.....	97
14.5 Растяжение-сжатие бруса: скорость распространения продольной упругой волны .....	99
Лекция 15. Кручение круглого стержня.....	100

15.1 Угол сдвига.....	100
15.2 Закон парности касательных напряжений .....	101
15.3 Распределение касательных напряжений при кручении.....	102
15.4 Моменты сопротивления при кручении.....	104
15.5 Расчет на прочность.....	105
Лекция 16. Напряженное состояние вала.....	105
16.1 Расчетная схема.....	105
16.2 Опорные реакции .....	106
16.3 Изгибающие моменты .....	108
16.4 Суммарный изгибающий момент.....	109
16.5 Нормальные напряжения в поперечном сечении вала .....	110
16.6 Осевой момент инерции и момент сопротивления круглого сечения ...	110
16.7 Напряженное состояние в опасных точках поперечного сечения вала.	111
Лекция 17. Упрощенное плоское напряженное состояние (УПНС) .....	112
17.1 Напряженное состояние в точке .....	112
17.2 Чистый сдвиг .....	114
17.3 Нормальные и касательные напряжения в УПНС.....	114
17.4 Максимумы и минимумы нормальных и касательных напряжений в УПНС .....	115
17.5 Прочность при линейном напряженном состоянии и чистом сдвиге ...	116
17.6 Критерий прочности Треска, Сен-Венана .....	117
17.7 Коэффициент безопасности в УПНС.....	118
Лекция 18. Циклически изменяющиеся нормальные и касательные напряжения в поперечном сечении вала.....	119
18.1 Предел выносливости при симметричном цикле .....	119
18.2 Произвольный цикл напряжений .....	122
18.3 Диаграмма предельных амплитуд.....	123
18.4 Запас выносливости.....	124
18.5 Запасы выносливости вала.....	125
18.6 Запасы в опасных сечениях вала .....	126
Лекция 19. Подшипники качения .....	126
19.1 Основные типы подшипников качения .....	127
19.2 Серии диаметров и ширин [4, с. 330–331] .....	129
19.3 Точность подшипников качения [4, с. 331] .....	129
19.4 Цифровые обозначения подшипников .....	129
19.5 Выбор типа подшипника .....	129
19.6 Проверка подшипника на статическую грузоподъемность.....	130
19.7 Проверка подшипников на долговечность .....	130
19.8 Схемы установки подшипников .....	131
19.9 Смазка подшипников закрытых передач.....	133
Лекция 20. Ременные передачи.....	133
20.1 Кинематика ременной передачи .....	134
20.2 Геометрия ременной передачи .....	135
20.3 Силы в передаче .....	136

20.4 Формула Эйлера .....	136
20.5 Фактор трения .....	138
Лекция 21. Напряжения в ремне .....	139
21.1 Напряжения от центробежных сил.....	139
21.2 Напряжения при изгибе ремня.....	140
21.3 Напряжения в ремне .....	141
21.4 Расчет клиноременной передачи .....	143
21.5 Допускаемое полезное напряжение .....	144
21.6 Силы, действующие на валы ременной передачи.....	144
Лекция 22. Цепная передача .....	145
22.1 Конструкция втулочно-роликовой цепи и звездочек .....	145
22.2 Передаточное число .....	146
22.3 Удары в передаче .....	147
22.4 Износ цепи .....	148
22.5 Оптимальное число зубьев .....	148
22.6 Давление в шарнирах цепи.....	148
22.7 Допускаемое давление в шарнирах цепи.....	150
22.8 Практический расчет цепной передачи.....	150
Лекция 23. Резьбовые соединения .....	151
23.1 Крепёжные и ходовые резьбы .....	151
23.2 Основные виды резьбовых соединений .....	153
23.3 Амонтоново трение .....	154
23.4 Трение в резьбе .....	155
23.5 Резьба метрическая .....	156
23.6 Расчёт затянутого болта на прочность.....	157
Лекция 24. Расчетные схемы механической части электропривода .....	161
24.1 Приведение масс.....	161
24.2 Приведение сил.....	162
24.3 Приведение жесткостей механических связей.....	162
24.4 Двухмассовая упругая система .....	163
24.5 Пуск двигателя .....	165
Литература .....	169

## Лекция 1. Понятие о механизме

Механизм – искусственно созданная подвижная система твердых тел – звеньев, преобразующая заданные движения одних из них (ведущих звеньев) в требуемые движения остальных (ведомых звеньев) – по отношению к звену, принимаемому за неподвижное, – стойке механизма [1, с. 7].

Подвижное соединение двух звеньев образует кинематическую пару. Поверхности, линии, точки, которыми звенья пары соприкасаются друг с другом, – элементы кинематической пары. Если эти элементы – поверхности, пары называются низшими, если же линии или точки – высшими.

Совокупность кинематических пар называется кинематической цепью. Цепь простая, если каждое из звеньев цепи входит не более чем в две пары, в противоположном случае – сложная. Цепь замкнутая, если каждое из звеньев цепи входит не менее чем в две пары, в противном случае – незамкнутая.

Механизм – кинематическая цепь с одним неподвижным звеном – стойкой, преобразующая заданные движения ведущих звеньев в требуемые движения всех других. Большинство механизмов образовано замкнутыми кинематическими цепями с одним ведущим звеном. Если их несколько, механизм называется дифференциальным.

### 1.1 Классификация кинематических пар [2, с. 31]

Всякое твердое тело обладает (рис.1.1) в пространстве шестью степенями свободы – может поступательно двигаться в трех направлениях, не лежащих в одной плоскости, и вращаться вокруг них.

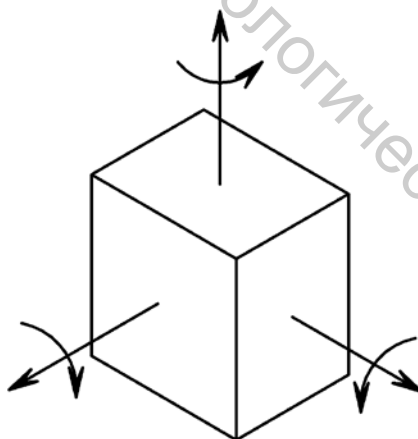


Рисунок 1.1 – Шесть степеней свободы твердого тела в пространстве

Соединяясь в кинематическую пару, каждое из двух звеньев – твердых тел «стесняет свободу другого» – налагает на него связи. На рисунке 1.2 показан шар на плоскости, «запрещающей» движение шара в направлении, нормальном к ней, – плоскость налагает на шар (или шар налагает на плоскость) одну связь. Пару на рисунке 1.2 отнесем к первому классу. Налагая на шар еще одну связь (рис. 1.3), получим пару II класса. На рисунке 1.4 показана плоскостная пара III класса –

возможны только 3 движения: наложены  $6 - 3 = 3$  связи. Другой пример (рисунок 1.5) пары III-го класса – сферический (шаровой) шарнир.

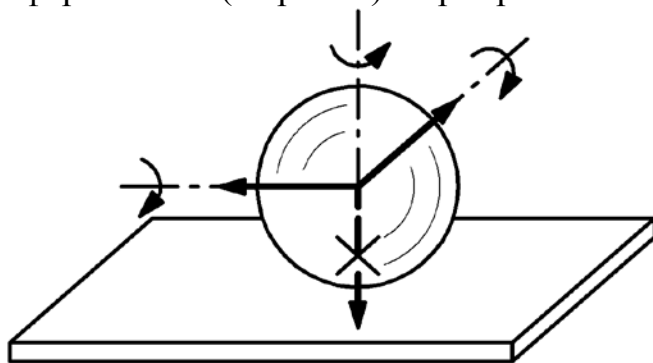


Рисунок 1.2 – В паре I-го класса «разрешены» пять движений, «запрещено»  $6 - 5 = 1$  движение

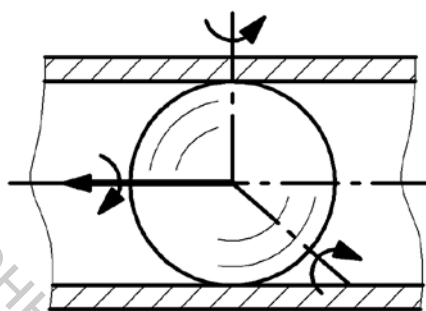


Рисунок 1.3 – Шар в трубе: наложены  $6 - 4 = 2$  связи

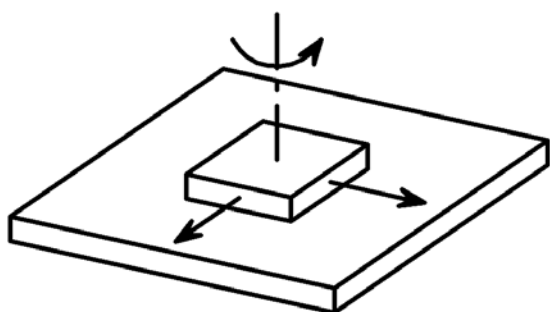


Рисунок 1.4 – Плоскостная пара

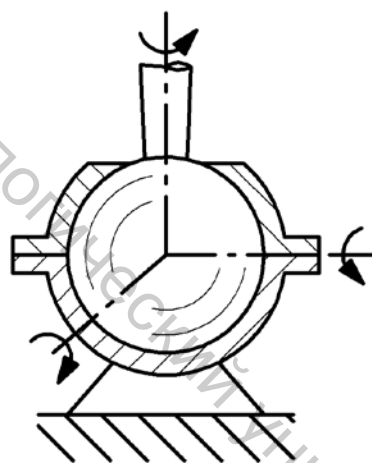


Рисунок 1.5 – Сферический шарнир

На рисунках 1.6, 1.7, 1.8 показаны кинематические пары пятого класса, допускающие только одно относительное движение. В последнем случае винтовой пары болт 1, вращаясь вокруг оси пары (оси отверстия в детали 2), одновременно с этим перемещается вдоль оси, но движения эти зависимы – одно определяется другим, независимо только одно движение, число связей, налагаемых деталью 2 на болт 1 (или болтом на деталь),  $6 - 1 = 5$  связей.

На рисунке 1.9 показан гладкий цилиндр в отверстии. Возможны два движения – движение вдоль отверстия и вращение в нем. В отличие от винтовой

пары (рис. 1.8) эти движения независимы: на цилиндр наложены  $6 - 2 = 4$  связи, пара на рисунке 1.9 IV-го класса.

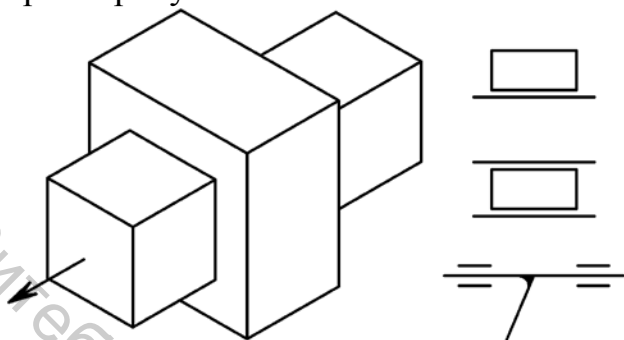


Рисунок 1.6 – Поступательная пара V-го класса

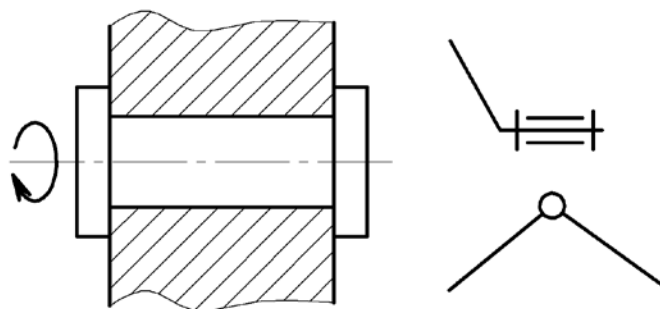


Рисунок 1.7 – Вращательная пара V-го класса

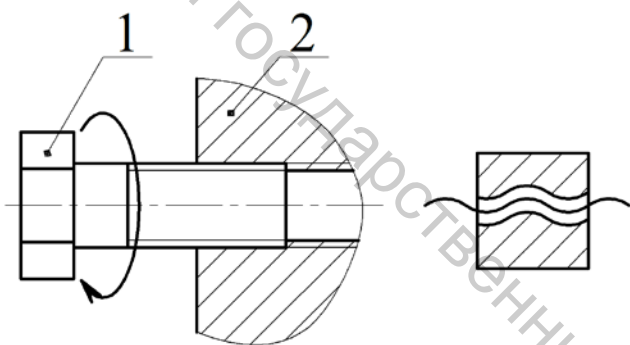


Рисунок 1.8 – Винтовая пара V-го класса

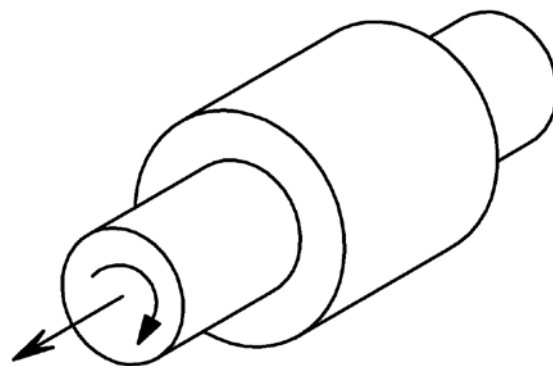


Рисунок 1.9 – Цилиндр в отверстии – пара IV-го класса

## 1.2 Структурные формулы механизмов

Пусть механизм образован  $n$  подвижными звеньями и одним неподвижным звеном – стойкой. До соединения в кинематическую цепь они располагают в пространстве  $6(n+1)$  степенями свободы: каждое из звеньев будущей цепи находится в состоянии, изображенном на рисунке 1.1. Два звена, соединяясь в кинематическую пару  $k$ -го класса, ограничивают свободу друг друга  $k$  связями. Степень подвижности кинематической цепи, образованной  $N = n + 1$  звеньями, входящими в  $p_5$  пар пятого класса,  $p_4$  пар четвертого класса, ...,  $p_1$  пар первого класса,

$$6N - 5p_5 - 4p_4 - \dots - 1p_1.$$

Вычитая из нее 6 связей, наложенных на неподвижное звено – стойку механизма, найдем степень подвижности в общем случае пространственного механизма:

$$W = 6n - 5p_5 - 4p_4 - 3p_3 - 2p_2 - 1p_1, \quad (1.1)$$

формула Сомова-Малышева [1, с. 12].

Если же на все подвижные звенья механизма наложено  $k$  общих связей, эти  $k$  связей налагаются на механизм, будучи в числе налагаемых в каждой из кинематических пар. В механизме при этом возможны не любые кинематические

пары, а только те, число связей в которых больше числа  $k$ . Само число  $k$  определяет номер семейства механизмов.

Например, в 3-ем семействе механизмов возможны кинематические пары V и IV классов. Три связи ( $k=3$ ) в каждой из этих пар оказываются наложенными на все  $n$  подвижных звеньев механизма, каждая из пар добавляет к этим трем общим связям  $(5-3)$  и  $(4-3)$  связей: степень подвижности механизма 3-го семейства определяется формулой Чебышева [1, с. 12]

$$W = 6n - 3n - (5-3)p_5 - (4-3)p_4 = 3n - 2p_5 - p_4. \quad (1.2)$$

Суммируя все сказанное при выводе формул (1.1, 1.2), напишем формулу для степеней подвижности механизма  $k$ -го семейства ( $0 \leq k \leq 4$ ):

$$W = (6-k)n - (l-k)p_l - \dots - (5-k)p_5, \quad l = k + 1. \quad (1.3)$$

Полагая в формуле (1.3)  $k=4$ , найдем формулу Добровольского [1, с. 12] для механизмов 4-го семейства:

$$W = 2n - p_5. \quad (1.4)$$

### 1.3 Примеры плоских механизмов 3-го семейства

На рисунке 1.10 изображены 4-звенные рычажные механизмы: кривошипно-коромысловый (1), кривошипно-ползунный (2), кулисный (3). Все звенья этих механизмов движутся в плоскости рисунка – на все подвижные звенья каждого из них наложены три общие связи (рисунок 1.4).

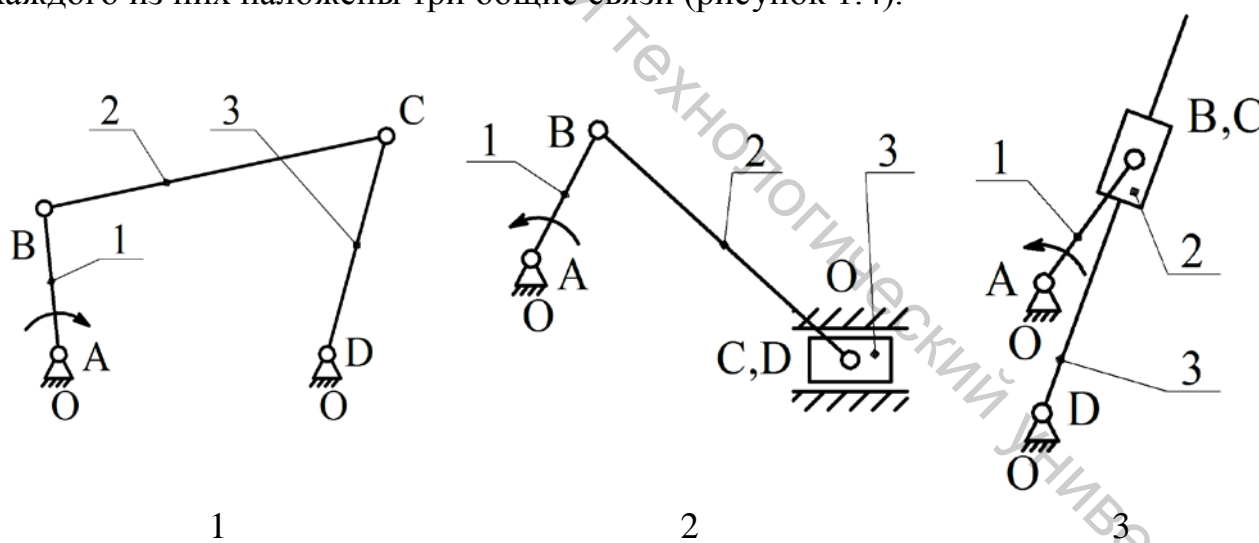


Рисунок 1.10 – 4-звенные рычажные механизмы

Все они относятся к 3-ему семейству. Степень подвижности определяется по формуле Чебышева (1.2). Поскольку механизм 1 включает в себя 4 вращательные пары  $A, B, C, D$  (рис. 1.7) V класса, механизм 2 – три вращательные пары  $A, B, C$  и одну поступательную  $D$  (рис. 1.6) V класса, механизм 3 – три вращательные пары  $A, B, D$  и одну поступательную  $C$  V класса, образованные в каждом из механизмов тремя подвижными звеньями (4-е звено – неподвижная

стойка  $O$  заштрихована), степень подвижности (1.2) всех механизмов на рисунке 1.10

$$W = 3n - 2p_5 = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1.$$

Следовательно, в каждом из механизмов одно ведущее звено, например, кривошип 1 (звено, способное сделать полный оборот). Направление движения ведущего звена указывается стрелкой.

На рисунке 1.11 изображена цилиндрическая прямозубая передача – трехзвенный механизм, образованный двумя подвижными звеньями (шестерней 1 и колесом 2), входящими со стойкой в две вращательные пары  $A$  и  $B$  V класса и друг с другом в пару  $C$  – контакт выпуклых поверхностей зацепляющихся зубьев. Каждая из поверхностей, не имея возможности перемещаться вдоль общей нормали  $N-N$ , катится и скользит по другой: высшую пару  $C$  (зубья 1 и 2 соприкасаются по линии) следует отнести к IV-ому классу.

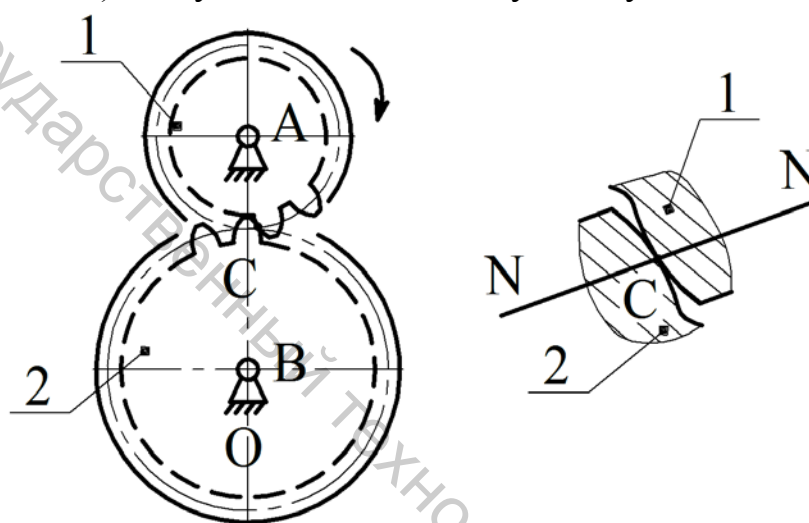


Рисунок 1.11 – В цилиндрической прямозубой передаче: зуб 1, поворачиваясь, скользит по зубу 2 – пара  $C$  относится к IV-ому классу

Степень подвижности (1.2)

$$W = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 2 - 1 = 1$$

– в передаче одно ведущее звено – на рисунке 1.11 шестерня 1.

#### 1.4 Примеры механизмов 4-го семейства

На рисунке 1.12 показан плоский клиновый механизм [2, с. 44], подвижные звенья которого лишены способности вращаться в общей плоскости – число общих связей, наложенных на подвижные звенья 1 и 2,  $k = 1 + 3$ , механизм относится к 4-ому семейству. Все кинематические пары  $A, B$  и  $C$  в механизме – поступательные пары V класса.

Степень подвижности (1.4)

$$W = 2n - p_5 = 2 \cdot 2 - 3 = 1$$

– в механизме одно ведущее звено – например, звено 1.

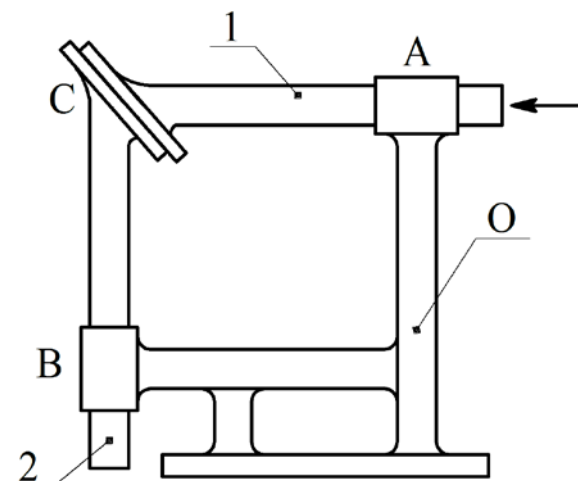


Рисунок 1.12 – Клиновой механизм

На рисунке 1.13 изображена схема пространственного механизма – передачи «гайка-винт» в разрывной машине. Действительно, в отличие от точек плоских механизмов на рисунках 1.10, 1.11, 1.12, совершающих свои движения в одной (общей) плоскости (или параллельных плоскостях), точки гайки 1 перемещаются в горизонтальных плоскостях, а точки ходового винта 2 – перпендикулярно им. Подвижные звенья 1 и 2 способны вращаться вокруг вертикальной оси винтовой пары и перемещаться вдоль нее.

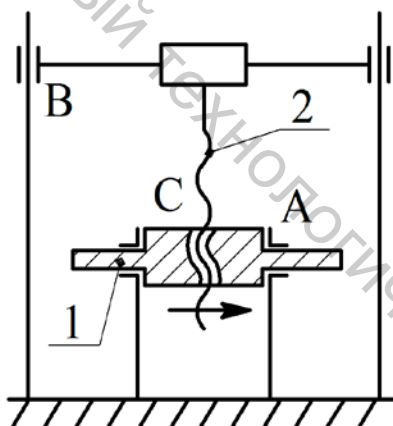


Рисунок 1.13 – Передача «гайка – винт»

Следовательно, на оба звена наложены  $6 - 2 = 4$  общие связи – передача «гайка – винт» входит в 4-е семейство. Все три кинематические пары: вращательная  $A$ , образованная гайкой 1 со стойкой; поступательная  $B$ , образованная траверсой (поперечиной) ходового винта 2 со стойкой; винтовая пара  $C$ , образованная подвижными звеньями 1 и 2, – пары V класса. Степень подвижности (1.4)

$$W = 2n - p_5 = 2 \cdot 2 - 3 = 1$$

– в механизме одно ведущее звено – на рисунке 1.13 гайка 1.

## Лекция 2. Плоские механизмы с низшими парами V класса

Любой плоский механизм образуется, согласно Л.В. Ассуру, присоединением к стойке с ведущими звеньями (механизму I класса) кинематических цепей со степенью подвижности (1.2), равной нулю. Такие цепи с кинематическими парами V класса (вращательными и поступательными) называются [1, с. 19] структурными группами Ассура.

### 2.1 Структурные группы Ассура

Степень подвижности группы Ассура (1.2)

$$W = 3n_2 - 2p_{5_2} = 0, \quad (2.1)$$

где  $n_2$  – число звеньев в группе,  $p_{5_2}$  – число кинематических пар V класса. При этом следует различать кинематические пары, образованные звеньями, входящими в группу, – внутренние пары и внешние пары, образованные звеньями группы со звеньями, не входящими в группу. Число внутренних пар определяет в общем случае класс группы, число внешних пар – порядок группы.

Формула (2.1) дает число кинематических пар (внутренних и внешних) в группе:

$$p_{5_2} = \frac{3n_2}{2}. \quad (2.2)$$

Нетрудно видеть, что число звеньев в группе Ассура четное, а число кинематических пар (2.2) кратно трем. Подставляя в формулу (2.2) четные числа  $n_2 = 2, 4, \dots$ , найдем:

$$p_{5_2} = 3, 6, \dots$$

### 2.2 Структурные группы второго класса

Совокупность групп второго класса ( $n_2 = 2, p_{5_2} = 3$ ) с одной внутренней и двумя внешними кинематическими парами включает в себя [1, с. 20] группы 5 видов (рис. 2.1).

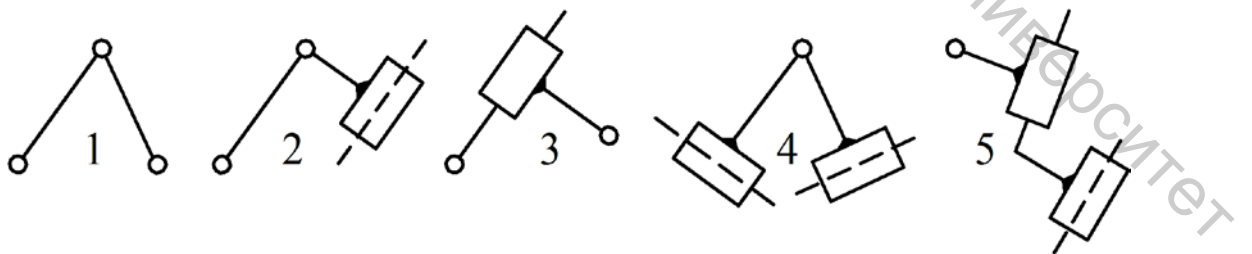


Рисунок 2.1 – Группы Ассура второго класса

### 2.3 Примеры групп других классов

Рассматривая группы, состоящие из 4 звеньев и включающие в себя 6 кинематических пар, можно образовать три варианта [1, с. 21] кинематических

цепей с нулевой степенью подвижности – см. рисунок 2.2. Первый вариант не является группой – он распадается на две группы Ассур второго класса 1-го вида второго порядка (рис. 2.1), второй вариант – группа третьего класса (три внутренние пары  $A, B, C$ ) третьего порядка (три внешние пары  $E, F, D$ ), третий вариант – группа четвертого класса (четыре внутренние пары  $A, B, C, D$ ) второго порядка (две внешние пары  $E, F$ ).

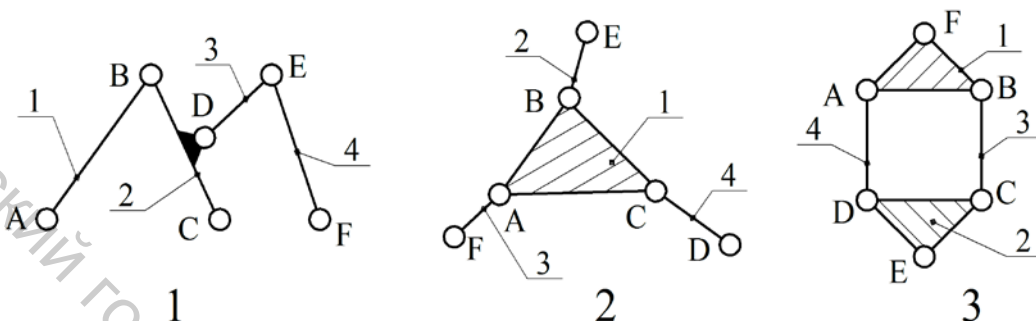


Рисунок 2.2 – Три варианта 4-звенных кинематических цепей с нулевой степенью подвижности

## 2.4 Класс механизма

Выбрав ведущее звено (ведущие звенья), образующее со стойкой механизм I класса, отделим от заданного механизма группу Ассур, по возможности, наинизшего класса. Степень подвижности оставшегося механизма должна равняться степени подвижности исходного механизма. Если это условие не выполняется, отделяем группу высшего класса.

Результат разложения механизма на группы Ассур – ведущее звено со стойкой, то есть механизм I класса. Класс исходного механизма определяется наивысшим классом последовательно отделяемых групп Ассур.

## 2.5 Класс рычажного 4-звенного механизма (рис. 1.10)

На рисунке 2.3 показано разложение кривошипно-коромыслового (1), кривошипно-ползунного (2), кулисного (3) механизмов. От механизма 1 отделена группа второго класса 1-го вида (рис. 2.1), от механизма 2 – группа второго класса 2-го вида (рис. 2.1), от механизма 3 – группа второго класса 3-го вида (рис. 2.1). Формула строения каждого из них

$$I_{(1)} \rightarrow 2_{(2,3)}$$

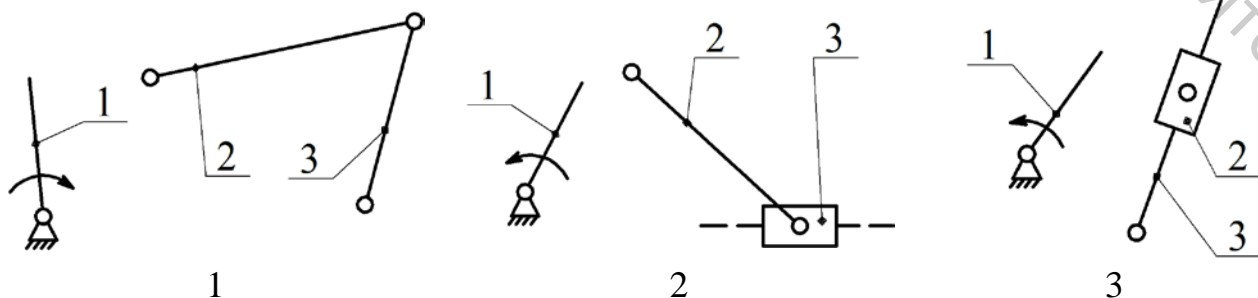


Рисунок 2.3 – Разложение рычажных 4-звенных механизмов

указывает, что к механизму I класса, образованному стойкой с ведущим звеном 1, присоединена группа Ассур второго класса, состоящая из звеньев 2 и 3. Групп других классов здесь нет – на рисунке 2.3 изображены механизмы второго класса.

## 2.6 Пример

На рисунке 2.4 показана схема 6-звенного механизма, состоящего из кривошипа 1, шатуна 2, коромысла 3, шатуна 4, ползуна 5, входящих в 6 вращательных пар  $A, B, C, D, E, F$  и одну поступательную  $G$  (все они принадлежат к V-му классу). Кинематическая цепь механизма сложная (звено 3 и стойка  $O$  входят в три кинематические пары  $C, D, E$  и  $A, D, G$ ), замкнутая (нет звеньев, входящих в одну пару). Степень подвижности (1.2)

$$W = 3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = 1. \quad (2.3)$$

Полагаем ведущим звеном кривошип 1.

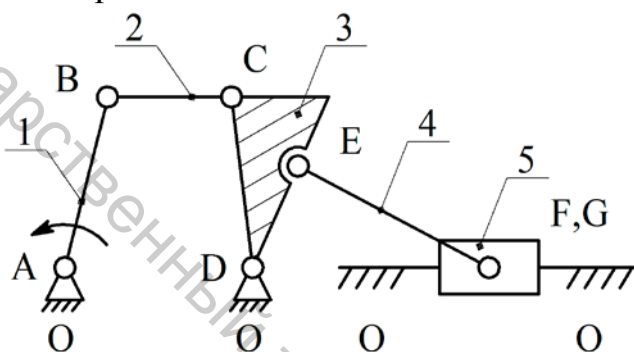


Рисунок 2.4 – 6-звенный механизм с низшими парами V-го класса

Отделим от механизма группу Ассур второго класса 2-го вида (рис. 2.1, 2.5). Степень подвижности оставшегося механизма (рис. 2.5)

$$W = 3 \cdot 3 - 2 \cdot 4 = 1$$

равна степени (2.3).

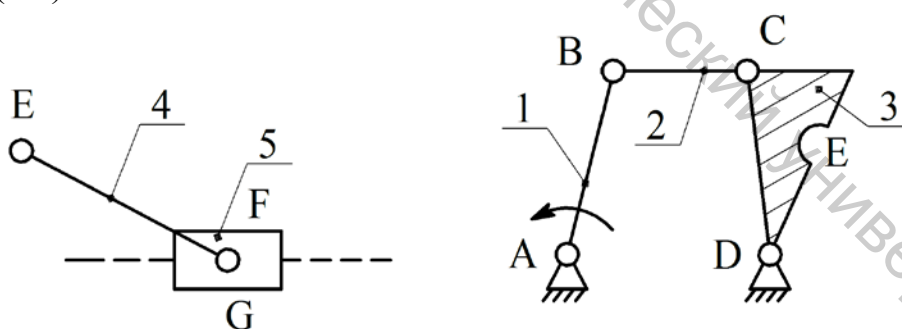


Рисунок 2.5 – Отделенная группа Ассур второго класса 2-го вида и оставшийся 4-звенный механизм

Продолжим разложение механизма, отделяя вторую группу Ассур второго класса 1-го вида (рис. 2.1, 2.6). Остается механизм первого класса (рис. 2.6). Формула строения заданного (рис. 2.4) механизма

$$I_{(1)} \rightarrow 2_{(2,3)} \rightarrow 2_{(4,5)}$$

относит механизм ко второму классу.

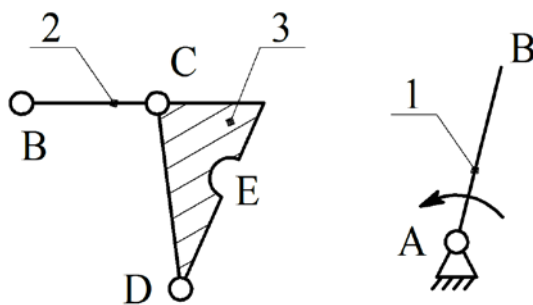


Рисунок 2.6 – Отделенная группа Ассура второго класса 1-го вида и оставшийся механизм I класса

## 2.7 Плоские механизмы с высшими парами IV класса

Пусть в плоском механизме имеются высшие пары IV класса (примеры таких механизмов показаны на рисунках 1.11, 2.7). Его класс может быть определен, если каждая из высших пар IV класса заменена одним звеном, входящим в две пары V класса, то есть в рассмотрении заменяющего механизма (рис. 2.7).

Механизм на рисунке 2.7 состоит из трех звеньев 0, 1, 2, входящих в две низшие вращательные пары A, D V класса и высшую пару (контакт двух выпуклых кривых) IV класса. В условиях бесконечно малых перемещений звеньев 1 и 2 расстояние  $C_1C_2$  между центрами кривизны соприкасающихся кривых остается неизменным. Если поместить в центры  $C_1$  и  $C_2$  вращательные пары, в которые войдут звенья  $AC_1$ ,  $DC_2$  и твердое звено  $C_1C_2$ , получится рычажный заменяющий механизм (рис. 2.7). В момент, изображенный на рисунке, скорости и ускорения в пределах его звеньев 1 и 2 не отличаются от скоростей и ускорений заданного механизма.

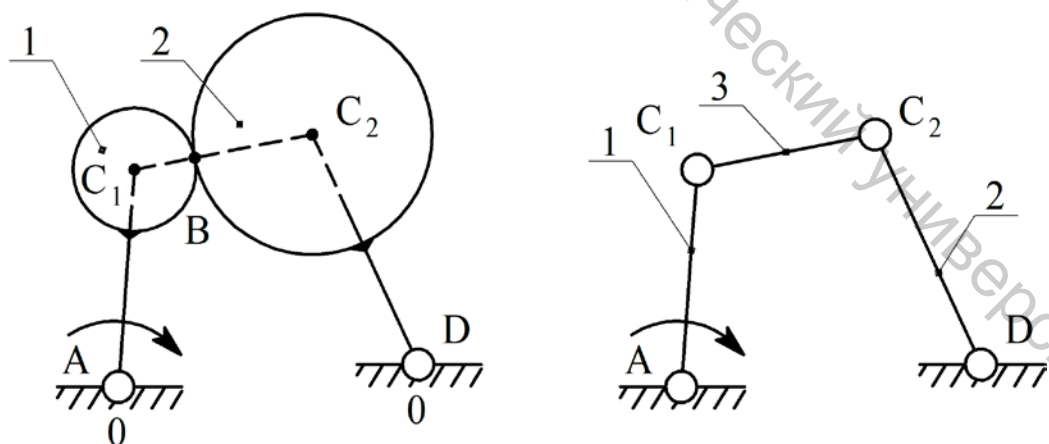


Рисунок 2.7 – Плоский 3-звенный механизм с высшей парой B IV класса и заменяющий мгновенный 4-звенный механизм с кинематическими парами (вращательными A,  $C_1$ ,  $C_2$ , D) V класса

На рисунке 2.8 изображен кулачковый механизм с плоским коромыслом.

В условиях бесконечно малых перемещений кулачка 1 и коромысла 2 расстояние прямой  $DB$  от центра кривизны кулачка  $C_1$  (в момент, изображенный на рисунке) остается неизменным. Помещая в центр  $C_1$  вращательную пару (V класса), а в точку касания  $B$  поступательную пару (V класса), получим заменяющий рычажный механизм: высшая кинематическая пара  $B$  в заданном механизме заменена твердым звеном  $C_1B$ , входящим в две (вращательную  $C_1$  и поступательную  $B$ ) пары V класса.

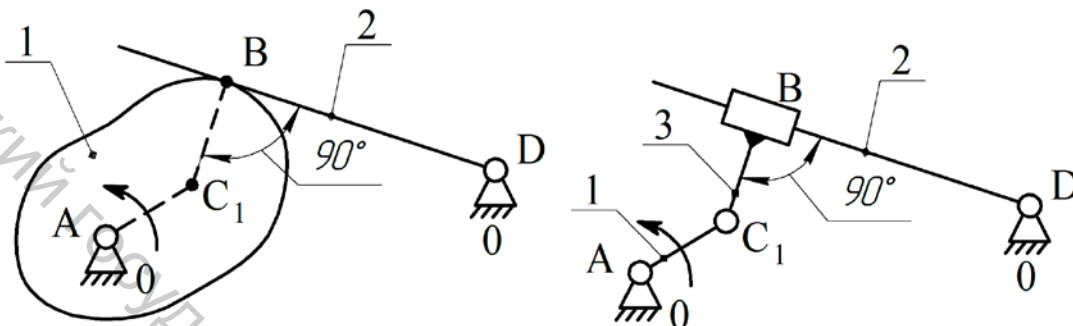


Рисунок 2.8 – Плоский трехзвенный кулачковый механизм с высшей парой  $B$  IV класса и заменяющий мгновенный 4-звенный механизм с кинематическими парами (вращательными  $A$ ,  $C_1$ ,  $D$  и поступательной  $B$ ) V класса

### Лекция 3. План скоростей плоского механизма

#### 3.1 Условие существования кривошипа в четырехзвенных механизмах

Положим, что звено в механизме 1 на рисунке 1.10 способно сделать полный оборот, то есть является кривошипом. Положим также, что в этом механизме длины звеньев (рис. 3.1)  $l_1 < l_2 < l_3 < l_0$ .

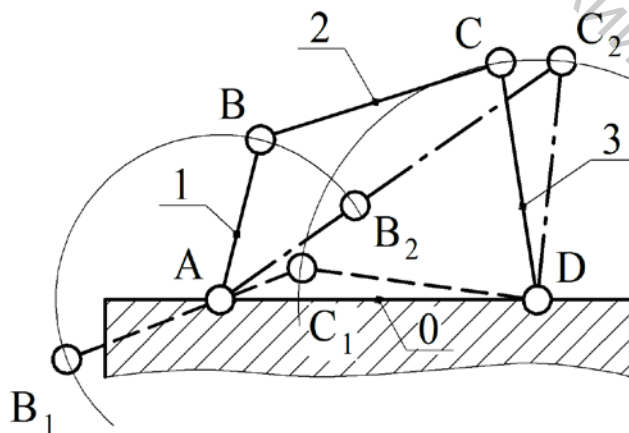


Рисунок 3.1 – Шарнирный четырехзвенник

Звено делает полный оборот, если возможны треугольники  $AC_1D$  и  $AC_2D$ . Первый из них реализуется в момент крайнего левого положения  $C_1$  точки  $C$  звена

3, второй – в момент крайнего правого положения  $C_2$  точки  $C$ . Каждая из сторон треугольника не меньше модуля разности двух других сторон и не больше суммы двух других сторон. В случае треугольника  $AC_1D$  требуем выполнения неравенств

$$AC_1 \geq AD - DC_1,$$

$$l_2 - l_1 \geq l_0 - l_3,$$

или неравенства

$$l_2 + l_3 \geq l_0 + l_1. \quad (3.1)$$

В случае треугольника  $AC_2D$  требуем выполнения неравенств

$$AC_2 \leq AD + DC_2, \quad (3.2)$$

$$l_1 + l_2 \leq l_0 + l_3.$$

Если в условии (3.1) длину  $l_2$  заменить большей длиной  $l_0$ , а длину  $l_0$  – меньшей длиной  $l_2$ , получим, как следствие, неравенство (3.2). Для существования кривошипа вполне хватает одного неравенства (3.1).

Все шарнирные четырехзвенники (рис. 3.1) распределяются [2, с. 567–568] по двум группам. К первой группе относятся механизмы, у которых сумма длин наименьшего и наибольшего звеньев (3.1) не превышает суммы длин двух других; во вторую группу входят механизмы, не удовлетворяющие этому требованию. Механизмы первой группы могут быть поставлены на наименьшее звено (рис. 3.2) – тогда они двухкривошипные. При постановке на звено, смежное с наименьшим, получаются (рис. 3.1) кривошипно-коромысловые механизмы с кривошипом – наименьшим звеном. Если же шарнирный четырехзвенник поставлен на звено, противоположное наименьшему, он будет двухкоромысловым механизмом – звенья, примыкающие к указанной стойке, качаются, не делая полных оборотов.

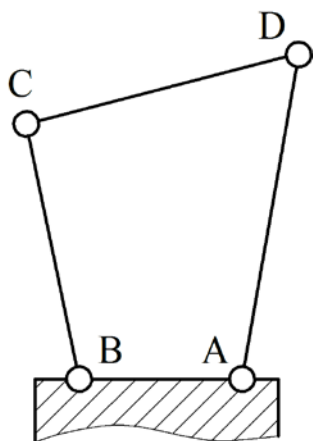


Рисунок 3.2 – Двухкривошипный механизм

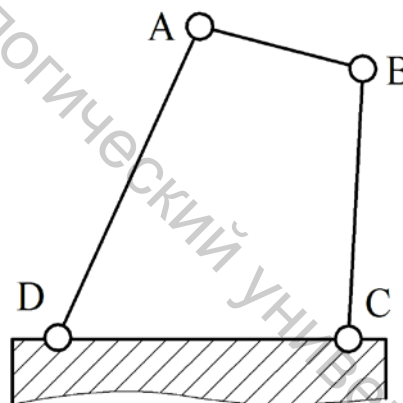


Рисунок 3.3 – Двухкоромысловый механизм

Механизмы второй группы все двухкоромысловые.

Рассмотрим механизм 2 на рисунке 1.10. Звено 1 на рисунке 3.4 будет кривошипом, если возможен треугольник  $A_1AC_1$ , то есть выполняется условие [2, с. 568]

$$AC_1 > AA_1, \quad l_2 - l_1 > e. \quad (3.3)$$

Существование второго треугольника  $A_1AC_2$  – следствие требования (3.3). Если условие (3.3) не выполняется, звено 1 будет коромыслом.

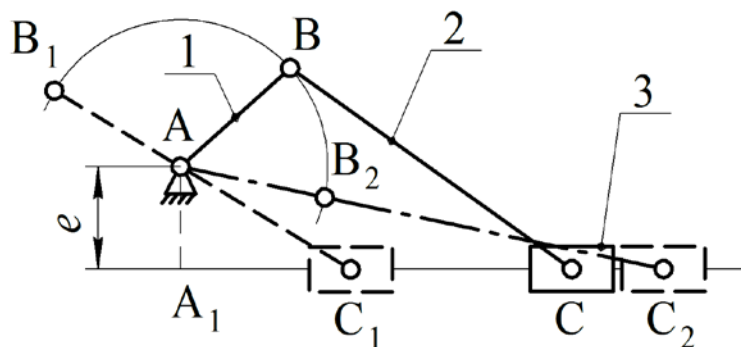


Рисунок 3.4 – Дезаксиальный ( $e \neq 0$ ) кривошипно-ползунный механизм

Звено 1 в механизме 3 на рисунке 1.10 – всегда кривошип. Если выполняется условие (рис. 3.5)

$$AB' > AD, l_1 < l_0,$$

звено 3 (кулиса) – коромысло. Если же выполнено условие

$$l_1 > l_0,$$

кулиса 3 – кривошип.

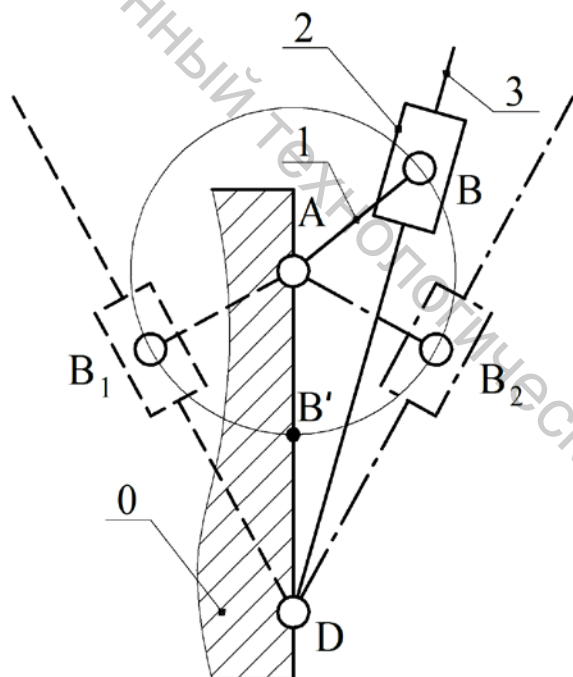


Рисунок 3.5 – Кулисный механизм с качающейся кулисой

### 3.2 План скоростей

На рисунке 3.6 изображен план положений кулисного механизма с качающейся кулисой. Масштаб плана  $\mu_l = l_1 / (AB)$  м/мм – (AB) мм – отрезок, изображающий кривошип 1. Кривошип вращается вокруг неподвижной оси

шарнира А, скорость точки В направлена в сторону его вращения перпендикулярно линии АВ, величина скорости

$$V_B = \omega_1 l_1 \text{ м/с.}$$

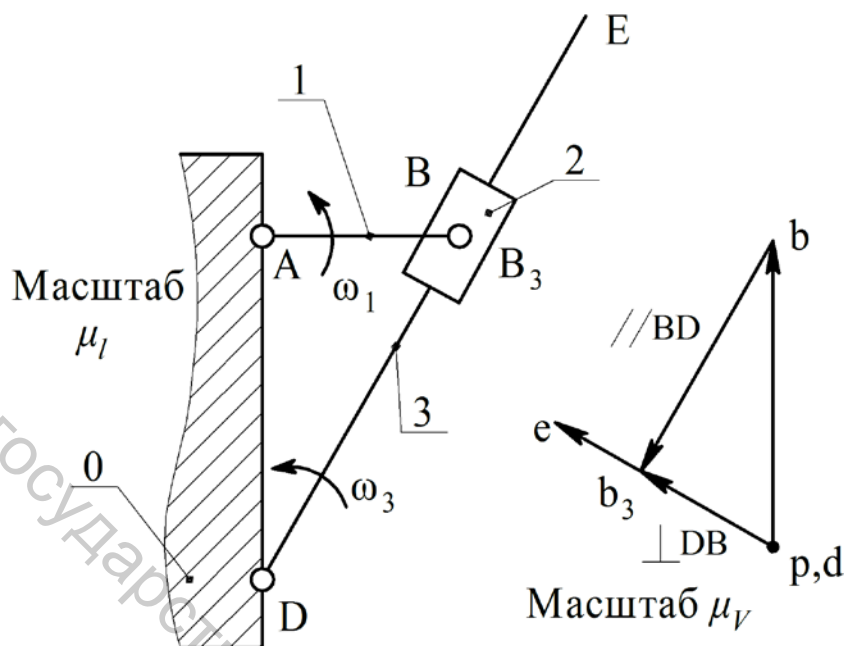


Рисунок 3.6 – Планы положений и скоростей кулисного механизма

Изобразим ее отрезком  $(pb)$  мм. Масштаб плана скоростей  $\mu_V = V_B / (pb) \text{ мс}^{-1}/\text{мм}$ .

Скорость точки  $B_3$ , принадлежащей звену 3 и совпадающей в данный момент с точкой В кулисного камня 2, находится по теореме о сложении скоростей [1, с. 48]:

$$\vec{V}_{B_3} = \vec{V}_B + \vec{V}_{B_3B},$$

где  $\vec{V}_{B_3B}$  – скорость точки  $B_3$  в ее движении вдоль прямой ВD относительно точки В кулисного камня 2: проводим через точку  $b$  плана скоростей прямую, параллельную линии ВD.

Кулиса 3 вращается вокруг неподвижной оси шарнира D. Вращение – частный случай плоскопараллельного движения. Его теория дает [1, с. 49] второе векторное уравнение

$$\vec{V}_{B_3} = \vec{V}_D + \vec{V}_{B_3D},$$

где скорость полюса D  $\vec{V}_D = 0$  (точка  $d$  плана скоростей совпадает с его полюсом  $p$ ),  $\vec{V}_{B_3D}$  – скорость точки  $B_3$  во вращении кулисы 3 вокруг полюса D, перпендикулярная линии ВD: проводим из точки  $d$  плана скоростей прямую, перпендикулярную линии ВD.

Пересечение прямых (рис. 3.6), параллельной линии ВD и перпендикулярной линии ВD, дает точку  $b_3$  плана скоростей и отрезок  $(pb_3)$  мм, изображающий искомую скорость  $\vec{V}_{B_3}$ . Угловая скорость кулисы 3

$$\omega_3 = \frac{V_{B_3D}}{l_{DB_3}} = \frac{(db_3)\mu_V}{(DB_3)\mu_l} c^{-1}.$$

Направление вращения получается, если отрезок  $(db_3)$ , изображающий вращательную скорость  $\overrightarrow{V_{B_3D}}$ , мысленно перенести в точку  $B_3$ .

Скорость точки  $E$  кулисы, вращающейся вокруг оси шарнира  $D$ , перпендикулярна прямой  $DE$  и, следовательно, параллельна скорости точки  $B_3$ ; величины скоростей пропорциональны их расстояниям от оси вращения:

$$\frac{V_{ED}}{V_{B_3D}} = \frac{l_{DE}}{l_{DB_3}}.$$

Отсюда следует правило подобия

$$\frac{(de)\mu_V}{(db_3)\mu_V} = \frac{(de)}{(db_3)} = \frac{(DE)}{(DB_3)}. \quad (3.4)$$

Используя правило (3.4), найдем: точка  $e$  плана скоростей находится на прямой  $(db_3)$  на расстоянии

$$(de) = (db_3) \frac{(DE)}{(DB_3)} \text{ мм}$$

от точки  $d$ .

Действительно, проводя через точку  $d$  прямую, параллельную скорости  $\overrightarrow{V_{ED}}$ , убеждаемся, что она совпадает с прямой  $db_3$ , остается найти отрезок  $(de)$ .

### 3.3 Ошибки механизмов

Ошибка положения механизма – различие в положениях ведомых звеньев (например, кулис 3 на рисунке 3.6) действительного и соответствующего теоретического механизмов при одинаковых положениях ведущих звеньев (кривошипов 1). Ошибка перемещения – разность перемещений ведомых звеньев действительного и теоретического механизмов при одинаковых перемещениях их ведущих звеньев.

Положение кулисы 3 теоретического кулисного механизма (рис. 3.7) определяется углом  $\alpha$  – функцией длин кривошипа и стойки:

$$\alpha = f(l_1, l_0). \quad (3.5)$$

Пусть параметры  $l_1$  и  $l_0$  в действительном механизме отличаются от теоретических значений на малые величины  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_0$ . Ошибка положения определяется [2, с. 570] соответствующим приращением функции (3.5)

$$\Delta\alpha = \frac{\partial f}{\partial l_1} \Delta l_1 + \frac{\partial f}{\partial l_0} \Delta l_0. \quad (3.6)$$

Если для каких-либо двух положений кривошипа 1 найдены ошибки (3.6), ошибка перемещения ведомой кулисы 3 на перемещении кривошипа из одного положения в другое [2, с. 570]

$$(\Delta\alpha)_{1-2} = (\Delta\alpha)_2 - (\Delta\alpha)_1.$$

Найдем, например, ошибку (3.6), возникающую из-за ошибки в длине кривошипа  $l_1$ : функция (3.5) имеет вид

$$\alpha = \operatorname{arctg} \frac{l_1}{l_0},$$

частная производная в ошибке (3.6)

$$\frac{\partial f}{\partial l_1} = \frac{1}{1 + \left(\frac{l_1}{l_0}\right)^2} \cdot \frac{1}{l_0} = \frac{l_0}{l_0^2 + l_1^2},$$

искомая ошибка

$$(\Delta \alpha)_{l_1} = \frac{\partial f}{\partial l_1} \Delta l_1 = \frac{l_0}{l_0^2 + l_1^2} \Delta l_1. \quad (3.7)$$

Используем для определения ошибки (3.7) план малых перемещений (аналогичных скоростям) преобразованного механизма (рис. 3.7). При его построении останавливаем кривошип 1 в заданном положении и вводим [2, с. 571] дополнительный ползун 4, способный скользить вдоль кривошипа АВ. Сообщим ползуну 4 малое перемещение  $\Delta l_1$  и построим план малых перемещений, аналогичных скоростям (рис. 3.7): изобразив перемещение  $\Delta_B = \Delta l_1$  отрезком ( $pb$ ), добавим к нему перемещение  $\Delta_{B_3B}$  точки  $B_3$ , направленное вдоль прямой ВD: проведем из точки  $b$  прямую, параллельную линии ВD. С другой стороны, перемещение точки  $B_3$  в повороте кулисы 3 вокруг неподвижной оси шарнира D (точка  $d$  совпадает на плане с его полюсом  $p$ ), аналогичное вращательной скорости  $\overrightarrow{V_{B_3D}}$ , изображенной на рисунке 3.6 отрезком ( $db_3$ ), перпендикулярно линии ВD: проведем из точки  $d$  соответствующий перпендикуляр. Его пересечение с прямой, параллельной линии ВD, дает точку  $b_3$ , а отрезок ( $db_3$ ) – вращательное перемещение  $\Delta_{B_3D}$  точки  $B_3$ . Искомая ошибка

$$(\Delta \alpha)_{l_1} = \frac{\Delta_{B_3D}}{l_{DB_3}} = \frac{\Delta_B \cos \alpha}{l_0 / \cos \alpha},$$

$$\cos \alpha = \frac{AD}{DB} = \frac{l_0}{\sqrt{l_0^2 + l_1^2}};$$

$$(\Delta \alpha)_{l_1} = \frac{\Delta l_1 \cos^2 \alpha}{l_0} = \frac{l_0}{l_0^2 + l_1^2} \Delta l_1$$

совпадает с результатом (3.7).

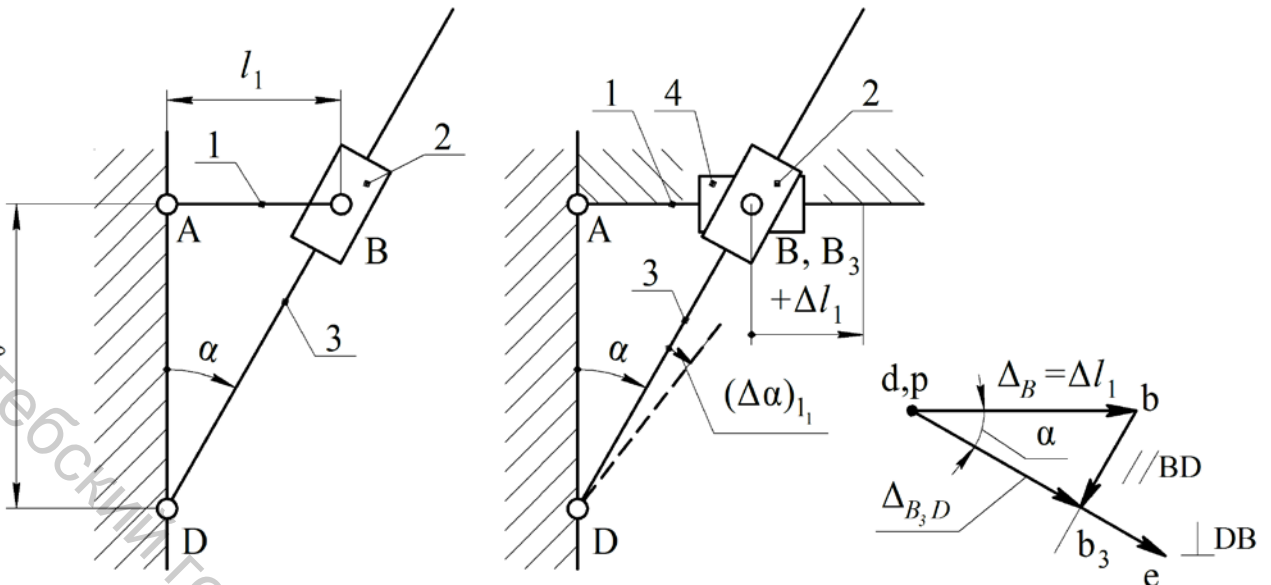


Рисунок 3.7 – Теоретический и преобразованный механизмы, план малых перемещений

### Лекция 4. План ускорений плоского механизма

#### 4.1 План ускорений кулисного механизма

На рисунке 4.1 представлен план положений кулисного механизма с качающейся кулисой. Кривошип 1 равномерно вращается вокруг оси шарнира А, ускорение точки В – центростремительное (нормальное) – направлено вдоль линии ВА (из точки В в точку А). Его величина

$$a_B = \omega_1^2 l_1 \text{ м/с}^2.$$

Изобразим его (рис. 4.2) отрезком ( $\pi b$ ) мм. Масштаб плана ускорений  $\mu_a = a_B / (\pi b) \text{ мс}^{-2}/\text{мм}$ .

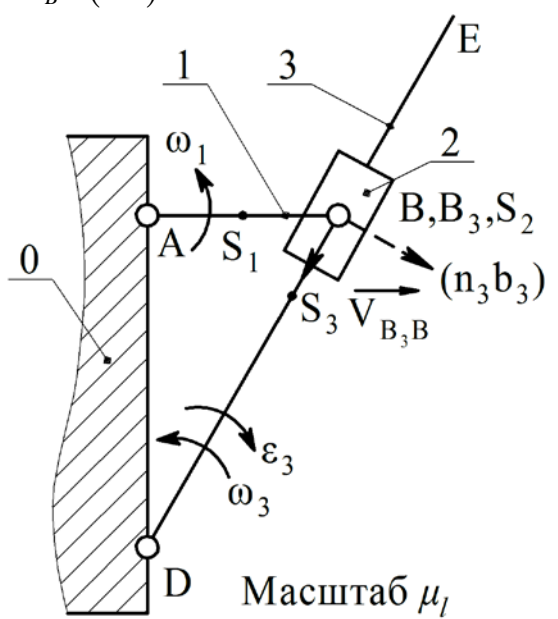


Рисунок 4.1 – План положений кулисного механизма

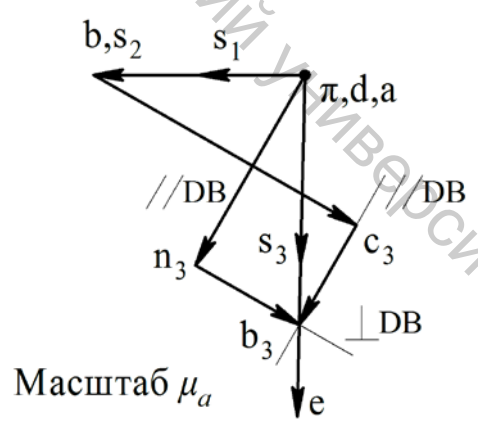


Рисунок 4.2 – План ускорений кулисного механизма

Ускорение точки  $B_3$ , принадлежащей кулисе 3 и совпадающей в данный момент времени с точкой  $B$  кулисного камня, находится по теореме о сложении ускорений [1, с. 50]:

$$\vec{a}_{B_3} = \vec{a}_B + \vec{a}_{B_3B}^c + \vec{a}_{B_3B}^r. \quad (4.1)$$

Кориолисово ускорение в геометрической сумме (4.1)

$$\vec{a}_{B_3B}^c = 2(\vec{\omega}_2 \times \vec{V}_{B_3B}).$$

Его модуль  $a_{B_3B}^c = 2\omega_2 V_{B_3B} = 2\omega_3 V_{B_3B}$  м/с<sup>2</sup> (ибо переносная угловая скорость – угловая скорость кулисного камня 2 равна угловой скорости кулисы 3), или (беря (рис. 3.6) отрезок  $(bb_3)$ , изображающий относительную скорость  $V_{B_3B}$ )

$$a_{B_3B}^c = 2\omega_2(bb_3)\mu_V \text{ м/с}^2.$$

Его направление получается, как показано на рисунке 4.1, поворотом относительной скорости  $\vec{V}_{B_3B}$  – отрезка  $(bb_3)$  на рисунке 3.6 на 90° в сторону переносного вращения с угловой скоростью  $\omega_2$ , равной угловой скорости  $\omega_3$ . Приложим к точке  $b$  плана ускорений отрезок

$$(bc_3) = \frac{a_{B_3B}^c}{\mu_a} \text{ мм.}$$

Относительное ускорение  $\vec{a}_{B_3B}^r$  в сумме (4.1) направлено вдоль линии  $BD$  – прямолинейной траектории движения точки  $B_3$  относительно точки  $B$ : проведем через точку  $C_3$  прямую, параллельную прямой  $BD$ .

Кулиса 3 вращается вокруг неподвижной оси шарнира  $D$ . Вращение – частный случай плоскопараллельного движения. Его теория дает [1, с. 50] второе векторное уравнение

$$\vec{a}_{B_3} = \vec{a}_D + \vec{a}_{B_3D}^n + \vec{a}_{B_3D}^r. \quad (4.2)$$

Ускорение  $\vec{a}_D$  в геометрической сумме (4.2) равно нулю – точка  $d$  совпадает с полюсом  $\pi$  плана ускорений.

Центростремительное ускорение  $\vec{a}_{B_3D}^n$  точки  $B_3$  во вращении кулисы вокруг оси шарнира  $D$  направлено вдоль линии  $B_3D$  (из точки  $B_3$  в точку  $D$ ), его величина

$$a_{B_3D}^n = \omega_3^2 \cdot l_{DB_3} = \omega_3^2 \cdot (DB_3)\mu_l \text{ м/с}^2.$$

Величина отрезка  $(dn_3)$ , изображающего это ускорение,

$$(dn_3) = \frac{a_{B_3D}^n}{\mu_a} \text{ мм.}$$

Отложим отрезок  $(dn_3)$  от точки  $d$  плана ускорений и проведем из точки  $n_3$  прямую, перпендикулярную линии  $DB_3$ , – направление касательного ускорения  $\vec{a}_{B_3D}^r$  в сумме (4.2). Пересечение прямых, проведенных из точек  $c_3$  и  $n_3$ , дает точку  $b_3$ , а отрезок  $(\pi b_3)$  мм – ускорение точки  $B_3$ :

$$a_{B_3} = (\pi b_3)\mu_a \text{ м/с}^2.$$

Найдем ускорения центров масс  $S_3$  и  $S_2$  кулисы и кулисного камня, полагая, что центр масс кулисы находится в ее середине, центр масс кулисного камня совпадает с его точкой В. Ускорение центра масс кулисного камня

$$\vec{a}_{s_2} = \vec{a}_B. \quad (4.3)$$

Оно изображается (рис. 4.2) отрезком  $(\pi s_2)$  мм, равным отрезку  $(\pi b)$  мм. Его величина

$$a_{s_2} = (\pi s_2) \mu_a \text{ м/с}^2. \quad (4.4)$$

Ускорение центра масс кулисы  $\vec{a}_{s_3}$  найдем, предварительно выяснив распределение ускорений во вращении стержня (в его плоскопараллельном движении). На рисунке 4.3 показано, как находится ускорение произвольной точки стержня в этом вращении:

$$\vec{a}_{MA} = \vec{a}_{MA}^n + \vec{a}_{MA}^r, \quad a_{MA}^n = \omega^2 (AM) \mu_l, \quad a_{MA}^r = \varepsilon (AM) \mu_l. \quad (4.5)$$

Нормальное и касательное ускорения точки М пропорциональны их расстоянию от полюса стержня А. Следовательно, ускорение  $\vec{a}_{MA}$  (4.5) по мере мысленного перемещения вдоль стержня АВ растет по линейному закону (не изменяя направления!). На рисунке 4.3 показан план ускорений

$$\vec{a}_M = \vec{a}_A + \vec{a}_{MA}, \quad \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA},$$

изображенных отрезками  $(\pi m)$ ,  $(\pi b)$ ;  $(\pi a)$ ,  $(am)$ ,  $(ab)$ , длины отрезков, изображающих ускорения во вращении вокруг полюса А,

$$(am) = \frac{a_{MA}}{\mu_a}, \quad (ab) = \frac{a_{BA}}{\mu_a}. \quad (4.6)$$

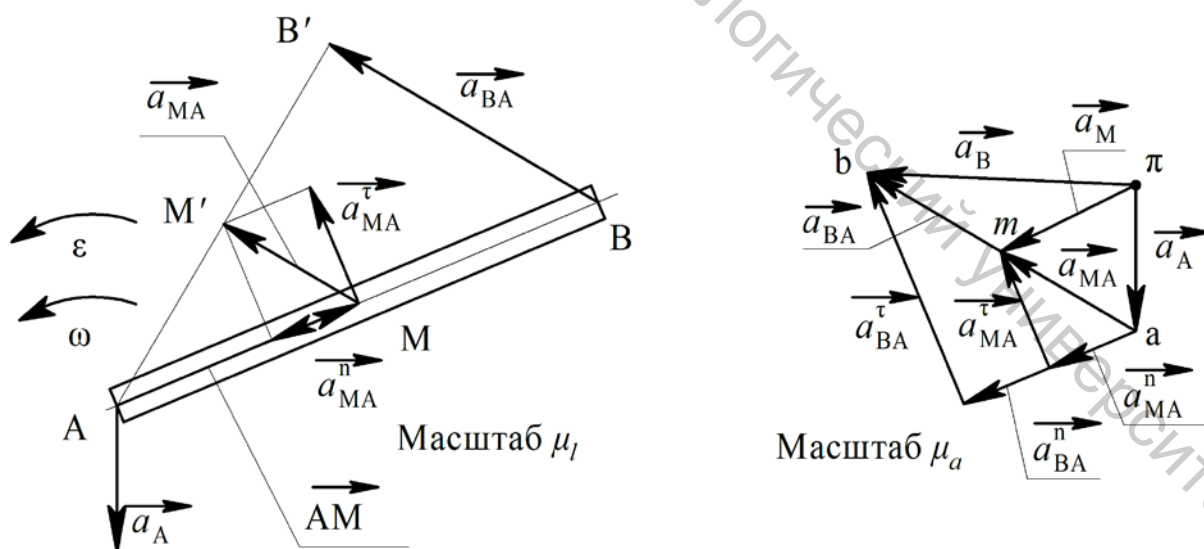


Рисунок 4.3 – План положения стержня и план его ускорений

Из подобия треугольников АММ' и АВВ' на рисунке 4.3 следует правило подобия [1, с. 47]:

$$\frac{(AM)}{(AB)} = \frac{MM'}{BB'} = \frac{a_{MA}}{a_{BA}},$$

или, если перейти к длинам изображающих отрезков (4.6),

$$\frac{(AM)}{(AB)} = \frac{\mu_a(am)}{\mu_a(ab)} = \frac{(am)}{(ab)}. \quad (4.7)$$

Ускорение  $\overrightarrow{a_{ED}}$  точки E кулисы 3 во вращении вокруг полюса D параллельно ускорению  $\overrightarrow{a_{B_3D}}$  (см. ускорения  $\overrightarrow{a_{BA}}$  и  $\overrightarrow{a_{MA}}$  на рисунке 4.3), то есть проводя из точки d прямую, параллельную ускорению  $\overrightarrow{a_{ED}}$ , найдем, что она совпадает с прямой  $db_3$ , параллельной ускорению  $\overrightarrow{a_{B_3D}}$ . Остается найти по правилу (4.7) отрезок (de):

$$\frac{(DE)}{(DB_3)} = \frac{(de)}{(db_3)}, \quad (de) = (db_3) \frac{(DE)}{(DB_3)} \text{ мм.}$$

Центр масс  $S_3$  делит длину DE пополам, соответственно точка  $s_3$  на рисунке 4.2 делит пополам длину (de). Аналогичным образом точка  $s_1$  делит пополам длину (ab). Искомое ускорение центра масс  $s_3$

$$a_{s_3} = (\pi s_3) \mu_a \text{ м/с}^2. \quad (4.8)$$

Касательное ускорение точки  $B_3$  кулисы 3 (рис. 4.2) дается отрезком  $(n_3 b_3)$  мм, угловое ускорение кулисы

$$\varepsilon_3 = \frac{a_{B_3D}^{\tau}}{DB_3} = \frac{(n_3 b_3) \mu_a}{(DB_3) \mu_l} \text{ с}^{-2}. \quad (4.9)$$

Его направление получается, если отрезок  $(n_3 b_3)$  на рисунке 4.2 перенести мысленно в точку  $B_3$  на рисунке 4.1.

## 4.2 План ускорений кривошипно-ползунного механизма

На рисунке 4.4 изображен план положений кривошипно-ползунного аксиального механизма. Кривошип 1 вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega_1$ . Скорость точки B направлена в сторону вращения перпендикулярно линии АВ. Ее величина

$$V_B = \omega_1 l_1 \text{ м/с}^2.$$

Изобразим ее отрезком  $(pb)$  мм. Масштаб плана скоростей  $\mu_v = V_B / (pb) \text{ мс}^{-1}/\text{мм}$ .

Скорость точки C дается векторным уравнением

$$\overrightarrow{V_C} = \overrightarrow{V_B} + \overrightarrow{V_{CB}},$$

где  $\overrightarrow{V_{CB}}$  – вращательная скорость точки C во вращении шатуна 2 вокруг оси шарнира B, перпендикулярная линии СВ, – проводим из точки b плана скоростей прямую, перпендикулярную линии СВ.

Второе векторное уравнение пишется на основе теоремы о сложении скоростей:

$$\vec{V}_C = \vec{V}_{C_0} + \vec{V}_{CC_0},$$

где переносная скорость  $\vec{V}_{C_0}$  – скорость той точки стойки 0 с направляющей  $x-x$  ползуна 3, с которой совпадает в данный момент совершающая относительное движение (со скоростью  $\vec{V}_{CC_0}$ ) точка С ползуна. Стойка неподвижна – скорость  $\vec{V}_{C_0} = 0$ , точка  $c_0$  совпадает на плане скоростей с полюсом  $p$ . Относительное движение прямолинейно – проводим из точки  $c_0$  прямую, параллельную направляющей  $x-x$ , – до перенесения с прямой, проведенной из точки  $b$ .

Прямые пересекаются в точке  $c$ , совпадающей с точкой  $b$ , угловая скорость шатуна 2

$$\omega_2 = \frac{V_{CB}}{l_{CB}} = \frac{(bc)\mu_V}{(CB)\mu_l} = 0$$

– шатун движения в данный момент мгновенно-поступательно. Скорости всех точек шатуна одинаковы:

$$\vec{V}_C = \vec{V}_B = \vec{V}_{S_2} = \vec{V}_{S_3}.$$

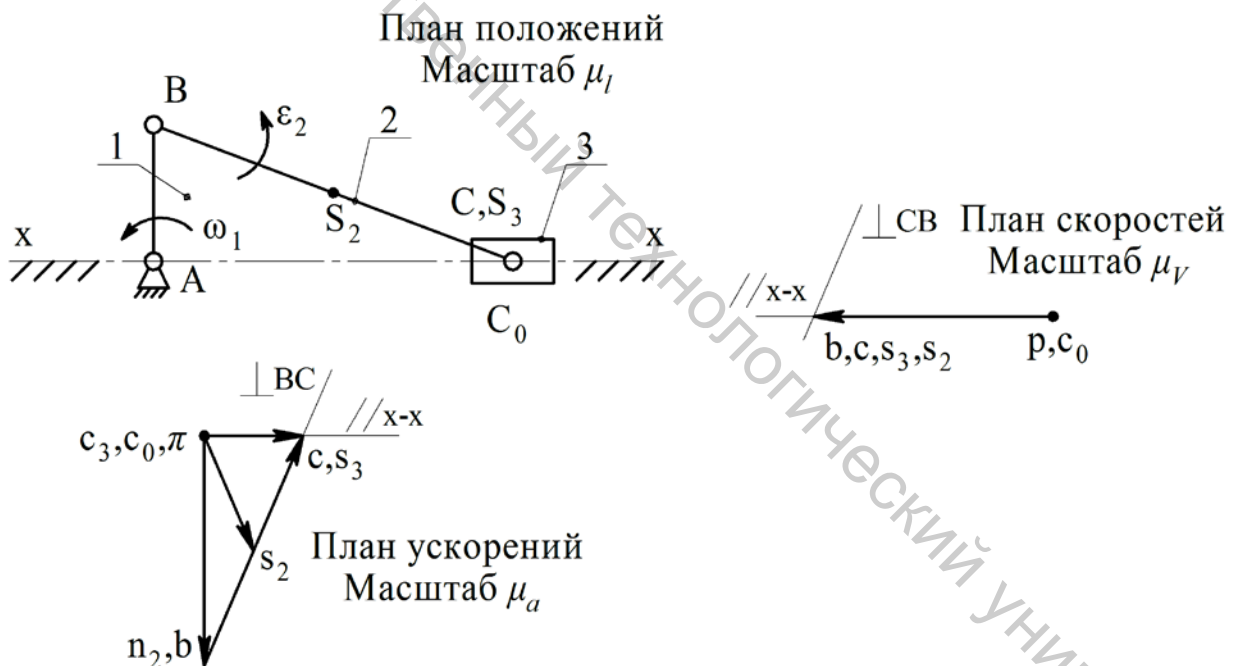


Рисунок 4.4 – Планы положений, скоростей и ускорений ползунного механизма

Ускорение точки В – центростремительное (направлено из точки В в точку А). Его величина

$$a_B = \omega_1^2 l_1 \text{ м/с}^2.$$

Изобразим его отрезком ( $\pi b$ ). Масштаб плана ускорений  $\mu_a = a_B / (\pi b) \text{ мс}^{-2}/\text{мм}$ .

Ускорение точки С в мгновенно-поступательном движении шатуна 2 (в частном случае плоскопараллельного движения)

$$\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{CB}^n + \vec{a}_{CB}^r,$$

где нормальное ускорение

$$a_{CB}^n = \omega_2^2 l_{BC} = 0$$

– точка  $n_2$  плана ускорений совпадает с точкой  $b$ ; касательное ускорение  $\overrightarrow{a_{CB}^r}$  перпендикулярно линии  $CB$  – из точки  $n_2$  проводим прямую, перпендикулярную линии  $CB$ . Второе векторное уравнение пишется на основе теоремы о сложении ускорений:

$$\overrightarrow{a_C} = \overrightarrow{a_{C_0}} + \overrightarrow{a_{CC_0}^c} + \overrightarrow{a_{CC_0}^r},$$

где переносное ускорение  $\overrightarrow{a_{C_0}} = 0$  (точка  $C_0$  принадлежит неподвижной стойке), кориолисово ускорение

$$\overrightarrow{a_{CC_0}^c} = 2(\overrightarrow{\omega_e} \times \overrightarrow{V_r}),$$

но переносная угловая скорость  $\overrightarrow{\omega_e} = \overrightarrow{\omega_0} = 0$  (стойка 0 неподвижна), то есть ускорение  $\overrightarrow{a_{CC_0}^c} = 0$ . Соответственно, точки  $c_0$  и  $c_3$  – концы нулевых отрезков ( $\pi c_0$ ), ( $c_0 c_3$ ), изображающих нулевые ускорения  $\overrightarrow{a_{C_0}}$ ,  $\overrightarrow{a_{CC_0}^c}$ , совпадают с полюсом плана ускорений  $\pi$ . Остается провести из точки  $c_3$  прямую, параллельную прямолинейной траектории  $x$ - $x$  точки  $C$ , – направление относительного ускорения  $\overrightarrow{a_{CC_0}^r}$ . Его пересечение с прямой, проведенной из точки  $n_2$ , дает точку  $c$  и отрезок ( $\pi c$ ), изображающий ускорение  $\overrightarrow{a_C}$  поступательно движущегося ползуна 3. Точка  $s_3$  совпадает с точкой  $c$ , точка  $s_2$  делит по правилу (4.7) длину ( $bc$ ) пополам (как на плане положения). Отрезки ( $\pi s_2$ ), ( $\pi s_3$ ) изображают ускорения центров масс  $S_2$  и  $S_3$ .

Угловое ускорение шатуна 2

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{CB}^r}{l_{BC}} = \frac{(n_2 c) \mu_a}{(BC) \mu_1} \text{ с}^{-2}.$$

Нетрудно заметить, что ускорения точек шатуна в его мгновенно-поступательном движении, изображенные отрезками ( $\pi b$ ), ( $\pi s_2$ ), ( $\pi c$ ), в отличие от скоростей различны.

### 4.3 План ускорений кривошипно-коромыслового механизма

На рисунке 4.5 изображен план положений кривошипно-коромыслового механизма, в котором шарнир  $C$  наиболее удален от шарнира  $A$ .

Изобразим вращательную скорость  $V_B$  точки  $B$  кривошипа 1, равномерно вращающегося вокруг неподвижной оси шарнира  $A$ , отрезком ( $pb$ ) мм. Масштаб плана скоростей  $\mu_V = V_B / (pb) \text{ мс}^{-1}/\text{мм}$ .

Вращательная скорость точки  $C$  в плоскопараллельном движении шатуна 2 перпендикулярна линии  $BC$  – из точки  $b$  проводим прямую, перпендикулярную линии  $BC$ , и, следовательно, совпадающую с прямой  $bp$  плана скоростей. Скорость точки  $C$  во вращении коромысла 3 вокруг неподвижной оси шарнира  $D$

(точка  $d$  на плане совпадает с его полюсом  $p$ ) перпендикулярна линии  $DC$  – из точки  $d$  проводим прямую, перпендикулярную линии  $DC$ . Проведенные прямые пересекаются в точке  $c$ , очевидно, совпадающей с полюсом плана  $p$ . Угловая скорость шатуна 2

$$\omega_2 = \frac{V_{CB}}{l_{BC}} = \frac{(bc)\mu_V}{(BC)\mu_l} c^{-1},$$

угловая скорость коромысла 3

$$\omega_3 = \frac{V_{CD}}{l_{DC}} = \frac{(dc)\mu_V}{(DC)\mu_l} = 0$$

– коромысло мгновенно-неподвижно, скорости всех его точек равны в данный момент нулю.

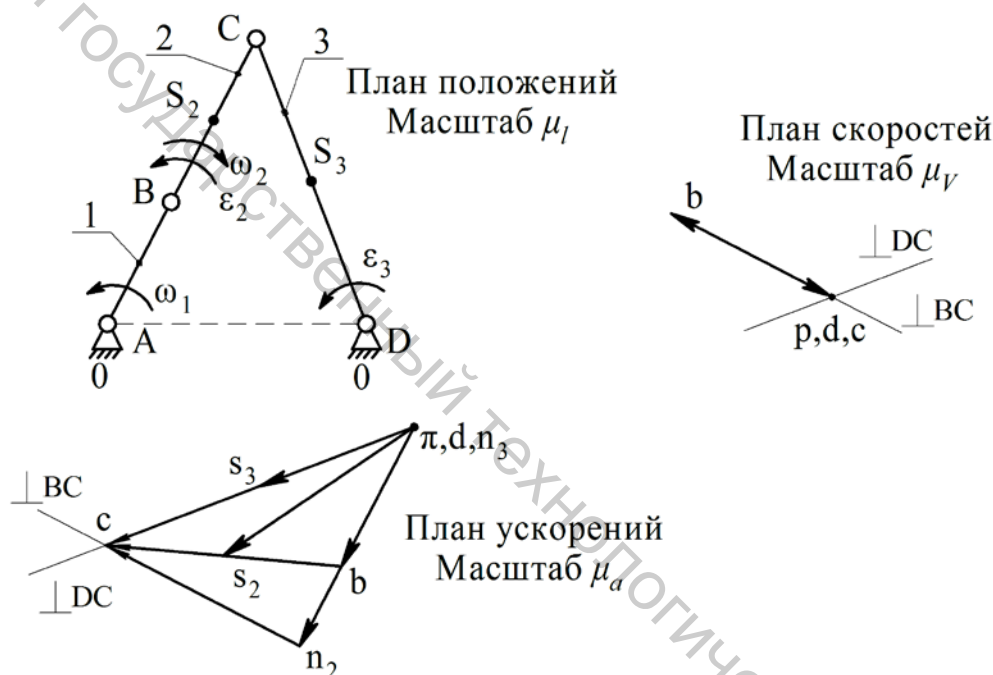


Рисунок 4.5 – Планы положений, скоростей и ускорений кривошипно-коромыслового механизма

Ускорение  $a_B$  точки  $B$  кривошипа, равномерно вращающегося вокруг неподвижной оси шарнира  $A$ , направлено вдоль прямой  $BA$  (из точки  $B$  в точку  $A$ ). Изобразим его отрезком  $(\pi b)$  мм. Масштаб плана ускорений  $\mu_a = a_B / (\pi b) \text{ мс}^{-2} / \text{мм}$ .

Нормальное ускорение точки  $C$  во вращении шатуна 2 вокруг оси шарнира  $B$

$$a_{CB}^n = \omega_2^2 l_{BC} \text{ м/с}^2$$

направлено вдоль прямой  $CB$  (из точки  $C$  в точку  $B$ ). Изображаем его отрезком

$$(bn_2) = a_{CB}^n / \mu_a \text{ мм.}$$

Из точки  $n_2$  проводим прямую, перпендикулярную прямой  $BC$ , – направление касательного ускорения  $\vec{a}_{CB}^{\tau}$ .

Нормальное ускорение точки С во вращении коромысла 3 вокруг неподвижной оси шарнира D

$$a_{CD}^n = \omega_3^2 l_{DC} = 0$$

(ибо угловая скорость мгновенно-неподвижного коромысла  $\omega_3 = 0$ ) – точка  $n_3$  совпадает с точкой  $d$  и с полюсом плана  $\pi$ . Проводим из точки  $n_3$  прямую, перпендикулярную прямой DC, – направление касательного ускорения  $\overrightarrow{a_{DC}^\tau}$ . Проведенные прямые пересекаются в точке  $c$ . Точки  $s_2$  и  $s_3$  делят длины  $(bc)$  и  $(dc)$  пополам. Отрезки  $(\pi s_2)$  и  $(\pi s_3)$  изображают ускорения центров масс  $S_2$  и  $S_3$ .

Угловое ускорение шатуна 2

$$\varepsilon_2 = \frac{a_{CB}^\tau}{l_{BC}} = \frac{(n_2 c) \mu_a}{(BC) \mu_l} \text{ с}^{-2},$$

угловое ускорение коромысла 3

$$\varepsilon_3 = \frac{a_{CD}^\tau}{l_{DC}} = \frac{(n_3 c) \mu_a}{(DC) \mu_l} \text{ с}^{-2}.$$

Нетрудно заметить, что ускорения точек мгновенно-неподвижного коромысла 3, изображенные отрезками  $(\pi c)$  и  $(\pi s_3)$ , в отличие от скоростей не равны нулю.

## Лекция 5. Силовой анализ механизма

### 5.1 Силовой анализ группы Ассура

На рисунке 5.1 изображена группа Ассура 2-3, составленная кулисой 3 и кулисным камнем 2 кулисного механизма на рисунке 4.1. К ним приложены силы инерции

$$F_2^{ин} = m_2 a_{S_2} \text{ Н}, \quad F_3^{ин} = m_3 a_{S_3} \text{ Н}$$

и инерционная пара сил с инерционным моментом

$$M_3^{ин} = I_{S_3} \cdot \varepsilon_3 \text{ Н}\cdot\text{м},$$

где  $m_2$  кг,  $m_3$  кг – массы звеньев 2, 3;  $I_{S_3}$  кг·м<sup>2</sup> – центральный момент инерции звена 3;  $a_{S_2}$  мс<sup>-2</sup>,  $a_{S_3}$  мс<sup>-2</sup> – ускорения центров масс (4.3, 4.4, 4.8);  $\varepsilon_3$  с<sup>-2</sup> – угловое ускорение (4.9). Направления сил инерции и инерционного момента (рис. 5.1) противоположны ускорениям.

Рассмотрим инерционную нагрузку группы вместе с реакциями  $F_{12}$  и  $F_{03}$  кривошипа 1 и стойки 0. Их направления неизвестны – представляем их составляющими  $F_{12}^n$ ,  $F_{03}^n$ , направленными вдоль прямой BD, и  $F_{12}^\tau$ ,  $F_{03}^\tau$ , направленными перпендикулярно линии BD. Реакция кулисного камня  $F_{23}$  и реакция кулисы  $F_{32}$  равны по величине и противоположны по направлению и в случае поступательной пары C перпендикулярны направляющей – прямой DB, однако точка их приложения неизвестна.

Инерционная нагрузка группы «уравновешивается» реакциями в кинематических парах B и D; инерционная нагрузка любого из звеньев группы

«уравновешивается» реакциями во внешней и внутренней кинематических парах, в которые входит звено.

Рассмотрим «равновесие» группы в целом (рис. 5.1). Из уравнения моментов

$$\sum m_D = -F_{12}^r (DB) \mu_l - F_2^{uh} \cdot h_2^{uh} \mu_l + F_3^{uh} \cdot h_3^{uh} \mu_l + M_3^{uh} = 0$$

находим составляющую реакции кривошипа  $F_{12}^r$  Н.

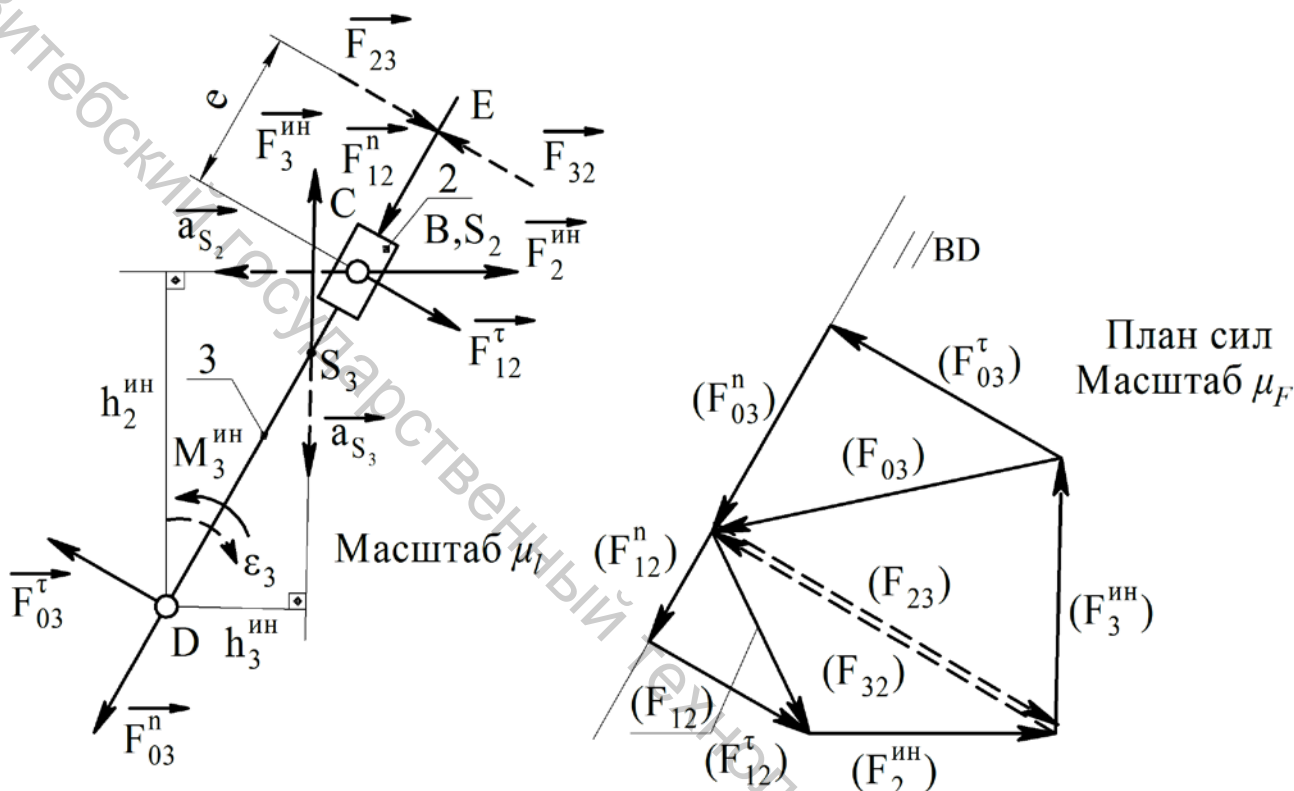


Рисунок 5.1 – Группа 2-3 и ее план сил

В дальнейшем рассматриваем «равновесие» кулисного камня: на него действуют найденная реакция кривошипа  $\vec{F}_{12}^r$ ; заданная сила инерции  $\vec{F}_2^{uh}$ ; неизвестная реакция кулисы  $\vec{F}_{32}$ , перпендикулярная линии BD, и неизвестная составляющая  $\vec{F}_{12}^n$  реакции кривошипа, направленная вдоль прямой BD. Геометрическая сумма этих сил  $\vec{F}_{12}^r + \vec{F}_2^{uh} + \vec{F}_{32} + \vec{F}_{12}^n = 0$ . Неизвестные реакции найдем, строя план сил в масштабе  $\mu_F = F_{12}^r / (F_{12}^r) \text{ Н/мм}$ ,  $(F_{12}^r) \text{ мм}$  – отрезок, изображающий силу  $F_{12}^r$ . Начиная из произвольной точки направления, параллельного прямой BD (и реакции  $\vec{F}_{12}^n$ ), проводим отрезок  $(F_{12}^r) \text{ мм}$ , изображающий силу  $\vec{F}_{12}^r$ , из его конца – отрезок  $(F_2^{uh}) = F_2^{uh} / \mu_F \text{ мм}$ , из конца отрезка  $(F_2^{uh})$  проводим прямую, параллельную реакции  $\vec{F}_{32}$ , то есть прямую, перпендикулярную линии BD, до пересечения с направлением, параллельным прямой BD (и силе  $\vec{F}_{12}^n$ ). Многоугольник уравновешенных сил должен (рис. 5.1)

замыкаться, искомые реакции  $\vec{F}_{32}$  и  $\vec{F}_{12}^n$  тем самым определены. Реакция кривошипа

$$\vec{F}_{12} = \vec{F}_{12}^n + \vec{F}_{12}^\tau$$

изображается отрезком  $(F_{12})$  мм. Величина реакции кривошипа

$$F_{12} = (F_{12}) \mu_F \text{ Н.} \quad (5.1)$$

К кулисе приложены реакция кулисного камня  $\vec{F}_{23}$ , противоположная реакции кулисы  $\vec{F}_{32}$ ; сила инерции  $\vec{F}_3^{un}$  и неизвестные реакции стойки  $\vec{F}_{03}^\tau$ ,  $\vec{F}_{03}^n$ . Продолжая план сил, откладываем от конца реакции  $(F_{23})$  отрезок  $(F_3^{un}) = F_3^{un} / \mu_F$  мм, изображающий силу инерции  $\vec{F}_3^{un}$ , и из конца отрезка  $(F_3^{un})$  проводим прямую, параллельную реакции  $\vec{F}_{03}^\tau$  (перпендикулярную прямой BD), до пересечения с направлением, параллельным реакции  $\vec{F}_{03}^n$ , проведенным из начала вектора  $(F_{23})$ . Построенный многоугольник сил должен замыкаться, тем самым неизвестные реакции определены. Реакция стойки

$$\vec{F}_{03} = \vec{F}_{03}^\tau + \vec{F}_{03}^n$$

изображается отрезком  $(F_{03})$ .

Остается найти расстояние  $e$  до точки приложения реакций  $\vec{F}_{23} = -\vec{F}_{32}$ . Беря уравновешенные силы, действующие на кулисный камень 2, составим уравнение моментов относительно точки В:

$$\sum_2 m_B = F_{12}^\tau \cdot 0 + F_{12}^n \cdot 0 + F_2^{un} \cdot 0 + F_{32} \cdot e = 0,$$

откуда расстояние  $e = 0$ : реакции  $\vec{F}_{23}$ ,  $\vec{F}_{32}$ , приложены в точке В (как и все другие силы, действующие на камень 2).

## 5.2 Силовой анализ ведущего звена

К ведущему звену приложена (рис. 5.2, 5.3) реакция  $\vec{F}_{21}$  кулисного камня, равная по величине реакции  $\vec{F}_{12}$  (рис. 5.1) кривошипа и противоположная ей; сила инерции, противоположная ускорению центра масс,

$$\vec{F}_1^{un} = m_1 a_{S_1} \text{ Н,}$$

где  $m_1$  кг – масса кривошипа 1,  $a_{S_1}$   $\text{мс}^{-2}$  – ускорение центра масс  $S_1$  кривошипа, его величина (рис. 4.2)  $a_{S_1} = (\pi s_1) \mu_a$ ; неизвестная реакция стойки  $\vec{F}_{01}$ . Перечисленные силы не уравновешены, так как сумма моментов

$$\sum_1 m_A = F_{01} \cdot 0 + F_1^{un} \cdot 0 + F_{21} \cdot h_{21} \neq 0 \quad (5.2)$$

– забыта реакция двигателя [2, с. 273-274], сводящаяся к уравновешивающей силе  $\vec{F}_y$  с заданной линией действия или уравновешивающему моменту  $M_y$ . В первом случае вал двигателя может соединяться с главным валом кривошипа 1 посредством зубчатой передачи, во втором случае – муфтой.

На рисунке 5.2 показан случай реактивного (уравновешивающего) момента. Добавляя его к сумме (5.2), найдем:

$$\sum m_A = F_{21} h_{21} \mu_l - M_y = 0, \quad M_y = F_{21} h_{21} \mu_l \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Неизвестная реакция стойки  $\vec{F}_{01}$  находится из плана сил, построенного на рисунке 5.2 в масштабе  $\mu_F = F_{21} / (F_{21})$ ,  $(F_{21})$  – отрезок, изображающий реакцию кулисного камня 2, равную по модулю реакции (5.1). Прочие силы изображаются отрезками  $(F_1^{ин}) = F_1^{ин} / \mu_F$ ,  $(F_{01})$ . Многоугольник сил  $\vec{F}_{21} + \vec{F}_1^{ин} + \vec{F}_{01} = 0$  замкнут, отрезок  $(F_{01})$ , изображающий реакцию стойки, тем самым определен.

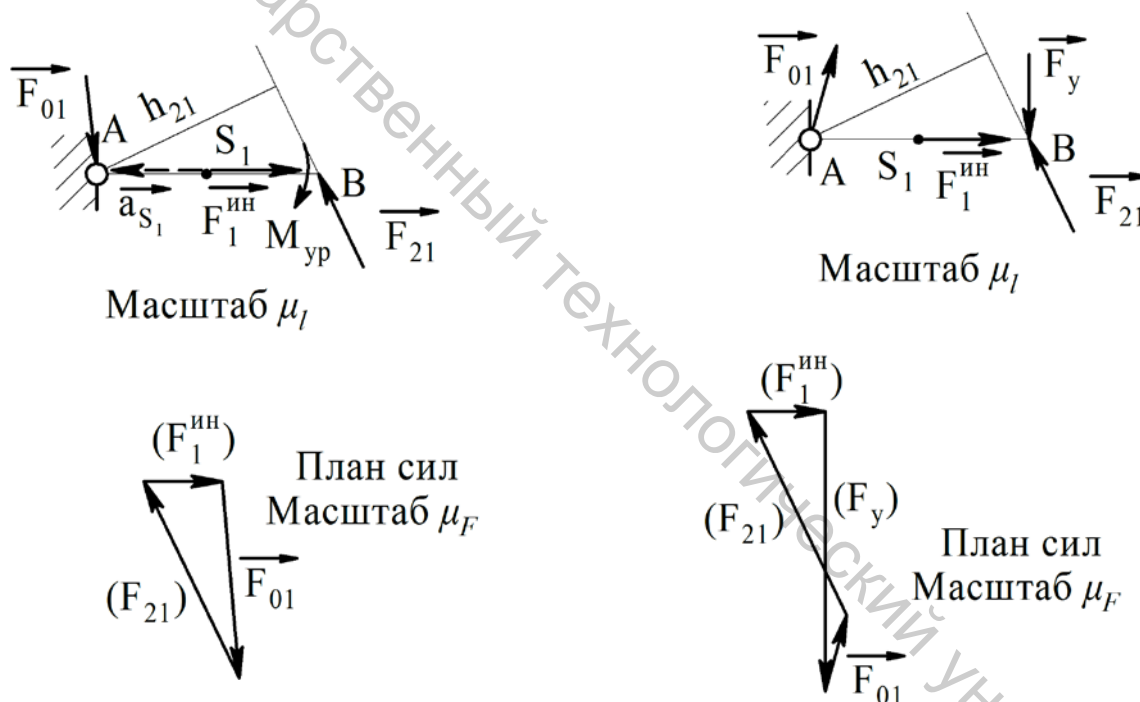


Рисунок 5.2 – Силовой анализ ведущего звена с уравновешивающим моментом

Рисунок 5.3 – Силовой анализ ведущего звена с уравновешивающей силой

На рисунке 5.3 показан случай реактивной (уравновешивающей) силы, перпендикулярной кривошипу. Добавляя к сумме (5.2) момент уравновешивающей силы

$$m_A(\vec{F}_y) = -F_y \cdot l_1 \text{ Н}\cdot\text{м},$$

найдем:

$$\sum^1 m_A = F_{21} h_{21} \mu_l - F_y \cdot l_1 = 0, \quad F_y = F_{21} \frac{h_{21} \mu_l}{l_1} \text{ Н.}$$

Многоугольник сил  $\vec{F}_{21} + \vec{F}_1^{un} + \vec{F}_y + \vec{F}_{01} = 0$  дает реакцию стойки, разумеется, отличную от показанной на рисунке 5.2.

### 5.3 Ошибка положения из-за зазора в кинематической паре

Положим [2, с. 573], что зазор в кинематической паре теоретического механизма (рис. 3.7, 5.4) D выбирается вдоль линии действия реакции  $\vec{F}_{03}$  (рис. 5.1), изображенной на плане сил отрезком  $(F_{03})$ . Это реакция стойки: палец кулисы прилегает к обойме стойки, оставляя зазор слева (рис. 5.4).

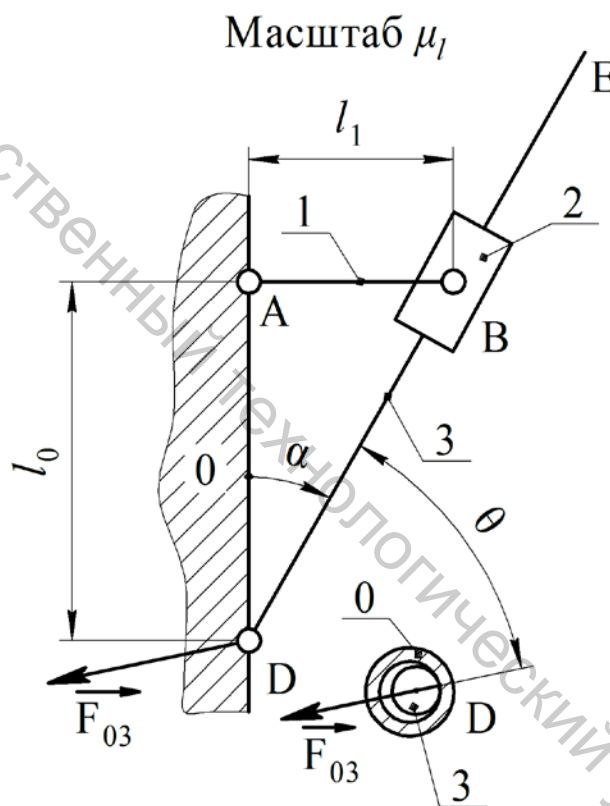


Рисунок 5.4 – Теоретический механизм и выбор зазора в паре D

В преобразованном механизме (рис. 5.5) вводится ползун, получающий перемещение  $\Delta_{D_3}$ , равное перемещению  $\delta$  пальца кулисы, «выбирающее» зазор между пальцем и обоймой стойки. Это перемещение точки  $D_3$ , принадлежащей кулисе, вдоль линии действия реакции  $\vec{F}_{03}$  (рис. 5.4). Перемещение точки  $B_3$  (совпадающей в данный момент с неподвижной в преобразованном механизме точкой  $B_2$  кулисного камня)  $\vec{\Delta}_{B_3} = \vec{\Delta}_{D_3} + \vec{\Delta}_{B_3 D_3}$ , где вращательное перемещение  $\vec{\Delta}_{B_3 D_3}$  перпендикулярно прямой  $D_3 B_3$ . Отложив (рис. 5.6) от произвольной точки  $p$

(полюса плана перемещений) заданное перемещение  $\vec{\Delta}_{D_3}$  – отрезок  $(pd_3) = \Delta_{D_3} / \mu_\Delta$ , проведем из точки  $d_3$  перпендикуляр к прямой  $D_3B_3$ .

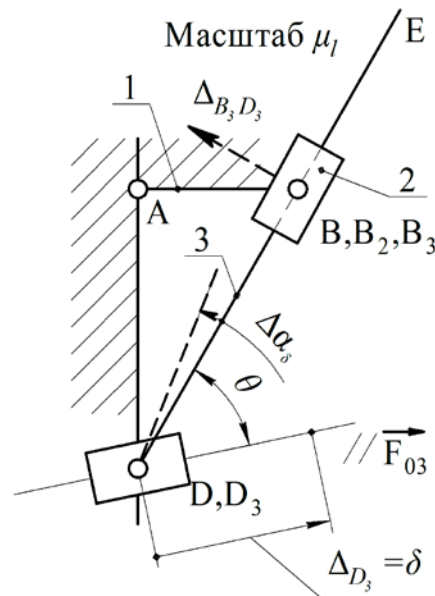


Рисунок 5.5 – Преобразованный механизм

С другой стороны перемещение точки  $B_3$

$$\vec{\Delta}_{B_3} = \vec{\Delta}_{B_2} + \vec{\Delta}_{B_3B_2},$$

где перемещение  $\vec{\Delta}_{B_2} = 0$ , а перемещение  $\vec{\Delta}_{B_3B_2}$  направлено вдоль прямолинейной траектории  $DB_2$  – проведем из точки  $b_2$ , совпадающей с полюсом  $p$  прямую, параллельную прямой  $DB_2$ . В ее пересечении с прямой, проведенной из точки  $d_3$ , находим точку  $b_3$ . Вектор  $(d_3b_3)$  изображает вращательное перемещение  $\Delta_{B_3D_3} = \mu_\Delta (d_3b_3)$ . Его модуль (рис. 5.6)  $\Delta_{B_3D_3} = \Delta_{D_3} \sin \Theta = \delta \sin \Theta$  (рисунки 5.4–5.6). Искомая ошибка положения кулисы 3 (рис. 5.5)

$$\Delta\alpha_\delta = \frac{-\Delta_{B_3D_3}}{l_{D_3B_3}}$$

(во вращательном перемещении  $\Delta_{B_3D_3}$ , мысленно перенесенном в точку  $B_3$ ) угол  $\alpha$  уменьшается,

$$l_{D_3B_3} = \sqrt{l_0^2 + l_1^2};$$

$$\Delta\alpha_\delta = -\frac{\sin \Theta}{\sqrt{l_0^2 + l_1^2}} \delta.$$

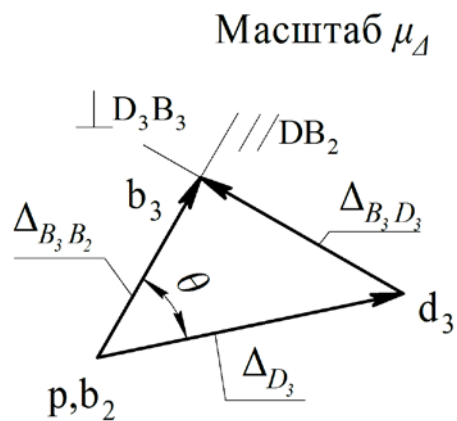


Рисунок 5.6 – План перемещений преобразованного механизма

## Лекция 6. Электропривод

Электродвигатели тем легче и дешевле, чем они быстроходнее. Вместе с этим рабочие скорости исполнительных механизмов намного меньше скоростей, развиваемых двигателями. Экономическая целесообразность вынуждает использовать понижающие механические передачи (зубчатые, ременные, цепные).

### 6.1 Передаточное отношение

На рисунках 6.1, 6.2 представлены схемы электроприводов, состоящих из электродвигателя (ЭД) 1, закрытой (ЗП) цилиндрической косозубой передачи (редуктора) 2, открытой (ОП) клиноременной передачи 3 (рис. 6.1) или открытой цепной передачи 3 (рис. 6.2), соединительной муфты (СМ) зубчатой (МЗ) 4 (рис. 6.1) или МУВП 4 (муфты упругой втулочно-пальцевой) на рисунке 6.2, приводного вала (П) 5 с барабаном ленточного конвейера 6 и трех пар подшипников качения (ПК) 7 – опор быстроходного вала редуктора Б, тихоходного вала редуктора Т, приводного вала П, Д – вал двигателя.

Редуктор 2 (зубчатая передача в корпусе 2.3) состоит из шестерни 2.1 и колеса 2.2; клиноременная передача 3 (рис. 6.1) – из шкивов 3.1, 3.2 и клиновых ремней 3.3; цепная передача 3 (рис. 6.2) – из звездочек 3.1, 3.2 и втулочно-роликовой цепи 3.3. Шкивы, звездочки, зубчатые колеса, барабан жестко связаны с валами Д, Б, Т и П: шестерня 2.1 – одно целое с валом Б, все другие передают и получают вращение посредством шпоночных соединений 8.

Формула строения привода, представленного схемой на рисунке 6.1,

$$\text{ЭД} \rightarrow \text{ОП} \rightarrow \text{ЗП} \rightarrow \text{СМ} \rightarrow \text{П}; \quad (6.1)$$

привода, представленного схемой на рисунке 6.2, –

$$\text{ЭД} \rightarrow \text{СМ} \rightarrow \text{ЗП} \rightarrow \text{ОП} \rightarrow \text{П}. \quad (6.2)$$

Передаточное отношение в случае (6.1) (рис. 6.1)

$$i = \frac{n_D}{n_P} = \frac{n_D}{n_B} \cdot \frac{n_B}{n_T} \cdot \frac{n_T}{n_P} = i_{OP} \cdot i_{ЗП} \cdot 1 = i_{OP} \cdot i_{ЗП}, \quad (6.3)$$

где  $n_D, n_B, n_T, n_{II}$  – частоты вращения валов Д, Б, Т, П в об/мин;  $i_{OP} = n_D / n_B$ ,  $i_{3П} = n_B / n_T$  – передаточные отношения открытой (ОП) и закрытой (ЗП) передач привода.

Передаточное отношение в случае (6.2) (рис. 6.2)

$$i = \frac{n_D}{n_{II}} = \frac{n_D}{n_B} \cdot \frac{n_B}{n_T} \cdot \frac{n_T}{n_{II}} = 1 \cdot i_{3П} \cdot i_{OP} = i_{3П} \cdot i_{OP}. \quad (6.4)$$

## 6.2 Коэффициент полезного действия (КПД)

Уравнение движения машинного агрегата может быть написано [2, с. 352] в виде

$$\sum \frac{mv^2}{2} - \sum \frac{mv_0^2}{2} = A_o - A_{в.с} - A_{н.с}, \quad (6.5)$$

где  $\sum mv^2 / 2$  – кинетическая энергия агрегата (равная сумме кинематических энергий всех его достаточно малых частиц);  $A_o$  – работа движущих сил;  $A_{в.с}$  – работа сил вредных сопротивлений (сил трения, сил сопротивления среды, в которой работает агрегат, и т. п.);  $A_{н.с}$  – работа сил производственных (полезных!) сопротивлений.

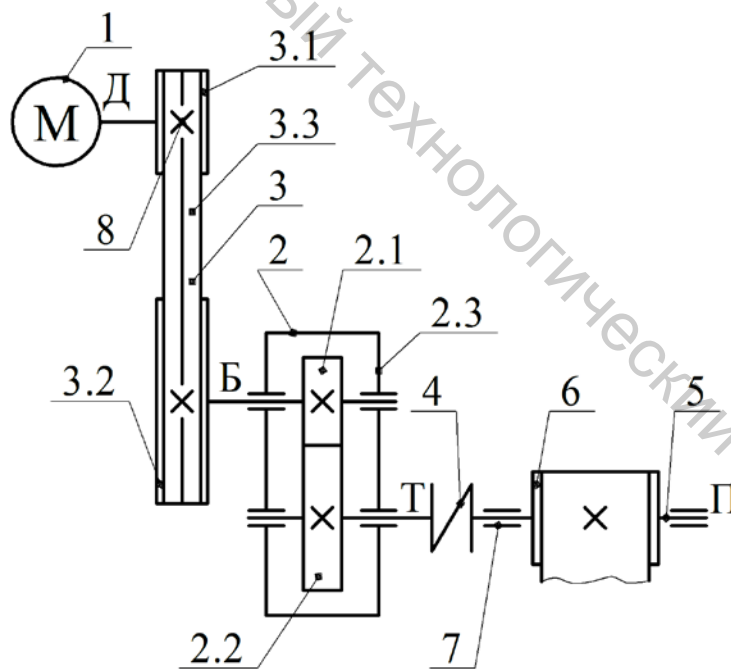


Рисунок 6.1 – Схема электропривода с клиноременной передачей

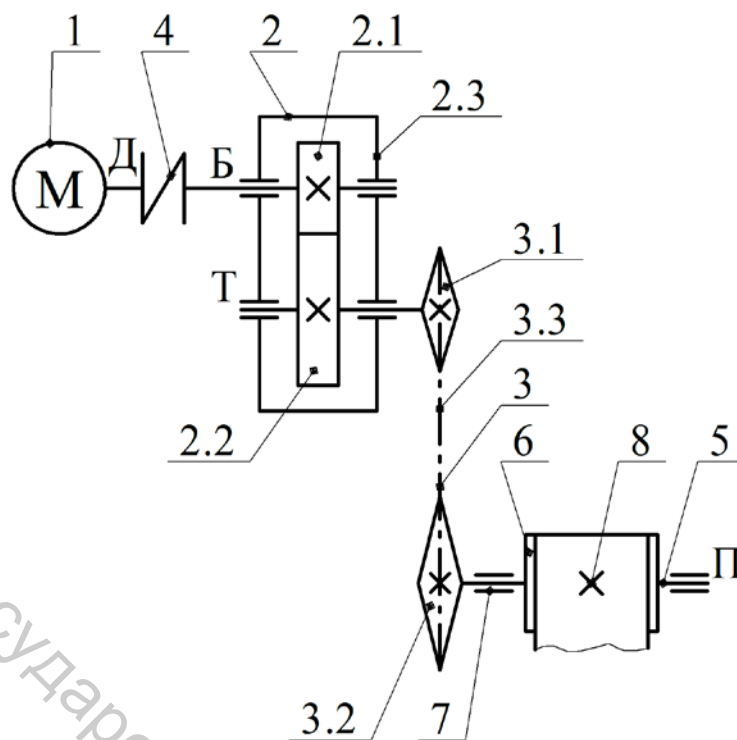


Рисунок 6.2 – Схема электропривода с цепной передачей

В установившемся циклическом движении кинетическая энергия агрегата в начале каждого из циклов равна кинетической энергии в конце цикла, совпадающем с началом следующего цикла, то есть приращение кинетической энергии (6.5) за цикл равно нулю, и сумма работ

$$A_{\partial} - A_{в.с} - A_{н.с} = 0.$$

Коэффициент полезного действия

$$\eta = \frac{A_{н.с}}{A_{\partial}},$$

или КПД [2, с. 320]

$$\eta = \frac{P_{н.с}}{P_{\partial}}, \quad (6.6)$$

где  $P_{н.с}$  и  $P_{\partial}$  – средние работы в единицу времени – средние мощности – поглощаемая силами полезных сопротивлений и развиваемая движущими силами. Положим, что механизмы 1, 2 и 3, образующие (рис. 6.3) машинный агрегат, последовательно соединены друг с другом. В силах взаимодействия двух соседних механизмов в ряду на рисунке 6.3 одни выступают как силы полезного сопротивления, другие – как силы движущие. Их мощности равны, КПД (6.6)

$$\eta = \frac{P_{н.с}}{P_{\partial}} = \frac{P_{н.с3}}{P_{\partial3}} \cdot \frac{P_{\partial3}}{P_{\partial2}} \cdot \frac{P_{\partial2}}{P_{\partial1}} = \frac{P_{н.с3}}{P_{\partial3}} \cdot \frac{P_{н.с2}}{P_{\partial2}} \cdot \frac{P_{н.с1}}{P_{\partial1}},$$

$$\eta = \eta_3 \cdot \eta_2 \cdot \eta_1, \quad (6.7)$$

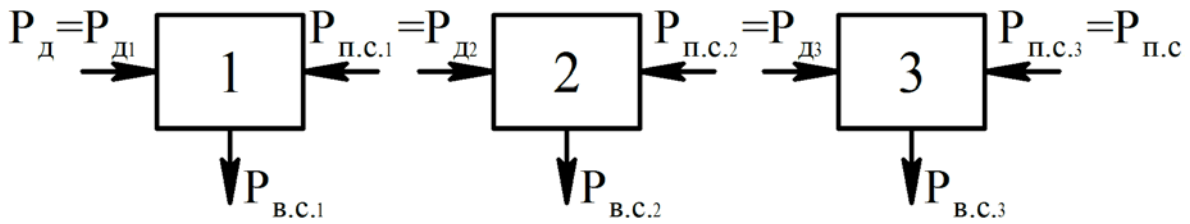


Рисунок 6.3 – Схема последовательного соединения механизмов

КПД привода (6.6) равен произведению (6.7) КПД механизмов, входящих в его состав.

### 6.3 Выбор электродвигателя привода

КПД приводов, изображенных на рисунках 6.1, 6.2,

$$\eta = \eta_{оп} \cdot \eta_{зп} \cdot \eta_{см} \cdot \eta_{пк}^3,$$

где  $\eta_{оп}$  – КПД открытой передачи;  $\eta_{зп}$  – КПД закрытой передачи;  $\eta_{см}$  – КПД соединительной муфты;  $\eta_{пк}$  – КПД пары подшипников качения.

Требуемая мощность электродвигателя (мощность движущих сил) – см. определение (6.6) –

$$P_{\delta} = \frac{P_{н.с}}{\eta} = \frac{P_{п}}{\eta}. \quad (6.8)$$

Мощность  $P_{н.с}$  равна здесь мощности на приводном валу  $P_{п}$ .

Требуемая частота вращения вала электродвигателя – см. определения и формулы (6.3), (6.4) –

$$n'_{\delta} = n_{п} \cdot i', \quad (6.9)$$

где передаточное отношение

$$i' = i'_{оп} \cdot i'_{зп}$$

(штрихами помечаются величины, взятые или найденные предварительно).

Мощность (6.8) и частота (6.9) дают возможность выбрать электродвигатель с номинальной мощностью  $P_n \geq P_{\delta}$  и частотой вращения его вала  $n_{\delta}$ , близкой к предварительной  $n'_{\delta}$ .

### 6.4 Передаточные отношения передач привода

Передаточное отношение привода

$$i = \frac{n_{\delta}}{n_{п}}$$

Приняв передаточное отношение, например открытой передачи  $i_{оп}$  равным отношению  $i'_{оп}$ , взятому предварительно, найдем требуемое передаточное отношение закрытой передачи:

$$i_{зп} = \frac{i}{i_{оп}}$$

## 6.5 Мощности на валах привода; частоты вращения валов; моменты, вращающие валы

Если вал, вращаясь с частотой  $n$ , развивает мощность  $P$ , момент, вращающий вал,

$$T(\text{Н} \cdot \text{м}) = \frac{P(\text{Вт})}{\omega(\text{с}^{-1})},$$

где угловая скорость вала связана с частотой его вращения формулой

$$\omega\left(\frac{1}{\text{с}}\right) = \frac{\pi n(\text{об/мин})}{30};$$

$$T(\text{Н} \cdot \text{м}) = \frac{P(\text{кВт}) \cdot 1000}{\frac{\pi n(\text{об/мин})}{30}} = 9550 \frac{P(\text{кВт})}{n(\text{об/мин})}.$$

Результаты определения мощностей, частот вращения и вращающих моментов представлены в таблице 6.1.

Таблица 6.1 – Мощности, частоты вращения и вращающие моменты

Валы	Формулы строения приводов					
	ЭД → ОП → ЗП → СМ → П (6.1)			ЭД → СМ → ЗП → ОП → П (6.2)		
	Мощности, кВт	Частоты, об/мин	Моменты, Н·м	Мощности, кВт	Частоты, об/мин	Моменты, Н·м
Д	$P_D$	$n_D$	$T_D = 9550 \frac{P_D}{n_D}$	$P_D$	$n_D$	$T_D = 9550 \frac{P_D}{n_D}$
Б	$P_B = P_D \eta_{ОП} \eta_{ПК}$	$n_B = \frac{n_D}{i_{ОП}}$	$T_B = 9550 \frac{P_B}{n_B}$	$P_B = P_D \eta_{СМ} \eta_{ПК}$	$n_B = n_D$	$T_B = 9550 \frac{P_B}{n_B}$
Т	$P_T = P_B \eta_{ЗП} \eta_{ПК}$	$n_T = \frac{n_B}{i_{ЗП}}$	$T_T = 9550 \frac{P_T}{n_T}$	$P_T = P_B \eta_{ЗП} \eta_{ПК}$	$n_T = \frac{n_B}{i_{ЗП}}$	$T_T = 9550 \frac{P_T}{n_T}$
П	$P_{II} = P_T \eta_{СМ} \eta_{ПК}$	$n_{II} = n_T$	$T_{II} = 9550 \frac{P_{II}}{n_{II}}$	$P_{II} = P_T \eta_{ОП} \eta_{ПК}$	$n_{II} = \frac{n_T}{i_{ОП}}$	$T_{II} = 9550 \frac{P_{II}}{n_{II}}$

## Лекция 7. Эвольвентное зацепление

### 7.1 Рабочие поверхности зубьев цилиндрических колес

«Положим» на поверхность кругового цилиндра (основного) касательную образующую плоскость (рис. 7.1), на ней проведем равноотстоящие прямые, параллельные оси цилиндра и покатаем касательную плоскость (не допуская проскальзывания!) по основному цилиндру. Всякая точка любой из прямых А-А,

$A_1-A_1, A_2-A_2, \dots$  опишет эвольвенту круга, сами прямые – боковые (рабочие) эвольвентные поверхности  $\mathcal{E}, \mathcal{E}_1, \dots$  прямых зубьев цилиндрического зубчатого колеса.

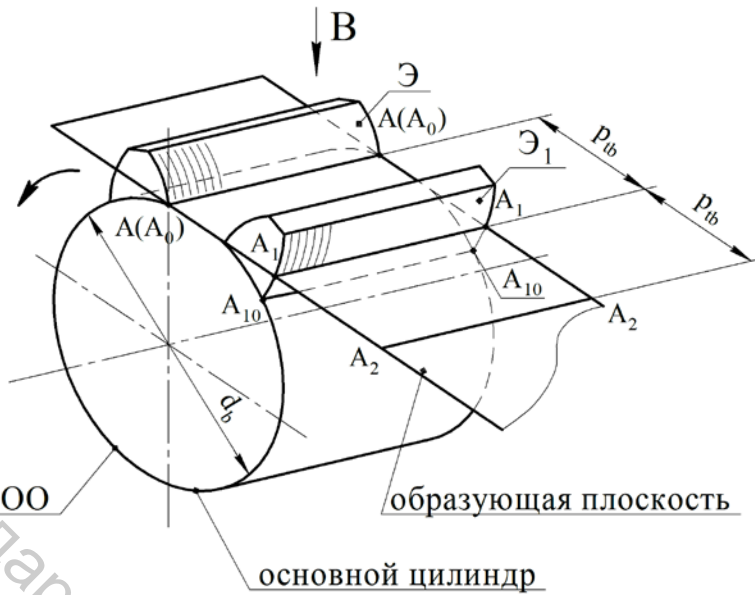


Рисунок 7.1 – Образование рабочих поверхностей прямых зубьев цилиндрического колеса

Если равноотстоящие на образующей плоскости прямые  $A-A, A_1-A_1, A_2-A_2, \dots$  проведены под углом  $\beta_b$  к оси основного цилиндра, всякая точка любой из этих прямых по прежнему опишет эвольвенту круга, но зубья получатся (рис. 7.2) винтовыми (косыми).

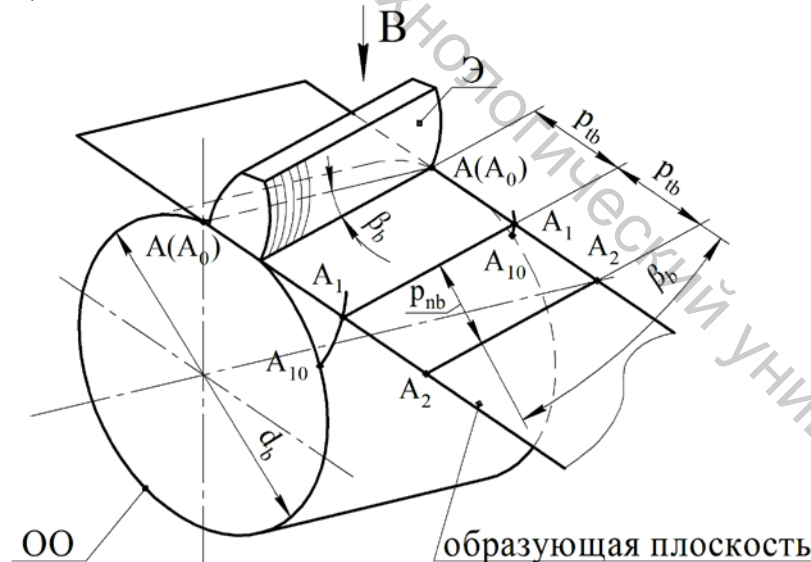


Рисунок 7.2 – Образование косых зубьев цилиндрических колес

## 7.2 Эвольвента круга и ее свойства

«Положим» на круг (основную окружность  $OO$ ) касательную (рис. 7.3) и покатаем ее без скольжения по  $OO$ . Всякая точка касательной опишет эвольвенту круга – на рисунке показаны две эвольвенты ( $\mathcal{E}, \mathcal{E}_1$ ), описанные точками  $B$  и  $B_1$ ,

совпадающими вначале с точками касания  $A$  и  $A_1$ . Вообразим, что отрезок касательной  $BB_1$  получился сматыванием нити, лежавшей на дуге  $AA_1$ , получим равенство

$$BB_1 = \check{A}A_1$$

и аналогичные равенства

$$\begin{aligned} A'B'_1 &= \check{A}'A_1, \\ A'B' &= \check{A}'A, \\ A''B'' &= \check{A}''A. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Если касательную  $A'B'$  «покачивать» вокруг точки касания  $A'$ , точка  $B'$  опишет бесконечно короткую дугу окружности, совпадающую с дугой  $\check{A}$ , – отрезок  $A'B'$  – радиус кривизны  $\check{A}$  в точке  $B'$ , точка  $A'$  – центр кривизны, прямая  $A'B'$  – нормаль  $\check{A}$ . Желая построить нормаль к  $\check{A}$ , например, в точке  $B''$ , строим касательную  $NN'$  ( $B''A''$ ) к  $OO$ .

Вычтем из первого равенства (7.1) второе:

$$\begin{aligned} A'B'_1 - A'B' &= \check{A}'A_1 - \check{A}'A, \\ B'B'_1 &= \check{A}A_1 \end{aligned} \quad (7.2)$$

– расстояние (7.2) между эвольвентами  $\check{A}$  и  $\check{A}_1$ , измеренное вдоль любой из касательных к основной окружности – их общей нормали, равно длине дуги  $OO$ , ограниченной основаниями эвольвент  $A$  и  $A_1$ .

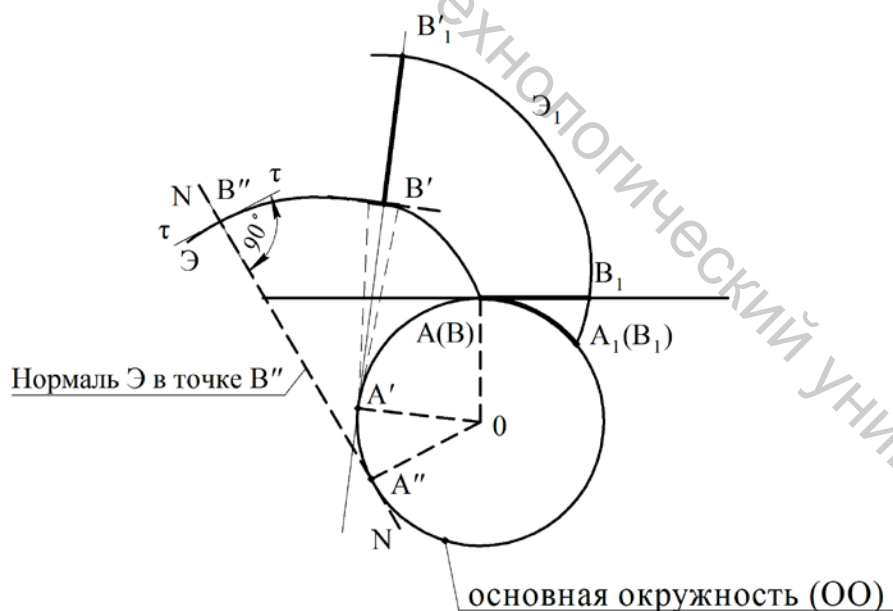


Рисунок 7.3 – Эвольвента круга

Взглянем на основные цилиндры с образующими плоскостями (рис. 7.1, 7.2) по стрелке  $B$ , найдем, что отрезки  $AA_1$  равны дугам  $\check{A}_0A_{10}$ , то есть окружной шаг зацепления на основной окружности  $P_{tb}$ , равный длине ее дуги  $\check{A}_0A_{10}$ , можно измерить на касательной к  $OO$  (на образующей плоскости).

### 7.3 Эвольвентное зацепление

Построим (рис. 7.4) линию центров  $O_1O_2$  цилиндрических колес с прямыми зубьями, глядя на них «в профиль». Положим: зацепляющиеся зубья соприкасаются в точке  $P$  – полюсе зацепления. Проведя через полюс прямую  $NN$ , опустим на нее перпендикуляры  $O_1A$  и  $O_2B$ . Радиусами  $O_1A$  и  $O_2B$  опишем окружности, взяв их за основные  $OO_1$  и  $OO_2$ . Перекатим (без скольжения) прямую  $NN$  по  $OO_1$  и  $OO_2$  – точка  $P$  прямой  $NN$  – общей касательной к основным окружностям опишет эвольвенты  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$  – профили зацепляющихся зубьев. Построенные профили соприкасаются в точке  $P$ , располагая общей касательной и, следовательно, общей нормалью – общей касательной к  $OO_1$  и  $OO_2$  – прямой  $NN$ . По мере вращения зацепляющихся колес точка контакта профилей их зубьев перемещается, но остается на общей нормали к эвольвентам  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$  – на прямой  $NN$  ( $AB$ ) – прямой зацепления, угол  $\alpha_w$  – угол зацепления.

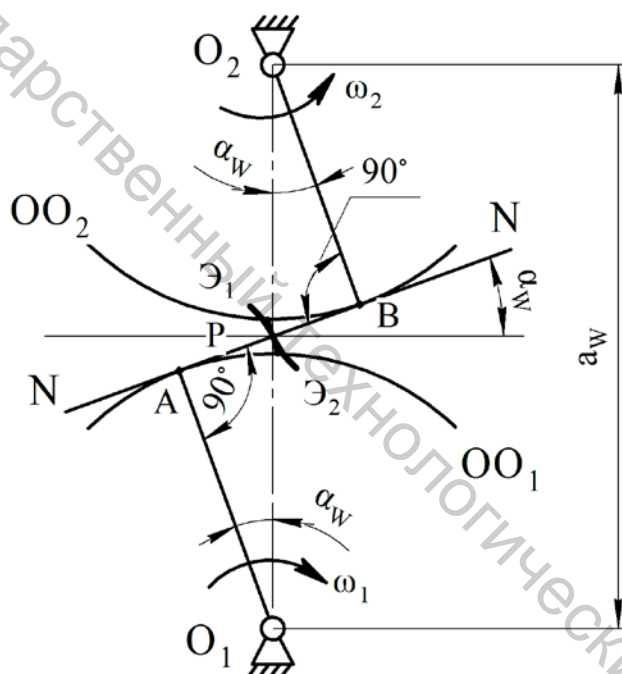


Рисунок 7.4 – Построение эвольвентного зацепления

### 7.4 Передаточное отношение

Зацепляющиеся эвольвенты образуют в плоском механизме (3-го семейства) зубчатой передачи кинематическую пару IV класса. Действительно, к трем «запрещенным движениям» добавляется четвертое – встречное движение  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$  (рис. 7.4) вдоль общей нормали  $NN$ : твердые зубья не способны проникать друг в друга и не могут разъединиться не разрушая кинематической пары.

В лекции 2 (п. 2.7) показано, что высшая пара IV класса, образованная выпуклыми кривыми, может быть заменена в рассматриваемый момент их совместного движения нормальным к ним звеном  $AB$  (рис. 7.4), входящим в две вращательные пары  $A$  и  $B$  в центрах их кривизны. Тем самым зубчатая передача заменяется шарнирным четырехзвенником  $O_1ABO_2$  (рис. 7.5).

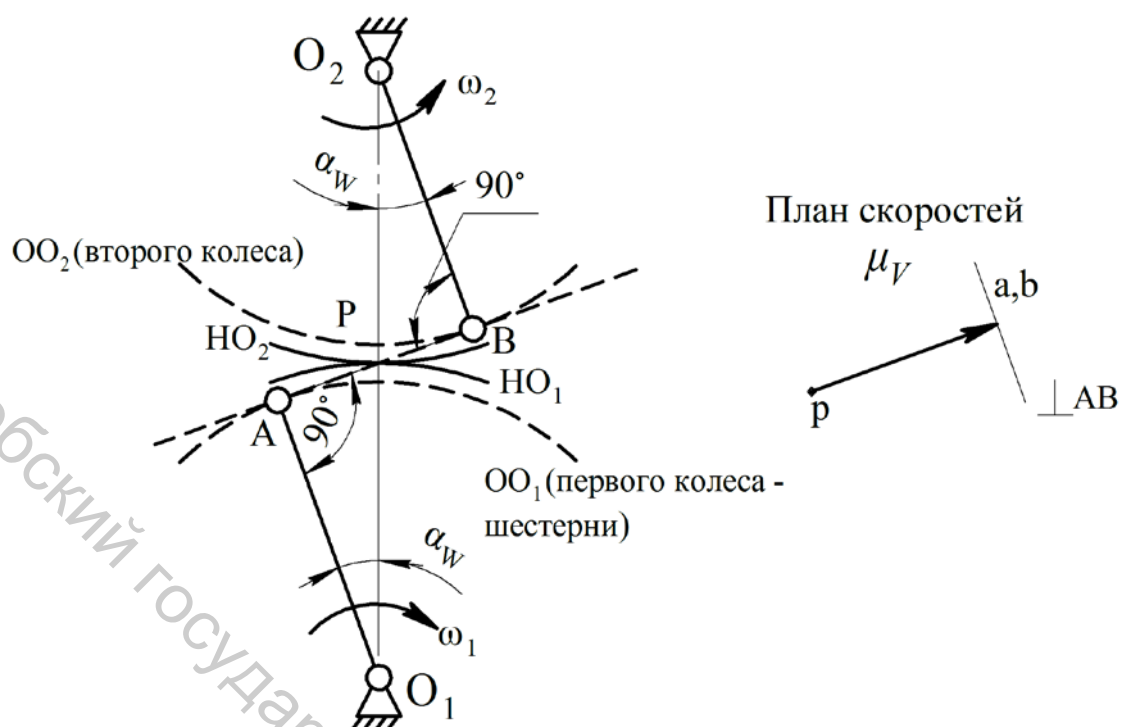


Рисунок 7.5 – Механизм, заменяющий передачу на рисунке 7.4, и его план скоростей

В любой момент зацепления центры кривизны эвольвент  $\mathcal{E}_1$  и  $\mathcal{E}_2$  находятся в точках А и В – заменяющий механизм во все время зацепления один и тот же.

Построим (рис. 7.5) план скоростей механизма. Из произвольно взятого полюса  $p$  строим вектор  $(p_a)$ , изображающий скорость точки А, направленную в сторону вращения первого колеса перпендикулярно радиусу  $O_1A$ . Ее величина

$$V_A = \omega_1 \cdot O_1A.$$

Масштаб плана скоростей

$$\mu_v = \frac{V_a}{(p_a)}.$$

Скорость точки В

$$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA},$$

где  $\vec{V}_{BA}$  – скорость точки В во вращении шатуна АВ вокруг точки А, перпендикулярная прямой АВ, – из точки а проводим перпендикуляр к АВ до пересечения в точке b с прямой, параллельной вектору  $\vec{V}_B$  (перпендикулярной радиусу  $O_2B$ ). Точка b совпала с точкой а, скорость  $\vec{V}_B$  равна скорости  $\vec{V}_A$ , или вращательные скорости точек основных окружностей зацепляющихся колес одинаковы:

$$\omega_1 \cdot O_1A = \omega_2 \cdot O_2B,$$

откуда передаточное отношение

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2B}{O_1A}. \quad (7.3)$$

Используя соотношение, следующее из подобия треугольников  $O_1AP$  и  $O_2BP$ ,

$$\frac{O_2B}{O_1A} = \frac{O_2P}{O_1P}$$

получим для передаточного отношения (7.3) еще одно выражение:

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2P}{O_1P}. \quad (7.4)$$

Выражение (7.4) может быть переписано:

$$\omega_1 \cdot O_1P = \omega_2 \cdot O_2P,$$

то есть скорости окружностей  $HO_1$  и  $HO_2$  зацепляющихся колес, соприкасающихся (рис. 7.5) в полюсе  $P$ , одинаковы; эти (начальные) окружности перекатываются друг по другу без скольжения.

### 7.5 Основные размеры эвольвентных колес

При нарезании эвольвентных колес методом обкатки инструментальной рейкой (рис. 7.6) заготовке колеса и рейке сообщают то же относительное движение, которое они имели бы, находясь в правильном зацеплении. Рейка движется возвратно-поступательно в направлении, параллельном оси нарезаемого колеса (перпендикулярно плоскости рисунка), заготовка же катится без скольжения по некоторой (начальной) прямой рейки. Соответствующая начальная окружность будущего колеса называется делительной (ДО), окружный шаг зацепления на ней  $p_t$  равен шагу стандартной инструментальной рейки.

$$P = \pi m. \quad (7.5)$$

где  $m$  – стандартный модуль зацепления. Число зубьев нарезаемого колеса (прямозубого)

$$z = \frac{\pi d}{P_t} = \frac{\pi d}{P} = \frac{d}{m}, \quad (7.6)$$

$d$  – диаметр делительной окружности.

Диаметр основной окружности  $OO$  (рис. 7.6)

$$d_b = 2 \cdot OA = 2 \frac{d}{2} \cos \alpha = d \cos \alpha, \quad (7.7)$$

окружный шаг на ней

$$P_{tb} = \frac{\pi d_b}{z} = \frac{\pi d}{z} \cos \alpha,$$

или – см. формулу (7.6) –

$$P_{tb} = P_t \cos \alpha = P \cos \alpha, \quad (7.8)$$

где  $\alpha = 20^\circ$  – стандартный угол зацепления.

Если за начальную прямую берется модульная прямая (МП на рис. 7.6), нарезанное колесо называется нулевым – на его делительной окружности толщины зубьев равны ширинам впадин. Если модульной рейке (и модульной прямой) сообщается положительное смещение ( $x_m > 0$ ), ширина впадин на

начальной прямой (НП) рейки становится больше толщины зубьев, а толщина зубьев на делительной окружности колеса больше ширины впадин. Такие колеса называются положительными. Толщина зубьев на делительных окружностях отрицательных колес (смещение  $x_m < 0$ ), наоборот, меньше ширины впадин.

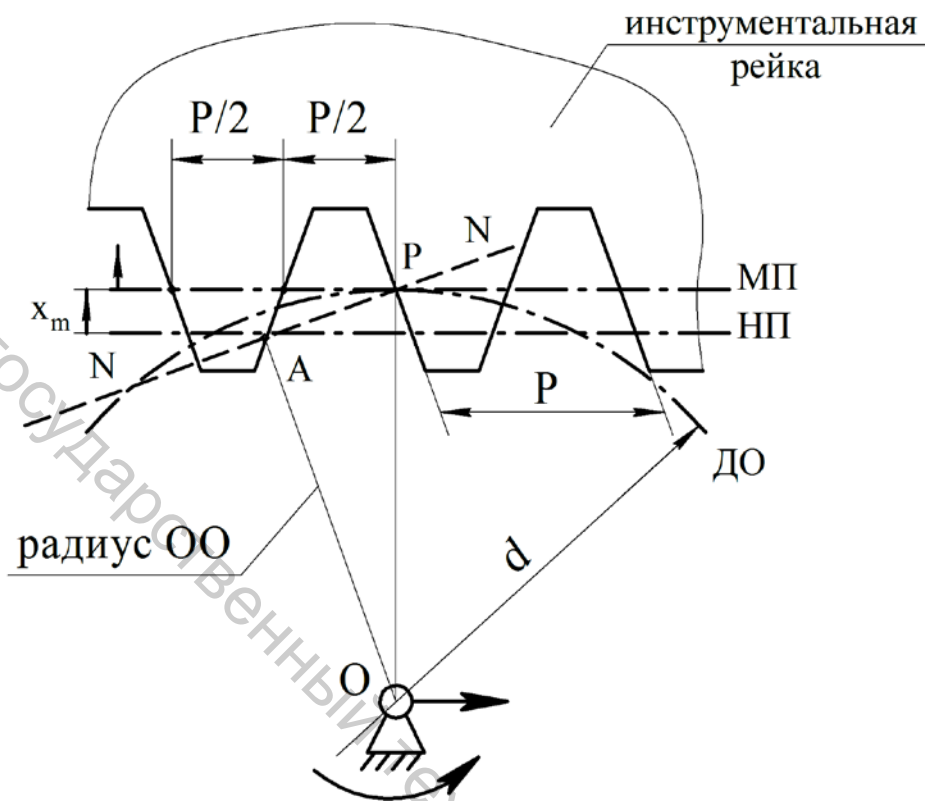


Рисунок 7.6 – Нарезается нулевое колесо

Косозубые колеса (рис. 7.2) можно нарезать прямозубой инструментальной рейкой, показанной на рисунке 7.6, повернув ее относительно заготовки на угол  $\beta$ . Шаг рейки  $P$  (7.5) воспроизведет на делительном цилиндре нарезаемого колеса нормальный шаг  $P_n$  (рис. 7.2), нормальный модуль зацепления колеса  $m_n = P_n/\pi$  будет равен стандартному модулю рейки  $m = P/\pi$ .

Понятно, что зацепляться могут только колеса, нарезанные рейками с равными шагами  $P$  (с равными модулями  $m$ ). Диаметры делительных окружностей прямозубых зацепляющихся колес – см. формулу (7.6) –

$$d_1 = mz_1, \quad d_2 = mz_2; \quad (7.9)$$

диаметры основных окружностей (7.7)

$$d_{b1} = d_1 \cos \alpha, \quad d_{b2} = d_2 \cos \alpha;$$

диаметры начальных окружностей (рис 7.5)

$$d_{w1} = 2 \frac{O_1 A}{\cos \alpha_w} = \frac{d_{b1}}{\cos \alpha_w}, \quad d_{w2} = \frac{d_{b2}}{\cos \alpha_w}, \quad (7.10)$$

или

$$d_{w1} = \frac{d_1 \cos \alpha}{\cos \alpha_w} = \frac{mz_1 \cos \alpha}{\cos \alpha_w}, \quad d_{w2} = \frac{mz_2 \cos \alpha}{\cos \alpha_w}. \quad (7.11)$$

Межосевое расстояние (рис. 7.4)

$$a_w = \frac{d_{w1} + d_{w2}}{2} = \frac{m(z_1 + z_2) \cos \alpha}{2 \cos \alpha_w}. \quad (7.12)$$

Передаточное отношение (7.4)

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{O_2 P}{O_1 P} = \frac{d_{w2} / 2}{d_{w1} / 2} = \frac{mz_2 \cos \alpha}{\cos \alpha_w} \cdot \frac{\cos \alpha_w}{mz_1 \cos \alpha} = \frac{z_2}{z_1} \quad (7.13)$$

равно передаточному числу  $u = z_2 / z_1$ . Впрочем, выражение (7.13) можно получить из равенства шагов зацепления на начальных окружностях. Как следует из формул (7.11, 7.5), шаги

$$P_{w1} = \frac{\pi d_{w1}}{z_1} = \frac{\pi m \cos \alpha}{\cos \alpha_w} = \frac{P \cos \alpha}{\cos \alpha_w},$$

$$P_{w2} = \frac{\pi d_{w2}}{z_2} = \frac{\pi m \cos \alpha}{\cos \alpha_w} = \frac{P \cos \alpha}{\cos \alpha_w},$$

$$P_{w1} = P_{w2},$$

где  $P$  – шаг стандартной рейки. Передаточное отношение (7.4)

$$i = \frac{O_2 P}{O_1 P} = \frac{d_{w2} / 2}{d_{w1} / 2} = \frac{\pi d_{w2}}{\pi d_{w1}} = \frac{P_{w1} z_2}{P_{w2} z_1} = \frac{z_2}{z_1}.$$

Если зацепляются нулевые колеса (стандартное зацепление), угол зацепления  $\alpha_w = \alpha$ , тогда начальные диаметры (7.10, 7.11) равны делительным (7.9): делительные окружности нулевых колес соприкасаются в полюсе зацепления, перекатываясь друг по другу без скольжения. Также будет и в случае колес, нарезанных со смещением, – если смещения рейки (рис. 7.6)  $x_1 m = -x_2 m$ .

Профили зубьев эвольвентных колес ограничены (рис. 7.7) окружностями вершин зубьев, впадина между ними – окружностями впадин. Диаметры этих окружностей нулевых колес

$$d_a = d + 2m, \quad d_f = d - 2,5m, \quad (7.14)$$

где  $d$  – диаметр делительных окружностей (7.9),  $m$  – стандартный модуль зацепления (на делительной окружности).

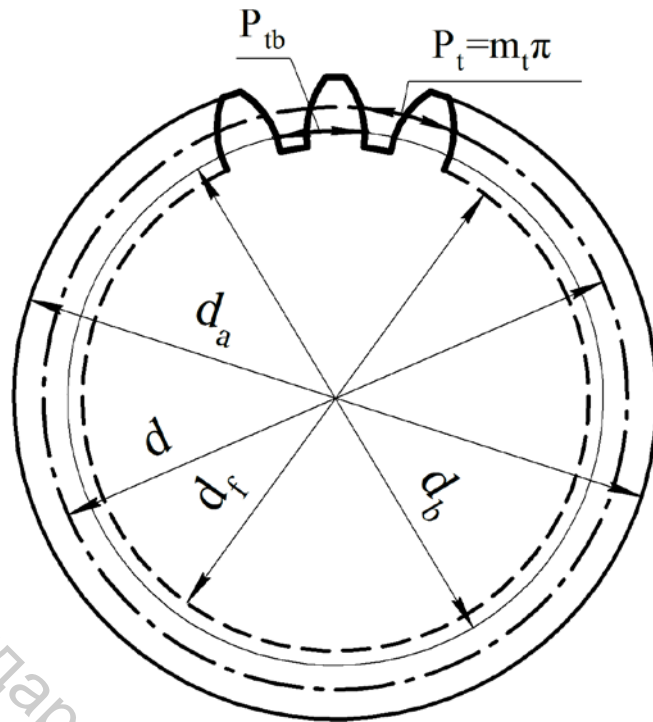


Рисунок 7.7 – Эвольвентное цилиндрическое колесо: диаметры и шаги зацепления (7.8)

Число зубьев косозубого колеса

$$z = \frac{\pi d}{P_t}, \quad (7.15)$$

где окружной шаг на делительном цилиндре (рис. 7.2)

$$P_t = \frac{P_n}{\cos \beta} = \frac{\pi m_n}{\cos \beta} = \frac{\pi m}{\cos \beta} = \pi m_t,$$

то есть окружной модуль на делительном цилиндре

$$m_t = \frac{m_n}{\cos \beta} = \frac{m}{\cos \beta}; \quad (7.16)$$

число зубьев (7.15)

$$z = \frac{\pi d}{\pi m_t} = \frac{d}{m} \cos \beta,$$

где  $m$  – стандартный модуль.

Формулы (7.9) приобретают вид

$$d_1 = \frac{m z_1}{\cos \beta}, \quad d_2 = \frac{m z_2}{\cos \beta}. \quad (7.17)$$

Начальные диаметры получаются по формулам (7.11), если подставить в них окружной модуль (7.16) и углы зацепления  $\alpha_t$  и  $\alpha_{tw}$ .

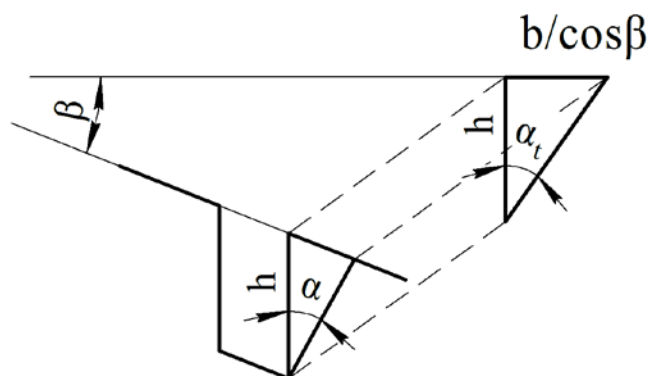


Рисунок 7.8 – При повороте рейки ее угол  $\alpha$  (рис. 7.6) «становится» в торцевой плоскости заготовки косоугольного колеса углом  $\alpha_t$

Угол  $\alpha_t$  определяется [3, с. 96], если заметить (рис. 7.8), что при повороте рейки ее вертикальные на рисунке размеры не изменяются:

$$\operatorname{tg} \alpha_t = \frac{b / \cos \beta}{h} = \frac{b / h}{\cos \beta} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\cos \beta}. \quad (7.18)$$

Передаточное отношение

$$i = \frac{O_2 P}{O_1 P} = \frac{d_{w2}}{d_{w1}} = \frac{m_t z_2 \cos \alpha_t}{\cos \alpha_{tw}} \cdot \frac{\cos \alpha_{tw}}{m_t z_1 \cos \alpha_t} = \frac{z_2}{z_1} = u.$$

Формула (7.13) справедлива и в этом случае косоугольного колеса.

Межосевое расстояние находится по формуле (7.12), если заменить в ней модуль  $m$  окружным модулем (7.16), а углы  $\alpha$  и  $\alpha_w$  углами  $\alpha_t$  и  $\alpha_{tw}$  в соотношении (7.18).

Формулы (7.14) не изменяются.

## Лекция 8. Силы взаимодействия в эвольвентном зацеплении

### 8.1 Коэффициент торцевого перекрытия

Зацепление эвольвентных профилей зубьев начинается в точке  $A$  и заканчивается в точке  $B$  (рис. 8.1), отрезок  $AB$  называется теоретической линией зацепления. Однако эвольвентные профили «срезаны» окружностями вершин зубьев – практическая линия зацепления изображается отрезком  $ab$ .

Эвольвентный профиль зуба шестерни изображен на рисунке 8.2 в двух положениях: первое отвечает входу в зацепление в точке  $a$ , второе – выходу из зацепления в точке  $b$ . Из закона (7.1) следуют равенства

$$\begin{aligned} Aa &= \overset{\frown}{AA}_1, \\ Ab &= \overset{\frown}{AA}_2. \end{aligned}$$

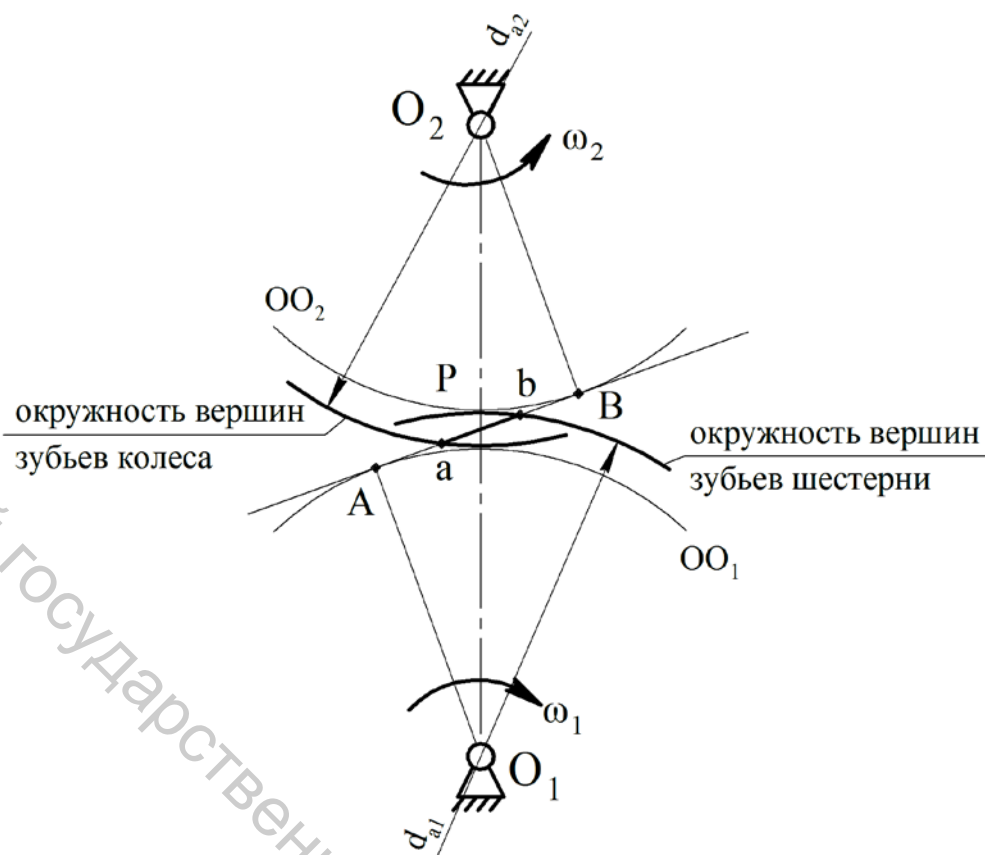


Рисунок 8.1 – Теоретическая и практическая линии зацепления

Вычитая первое равенство из второго, найдем, что путь, пройденный основанием эвольвентного профиля Э по основной окружности  $OO$  (дуга зацепления) равен длине линии зацепления  $ab$ :

$$\overset{\frown}{A_1}A_2 = ab.$$

В этом равенстве нетрудно узнать равенство (7.2). Аналогичным образом путь, пройденный эвольвентным профилем зуба колеса, находящимся в зацеплении с профилем зуба шестерни на рисунке 8.2, по основной окружности  $OO_2$  (рис. 8.1) равен длине линии зацепления  $ab$ . Зацепляющиеся зубья проходят по своим основным окружностям равные пути – равные дуги зацепления.

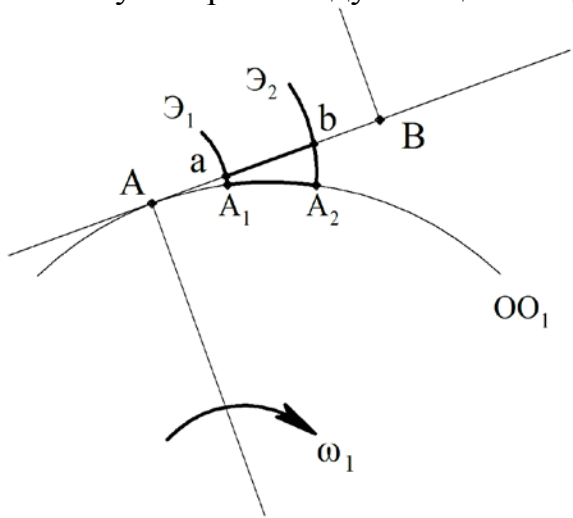


Рисунок 8.2 – Дуга зацепления и длина линии зацепления

Непрерывное зацепление будет обеспечено, если шаг зацепления на основных окружностях зацепляющихся колес будет меньше дуг зацепления, равных  $g_\alpha$  – длине линии  $ab$ . Коэффициент торцевого перекрытия

$$\varepsilon_\alpha = \frac{g_\alpha}{P_{tb}} > 1. \quad (8.1)$$

## 8.2 Зацепление прямозубых колес

Если взглянуть по стрелке  $A$  (рис. 8.3) на образующую (рис. 7.1) плоскость  $AB$ , увидим контактные линии двух пар зубьев 1 и 2, перемещающиеся в поле зацепления. Пока контактная линия 1-1 первой пары не выходит за пределы незаштрихованной зоны  $1'1''1''1'$ , контактная линия 2-2 второй пары находится в зоне  $2'2''2''2'$ , зацепление колес двухпарное. Когда же контактная линия первой пары оказывается в заштрихованной зоне  $1''2'2'1''$ , зацепление становится однопарным. Нагрузка, воспринимаемая двумя парами зубьев, мгновенно передается на одну пару и, наоборот, с одной пары на две, сопровождаясь, разумеется, ударами и шумом.

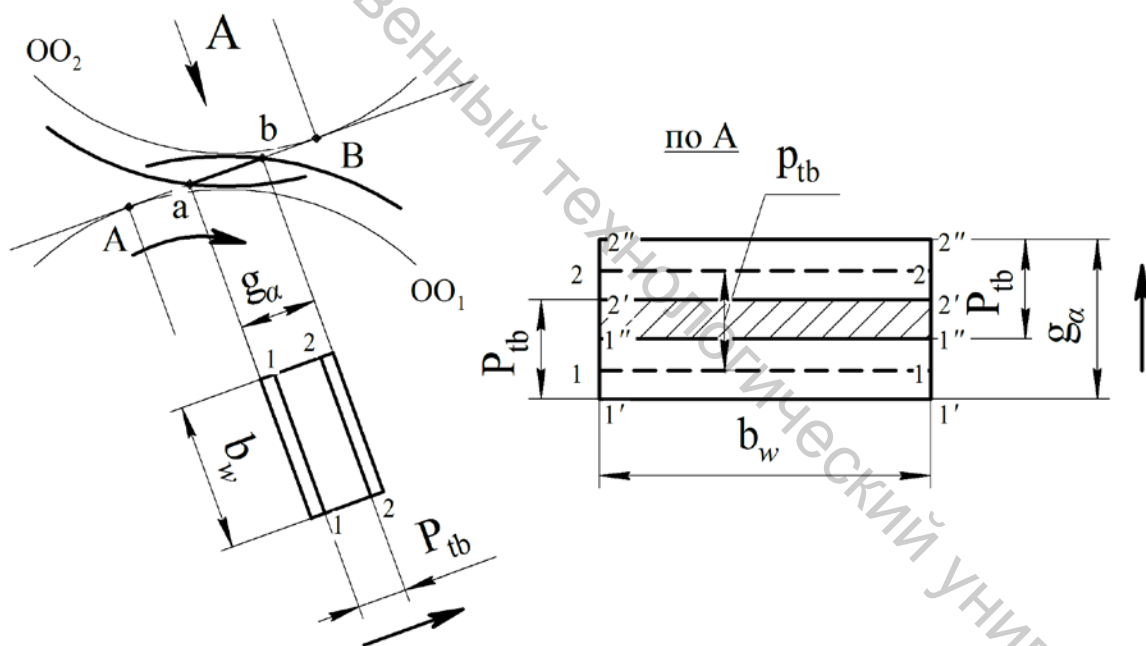


Рисунок 8.3 – Поле зацепления прямозубых колес

## 8.3 Зацепление косозубых колес

На рисунке 8.4 представлено поле зацепления косозубых колес. Косые зубья входят в поле и выходят из него постепенно – косозубое зацепление плавное, шума от него намного меньше. Более того, выход из зацепления зуба 3-3 (см. контактную линию  $3'-3''$ ) своей частью  $3'-3''$  восполняется входом в зацепление зуба 1-1 (см. контактную линию  $1'-1''$  и ее часть  $1'-1''$ ). В зацеплении всегда находятся две пары (а то и больше). Если коэффициент торцевого перекрытия (8.1) – целое число, суммарная длина контактных линий (рис. 8.4)

$$l_{\Sigma} = \varepsilon_{\alpha} \frac{b_w}{\cos \beta_b} \quad (8.2)$$

постоянная, удельная нагрузка на зубья не изменяется. Однако, стандарт [4, с. 166] рекомендует придерживаться коэффициента перекрытия

$$\varepsilon_{\alpha} = \left[ 1,88 - 3,2 \left( \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} \right) \right] \cos \beta$$

не целого. Но и в этом случае можно добиться постоянства величины (8.2), требуя (рис. 8.5) целых значений коэффициента осевого перекрытия

$$\varepsilon_{\beta} = \frac{b_w}{P_{xb}} \quad (8.3)$$

Осевой шаг  $P_{xb}$  на основном цилиндре находится из рассмотрения треугольников 2-3-2 и BCD на рисунке 8.5.

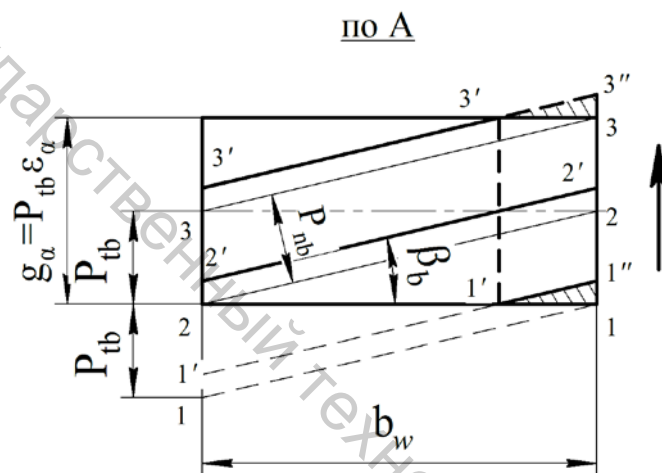


Рисунок 8.4 – Косозубое зацепление с целым коэффициентом торцевого перекрытия ( $\varepsilon_{\alpha} = 2$ ): заштрихованные площади равны – убыль контактных линий 3'-3'' равна прибыли 1'-1''

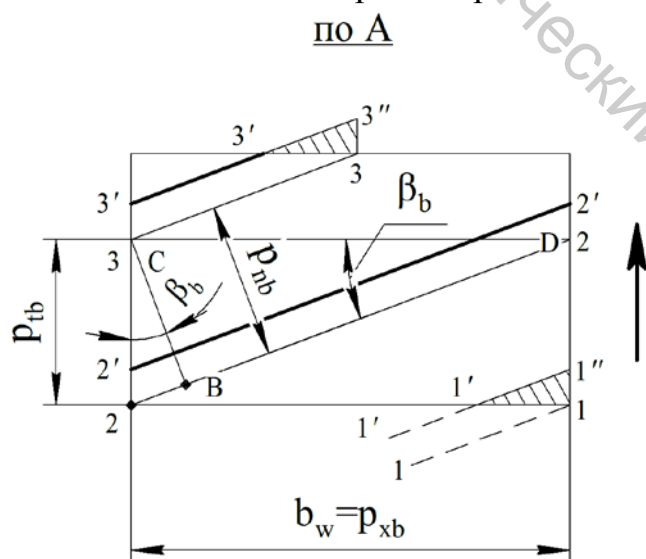


Рисунок 8.5 – Косозубое зацепление с целым коэффициентом осевого перекрытия ( $\varepsilon_{\beta} = 1$ ): заштрихованные площади равны – убыль контактных линий 3-3'' равна прибыли 1'-1''

$$P_{xb} = \frac{P_{tb}}{\operatorname{tg} \beta_b} = \frac{P_{nb}}{\sin \beta_b}.$$

Коэффициент осевого перекрытия (8.3)

$$\varepsilon_\beta = \frac{b_w \sin \beta_\beta}{P_{nb}} \approx \frac{b_w \sin \beta}{P_n}, \quad (8.4)$$

где  $\beta$  и  $P_n = \pi m_n = \pi m$  – угол наклона зубьев и нормальный (стандартный) шаг на делительном цилиндре. Требуя целых значений 1, 2, ... коэффициента (8.4), найдем подходящий для этого угол  $\beta$ :

$$\beta = \arcsin \frac{\varepsilon_\beta \cdot \pi m}{b_w}. \quad (8.5)$$

#### 8.4 Силы в косозубом зацеплении

Зубчатое колесо испытывает в зацеплении давление шестерни. Нормальная сила  $F_{n2}$  – равнодействующая давлений на зубья колеса, направлена по общей нормали к поверхностям зацепляющихся зубьев в сторону вращения колеса. Нормальная сила  $F_{n1}$  – равнодействующая давлений на зубья шестерни, направлена противоположно силе  $F_{n2}$  (равна ей по величине).

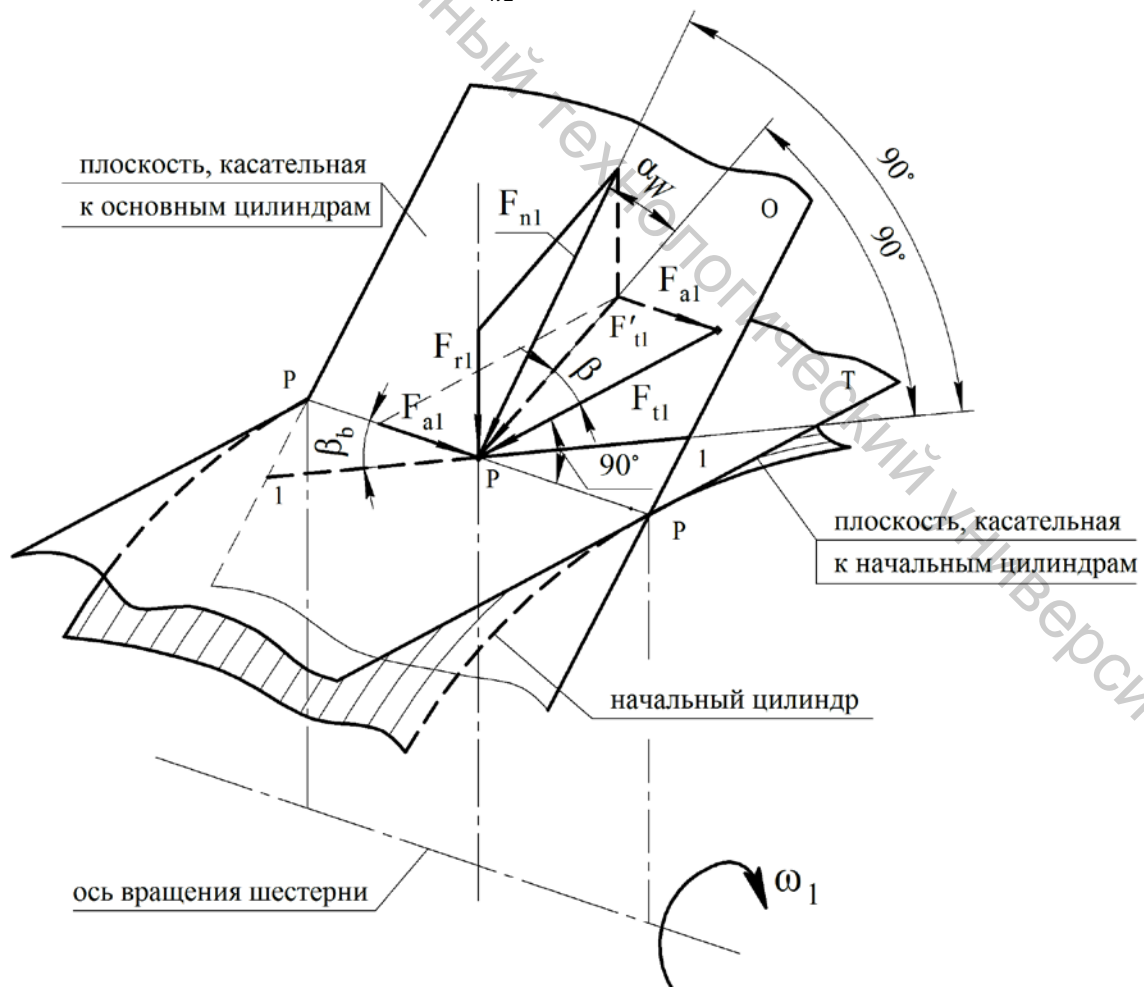


Рисунок 8.6 – Силы в косозубом зацеплении, действующие на шестерню

На рисунке 8.6 показаны две плоскости  $T$  и  $O$ : касательная к начальным цилиндрам зацепляющихся колес и касательная к основным цилиндрам. Во второй располагается поле зацепления (рис. 8.4, 8.5) и контактная линия (на рисунке показана линия 1-1, проходящая через полюс  $P$ ). Равнодействующую давлений на зубья шестерни, находящиеся в зацеплении, прилагают в полюсе. Разложим ее на составляющие: действующую перпендикулярно плоскости  $T$  и действующую в плоскости  $T$ . Первая ( $F_{r1}$ ) называется радиальной, вторая – ( $F'_{t1}$ ) – квазиокружной. Эту вторую силу разлагаем на составляющие: первая (осевая сила  $F_{a1}$ ) действует вдоль линии касания  $PP$  начальных цилиндров, вторая (окружная сила  $F_{t1}$ ) – перпендикулярно к ней. Силы  $F_{r1}$  и  $F_{a1}$  (пересекающая ось вращения шестерни и параллельная ей) не сообщают вращающих моментов. Момент полезного сопротивления создает окружная сила

$$F_{t1} = \frac{2T_1}{d_1}. \quad (8.6)$$

Осевая сила (рис. 8.6)

$$F_{a1} = F_{t1} \operatorname{tg} \beta, \quad (8.7)$$

радиальная сила

$$F_{r1} = F'_{t1} \operatorname{tg} \alpha_w = \frac{F_{t1}}{\cos \beta} \operatorname{tg} \alpha_w, \quad (8.8)$$

исходная нормальная сила

$$F_{n1} = \frac{F'_{t1}}{\cos \alpha_w} = \frac{F_{t1}}{\cos \beta \cos \alpha_w}. \quad (8.9)$$

Осевая сила (8.7), передающаяся на подшипники в опорах, тем больше, чем больше угол наклона зубьев  $\beta$  (8.5). Во избежание больших нагрузок на подшипники рекомендуют принимать [4, с. 165]  $\beta = 8 \dots 20^\circ$ . Другая причина указанных ограничений – снижение с ростом угла  $\beta$  коэффициента торцевого перекрытия  $\varepsilon_\alpha = g_\alpha / P_{tb}$  – из-за роста окружного шага (рис. 8.5)

$$P_{tb} = \frac{P_{nb}}{\cos \beta_b}.$$

## Лекция 9. Контактные напряжения в цилиндрических колесах

### 9.1 Удельная расчетная окружная сила

Нормальная сила в зацеплении – равнодействующая давлений, распределенных по суммарной длине контактных линий (8.2). В идеале это равномерно распределенная нагрузка. В случае прямого зуба она показана на рисунке 9.1. Ее интенсивность

$$q = \frac{F_n}{l_\Sigma}, \quad (9.1)$$

где сила  $F_n$  дается формулой (8.9), суммарная длина контактных линий – формулой (8.2). Интенсивность (9.1)

$$q = \frac{F_t}{\cos \beta \cos \alpha_w} \cdot \frac{1}{\frac{\varepsilon_\alpha b_w}{\cos \beta}} = \frac{F_t}{\varepsilon_\alpha b_w \cos \alpha_w} \quad (9.2)$$

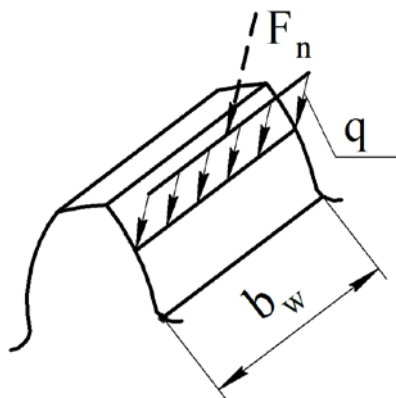


Рисунок 9.1 – Нагрузка, равномерно распределенная по ширине прямого зуба

Фактическое распределение нагрузки на зубья отличается от равномерного. Силы в зацеплении (8.6–8.8), передаваясь на валы зацепляющихся колес, изгибают, искривляют их, колеса поворачиваются относительно друг друга, зацепляющиеся зубья перекашиваются – на одном краю зубья давят друг на друга сильнее, чем на другом (рис. 9.2). Наибольшую интенсивность получим, умножая среднюю интенсивность (9.2) на коэффициент неравномерности  $K_\beta$ .

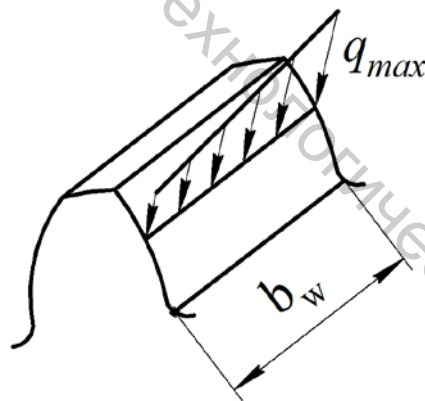


Рисунок 9.2 – Нагрузка, распределяющаяся по ширине  $b_w$  неравномерно

Имеется и другая причина неравномерности нагрузки на зубья – непостоянство передаточного отношения (7.3) из-за погрешностей нарезания зубьев. При постоянной угловой скорости шестерни угловая скорость колеса

$$\omega_2 = \omega_1 i$$

оказывается непостоянной, возникает угловое ускорение

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt}$$

и, следовательно, инерционный (динамический) момент

$$T_d = I \varepsilon_2, \quad (9.3)$$

где  $I$  – момент инерции вращающихся масс на валу колеса. Наличие момента (9.3) учитывается коэффициентом динамической нагрузки  $K_V$ .

Расчетная нагрузка

$$q_{\max} = qK_{\beta}K_V = \left( \frac{F_t K_{\beta} K_V}{b_W} \right) \frac{1}{\varepsilon_{\alpha} \cos \alpha_W}, \quad (9.4)$$

в скобках – выражение удельной расчетной окружной силы

$$W_t = \frac{F_t K_{\beta} K_V}{b_W}. \quad (9.5)$$

Расчетная нагрузка (9.4)

$$q_{\max} = \frac{W_t}{\varepsilon_{\alpha} \cos \alpha_W}. \quad (9.6)$$

## 9.2 Контактные напряжения

Зацепляющиеся зубья колес не твердые. Оказывая давление друг на друга, зубья деформируют друг друга – линии контакта «расползаются», становясь узкими площадками контакта (рис. 9.3). Выделим в окрестности точки  $B$  малую площадку  $\Delta A$ . На нее действует нормальная сила  $\Delta F_n$ . Среднее контактное напряжение на площадке  $\Delta A$

$$\sigma_{\text{ср}} = \frac{\Delta F_n}{\Delta A}.$$

Стянем контур площадки  $\Delta A$  к точке  $B$ . В пределе получим контактное напряжение в точке  $B$

$$\sigma_{HB} = \lim \frac{\Delta F_n}{\Delta A}.$$

Наибольшее контактное напряжение определяется по формуле Герца [4, с. 184]

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{q_{\max}}{\rho_{np}} \cdot \frac{E}{2\pi(1-\mu^2)}}, \quad (9.7)$$

где  $q_{\max}$  – расчетная нагрузка (9.6);

$$\frac{1}{\rho_{np}} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \quad (9.8)$$

– приведенная кривизна поверхностей, находящихся в контакте,  $\rho_1$  и  $\rho_2$  – их кривизны;  $E$  и  $\mu$  – модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала зубьев.

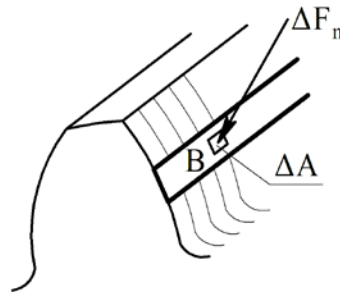


Рисунок 9.3 – Площадка контакта на зубе

### 9.3 Эквивалентное цилиндрическое прямозубое колесо

На рисунке 9.4 изображены зубчатые колеса, находящиеся в косоугольном зацеплении. Если смотреть по стрелке  $A$  сквозь «прозрачное» колесо, зацепление в плоскости В-В, нормальной к зубу, выглядит прямозубым. Нормальное сечение В-В делительного цилиндра шестерни – эллипс, полюс  $P$  – вершина эллипса, радиус эквивалентного цилиндрического колеса – радиус кривизны  $CP$  эллипса в его вершине  $P$ . Уравнение эллипса (рис. 9.5) в осях  $x, y$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (9.9)$$

кривизна

$$\frac{1}{\rho} = \frac{y''}{[1+(y')^2]^{3/2}},$$

кривизна в вершине  $P$

$$\frac{1}{\rho_P} = y''_P \quad (9.10)$$

(ибо первая производная в вершине  $P$   $y'_P = 0$ ). Продифференцируем уравнение (9.9):

$$\begin{aligned} \frac{2x}{a^2} + \frac{2yy'}{b^2} &= 0, \\ \frac{2}{a^2} + \frac{2(y')^2}{b^2} + \frac{2yy''}{b^2} &= 0; \end{aligned}$$

в вершине  $P$

$$\frac{2}{a^2} + \frac{2y_P y''_P}{b^2} = 0,$$

откуда искомая вторая производная (9.10)

$$y''_P = -\frac{b^2}{a^2} \frac{1}{y_P} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{1}{b} = -\frac{b}{a^2},$$

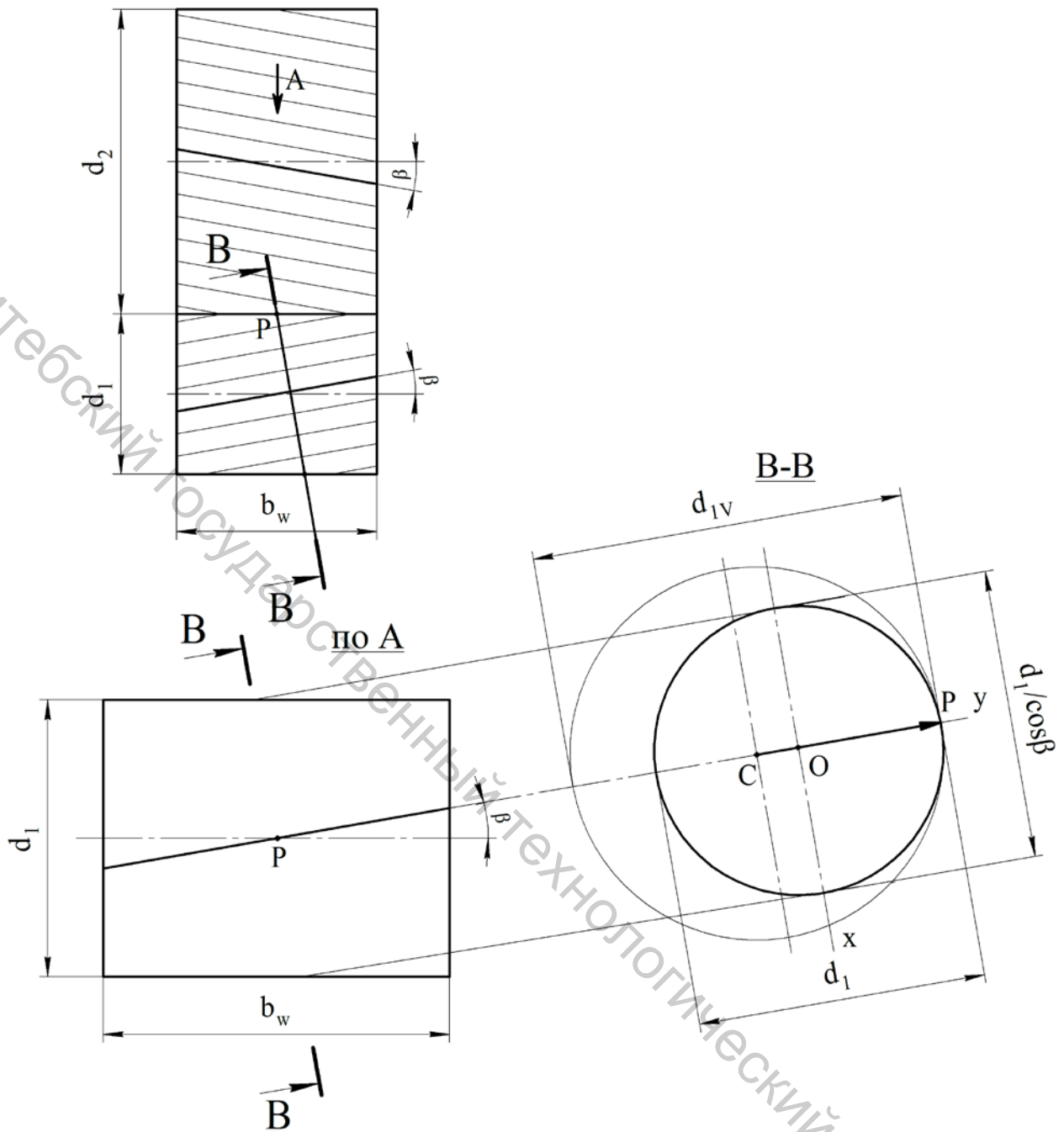


Рисунок 9.4 – Сечение делительного цилиндра шестерни плоскостью  $B-B$ , нормальной к зубу

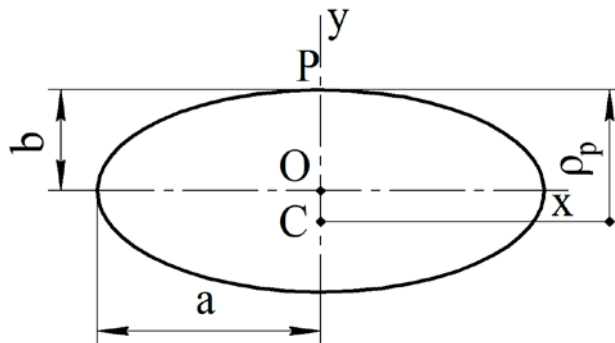


Рисунок 9.5 – Эллипс:  $a$  и  $b$  – полуоси эллипса;  $\rho_p$  – его радиус кривизны в вершине  $P$

радиус кривизны

$$\rho_P = \frac{1}{|y_P''|} = \frac{a^2}{b}. \quad (9.11)$$

Возвращаясь в формуле (9.11) к обозначениям рисунка 9.4, получим

$$\rho_P = \left( \frac{d_1}{2 \cos \beta} \right)^2 \frac{1}{d_1 / 2} = \frac{d_1}{2 \cos^2 \beta}.$$

Делительный диаметр эквивалентного цилиндрического колеса в косоугольном зацеплении

$$d_v = \frac{d}{\cos^2 \beta}. \quad (9.12)$$

Число зубьев эквивалентного колеса

$$Z_v = \frac{d_v}{m} = \frac{d}{m \cos^2 \beta} = \frac{mZ / \cos \beta}{m \cos^2 \beta} = \frac{Z}{\cos^3 \beta},$$

где  $m$  – стандартный модуль зацепления, диаметр делительного цилиндра  $d$  дается формулой (7.17).

#### 9.4 Условие прочности в контактом взаимодействии зубьев

Установлено [4, с. 183], что наибольшей опасности подвергаются зубья, зацепляющиеся вблизи полюса  $P$  (рис. 9.6). Радиусы кривизны профилей зубьев эквивалентных прямоугольных колес

$$\rho_1 = AP = O_1P \sin \alpha = \frac{d_{v1}}{2} \sin \alpha,$$

$$\rho_2 = BP = O_2P \sin \alpha = \frac{d_{v2}}{2} \sin \alpha,$$

точки  $A$  и  $B$  – центры кривизны эвольвентных профилей зацепляющихся зубьев. Приведенная кривизна (9.8) в формуле Герца (9.7)

$$\frac{1}{\rho_{np}} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = \frac{2}{\sin \alpha} \left( \frac{1}{d_{v1}} + \frac{1}{d_{v2}} \right),$$

или – см. формулу (9.12) –

$$\frac{1}{\rho_{np}} = \frac{2 \cos^2 \beta}{\sin \alpha} \left( \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right) = \frac{2 \cos^2 \beta}{d_1 \sin \alpha} \cdot \frac{1+u}{u},$$

так как отношение  $d_2/d_1$  равно передаточному числу  $u$ . Формула Герца (9.7) приобретает вид

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{q_{\max}}{\rho_{np}} \cdot \frac{E}{2\pi(1-\mu^2)}} = \sqrt{\frac{W_{Ht}}{\varepsilon_\alpha \cos \alpha} \cdot \frac{2 \cos^2 \beta}{d_1 \sin \alpha} \cdot \frac{1+u}{u} \cdot \frac{E}{2\pi(1-\mu^2)}} = \sqrt{\frac{2 \cos^2 \beta}{\sin 2\alpha}} \cdot \sqrt{\frac{E}{\pi(1-\mu^2)}} \cdot \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_\alpha}} \cdot \sqrt{\frac{W_{Ht}}{d_1} \cdot \frac{1+u}{u}} = Z_H \cdot Z_M \cdot Z_\varepsilon \cdot \sqrt{\frac{W_{Ht}}{d_1} \cdot \frac{1+u}{u}}, \quad (9.13)$$

где  $W_{Ht}$  – удельная расчетная окружная сила (9.5) в расчете зубчатой передачи на контактную прочность и введены коэффициенты:

учитывающий форму сопряженных поверхностей зубьев

$$Z_H = \sqrt{\frac{2 \cos^2 \beta}{\sin 2\alpha}} = 1,77 \cos \beta \quad (\text{при } \alpha = 20^\circ), \quad (9.14)$$

учитывающий механические свойства материалов колес

$$Z_M = \sqrt{\frac{E}{\pi(1-\mu^2)}} = 275 \text{ МПа}^{1/2} \quad (\text{для стальных колес}), \quad (9.15)$$

учитывающий суммарную длину контактных линий

$$Z_\varepsilon = \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_\alpha}}. \quad (9.16)$$

Для прямозубых колес коэффициенты (9.13–9.15)

$$Z_H = 1,77; \quad Z_M = 275 \text{ МПа}^{1/2}; \quad Z_\varepsilon = 1.$$

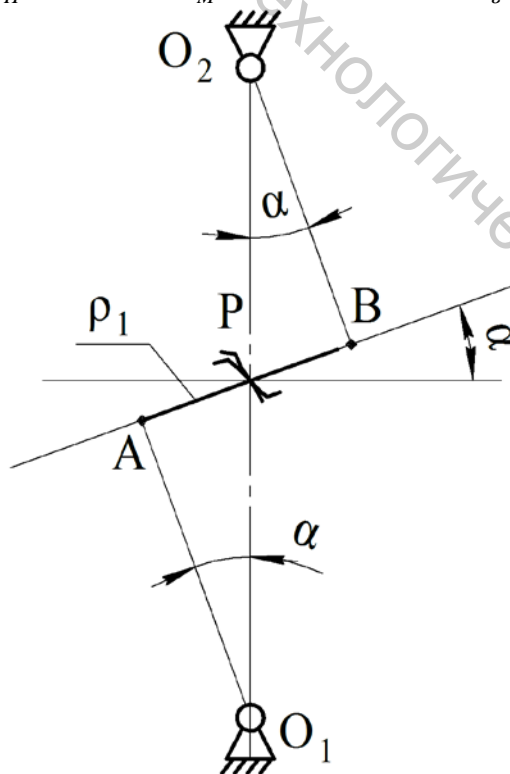


Рисунок 9.6 – Радиусы кривизны эвольвентных профилей эквивалентных прямозубых колес

Из условия контактной прочности найдем требуемый делительный диаметр косозубой шестерни:

$$\sigma_H \leq [\sigma_H], \quad (9.17)$$

$$d_1 = \frac{W_{Ht} (Z_H \cdot Z_M \cdot Z_\varepsilon)^2}{[\sigma_H]^2} \cdot \frac{1+u}{u}.$$

Внося сюда выражения удельной расчетной окружной силы (9.5) и окружной силы (8.6):

$$W_{Ht} = \frac{F_t K_{H\beta} K_{HV}}{b_w} = \frac{2T_1}{d_1} \cdot \frac{1}{\psi_{bd} d_1} \cdot K_{H\beta} K_{HV},$$

получим

$$d_1 = \sqrt[3]{2K_{HV} (Z_H Z_M Z_\varepsilon)^2} \cdot \sqrt[3]{\frac{T_1 K_{H\beta} (1+u)}{\psi_{bd} [\sigma_H]^2 u}} = K_d \sqrt[3]{\frac{T_1 K_{H\beta} (1+u)}{\psi_{bd} [\sigma_H]^2 u}}, \quad (9.18)$$

где  $K_{H\beta}$  и  $K_{HV}$  – коэффициенты неравномерности распределения нагрузки и динамической нагрузки;  $\psi_{bd} = b_w / d_1$  – коэффициент ширины шестерни относительно ее диаметра; коэффициент [4, с. 186]

$$K_d = \sqrt[3]{2K_{HV} (Z_H Z_M Z_\varepsilon)^2} \approx 680 \text{ МПа}^{1/3},$$

для стальных прямозубых колес  $K_d \approx 780 \text{ МПа}^{1/3}$ .

Когда требуется вписаться в стандартное межосевое расстояние, желательна формула для него, исходящая из условия контактной прочности (9.17). Вводя коэффициент ширины шестерни относительно межосевого расстояния

$$\psi_{ba} = \frac{b_w}{a_w} = \frac{b_w}{d_1} \cdot \frac{d_1}{a_w} = \psi_{bd} \frac{d_1}{a_w},$$

где межосевое расстояние

$$a_w = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{d_1}{2} \left( 1 + \frac{d_2}{d_1} \right) = \frac{d_1}{2} (1+u),$$

выразим коэффициент ширины шестерни относительно диаметра:

$$\psi_{bd} = \psi_{ba} \frac{a_w}{d_1} = \psi_{ba} \frac{1+u}{2}. \quad (9.19)$$

делительный диаметр

$$d_1 = a_w \frac{2}{1+u}. \quad (9.20)$$

Наряду с коэффициентом (9.19) и диаметром (9.20) введем в формулу (9.18) момент полезного сопротивления на колесе  $T_2$ : пренебрегая потерями мощности в передаче, напишем

$$P_1 = P_2,$$

или

$$T_1 \omega_1 = T_2 \omega_2,$$

откуда момент на шестерне

$$T_1 = \frac{T_2}{\omega_1 / \omega_2} = \frac{T_2}{i} = \frac{T_2}{u}.$$

Формула (9.18) переписывается:

$$a_w \frac{2}{1+u} = K_d \sqrt[3]{\frac{T_2 K_{H\beta} (1+u)}{u \psi_{ba} \frac{1+u}{2} [\sigma_H]^2 u}},$$

требуемое межосевое расстояние

$$a_w = K_a (1+u) \sqrt[3]{\frac{T_2 K_{H\beta}}{\psi_{ba} [\sigma_H]^2 u^2}}, \quad K_a = \frac{K_d}{\sqrt[3]{4}}. \quad (9.21)$$

Коэффициент в формуле (9.20)

$$K_a = 430 \text{ МПа}^{1/3} \text{ (для стальных косозубых колес),}$$

$$K_a = 490 \text{ МПа}^{1/3} \text{ (для стальных прямозубых колес).}$$

Нетрудно выяснить, во сколько раз нагрузочная способность косозубой передачи больше нагрузочной способности прямозубой: при одинаковых размерах колес

$$430 \sqrt[3]{T_2^{\text{кос}}} = 490 \sqrt[3]{T_2^{\text{прям}}},$$

откуда

$$T_2^{\text{кос}} = \left( \frac{490}{430} \right)^3 T_2^{\text{прям}} = 1,5 T_2^{\text{прям}}.$$

## 9.5 Допускаемые контактные напряжения

Зубья зубчатой передачи нагружаются только в зацеплении, полностью разгружаясь в одном обороте колеса до входа в новое зацепление: контактные напряжения изменяются во времени по пульсирующему циклу (рис. 9.7). До разрушения поверхностей зубьев (усталостного выкрашивания) – появления «оспинок» передачи работают достаточно долго (срок требуемой службы

редукторов общего назначения  $L_h = 20000$  часов). Соответствующее расчетное число циклов (при постоянной нагрузке)

$$N_H = 60nL_h,$$

где  $n$  – частота вращения колеса, об/мин. Вообще, срок службы  $L_h$  (и число  $N_H$ ) растет с уменьшением контактного напряжения, становясь неограниченно долгим при нагружениях, не превышающих базового предела контактной выносливости  $\sigma_{Hlimb}$  (рис. 9.8). На рисунке  $N_H$  – число циклов, отвечающее сроку службы  $L_h$ , и  $\sigma_{Hlim}$  – временный предел выносливости;  $N_{HO}$  – базовое число циклов, отвечающее базовому пределу выносливости  $\sigma_{Hlimb}$ ; константа в уравнении кривой выносливости

$$C = N_{HO} \sigma_{Hlimb}^m,$$

показатель степени  $m = 6$ . Из равенства

$$N_H \sigma_{Hlim}^m = N_{HO} \sigma_{Hlimb}^m$$

следует формула для временного предела выносливости

$$\sigma_{Hlim} = \sigma_{Hlimb} \sqrt[m]{\frac{N_{HO}}{N_H}},$$

где коэффициент долговечности

$$K_{HL} = \sqrt[m]{\frac{N_{HO}}{N_H}}$$

(при  $N_H \geq N_{HO}$   $K_{HL} = 1$ ).

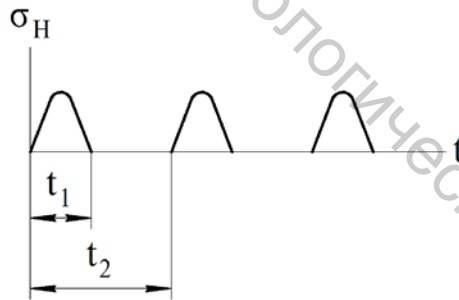


Рисунок 9.7 – Пульсирующий цикл:  $t_1$  – время зацепления,  $t_2$  – время одного оборота колеса

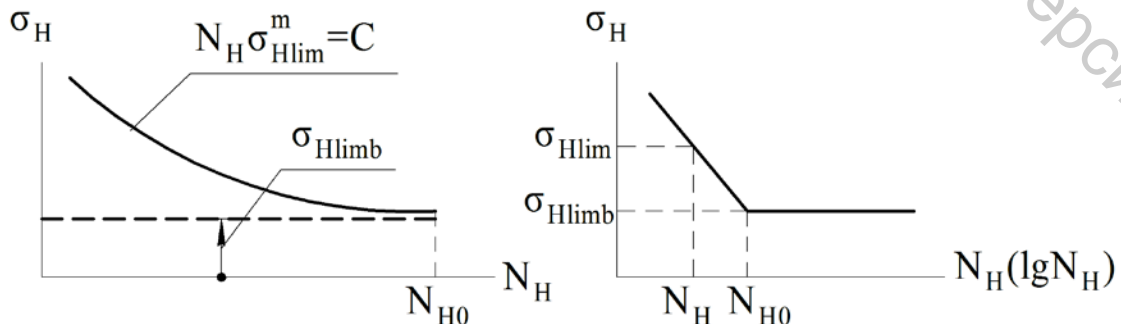


Рисунок 9.8 – Кривая выносливости и ее выражение в полулогарифмических координатах

Допускаемое контактное напряжение

$$[\sigma_H] = \frac{\sigma_{H \text{ lim}}}{s_H} = \frac{\sigma_{H \text{ lim}b}}{s_H} K_{HL}, \quad (9.22)$$

$s_H$  – коэффициент безопасности (при твердости, достигаемой нормализацией, улучшением или объемной закалкой зубьев,  $s_H = 1,1$ ).

В случае прямозубых передач за расчетное принимается меньшее из двух допускаемых напряжений  $[\sigma_H]_1$  и  $[\sigma_H]_2$ . В случае косозубых передач

$$[\sigma_H] = \frac{[\sigma_H]_1 + [\sigma_H]_2}{2}. \quad (9.23)$$

## Лекция 10. Передачи зацеплением с непараллельными валами

### 10.1 Конические передачи (с пересекающимися валами)

В цилиндрических зубчатых передачах выделяются начальные цилиндры, катящиеся друг по другу без скольжения, – окружные скорости (скорости точек начальных цилиндров) равны. В конических зубчатых передачах выделяются начальные (совпадающие, как правило, с делительными) конусы, внутри них располагаются (рис. 10.1) основные конусы. Обкатывая касательной плоскостью (без скольжения!) основной конус конического колеса – развертывая основной конус (рис. 10.2), получим эвольвентную поверхность  $Oaa'$ , описанной образующей конуса  $Oa$ . Всякая ее точка, например, точка  $a$  описывает эвольвенту  $aa'$  в сферической поверхности радиуса  $Oa$ . Точное образование зуба конического колеса требует (рис. 10.2) его профилирования по сфере. Однако, сфера не разворачивается на плоскости, поэтому базовое профилирование зубьев конического колеса ведут на развертываемой поверхности дополнительного конуса, касающейся базовой сферы на рисунке 10.2 по делительной окружности колеса – см. на рисунке 10.3 разрез конической передачи «плоскостью валов».

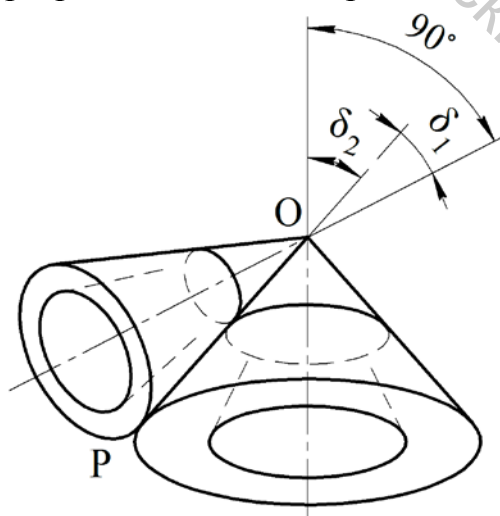


Рисунок 10.1 – Начальные (делительные) и основные конусы конической передачи

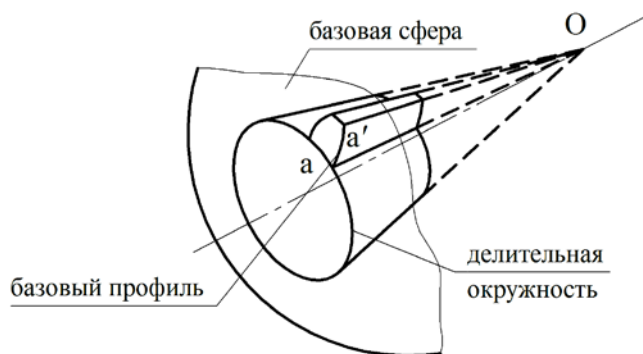
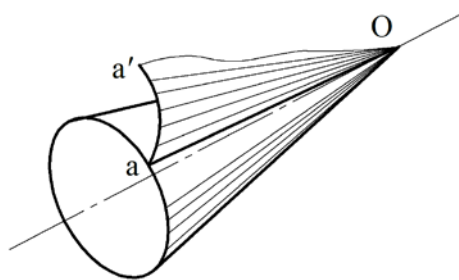


Рисунок 10.2 – Эвольвентная поверхность – поверхность прямого зуба конического колеса

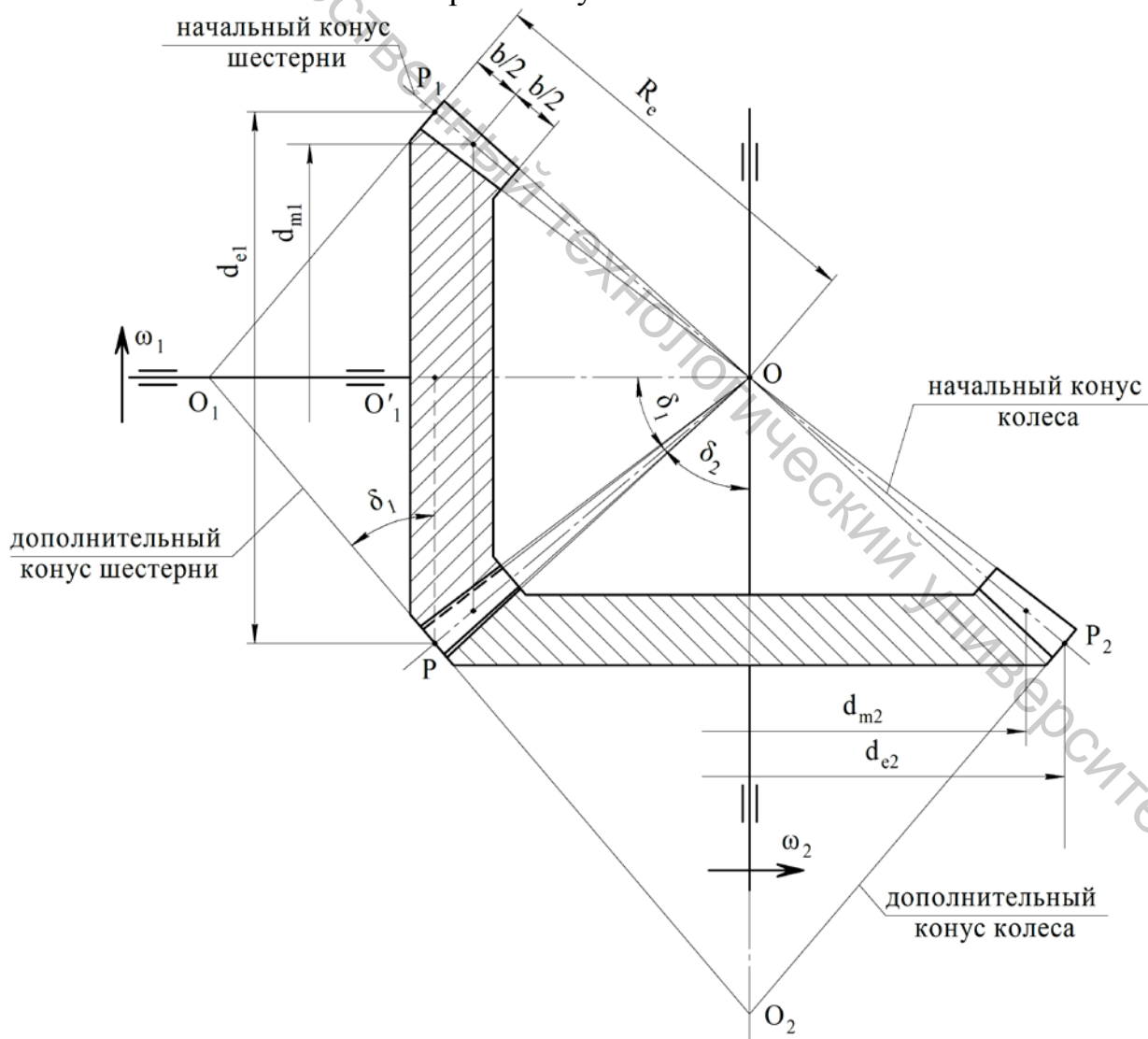


Рисунок 10.3 – Разрез конической передачи

Начальные конусы перекатываются друг по другу без скольжения. Скорости точек колес, оказавшихся на полюсной линии  $OP$ , равны. Вообще равны скорости точек любых соприкасающихся на линии  $OP$  окружностей (рис. 10.1) колес. Взяв, например, средние окружности начальных конусов, напишем

$$V_1 = \omega_1 \frac{d_{m1}}{2} = \omega_2 \frac{d_{m2}}{2} = V_2,$$

откуда передаточное отношение

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_{m2}}{d_{m1}} = \frac{Pz_2}{Pz_1} = \frac{z_2}{z_1} = u$$

( $P$  – шаг зацепления на средних окружностях начальных – делительных конусов), кроме того

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{d_{m2}}{d_{m1}} = \frac{d_{m2}/2}{d_{m1}/2} = \operatorname{tg} \delta_2 \quad (10.1)$$

( $\delta_2$  – угол при вершине делительного конуса колеса).

## 10.2 Эквивалентные цилиндрические колеса

Зацепление эвольвентных профилей зубьев конических колес выглядит на дополнительных конусах как зацепление зубьев цилиндрических прямозубых колес. Диаметры этих эквивалентных колес (рис. 10.3)

$$d_{v1} = 2O_1P = 2 \frac{O_1'P}{\cos \delta_1} = \frac{d_{e1}}{\cos \delta_1}, \quad d_{v2} = \frac{d_{e2}}{\cos \delta_2}; \quad (10.2)$$

числа зубьев эквивалентных колес находятся из соотношений

$$\begin{aligned} mz_{v1} &= \frac{mz_1}{\cos \delta_1}, & mz_{v2} &= \frac{mz_2}{\cos \delta_2}, \\ z_{v1} &= \frac{z_1}{\cos \delta_1}, & z_{v2} &= \frac{z_2}{\cos \delta_2} \end{aligned} \quad (10.3)$$

( $m$  в формулах (10.3) – стандартный внешний окружной модуль зацепления).

Приведенную кривизну зацепляющихся профилей зубьев в формуле Герца (9.7)

$$\frac{1}{\rho_{np}} = \frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2}$$

найдем здесь, пользуясь «средними» эквивалентными цилиндрическими колесами (рис. 10.3) с размерами (см. формулы (10.2))  $d_{m1}/\cos \delta_1$ ;  $d_{m2}/\cos \delta_2$ :

$$\frac{1}{\rho_{np}} = \frac{1}{\frac{d_{m1}}{2 \cos \delta_1} \sin \alpha} + \frac{1}{\frac{d_{m2}}{2 \cos \delta_2} \sin \alpha},$$

где  $\alpha$  – угол зацепления (стандартное значение  $20^\circ$ ). Учитывая теперь формулу (10.1), найдем:

$$\cos \delta_2 = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta_2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + u^2}},$$

$$\cos \delta_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta_1}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \delta_2}}} = \frac{u}{\sqrt{1 + u^2}}.$$

Приведенная кривизна

$$\frac{1}{\rho_{np}} = \frac{2u}{d_{m1} \sqrt{1+u^2} \sin \alpha} + \frac{2}{d_{m2} \sqrt{1+u^2} \sin \alpha} = \frac{2}{d_{m1} \sin \alpha} \left[ \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} + \frac{1}{\frac{d_{m2}}{d_{m1}} \sqrt{1+u^2}} \right] =$$

$$= \frac{2}{d_{m1} \sin \alpha} \left[ \frac{u}{\sqrt{1+u^2}} + \frac{1}{u \sqrt{1+u^2}} \right] = \frac{2}{d_{m1} \sin \alpha} \cdot \frac{\sqrt{1+u^2}}{u},$$

в зацеплении цилиндрических прямозубых колес имеем

$$\frac{1}{\rho_{np}} = \frac{2}{d_1 \sin \alpha} \cdot \frac{1+u}{u}.$$

### 10.3 Силы в зацеплении конических колес

Опять же пользуясь средним делительным диаметром шестерни, найдем окружные силы: величина этих сил взаимодействия

$$F_t = F_{t1} = F_{t2} = \frac{2T_1}{d_{m1}}. \quad (10.5)$$

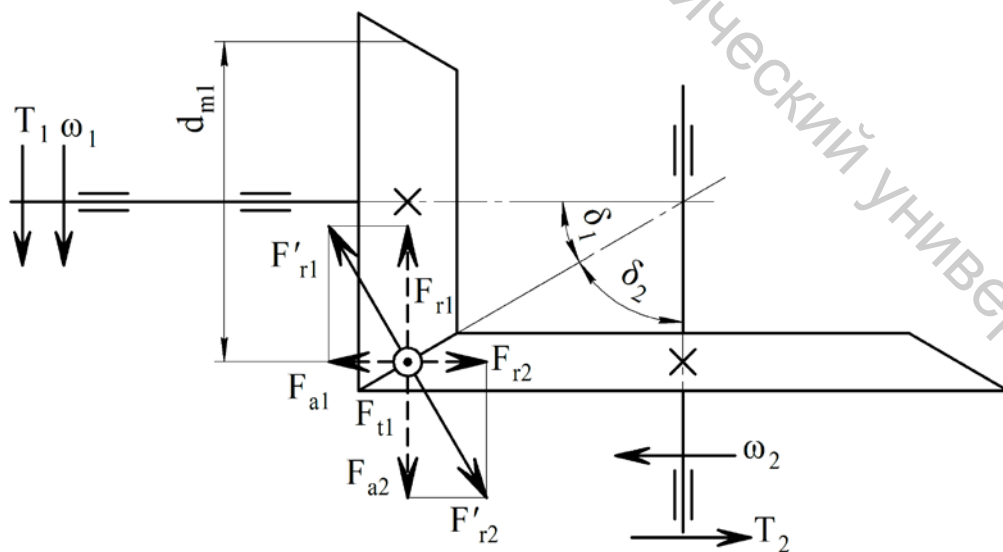


Рисунок 10.4 – Силы в зацеплении конических колес

Силы, расталкивающие колеса (в зацеплении цилиндрических прямозубых колес радиальные силы)

$$F'_r = F'_{r1} = F'_{r2} = F_t \operatorname{tg} \alpha,$$

разлагаем их (рис. 10.4) на осевые и радиальные:

$$F_{r1} = F'_r \cos \delta_1 = F_{a2},$$

$$F_{a1} = F'_r \sin \delta_1 = F_{r2}.$$

#### 10.4 Контактные напряжения, расчет на прочность

Учитывая отличия в формулах для приведенной кривизны (10.4), перепишем формулу (9.13):

$$\sigma_H = Z_H Z_M \sqrt{\frac{W_{Ht} \sqrt{u^2 + 1}}{0,85 d_{m1} u}}, \quad (10.6)$$

где по-прежнему коэффициенты  $Z_H = 1,77$ ;  $Z_M = 275 \text{ МПа}^{1/2}$ , удельная расчетная окружная сила

$$W_{Ht} = \frac{F_t}{b} K_{H\beta} K_{HV},$$

$F_t$  – окружная сила в зацеплении (10.5).

Подчиняя контактные напряжения условию прочности

$$\sigma_H \leq [\sigma_H],$$

где допускаемое напряжение

$$[\sigma_H] = \frac{[\sigma_H]_1 + [\sigma_H]_2}{2},$$

найдем, переписывая формулу (9.18), требуемый средний делительный диаметр шестерни:

$$d_{m1} = K_d \sqrt[3]{\frac{T_1 K_{H\beta} \sqrt{u^2 + 1}}{0,85 \psi_{bd} [\sigma_H]^2 u}}, \quad (10.7)$$

коэффициент  $K_d = 780 \text{ МПа}^{1/3}$  (такой же, как в случае цилиндрической прямозубой передачи).

Заметим, что в формулы (10.6), (10.7) введен коэффициент 0,85, учитывающий консольное расположение (рис. 10.4) шестерни на ее валу, приводящее к усилению неравномерности распределения нагрузки по ширине зуба, и осевые силы в зацеплении, нагружающие подшипники в опорах валов. Все это приводит к снижению нагрузочной способности (по сравнению с нагрузочной способностью цилиндрической прямозубой передачи) на 15 %.

Разумеется, ширина зубчатого венца  $b$  не может быть какой угодно. Ее величина ограничена (рис. 10.3) внешним конусным расстоянием  $R_e$ . Коэффициент ширины относительно внешнего конусного расстояния [4, с.195]

$$K_{be} = \frac{b}{R_e} \leq 0,3. \quad (10.8)$$

Коэффициент ширины относительно диаметра

$$\psi_{bd} = \frac{b}{d_{m1}} = \frac{b}{R_e} \cdot \frac{R_e}{d_{m1}} = K_{be} \cdot \frac{R_e}{d_{m1}},$$

где отношение (рис. 10.5)

$$\frac{R_e}{d_{m1}} = \frac{\frac{d_{m1}}{2 \sin \delta_1} + \frac{b}{2}}{d_{m1}} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sin \delta_1} + \psi_{bd} \right),$$

– получается уравнение относительно  $\psi_{bd}$

$$\psi_{bd} = K_{be} \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\sin \delta_1} + \psi_{bd} \right),$$

откуда коэффициент

$$\psi_{bd} = \frac{K_{be} \frac{1}{2 \sin \delta_1}}{1 - \frac{1}{2} K_{be}} = \frac{K_{be} \frac{1}{\operatorname{tg} \delta_1}}{(2 - K_{be}) \cos \delta_1} = \frac{K_{be} u}{(2 - K_{be}) \cos \delta_1}. \quad (10.9)$$

В формуле (10.7) используется коэффициент (10.9), определенный при учете ограничения (10.8). Требуемая ширина зубчатого венца

$$b = \psi_{bd} d_{m1}.$$

Внешний окружной модуль (стандартизуемый!)

$$m_e \geq \frac{b}{10}.$$

По его принятии принимаются числа зубьев и все размеры конических колес.

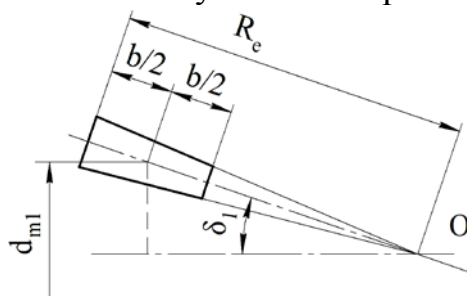


Рисунок 10.5 – Внешнее конусное расстояние и средний делительный диаметр шестерни

## 10.5 Червячная передача

Червячная передача (рис. 10.6) – пример передачи со скрещивающимися валами. Ее можно рассматривать как резьбовое соединение винта – червяка и

гайки – червячного колеса и как косозубую передачу, состоящую из «колеса» – червяка с одним или несколькими винтовыми зубьями и червячного (косозубого) колеса.

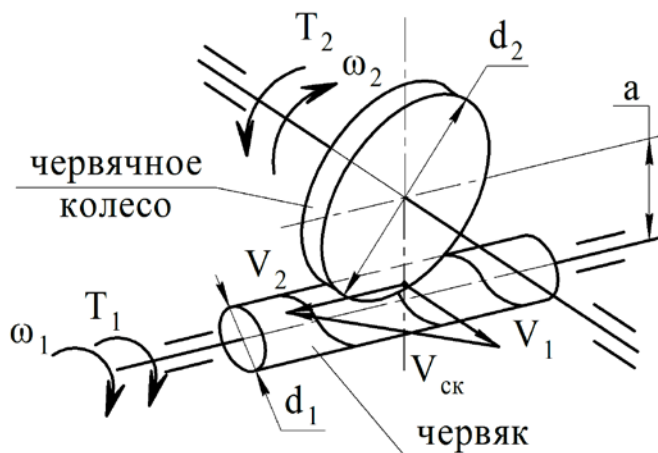


Рисунок 10.6 – Схема червячной передачи

Последняя аналогия позволяет распространить формулу (9.20) для требуемого межосевого расстояния цилиндрической косозубой передачи на случай червячной передачи. Но требуется учесть, что в формуле (9.20) фигурирует передаточное число

$$u = \frac{z_2}{z_1} = \frac{d_{w2}}{d_{w1}}, \quad (10.10)$$

формула которого следует из наличия двух начальных цилиндров, обкатывающих друг друга без скольжения. В червячных передачах таких цилиндров нет. Делительные цилиндры червяка и колеса на рисунке 10.6 интенсивно скользят друг по другу (см. на рисунке скорость скольжения  $V_{ск}$ ). Диаметр колеса

$$d_2 = m \cdot z_1,$$

где  $m$  – окружной модуль, равный осевому модулю червяка (рис. 10.7). Диаметр червяка

$$d_1 = m \cdot q,$$

где  $q = d_1 / m$  – коэффициент диаметра червяка. Чтобы исключить излишне тонкие червяки, стандарт предусматривает увеличение коэффициента  $q$  с уменьшением модуля  $m$ . Передаточное число (10.10) в формуле (9.20) заменим отношением

$$\frac{d_2}{d_1} = \frac{mz_2}{mq} = \frac{z_2}{q},$$

формула, аналогичная формуле (9.20), получит вид

$$a_w = K'_a \left( \frac{z_2}{q} + 1 \right) \sqrt[3]{\frac{T_2 K_H}{\left( \frac{z_2}{q} \right)^2 [\sigma_H]^2}},$$

или (если ввести коэффициент  $K'_a$  под радикал)

$$a_w = \left( \frac{z_2}{q} + 1 \right)^3 \sqrt[3]{ \left[ \frac{(K'_a)^{3/2}}{\frac{z_2}{q} [\sigma_H]} \right]^2 T_2 K_H }, \quad (10.11)$$

коэффициент

$$(K'_a)^{3/2} = 5400$$

(при  $T_2$  в Н·м,  $[\sigma_H]$  в МПа,  $a$  в мм, стальном червяке, бронзовом (чугунном) венце колеса). Требуемое условием контактной выносливости расстояние (10.11) позволяет вписать передачу в стандартное межосевое расстояние.

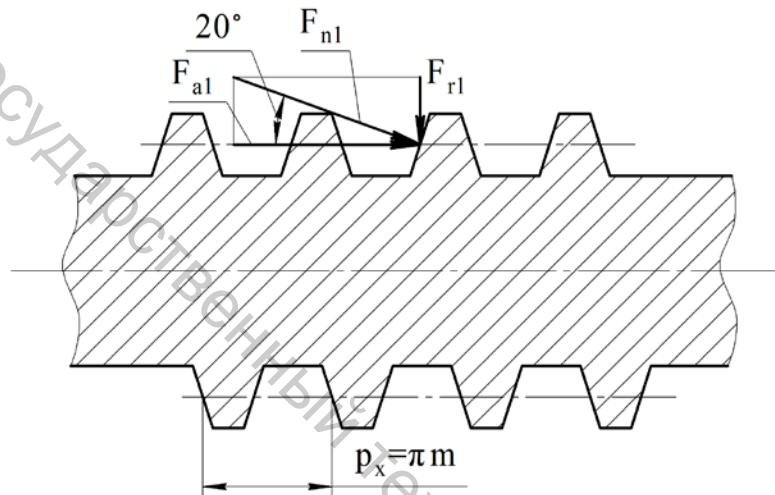


Рисунок 10.7 – Осевой шаг нарезки архимедова червяка; силы, действующие на червяк

## 10.6 Силы в червячной передаче

На рисунке 10.8 показана окружная сила

$$F_{t1} = \frac{2T_1}{d_1} \quad (10.12)$$

на червяке (с правой нарезкой) (создающая момент, уравновешивающий вращающий момент  $T_1$ ) и окружная сила на колесе

$$F_{t2} = \frac{2T_2}{d_2} \quad (10.13)$$

(создающая момент, движущий колесо). Сила (10.12) имеет пару во взаимодействии червяка с колесом – осевую силу на колесе:

$$F_{a2} = F_{t1};$$

сила (10.13) – осевую силу на червяке:

$$F_{a1} = F_{t2}.$$

Радиальные силы раздвигают червяк и колесо. Радиальная сила на червяк (рис. 10.7)

$$F_{r1} = F_{a1} \cdot \operatorname{tg} 20^\circ = F_{t2} \operatorname{tg} 20^\circ.$$

Такая же радиальная сила действует на колесо.

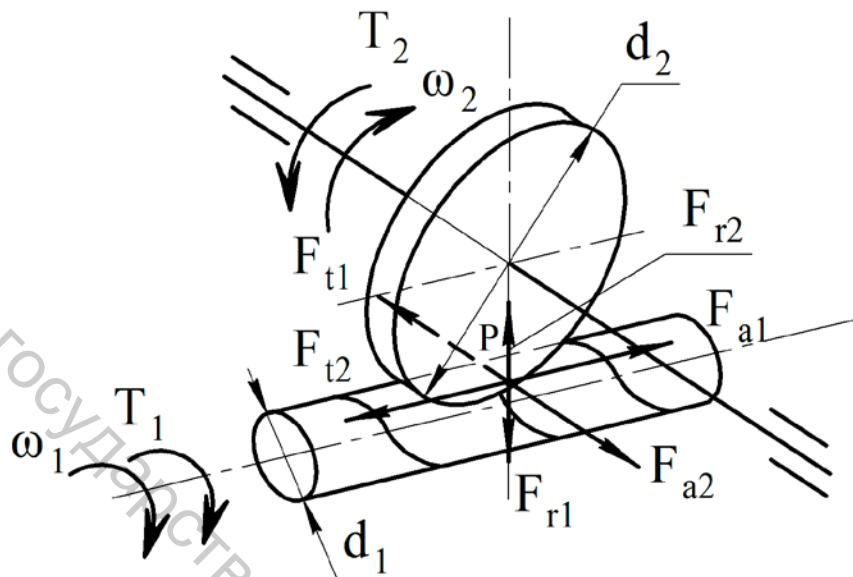


Рисунок 10.8 – Сила в червячном зацеплении

## Лекция 11. Геометрические характеристики плоских фигур

### 11.1 Статические моменты площади

Рассмотрим (рис.11.1) произвольную плоскую фигуру, отнесенную к осям  $x, y$ . Статические моменты площади фигуры

$$S_x = \int_A y dA, \quad S_y = \int_A x dA, \quad (11.1)$$

где интегрирование распространяется на всю площадь фигуры  $A$ . Поскольку ординаты  $y$  и абсциссы  $x$  элементов площади  $dA$  могут быть как положительными, так и отрицательными, статические моменты (11.1)

$$S_x > 0, \quad S_y < 0.$$

Если статический момент, например,  $S_x$  равен нулю, ось  $x$  – центральная (содержащая центр тяжести фигуры).

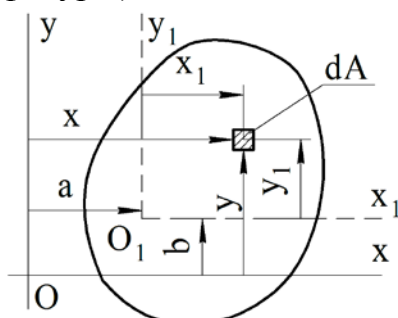


Рисунок 11.1 – К написанию формул (11.2)

Перейдем к новым осям  $x_1, y_1$ , параллельным прежним осям  $x, y$ . Преобразование координат производится по формулам (рис. 11.1)

$$\begin{aligned} x_1 &= x - a, \\ y_1 &= y - b. \end{aligned} \quad (11.2)$$

Используем формулы (11.2) в определениях (11.1):

$$\begin{aligned} S_{x_1} &= \int_A y_1 dA = \int_A (y - b) dA = \int_A y dA - b \int_A dA = S_x - bA, \\ S_{y_1} &= S_y - aA. \end{aligned}$$

Пусть оси  $x_1, y_1$  центральные,  $O_1$  – центр тяжести фигуры. Координаты центра тяжести в осях  $x, y$

$$x_c = a = \frac{S_y}{A}, \quad y_c = b = \frac{S_x}{A}. \quad (11.3)$$

Если центр тяжести фигуры известен, статические моменты фигуры относительно произвольных осей  $x, y$

$$S_x = Ay_c, \quad S_y = Ax_c. \quad (11.4)$$

Формулы (11.3), (11.4) можно использовать в определении координат центра тяжести составных фигур:

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{\sum_{k=1}^n A_k y_{c_k}}{\sum_{k=1}^n A_k}, \quad x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum_{k=1}^n A_k x_{c_k}}{\sum_{k=1}^n A_k},$$

где  $A_k, y_{c_k}, x_{c_k}$  – площадь и координаты центра тяжести  $k$ -ой части фигуры,  $n$  – число частей.

Если фигура симметрична (рис. 11.2), ее статический момент относительно оси симметрии равен нулю, ось симметрии – центральная ось. Действительно,

$$S_y = \int_A x dA = \int_{A_1} x_1 dA + \int_{A_2} x_2 dA = \int_{A_2} (-x_2) dA + \int_{A_2} x_2 dA = 0.$$

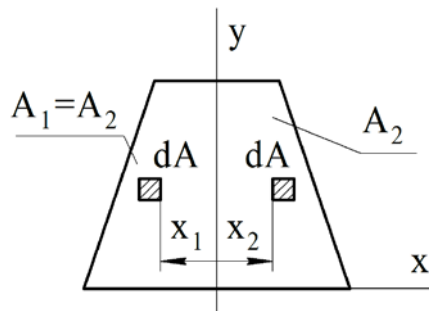


Рисунок 11.2 – Симметричная фигура

## 11.2 Моменты инерции

Геометрические характеристики второго порядка – моменты инерции: осевые

$$I_x = \int_A y^2 dA > 0, \quad I_y = \int_A x^2 dA > 0 \quad (11.5)$$

и центробежный

$$I_{xy} = \int_A xy dA \leq 0. \quad (11.6)$$

перейдем в интегралах (11.5, 11.6) от координат  $x, y$  к координатам (11.2) при учете определений (11.1):

$$\begin{aligned} I_{x_1} &= \int_A y_1^2 dA = \int_A (y-b)^2 dA = \int_A y^2 dA - 2b \int_A y dA + b^2 \int_A dA = I_x - 2bS_x + b^2 A, \\ I_{x_1 y_1} &= \int_A x_1 y_1 dA = \int_A (x-a)(y-b) dA = \int_A xy dA - a \int_A y dA - b \int_A x dA + ab \int_A dA = \\ &= I_{xy} - aS_x - bS_y + abA. \end{aligned} \quad (11.7)$$

Если оси  $x, y$  центральные, статические моменты  $S_x, S_y$  равны нулю: моменты инерции (11.7)

$$I_{x_1} = I_x + b^2 A, \quad I_{y_1} = I_y + a^2 A, \quad I_{x_1 y_1} = I_{xy} + abA. \quad (11.8)$$

При переходе от центральных осей к нецентральной осевые моменты инерции (11.8) возрастают, центральный момент инерции (11.8) может возрасти, но может и уменьшиться (в зависимости от знаков координат  $a, b$  нового начала  $O_1$ , в прежних осях  $x, y$ ).

Центробежный момент инерции относительно осей, одна из которых ось симметрии, равен нулю. В общем случае всегда найдется пара взаимно перпендикулярных осей  $u, v$ , относительно которых  $I_{uv} = 0$ . Такие оси называются главными. Главные оси найдутся и среди центральных, они называются главными центральными (естественными) и играют в прикладной механике важную роль.

### 11.3 Геометрические характеристики простейших фигур

К простейшим относим прямоугольник и круг. Рассмотрим (рис. 11.3) прямоугольник и найдем координаты его центра тяжести. Статические моменты бесконечно узкой полоски, показанной на рисунке,

$$dS_{x_1} = \int_{dA_{\Pi}} y_1 (dy_1 dx_1) = y_1 dy_1 \int_0^b dx_1 = by_1 dy_1,$$

(размер полоски  $dy_1$  и ординату  $y_1$  выносим за знак интеграла, поскольку у всех элементов полоски эти величины одинаковы). Статический момент прямоугольника

$$S_{x_1} = \int_A dS_{x_1} = \int_0^h by_1 dy_1 = \frac{bh^2}{2},$$

ордината центра тяжести

$$y_{1c} = \frac{S_{x_1}}{A} = \frac{bh^2}{2bh} = \frac{h}{2},$$

абсцисса центра тяжести, очевидно,

$$x_{1c} = \frac{b}{2}.$$

Центр тяжести прямоугольника находится на пересечении его диагоналей.

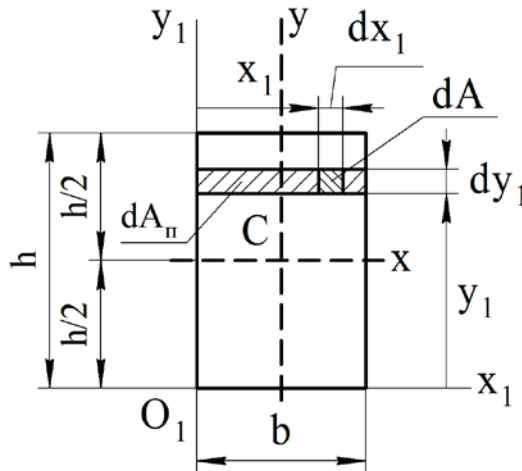


Рисунок 11.3 – Прямоугольное сечение

Центробежный момент инерции полоски

$$dI_{x_1 y_1} = \int_{dA_{II}} x_1 y_1 dx_1 dy_1 = y_1 dy_1 \int_0^b x_1 dx_1 = y_1 \frac{b^2}{2} dy_1,$$

$$I_{x_1 y_1} = \int_A dI_{x_1 y_1} = \int_0^h y_1 \frac{b^2}{2} dy_1 = \frac{b^2 h^2}{4}.$$

Найдем центробежный момент инерции относительно осей  $x_1$ ,  $y$ . Оси  $x_1$ ,  $y_1$  не центральные, воспользуемся формулой (11.7):

$$I_{x_1 y} = I_{x_1 y_1} - \frac{b}{2} S_{x_1} - 0 \cdot S_{y_1} + \frac{b}{2} \cdot 0 \cdot A = \frac{b^2 h^2}{4} - \frac{b}{2} \cdot \frac{bh^2}{2} = 0.$$

Результат очевидный, ибо ось  $y$  – ось симметрии прямоугольника. Таким же будет центробежный момент инерции относительно центральных осей  $x$  и  $y$  – это главные центральные оси.

Найдем главные оси в точке  $O_1$ . На рисунке 11.4 показаны произвольные оси  $u$  и  $v$ . Новые координаты элемента площади  $dA$  находятся из рассмотрения заштрихованных треугольников:

$$u = x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha,$$

$$v = -x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha.$$

Моменты инерции относительно новых осей  $u$  и  $v$

$$I_u = \int_A v^2 dA = \int_A (-x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha)^2 dA = (\sin \alpha)^2 \int_A x_1^2 dA - (2 \sin \alpha \cos \alpha) \cdot$$

$$\int_A x_1 y_1 dA + (\cos \alpha)^2 \int_A y_1^2 dA = I_{y_1} \sin^2 \alpha - I_{x_1 y_1} \sin 2\alpha + I_{x_1} \cos^2 \alpha,$$

(11.9)

$$\begin{aligned}
 I_{uv} &= \int_A uv dA = \int_A (x_1 \cos \alpha + y_1 \sin \alpha)(-x_1 \sin \alpha + y_1 \cos \alpha) dA = \\
 &= -(\cos \alpha \sin \alpha) \int_A x_1^2 dA - (\sin^2 \alpha) \int_A x_1 y_1 dA + \cos^2 \alpha \int_A x_1 y_1 dA + (\cos \alpha \sin \alpha) \int_A y_1^2 dA = \\
 &= \frac{I_{x_1} - I_{y_1}}{2} \sin 2\alpha + I_{x_1 y_1} \cos 2\alpha.
 \end{aligned}$$

Если оси  $u$  и  $v$  – главные, центробежный момент инерции

$$I_{uv} = 0;$$

угол, определяющий направление главных осей, находится из уравнения

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2I_{x_1 y_1}}{I_{x_1} - I_{y_1}}.$$

Покажем, что осевой момент инерции (11.9) относительно главной оси экстремален: производная, отвечающая экстремуму функции  $I_u(\alpha)$ ,

$$\frac{dI_u}{d\alpha} = (2 \sin \alpha \cos \alpha) I_{y_1} - 2I_{x_1 y_1} \cos 2\alpha - (2 \cos \alpha \sin \alpha) I_{x_1} = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{2I_{x_1 y_1}}{I_{x_1} - I_{y_1}}. \quad (11.10)$$

Уравнению (11.10) удовлетворяют два значения угла  $\alpha$ :  $\alpha_1$  и  $\alpha_2 = \alpha_1 + 90^\circ$ . Действительно,

$$\operatorname{tg} 2\alpha_2 = \operatorname{tg} 2(\alpha_1 + 90^\circ) = \operatorname{tg}(2\alpha_1 + 180^\circ) = \operatorname{tg} 2\alpha_1.$$

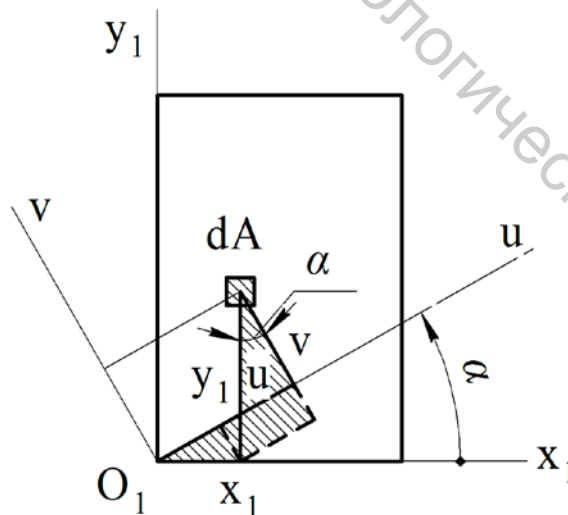


Рисунок 11.4 – Преобразование координат при повороте осей

Уравнению (11.10) удовлетворяют два значения угла  $\alpha$ :  $\alpha_1$  и  $\alpha_2 = \alpha_1 + 90^\circ$ . Действительно,

$$\operatorname{tg} 2\alpha_2 = \operatorname{tg} 2(\alpha_1 + 90^\circ) = \operatorname{tg}(2\alpha_1 + 180^\circ) = \operatorname{tg} 2\alpha_1.$$

Угол  $\alpha_1$ , определяющий взаимно перпендикулярные оси экстремальных моментов инерции  $I_{\max}$ ,  $I_{\min}$ , совпадают с углом, определяющим пару главных осей. Оси  $x$ ,  $y$  на рисунке 11.3 – главные оси. Относительно одной из них момент инерции ( $I_x$ ) максимален. Относительно другой ( $I_y$ ) минимален. Найдем их (рассматривая рисунок 11.3):

$$I_{\max} = I_x = \int_{-h/2}^{h/2} (bdy_1)y_1^2 = \frac{by_1^3}{3} \Big|_{-h/2}^{h/2} = \frac{bh^3}{12},$$

$$I_{\min} = I_y = \frac{hb^3}{12}.$$

Займемся кругом (рис. 11.5). Все центральные оси его главные. Главные центральные моменты инерции круга

$$I_x = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A x^2 dA$$

равны. Сложим их:

$$I_x + I_y = \int_A (y^2 + x^2) dA = \int_A \rho^2 dA = I_\rho,$$

где последний интеграл называется полярным моментом инерции круга.

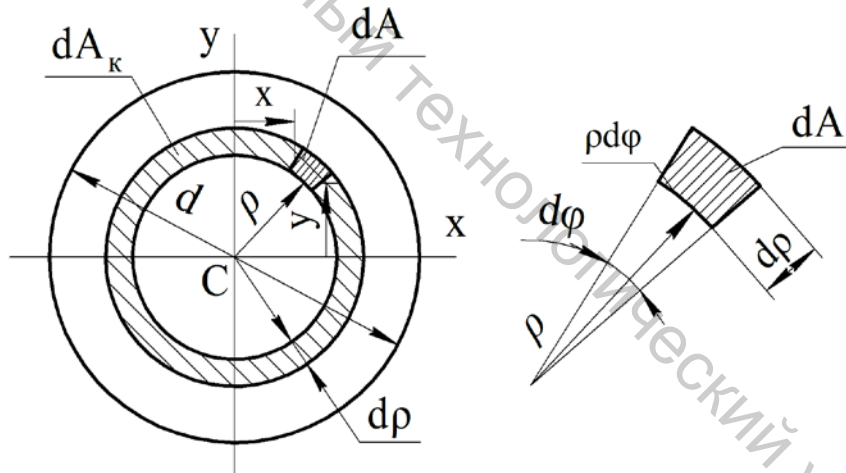


Рисунок 11.5 – К вычислению полярного момента инерции (11.13)

Выделим в круге бесконечно узкое кольцо. Его полярный момент инерции

$$dI_\rho = \int_{dA_k} \rho^2 (d\rho \rho d\phi) = \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} d\phi = 2\pi\rho^3 d\rho,$$

полярный момент инерции круга в целом

$$I_\rho = \int_A dI_\rho = \int_0^{d/2} 2\pi\rho^3 d\rho = \frac{\pi\rho^4}{2} \Big|_0^{d/2} = \frac{\pi d^4}{32}.$$

Деля момент инерции (11.13) на 2 – см. сумму (11.12), – получим формулу для главного центрального момента инерции круга:

$$I_x = I_y = \frac{\pi d^4}{64}. \quad (11.14)$$

## 11.4 Брус (стержень)

Возьмем (рис. 11.6) какую-либо кривую (или прямую), назвав ее продольной осью бруса; «проколем» ею плоскую фигуру (в центре тяжести) и, располагая фигуру нормально к продольной оси, переместим ее вдоль оси – граничный контур фигуры опишет поверхность стержня. Отличительная особенность бруса состоит в неравенстве  $L \gg d$ , где  $L$  – длина бруса,  $d$  – характерный размер поперечного сечения. Поперечные сечения относят (рис. 11.6) к главным центральным осям  $Sx$ ,  $Sy$  – естественным осям и оси  $Z$  – касательной к продольной оси.

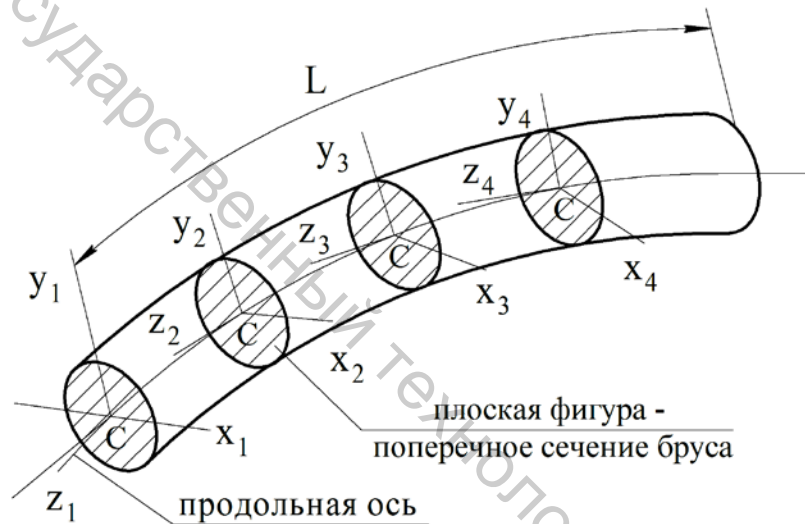


Рисунок 11.6 – Брус (стержень)

## Лекция 12. Внутренние силовые факторы в поперечном сечении бруса

### 12.1 Внутренние силовые факторы

На рисунке 12.1 представлен брус, находящийся в равновесии. Мысленно рассечем брус плоскостью, перпендикулярной продольной оси, и отбросим его левую часть. Силовое воздействие на нее (см. систему сил  $F^{лев}$ ), распределяясь по поперечному сечению (заштриховано), передается правой части, уравновешивая систему сил  $F^{прав}$ . Внутренние силы, распределенные по сечению, могут быть приведены к его центру тяжести – заменены эквивалентными силой  $R$  и парой с моментом  $M_C$ . К этим же факторам приводится система сил  $F^{лев}$ . Проектируя силу  $R$  (равна сумме сил  $F^{лев}$ ) на естественные оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , получим внутренние силовые факторы (рис. 12.2): поперечные силы

$$Q_x = \sum F_x^{лев}, \quad Q_y = \sum F_y^{лев} \quad (12.1)$$

и продольную силу

$$N = \sum F_z^{лев}. \quad (12.2)$$

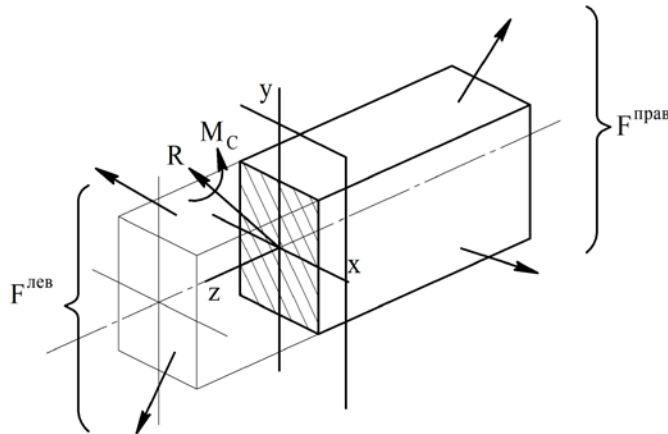


Рисунок 12.1 – Брус находится в равновесии: сила  $R$  и пара с моментом  $M_C$  – результат приведения сил  $F^{лев}$  к центру тяжести  $C$  поперечного сечения

Таким же образом заменяем (рис. 12.2) одну пару с моментом  $M_C$  (равен сумме моментов сил  $F^{лев}$  относительно центра приведения  $C$ ) тремя парами с моментами (изгибающими)

$$M_x = \sum m_x(F^{лев}), \quad M_y = \sum m_y(F^{лев}) \quad (12.3)$$

и моментом (крутящим)

$$T = \sum m_z(F^{лев}). \quad (12.4)$$

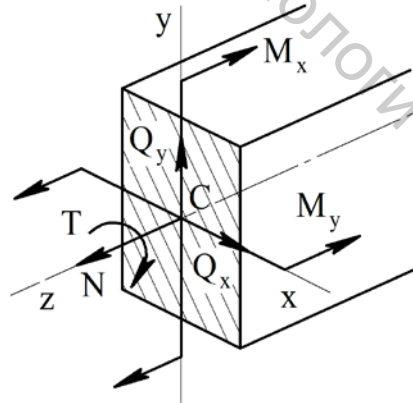


Рисунок 12.2 – Шесть внутренних силовых факторов в поперечном сечении бруса

Если, наоборот, мысленно отбрасывается правая часть (рис. 12.3), получится силы и пары, противоположные показанным на рисунке 12.2, но равные им по модулю – что и должно быть в результате приведения сил взаимодействия к одной точке  $C$ :

$$Q_x = \sum F_x^{прав}, \quad Q_y = \sum F_y^{прав}, \quad N = \sum F_z^{прав}; \quad (12.5)$$

$$M_x = \sum m_x(F^{прав}), \quad M_y = \sum m_y(F^{прав}), \quad T = \sum m_z(F^{прав}) \quad (12.6)$$

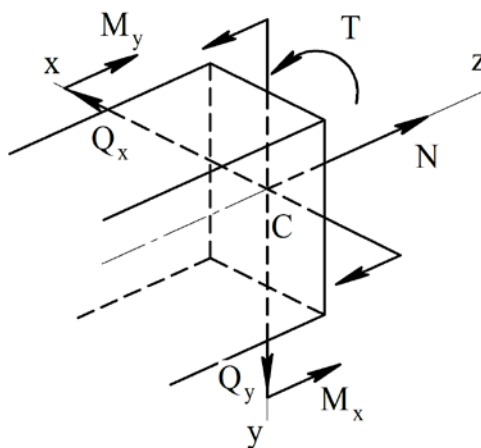


Рисунок 12.3 – Результаты приведения к центру С внутренних сил, действующих на правую часть бруса

## 12.2 Внутренние силовые факторы в поперечном сечении вала редуктора

Силы (рис. 12.4), действующие на вал, получаются, во-первых, параллельным переносом окружной силы  $F_t$  и осевой силы  $F_a$  в точку А оси вала (рис. 12.5), туда же переносится (вдоль линии действия) радиальная сила  $F_r$ . Параллельный перенос сил добавляет к перенесенным силам пары сил (рис. 12.4) с моментами

$$T = F_t \frac{d_2}{2}, \quad m_a = F_a \frac{d_2}{2}$$

– первый вращает вал, уравновешивая момент сил полезного сопротивления и закручивая вал, второй изгибает вал. Во-вторых, на конец вала К действует сила, развиваемая работающей муфтой. Ее направляют противоположно окружной силе  $F_t$  с тем, чтобы получилось наиболее опасное нагружение вала.

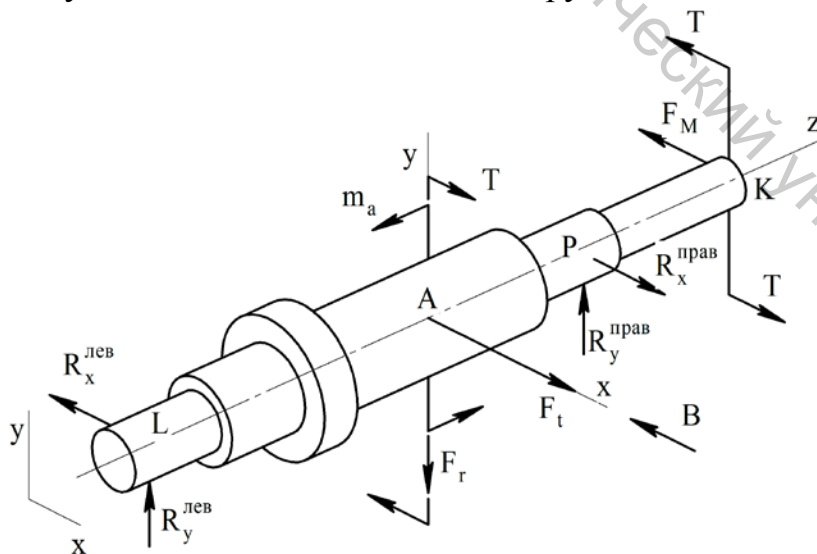


Рисунок 12.4 – Силы, действующие на тихоходный вал одноступенчатого цилиндрического косозубого редуктора

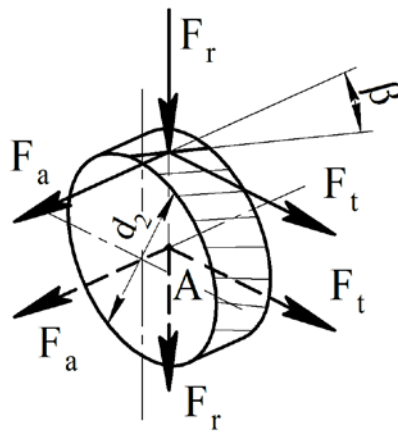


Рисунок 12.5 – Силы в зацеплении, действующие на косозубое колесо на тихоходном валу

На рисунке 12.6 показан вид вала на рисунке 12.4, если смотреть на него по стрелке *B*. Найдем внутренние силовые факторы в поперечном сечении *S*. Если рассматривать часть вала слева от сечения, поперечные силы (12.1)

$$Q_y = R_y^{\text{лев}} - F_r, \quad Q_x = -R_x^{\text{лев}} + F_t \quad (12.7)$$

– со знаком «+» учитываем «левые силы», направленные вверх и вперед («на нас»); со знаком «-» учитываем силы, направленные вниз и назад («от нас»). Изгибающие моменты (12.3)

$$M_x = R_y^{\text{лев}} z - m_a - F_r (z - l_1), \quad M_y = -R_x^{\text{лев}} z + F_t (z - l_1) \quad (12.8)$$

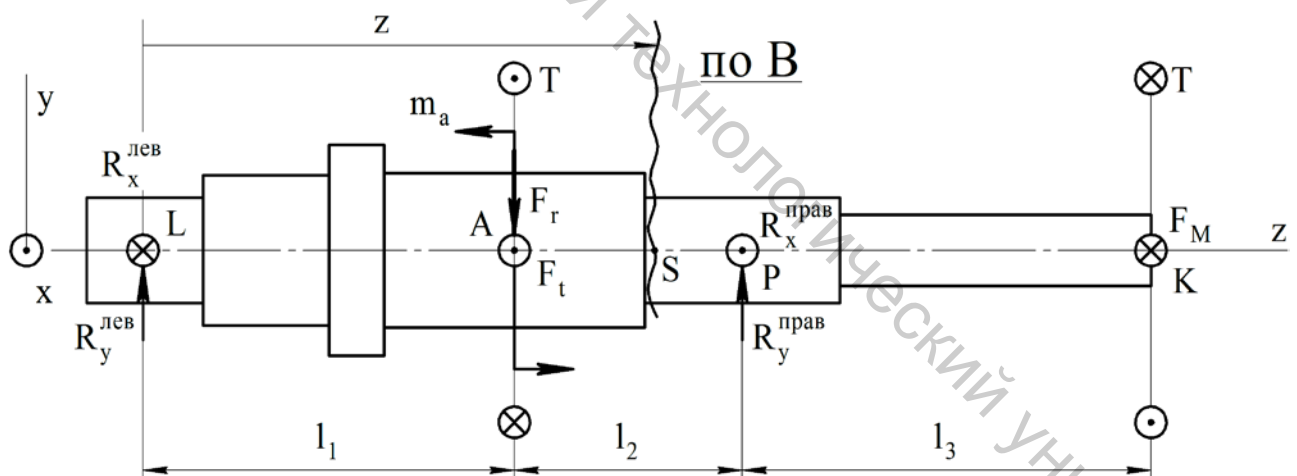


Рисунок 12.6 – К определению внутренних силовых факторов в поперечном сечении *S*

– со знаком «+» учитываем моменты сил, направленных вверх и вперед, (сжимающие верхние и передние «продольные волокна» вала), со знаком «-» учитываются моменты сил, направленных вниз и назад, (сжимающие нижние и задние «продольные волокна» вала). Крутящий момент (12.4) равен *T* (на участке закручивания АК). Продольная сила (12.2)  $N=0$  (силы пары с моментом  $m_a$  параллельны оси *z*, но их сумма равна нулю).

Если рассматривать часть вала справа от поперечного сечения *S*, поперечные силы (12.5)

$$Q_y = -R_y^{\text{прав}}, \quad Q_x = F_M - R_x^{\text{прав}} \quad (12.9)$$

(со знаком «+» учитываются силы, направленные вниз и «от нас»), изгибающие моменты (12.6)

$$M_x = R_y^{\text{прав}}(l_1 + l_2 - z), \quad M_y = -F_M(l_1 + l_2 + l_3 - z) + R_x^{\text{прав}}(l_1 + l_2 - z) \quad (12.10)$$

(правило знаков прежнее). Крутящий момент (12.6) равен  $T$ . Продольная сила (12.5)  $N=0$  (сил, параллельных оси  $z$ , на правой части вала нет).

При указанных выше правилах знаков (которые присваиваются силам и их моментам) результаты рассмотрения левой и правой частей вала будут одинаковы: например, поперечная сила (12.7), (12.9)

$$Q_y = R_y^{\text{лев}} - F_r = -R_y^{\text{прав}},$$

откуда следует условие равновесия

$$\sum Y = R_y^{\text{лев}} - F_r + R_y^{\text{прав}} = 0; \quad (12.11)$$

изгибающий момент (12.8), (12.10)

$$M_x = R_y^{\text{лев}} z - m_a - F_r(z - l_1) = R_y^{\text{прав}}(l_1 + l_2 - z),$$

откуда следует условие равновесия

$$\sum m_s = R_y^{\text{лев}} z - m_a - F_r(z - l_1) - R_y^{\text{прав}}(l_1 + l_2 - z) = 0. \quad (12.12)$$

Принятые в выражениях (12.7)–(12.10) правила знаков – следствие уравнений равновесия (12.11), (12.12).

Заметим к этому, что во всех этих выражениях и уравнениях используются первоначальные размеры вала, хотя, находясь под силовым воздействием, вал деформируется – его размеры и форма изменяются. Но изменения размеров и формы вала намного меньше его первоначальных размеров, что дает право пользоваться именно первоначальными размерами. Назовем это положение принципом первоначальных размеров.

### 12.3 Напряженное состояние в точке бруса (рис. 12.1)

Силовое воздействие на брус сводится к внутренним силам, распределенным по любому из сечений вала. Пусть выбрано поперечное сечение, показанное на рисунке 12.1 (рис. 12.7). На малую площадку  $\Delta A$ , взятую в окрестности точки  $B$ , действует внутренняя сила  $\Delta F$ . Среднее напряжение на площадке

$$\rho_{cp} = \frac{\Delta F}{\Delta A}.$$

Стянем контур площадки к точке  $B$ . В пределе получится напряжение в точке  $B$  (мера внутренних сил):

$$\rho_B = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta A}. \quad (12.13)$$

Если провести через точку  $B$  другую плоскость  $\Pi$  (рис. 12.7), отличную от плоскости поперечного сечения, получится другое напряжение, отличное от напряжения (12.13). Совокупность всех напряжений, действующих на всех

площадках, проходящих через точку, называется напряженным состоянием в точке.

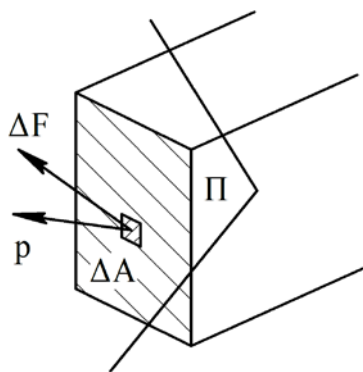


Рисунок 12.7 – Внутренняя сила, действующая в поперечном сечении бруса, и напряжение в точке

Напряжение (12.13) разлагают (рис. 12.8) на составляющие – нормальную к площадке (нормальное напряжение  $\sigma$ ) и «лежащую» на площадке (касательное напряжение  $\tau$ ). Первое – мера сопротивления материала бруса отрыву его левой части от правой, второе – мера сопротивления сдвигу левой части по сечению, отделяющему левую часть от правой. В целях исследования напряженного состояния в точке удобнее пользоваться не пучком плоскостей, проходящих через точку, а плоскостями, рассекающими бесконечно малый элемент бруса – прямоугольный параллелепипед (рис. 12.8). Можно показать, что напряжение на любой площадке, проведенной внутри бесконечно малого элемента (то есть, по сути, через точку  $B$ ), находится, если известны напряжения на трех взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через точку, – на трех взаимно перпендикулярных гранях элемента.

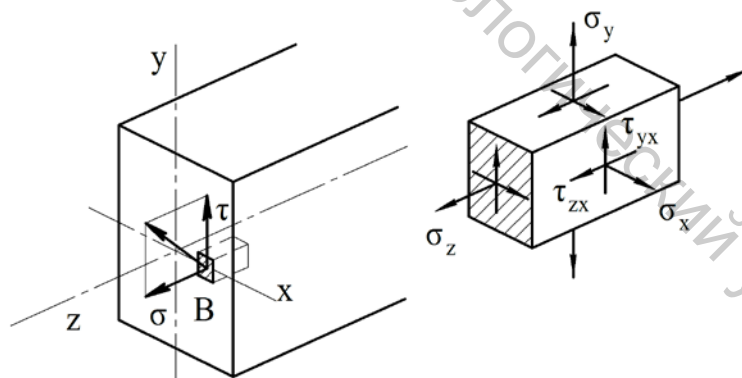


Рисунок 12.8 – Нормальное и касательное напряжения в точке

#### 12.4 Выражение внутренних силовых факторов через напряжения в поперечном сечении бруса

На рисунке 12.9 показаны напряжения на площадке  $dA$ , принадлежащей плоскости поперечного сечения. Касательное напряжение представлено двумя составляющими  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$ , параллельными осям  $x$ ,  $y$ , и действующими на площадке, перпендикулярной оси  $z$ . Сосредоточенные векторы, изображающие напряжения на площадке, – условность рисунка: следует помнить, что напряжения

равномерно распределены по бесконечно малой площадке. Поэтому, желая найти силу, действующую на площадку, соответствующее напряжение умножим на площадку. Итак, на площадку действуют нормальная сила

$$dN = \sigma dA \quad (12.14)$$

и две поперечные силы

$$dQ_x = \tau_{xz} dA, \quad dQ_y = \tau_{yz} dA. \quad (12.15)$$

Система этих внутренних сил, действующих в поперечном сечении, приводится к внутренним силовым факторам (12.7)–(12.10), выраженным через внешние силы, действующие по одну сторону от сечения.

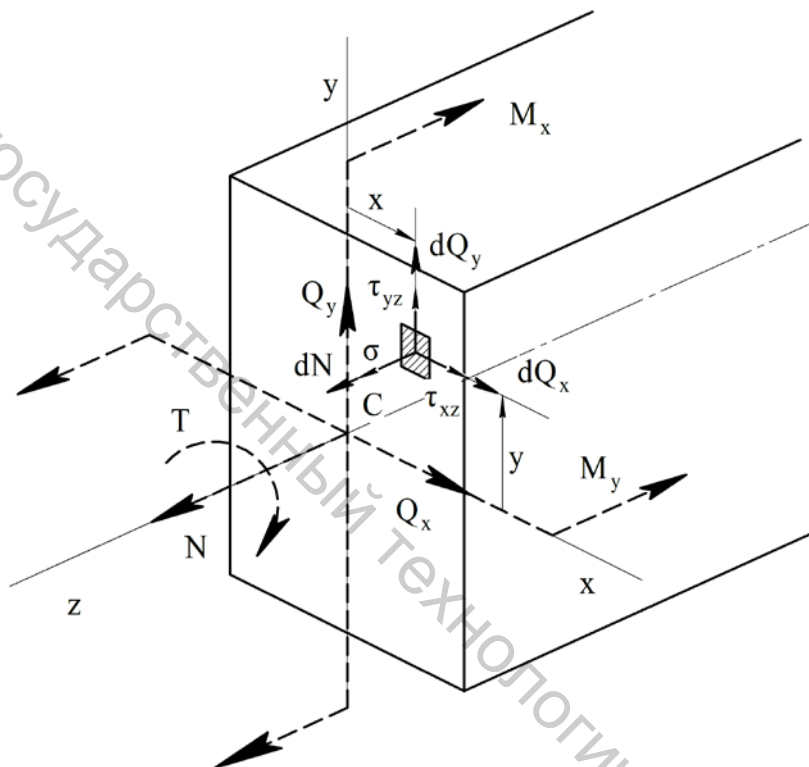


Рисунок 12.9 – Напряжения и внутренние силовые факторы в поперечном сечении бруса

Проецируя силы (12.14) и (12.15) на естественные оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и интегрируя по площади, найдем внутренние силовые факторы  $Q_x$ ,  $Q_y$ ,  $N$ :

$$Q_x = \int_A \tau_{xz} dA, \quad Q_y = \int_A \tau_{yz} dA, \quad N = \int_A \sigma dA \quad (12.16)$$

Взяв моменты сил (12.14), (12.15) относительно естественных осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , найдем изгибающие и крутящий моменты:

$$M_x = -\int_A [(\sigma dA) y], \quad M_y = -\int_A [(\sigma dA) x], \quad T = \int_A [(\tau_{xz} dA) y - (\tau_{yz} dA) x], \quad (12.17)$$

где учтены направления моментов сил  $dN$  и  $dQ_y$  относительно осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , противоположные направления моментов  $M_x$ ,  $M_y$  и  $T$ .

## Лекция 13. Нормальные напряжения в поперечном сечении

Нормальные силы  $dN$  (12.14) (перпендикулярные плоскости поперечного сечения бруса) приводятся к продольной силе  $N$  (12.16) и изгибающим моментам  $M_x$ ,  $M_y$  (12.17). Однако найти распределение нормальных напряжений  $\sigma$ , пользуясь формулами (12.17), нельзя, так как определенные интегралы в этих формулах могут принимать одни и те же значения  $N$ ,  $M_x$ ,  $M_y$  при различных подынтегральных функциях  $\sigma(x, y)$ . Необходимы предположения (гипотезы) о характере изменения формы и размеров бруса – о деформации бруса. Она – результат силового воздействия на брус и сопровождается внутренними силами и их мерой – напряжениями.

### 13.1 Гипотеза плоских сечений

Наложим на поверхность бруса сетку взаимно перпендикулярных продольных и поперечных линий и подвергнем брус растяжению (сжатию) или изгибу (рис. 13.1). Поперечные линии остаются прямыми и перпендикулярными продольным – первоначально прямые углы между линиями не изменяются.

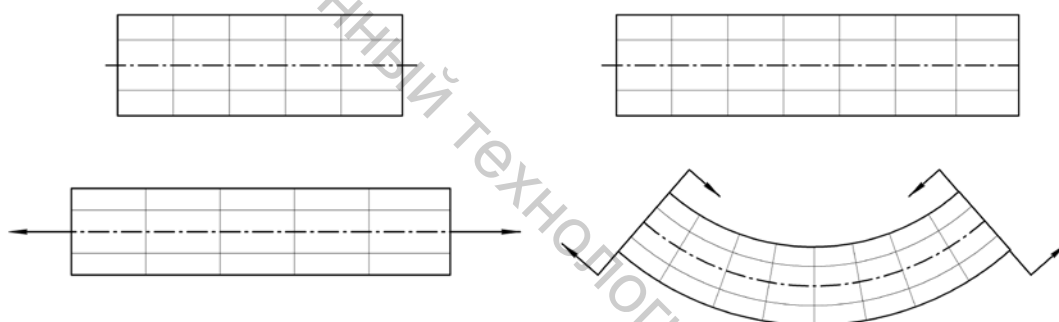


Рисунок 13.1 – Деформация бруса при растяжении и изгибе

Гипотеза: поперечные сечения бруса остаются плоскими нормальными к его продольной оси (оставшейся прямой или искривленной).

На рисунке 13.2 показан бесконечно короткий фрагмент бруса. Если интересоваться его деформацией, сводящейся к взаимным смещениям его точек, один из торцов фрагмента (например, правый) можно считать неподвижным. Левый плоский торец  $KLMN$  смещается относительно правого. Уравнение его плоскости  $K_1L_1M_1N_1$  в естественных осях координат, проведенных в плоскости  $KLMN$ ,

$$VV_1 = px + by + d,$$
$$p = const, b = const, d = const,$$

где отрезок  $VV_1 = \Delta(dz)$  – удлинение произвольного бесконечно тонкого «продольного волокна»  $V_0V$ , выделенного нами внутри фрагмента. Перейдем к относительному удлинению:

$$\varepsilon = \frac{\Delta(dz)}{dz} = \pi x + \beta y + \delta, \quad (13.1)$$

$$\pi = \text{const}, \beta = \text{const}, \delta = \text{const}.$$

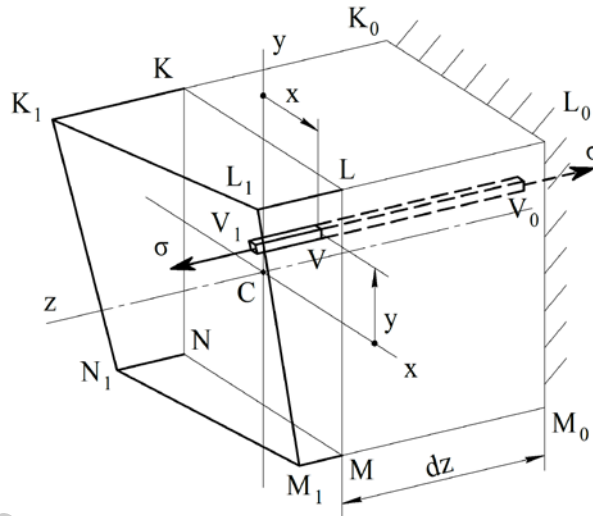


Рисунок 13.2 – Деформация фрагмента бруса

### 13.2 Гипотеза о ненадавливании продольных волокон

На боковых, верхней и нижней гранях фрагмента (рис. 13.2) нагрузок (и напряжений) нет. Если же на поверхности бруса действуют распределенные по ней силы, давления на продольные волокна намного меньше напряжений  $\sigma$  на их торцах (см. точные решения теории упругости) – давлениями продольных волокон друг на друга можно пренебречь. Гипотеза: продольные волокна не давят друг на друга, напряжений, показанных на рисунке 13.3 штриховыми стрелками, нет.

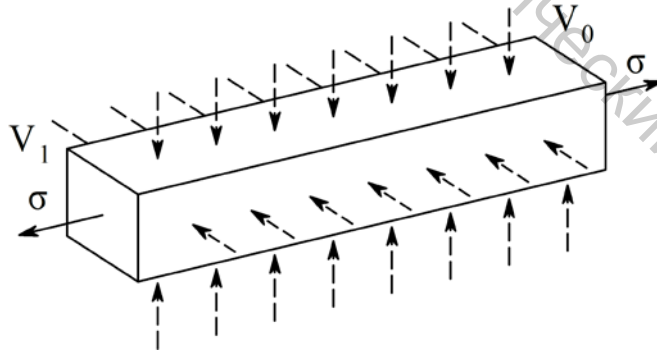


Рисунок 13.3 – Продольные волокна не давят друг на друга

Напряженное состояние продольного волокна (рис. 13.3) – линейное.

### 13.3 Закон Гука

Полагая в дальнейшем, что деформация нагруженного бруса упругая (исчезающая при разгрузке) – относительное удлинение продольного волокна (13.1)

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E}, \quad (13.2)$$

где  $E$  – характеристика жесткости материала бруса, называемая модулем Юнга, или модулем продольной упругости.

### 13.4 Распределение нормальных напряжений в поперечном сечении бруса

Используем закон Гука (13.2) в уравнении (13.1):  
нормальные напряжения

$$\sigma = E\varepsilon = Px + By + D, \quad (13.3)$$

где  $P, B, D$  – новые константы, подлежащие определению. Подставим напряжение (13.3) в интегралы (12.16, 12.17):

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma dA = P \int_A x dA + B \int_A y dA + D \int_A dA, \\ -M_x &= \int_A \sigma y dA = P \int_A xy dA + B \int_A y^2 dA + D \int_A y dA, \\ -M_y &= \int_A \sigma x dA = P \int_A x^2 dA + B \int_A xy dA + D \int_A x dA. \end{aligned} \quad (13.4)$$

Геометрические характеристики в формулах (13.4):

$$A = \int_A dA$$

– площадь сечения;

$$S_y = \int_A x dA, \quad S_x = \int_A y dA$$

– статические моменты площади сечения, равные нулю, если оси  $x$  и  $y$  – центральные;

$$I_x = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A x^2 dA$$

– осевые моменты инерции площади сечения, максимальный и минимальный, если оси  $x$  и  $y$  – главные;

$$I_{xy} = \int_A xy dA$$

– центробежный момент инерции площади сечения, равный нулю, если оси  $x$  и  $y$  – главные.

На рисунке 13.2 оси координат – естественные, то есть центральные главные, следовательно, характеристики

$$S_x = 0, \quad S_y = 0, \quad I_{xy} = 0.$$

Уравнения (13.4) приобретают вид

$$\begin{aligned} N &= DA, \\ -M_x &= BI_x, \\ -M_y &= PI_y, \end{aligned}$$

откуда искомые константы

$$P = -\frac{M_y}{I_y}, \quad B = -\frac{M_x}{I_x}, \quad D = \frac{N}{A}.$$

Напряжения (13.3)

$$\sigma = -\frac{M_y}{I_y}x - \frac{M_x}{I_x}y + \frac{N}{A}. \quad (13.5)$$

### 13.5 Принцип независимости действия сил

Изгибающие моменты  $M_x$ ,  $M_y$  и продольная сила  $N$  в формуле (13.5) выражаются через внешние силы – см. выражения (12.8, 12.10) – линейно, соответственно, и напряжения (13.5) выразятся через внешние силы линейно. Следовательно, внутренние силовые факторы (здесь  $M_x$ ,  $M_y$  и  $N$ ) и напряжения (13.5) от группы сил равны алгебраическим суммам внутренних силовых факторов и напряжений от каждой из этих сил в отдельности.

### 13.6 Простые и сложные деформации бруса

В частном случае зависимости (13.5) напряжения от группы внутренних силовых факторов равны суммам напряжений от каждого из них в отдельности. В этих последних случаях (когда действует только один внутренний силовой фактор) говорят о простых деформациях бруса – растяжении (сжатии) и прямом изгибе. При наличии нескольких внутренних силовых факторов говорят о сложной деформации бруса, или о сложном сопротивлении. Если факторы  $M_x \neq 0$ ,  $M_y \neq 0$ ,  $N = 0$ , сложная деформация бруса представляется суммой двух прямых изгибов в главных плоскостях инерции бруса  $xz$ ,  $yz$ . Именно таков изгиб вала в лекции 12. Если все силы, действующие на брус, находятся в одной плоскости, не совпадающей ни с одной из главных плоскостей, изгиб (рис. 13.4) называется косым. Все три фактора в формуле (13.5) действуют при внецентренном растяжении (сжатии) (рис. 13.5). Приведем силу  $F$  – равнодействующую внутренних сил к центру тяжести сечения  $C$  – началу естественных осей координат  $x$ ,  $y$ :

$$\begin{aligned} N &= F, \\ M_x &= -Fy_F, \\ M_y &= -Fx_F. \end{aligned}$$

Изгибающие моменты здесь отрицательные, так как первая координатная четверть сечения (первый квадрант) растягивается. Положительные изгибающие моменты отвечают сжатию первого квадранта.

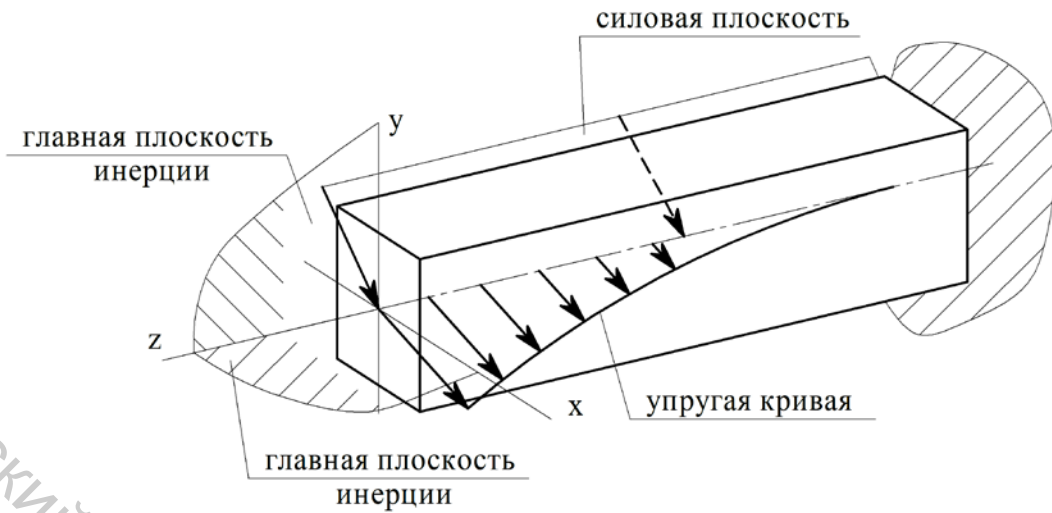


Рисунок 13.4 – Косой изгиб: плоскость искривленной продольной оси (плоскость прогибов) не совпадает с силовой плоскостью

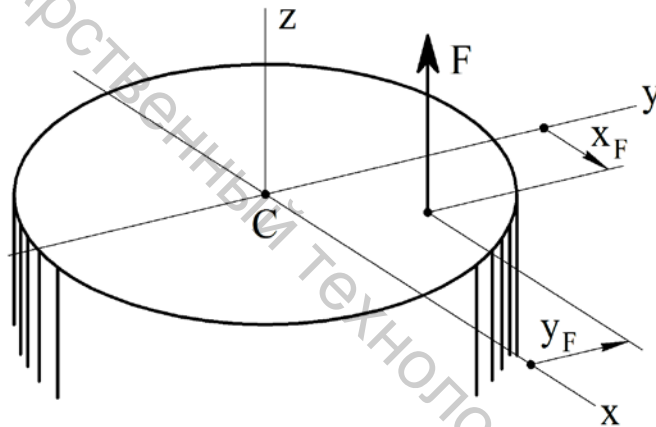


Рисунок 13.5 – Внецентренное растяжение

### 13.7 Условие прочности при растяжении (сжатии)

При растяжении (сжатии) действует один внутренний силовой фактор – продольная сила  $N$ , положительная при растяжении и отрицательная при сжатии. Такая деформация бруса возникает, когда внешние силы, действующие по одну сторону от поперечного сечения, приводятся к равнодействующей  $F$  с линией действия – продольной осью бруса. Нормальные напряжения (рис. 13.6)

$$\sigma = \frac{N}{A} = \frac{F}{A}.$$

Прочность бруса гарантируется при условии

$$\sigma \leq \sigma_{пред}, \quad (13.6)$$

где  $\sigma_{пред}$  – предельное напряжение, определяемое в лаборатории. В инженерной практике условие (13.6) усиливают, вводя требуемый «коэффициент безопасности»  $[s]$ :

$$\sigma \leq \frac{\sigma_{пред}}{[s]}. \quad (13.7)$$

Правую часть условия (13.7) называют допускаемым напряжением:

$$\sigma \leq [\sigma], \quad [\sigma] = \frac{\sigma_{пред}}{[s]}.$$

Желая не допустить остаточных деформаций, принимают за предельное напряжение предел текучести  $\sigma_T$  (близкий к пределу пропорциональности  $\sigma_{пц}$ ).

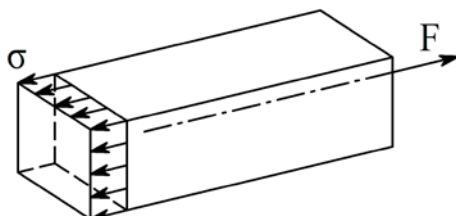


Рисунок 13.6 – Напряжения при растяжении бруса

### 13.8 Нормальные напряжения при прямом изгибе

При прямом изгибе действует один изгибающий момент, например, момент  $M_x$ , положительный, если сжаты верхние продольные волокна бруса (сжат первый квадрат поперечного сечения). Такая деформация возникает, когда внешние силы, действующие по одну сторону от поперечного сечения, приводятся к паре сил с моментом  $m$ , действующей в главной плоскости инерции  $yz$ . Нормальные напряжения в этом случае

$$\sigma = -\frac{M_x}{I_x} y = -\frac{m}{I_x} y \quad (13.8)$$

распределяются (рис. 13.7) по высоте сечения по закону прямой пропорциональности и постоянны по ширине сечения. В точках оси  $x$  напряжения (13.8) равны нулю – ось  $x$  называется нейтральной осью (линией). Слой бруса, содержащий оси  $x$  всех сечений, не удлиняется и не укорачивается, – он называется нейтральным. Сечения бруса поворачиваются вокруг нейтральных осей  $x$ , «сжимая» верхние продольные волокна и «растягивая» нижние. Нейтральный слой искривляется.

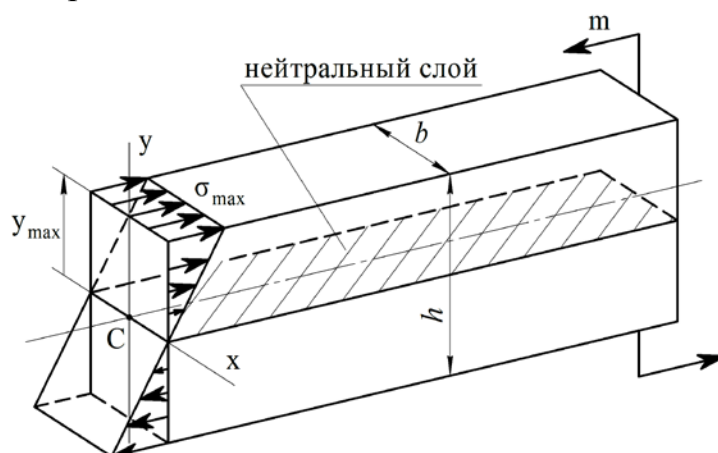


Рисунок 13.7 – Нормальные напряжения при прямом изгибе бруса

Наибольшие (по модулю) напряжения

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_x|}{I_x} y_{\max}.$$

Введем характеристику прочности поперечного сечения – момент сопротивления

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}. \quad (13.9)$$

Тогда

$$\sigma_{\max} = \frac{|M_x|}{W_x}. \quad (13.10)$$

Момент (13.9) прямоугольного поперечного сечения (рис. 13.7)

$$W_x = \frac{\frac{bh^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6}. \quad (13.11)$$

В общем случае прямого изгиба (поперечного изгиба) к изгибающему моменту (например,  $M_x$ ) добавляется поперечная сила ( $Q_y$ ) – результат приведения касательных внутренних сил. Сравним соответствующие касательные напряжения (средние в сечении)

$$\tau_{yz} = \frac{|Q_y|}{A}. \quad (13.12)$$

с нормальными (13.10). При прямом поперечном изгибе консольной балки (рис. 13.8) в ее заделке действуют

$$M_x = -(ql)\frac{l}{2}, \quad Q_y = -ql;$$

нормальные (13.10) и средние касательные напряжения (13.12)

$$\sigma_{\max} = \frac{ql^2}{2W_x}, \quad \tau_{yz} = \frac{ql}{A},$$

где момент сопротивления поперечного сечения дается формулой (13.11) и площадь сечения  $A = bh$ , то есть

$$\sigma_{\max} = \frac{3ql^2}{bh^2}, \quad \tau_{yz} = \frac{ql}{bh}.$$

Отношение

$$\frac{\sigma_{\max}}{\tau_{yz}} = 3\frac{l}{h} \gg 1$$

(так как длина бруса, по определению, много больше его поперечного размера). В дальнейшем касательные напряжения, возникающие при изгибе, не будут учитываться. Подобно этому не учитывалось давление продольных волокон друг на друга. Наибольшее напряжение

$$\max \sigma_y = \frac{q}{b},$$

и отношение

$$\frac{\sigma_{\max}}{\max \sigma_y} = 3 \frac{l^2}{h^2} \gg 1.$$

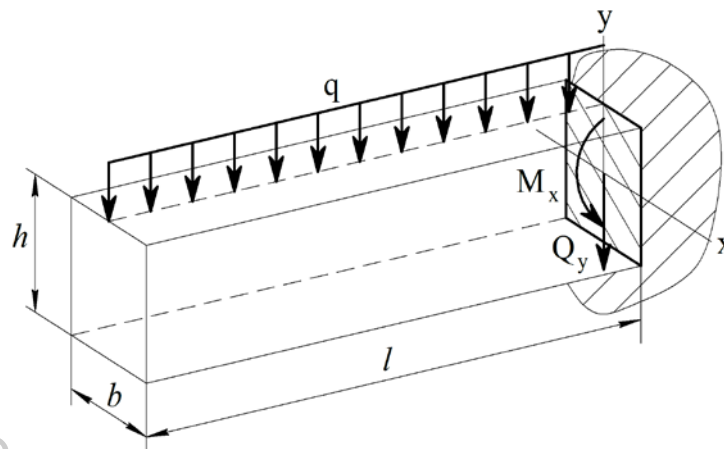


Рисунок 13.8 – Прямой поперечный изгиб бруса

## Лекция 14. Нормальные напряжения в статических и динамических задачах

### 14.1 Нормальные напряжения смятия в шпоночных соединениях

Основное назначение вала – передать вращающий момент: от полумуфты (или ведомого шкива ременной передачи) на быстроходном валу редуктора зубчатой шестерне, от колеса на тихоходном валу ведущей звездочке цепной передачи (или полумуфте), от полумуфты (или ведомой звездочки цепной передачи) барабану (или звездочкам) на приводном валу, приводящем в движение ленточный (цепной) конвейер. Ясно при этом, что перечисленные детали (полумуфта, шкивы, звездочки, барабан) составляют со своими валами одно целое, что достигается неподвижными соединениями с валами. Одно из таких – соединение призматической шпонкой (рис. 14.1), отличающееся простотой конструкции и сравнительно низкой стоимостью.

Нормальные напряжения смятия равномерно распределяются по нагруженным плоским граням шпонки площадями  $l_p t_1$  и  $l_p (h - t_1)$ , где  $h$  – высота шпонки,  $t_1$  – глубина шпоночного паза,  $l_p$  – рабочая длина граней. Наряду с ними действуют касательные напряжения среза  $\tau$ . Наибольшие – напряжения смятия

$$\sigma_{см} = \frac{F_t}{l_p (h - t_1)} \approx \frac{F_t}{l_p \cdot 0,4h}, \quad (14.1)$$

напряжения среза

$$\tau_{ср} = \frac{F_t}{bl_p}.$$

Размеры стандартных шпонок  $b$  и  $h$  подбираются в зависимости от диаметра вала  $d$  так, что напряжения, определяющие нагрузку на шпонку, – напряжения смятия

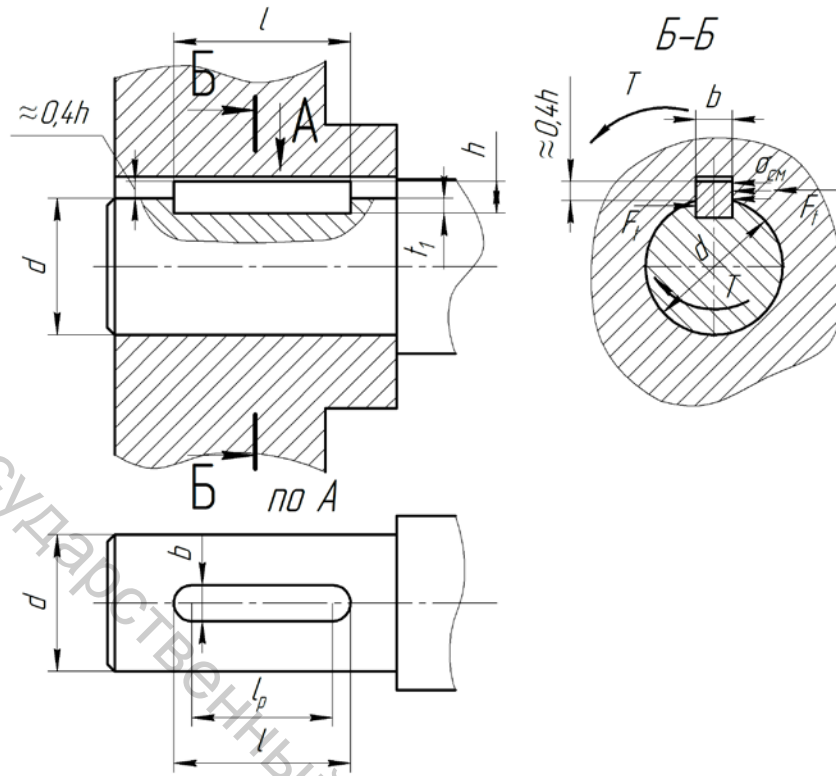


Рисунок 14.1 – Шпоночное соединение

(14.1). Подставляя их в условие прочности

$$\sigma_{\text{см}} \leq [\sigma_{\text{см}}],$$

найдем требуемую рабочую длину шпонки:

$$l_p \geq \frac{F_t}{0,4h[\sigma_{\text{см}}]}, \quad (14.2)$$

где  $[\sigma_{\text{см}}]$  – допускаемое напряжение,

$$F_t = \frac{2T}{d},$$

( $d$  – диаметр вала,  $T$  – момент, передаваемый валом) – окружная сила, равная величине равнодействующих нормальных сил, действующих на рабочих поверхностях шпонки: рабочая длина (14.2)

$$l_p \geq \frac{2T}{d \cdot 0,4h \cdot [\sigma_{\text{см}}]}.$$

Длина шпонки

$$l \geq l_p + b$$

принимается по стандарту.

## 14.2 Нормальные напряжения при изгибе прямых зубьев зубчатых передач

По мере вращения шестерни на рисунке 14.2 нормальная сила  $F_n$  (и вместе с ней (рис. 14.3) поперечная составляющая  $F'_t$ ) удаляется от основания – заделки зуба. Наибольший изгибающий момент в заделке зуба шестерни возникает в момент его выхода из зацепления. В случае колеса следует рассматривать момент входа зуба в зацепление.

Разумеется, угол  $\gamma = 90^\circ - \alpha'$ , составляемый нормальной силой  $F_n$  с продольной осью зуба, меньше (рис. 14.2) угла  $90^\circ - \alpha$ , поперечная составляющая силы  $F_n$  (рис. 14.3)

$$F'_t = F_n \sin \gamma = F_n \cos \alpha' \quad (14.3)$$

не равна окружной силе  $F_t = F_n \cos \alpha$  в полюсе зацепления (рис. 14.2). Продольная составляющая (рис. 14.3)

$$F'_r = F_n \cos \gamma = F_n \sin \alpha' \quad (14.4)$$

не равна радиальной силе  $F_r = F_n \sin \alpha$ . Конечно, считается, что нагрузка  $F_n$  воспринимается одной парой зубьев, так как неточности изготовления в назначаемых обычно 7, 8, 9 степенях точности не гарантируют в указанные моменты обязательного дупарного зацепления.

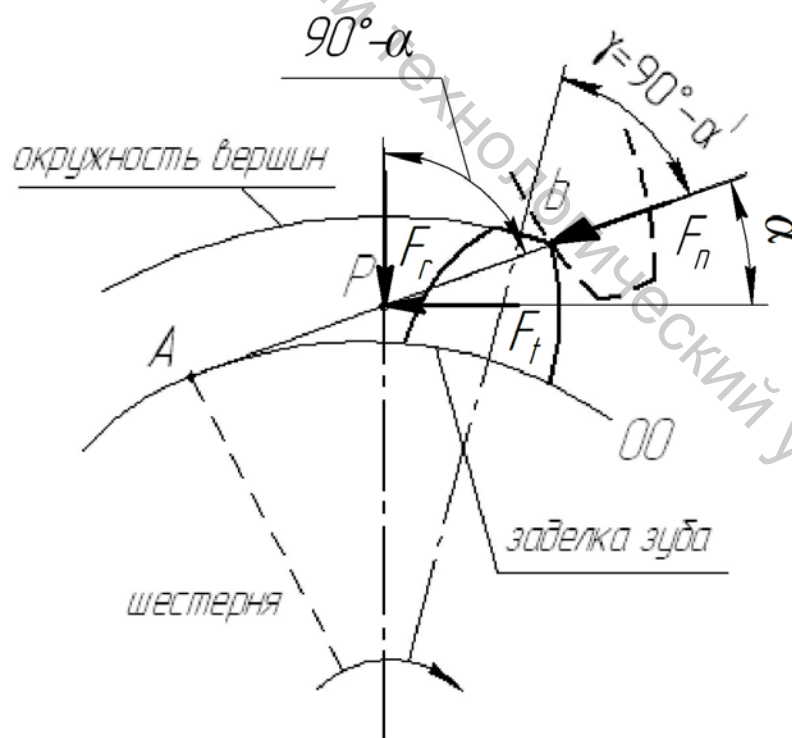


Рисунок 14.2 – Момент выхода зуба шестерни из зацепления

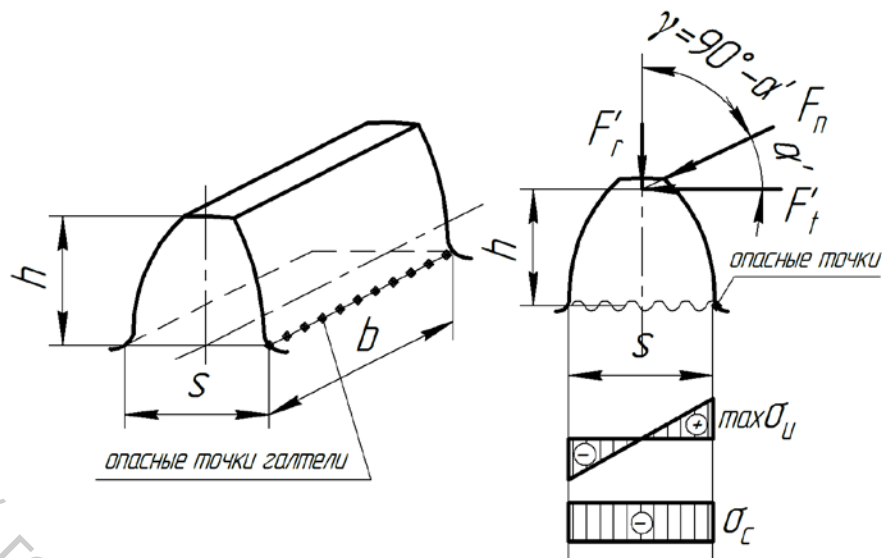


Рисунок 14.3 – Напряжения в заделке

На рисунке 14.3 показаны напряжения в заделке и опасные точки у галтели – места перехода поверхности зуба в поверхность впадины.

Деформация зуба – результат наложения на прямой поперечный изгиб силой (14.3) сжатия силой (14.4). Наибольшие растягивающие напряжения при изгибе зуба (рис. 14.3)

$$\max \sigma = \frac{6F_t' h}{\delta s^2}, \quad (14.5)$$

нормальные напряжения при сжатии зуба

$$\sigma_c = -\frac{F_r'}{\delta s}. \quad (14.6)$$

Напряжения от нескольких сил равны сумме напряжений от каждой из них в отдельности (принцип независимости действия сил); напряжения в опасных точках заделки зуба получаются суммированием напряжений (14.5) и (14.6):

$$\sigma_F = \max \sigma_u + \sigma_c. \quad (14.7)$$

Растягивающие напряжения для зубьев стальных колес опаснее сжимающих, пусть они и несколько меньше сжимающих.

Желая учесть неравномерность распределения нагрузки по ширине зуба, неточности изготовления колес и концентрацию напряжений у галтели зуба, умножим напряжения (14.7) на коэффициенты  $K_{F\beta}$ ,  $K_{Fv}$  и  $K_T$ . Подставляя теперь в формулы (14.5) и (14.6) выражения (14.3) и (14.4), учитывая в них нормальную силу в виде  $F_t / \cos \alpha$ , найдем напряжения (14.7) в виде

$$\begin{aligned} \sigma_F &= K_{F\beta} \cdot F_{Fv} \left[ \frac{6F_t (mh')}{\delta (ms')^2} \cdot \frac{\cos \alpha'}{\cos \alpha} - \frac{F_t}{\delta (ms')} \cdot \frac{\sin \alpha'}{\cos \alpha} \right] K_T = \\ &= \frac{F_t K_{F\beta} K_{Fv}}{\delta m} \left[ \left( \frac{6h'}{s'^2} \cdot \frac{\cos \alpha'}{\cos \alpha} - \frac{1}{s'} \cdot \frac{\sin \alpha'}{\cos \alpha} \right) K_T \right], \end{aligned} \quad (14.8)$$

где размеры зуба  $s$ ,  $h$  выражены через модуль зацепления  $m$ .

Нетрудно увидеть, что перед квадратными скобками в формуле (14.8) находится удельная расчетная окружная сила (9.4), разделенная на модуль зацепления; в квадратных скобках – коэффициент формы зуба  $Y_F$ , зависящий от числа зубьев  $z$ . Условие прочности зубьев при изгибе

$$\sigma_F = Y_F \frac{W_{Ft}}{m} \leq [\sigma_F], \quad (14.9)$$

где

$$W_{Ft} = \frac{F_t k_{F\beta} k_{FV}}{b} \quad (14.10)$$

– удельная расчетная окружная сила.

Расчетное напряжение в случае прямых зубьев конических передач аналогично напряжению (14.9):

$$\sigma_F = Y_F \frac{W_{Ft}}{0,85 m_m},$$

где  $m_m$  – модуль зацепления в среднем сечении зацепляющихся зубьев, 0,85 – коэффициент, учитывающий снижение нагрузочной способности конической передачи (если сравнивать с нагрузочной способностью цилиндрической передачи).

### 14.3 Нормальные напряжения при изгибе косых зубьев

Расчетное напряжение в косозубой цилиндрической передаче получается по формуле, аналогичной формуле (14.9): в формулу (14.8) вместо окружной силы  $F_t$  вводим квазиокружную силу – см. выражение (8.8) –

$$F'_t = \frac{F_t}{\cos \beta},$$

$\beta$  – угол наклона косых зубьев; вместо ширины колес  $b$  – суммарную длину контактных линий (8.2)

$$l_{\Sigma} = \varepsilon_{\alpha} \frac{b}{\cos \beta},$$

$\varepsilon_{\alpha}$  – коэффициент торцевого перекрытия; вместо модуля  $m$  – окружной модуль (7.16)

$$m_t = \frac{m_n}{\cos \beta},$$

$m_n$  – стандартный нормальный модуль зацепления. Формула (14.9) приобретает вид

$$\sigma_F = Y_F Y_{\varepsilon} Y_{\beta} \frac{W_{Ft}}{m_n}. \quad (14.11)$$

Коэффициенты в формуле (14.11):  $Y_\varepsilon = 1/\varepsilon_\alpha$  – коэффициент, учитывающий перекрытие косых зубьев;  $Y_\beta = \cos \beta$  – коэффициент, учитывающий наклон зубьев,  $Y_F$  – коэффициент формы зуба, определяемый по эквивалентному числу зубьев косозубого колеса; удельная расчетная окружная сила дается формулой (14.10).

Червячное колесо рассматривают как косозубое: расчетное напряжение

$$\sigma_F = 0,7Y_F \frac{W_{Ft}}{m_n},$$

где удельная расчетная окружная сила

$$W_{Ft} = \frac{F_{t2}}{b_2} k_F,$$

$F_{t2}$  – окружная сила на колесе,  $b_2$  – его ширина,  $k_F$  – коэффициент расчетной нагрузки; нормальный модуль зацепления

$$m_n = m \cos \gamma$$

$m$  – осевой модуль червячного зацепления ( $m = P_x / \pi$ ,  $P_x$  – шаг винтовой нарезки червяка),  $\gamma$  – угол подъема винтовой резьбы на червяке, равный углу наклона зубьев на колесе; коэффициент формы зуба  $Y_F$  определяется эквивалентным числом зубьев колеса

$$z_v = z_2 / \cos^3 \gamma.$$

Добавим к этому, что проверяются на изгиб по условию

$$\sigma_F \leq [\sigma_F]$$

только зубья бронзового венца колеса, ибо изгибная прочность витков стального червяка намного выше.

#### 14.4 Открытая зубчатая передача: проектный расчет

Закрытые зубчатые передачи работают в масляной ванне. Колесо, например, цилиндрической передачи окунается в масло и переносит его в зону зацепления. Зубья, находящиеся в контакте, разделяются масляной пленкой. Если на их поверхности появились усталостные микротрещины, масло пленки нагнетается в них и, запертое в них под давлением, расширяет трещины. Вероятность появления поверхностных микротрещин – зародышей будущего выкрашивания материала зубьев тем выше, чем больше контактные напряжения. Они определяющие в проектном расчете закрытых передач.

Открытые зубчатые передачи работают в условиях абразивного износа (истирания), опережающего развитие усталостных трещин. Зубья утончаются, их изгибная прочность падает, изгибные напряжения (14.11) следует ограничить: размеры зубчатых колес находятся из условия

$$\sigma_F \leq [\sigma_F], \quad (14.12)$$

где  $[\sigma_F]$  – допускаемое напряжение.

В случае цилиндрической косозубой передачи условие (14.12) принимает – см. формулу (14.11) – вид

$$Y_{\beta} Y_{\varepsilon} Y_F \frac{W_{Ft}}{m_n} \leq [\sigma_F], \quad (14.13)$$

где удельная расчетная окружная сила (14.10)

$$W_{Ft} = \frac{F_t}{b} k_{F\beta} k_{FV}, \quad (14.14)$$

окружная сила (8.6)

$$F_t = \frac{2T_1}{d_1}, \quad (14.15)$$

диаметр шестерни и ширины колес

$$d_1 = \frac{m_n z_1}{\cos \beta}, \quad b = \psi_{bd} d_1; \quad (14.16)$$

$T_1$  – вращающий момент на шестерне,  $\beta$  – угол наклона зубьев,  $m_n$  – нормальный (стандартный) модуль зацепления,  $z_1$  – число зубьев шестерни. Подстановка значений (14.14)–(14.16) в условие (14.13) дает уравнение

$$Y_F Y_{\varepsilon} Y_{\beta} \frac{2T_1 k_{F\beta} k_{FV}}{\frac{m_n z_1}{\cos \beta} \psi_{bd} \frac{m_n z_1}{\cos \beta} m_n} = [\sigma_F]$$

относительно куба модуля  $m_n$ . Требуемый модуль, определяющий все размеры зацепляющихся колес,

$$m_n = \sqrt[3]{2Y_{\beta} Y_{\varepsilon} k_{FV} \cos^2 \beta} \cdot \sqrt[3]{\frac{T_1 k_{F\beta}}{z_1^2 \psi_{bd} \left( \frac{[\sigma_F]}{Y_F} \right)}}$$

или

$$m_n = k_m \sqrt[3]{\frac{T_1 k_{F\beta}}{z_1^2 \psi_{bd} \left( \frac{[\sigma_F]}{Y_F} \right)}}$$

где коэффициент  $k_m = 11,2$ ; в расчете прямозубых передач  $k_m = 14$ . Разумеется, в расчет берется меньшее из двух значений  $[\sigma_F]/Y_F$  (определяющее слабое звено передачи).

Зубья колес нагружаются в зацеплении – их нагружение циклическое. Допускаемое напряжение для слабого звена [4, с. 210]

$$\sigma_F = \frac{\sigma_{Flimb}}{s_F} k_{FL},$$

где  $\sigma_{Flimb}$  – базовый предел изгибной выносливости,  $s_F$  – коэффициент безопасности,

$$k_{FL} = \sqrt[6]{\frac{N_{F0}}{N_F}}$$

– коэффициент долговечности, определяемый отношением базового числа циклов  $N_{F0}$  к расчетному числу циклов перемены напряжений  $N_F$ , при постоянной нагрузке  $N_F = 60nT$  ( $T$  – срок службы передачи в часах,  $n$  – частота вращения слабого звена передачи). Если  $N_F \geq N_{F0}$ , следует принять  $k_{FL} = 1$ .

#### 14.5 Растяжение-сжатие бруса: скорость распространения продольной упругой волны

На рисунке 14.4 изображен заземленный брус, торцевое сечение которого колеблется по гармоническому закону

$$w_0 = W_0 \sin \Omega t.$$

Здесь  $\Omega$  – круговая (циклическая) частота колебаний,  $W_0$  – их амплитуда. Колебания поперечного сечения бруса, взятого на расстоянии  $z$  от торца, начнутся с опозданием (в момент  $z/c$ , где  $c$  – скорость распространения упругой волны):

$$\omega = W_0 \sin \Omega \left( t - \frac{z}{c} \right). \quad (14.17)$$

Бесконечно близкие сечения, показанные на рисунке, колеблются, имея различные начальные фазы, следовательно, получают в один и тот же момент различные смещения  $\omega$  и  $\omega + d\omega$ . Удлинение выделенного на рисунке элемента равно в этот момент  $d\omega$ , относительное удлинение

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dz}.$$

Нормальные напряжения в поперечном сечении бруса определяются законом Гука

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{\partial \omega}{\partial z};$$

нормальная сила в сечении

$$N = \sigma A = EA \frac{\partial \omega}{\partial z}.$$

Элемент бруса движется – нормальные силы на его торцах «уравновешиваются» силой инерции

$$dF_u = \rho Adz \frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2}$$

( $Adz$  – объем элемента,  $\rho$  – плотность материала бруса,  $\rho Adz$  – масса элемента,  $\partial^2 \omega / \partial t^2$  – его ускорение):

$$dN = dF_u,$$

то есть

$$EA \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} dz = \rho A dz \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2},$$

$$E \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} = \rho \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2}.$$

Используя здесь закон (14.17), получим

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} = -\frac{1}{c^2} \Omega^2 W_0 \sin \Omega \left( t - \frac{z}{c} \right),$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = -\Omega^2 W_0 \sin \Omega \left( t - \frac{z}{c} \right),$$

$$E \frac{1}{c^2} = \rho;$$

искомая скорость

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}.$$

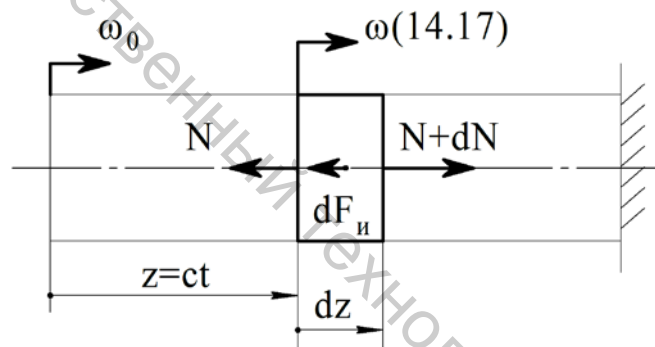


Рисунок 14.4 – Колебания поперечных сечений

## Лекция 15. Кручение круглого стержня

### 15.1 Угол сдвига

На рисунке 15.1 показан круглый стержень с продольными и поперечными линиями на поверхности. Рассмотрим деформацию стержня, при которой его продольная ось не удлиняется и не укорачивается, остается прямолинейной, а поперечные сечения стержня, оставаясь перпендикулярными к оси, поворачиваются вокруг оси как жесткие диски, не удаляясь друг от друга и не приближаясь друг к другу. На рисунке 15.1 показано, как деформируются первоначально прямоугольные элементы сетки линий. Эти элементы, становясь параллелограммами, получают сдвиг. Приращения (положительные и отрицательные) первоначально прямых углов называются углами сдвига.

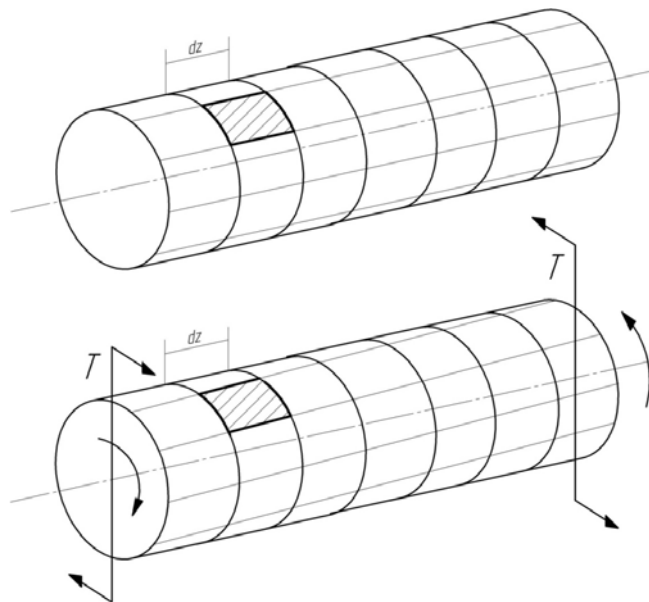


Рисунок 15.1 – Сдвиги прямоугольных элементов поверхности стержня в его кручении

На рисунке 15.2 показан "вынутый" из стержня бесконечно короткий фрагмент стержня. Пусть переднее сечение (передний торец) фрагмента повернулось относительно заднего торца на угол закручивания  $d\varphi$ . Любой из радиусов  $CA$  переднего торца поворачивается на тот же угол. Мысленно "вырежем" из фрагмента бесконечно тонкую трубку и найдем угол сдвига  $\gamma$  на ее поверхности:

$$\gamma = \frac{aa'}{dz} = \frac{C a d\varphi}{dz} = \rho \frac{d\varphi}{dz}. \quad (15.1)$$

Угол сдвига (15.1) пропорционален радиусу трубки.

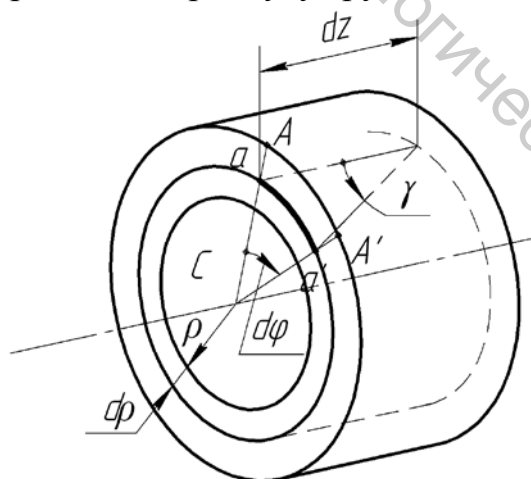


Рисунок 15.2 – Угол сдвига на поверхности бесконечно тонкой трубки

### 15.2 Закон парности касательных напряжений

Рассмотрим теперь первоначально прямоугольный элемент трубки (рис. 15.3). Его сдвиг – результат действия касательных сил  $dT$  и  $dT'$  на его гранях.

Касательные силы образуют две пары (см. вид по стрелке  $A$ ), находящиеся в равновесии. Их моменты равны и противоположны по знаку:

$$dTdz - dT'ds = 0. \quad (15.2)$$

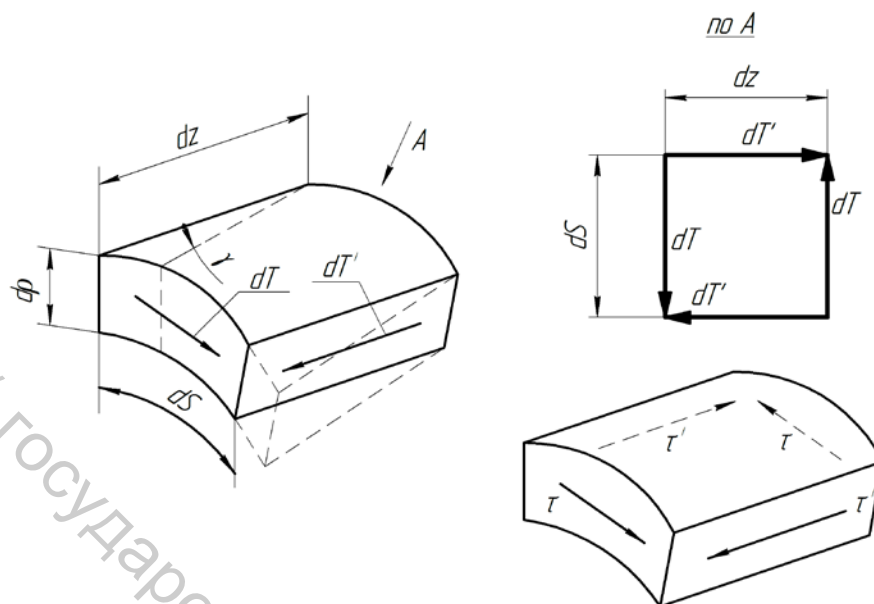


Рисунок 15.3 – Сдвиг элемента трубки на рисунке 15.2, закон парности касательных напряжений

Касательные силы в уравнении (15.2) равны произведениям касательных напряжений  $\tau$  и  $\tau'$  на площади граней, где они действуют:

$$dT = \tau dsd\rho, \quad dT' = \tau' dzd\rho. \quad (15.3)$$

Вводя силы (15.3) в уравнение (15.2), найдем закон парности касательных напряжений (рис. 15.3)

$$\tau = \tau'. \quad (15.4)$$

### 15.3 Распределение касательных напряжений при кручении

Закон Гука

$$\tau = G\gamma,$$

где  $G$  – модуль сдвига материала стержня, дает (см. формулу (15.1)) линейное распределение касательных напряжений (рис. 15.4) вдоль любого из радиусов поперечного сечения стержня:

$$\tau = K\rho, \quad (15.5)$$

где  $K$  – неизвестный пока коэффициент пропорциональности. Приведем касательные силы в поперечном сечении

$$dT = \tau dA \quad (15.6)$$

к центру тяжести сечения  $C$ . Как видно на рисунке 15.4, любой из сил  $dT$  найдется "пара" – такая же сила, но направленная противоположно первой.

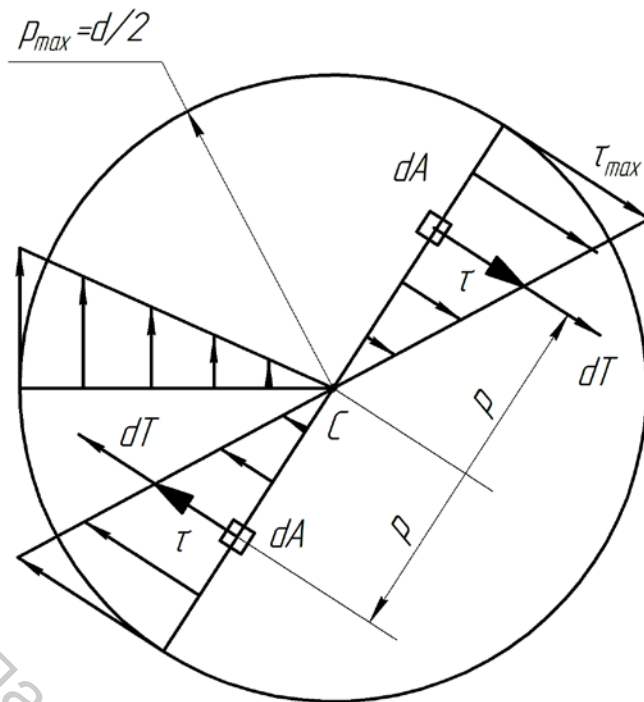


Рисунок 15.4 – Распределение касательных напряжений в сечении закрученного стержня

Итак, система внутренних сил, действующих в поперечном сечении стержня, – система пар, приводящихся к одной паре. Ее момент (крутящий момент  $T$ ) равен главному моменту сил (15.6)

$$T = \int_A \rho(\tau dA).$$

Используя здесь напряжения (15.5), найдем:

$$T = K \int_A \rho^2 dA = KI_p, \quad (15.7)$$

где введена геометрическая характеристика круглого сечения

$$I_p = \int_A \rho^2 dA, \quad (15.8)$$

называемая полярным моментом инерции его площади.

К моменту (15.7) приводятся и внешние силы, действующие на часть стержня, расположенную перед "вынутым" фрагментом на рисунке 15.2. Внешние силы, действующие на торцы стержня, должны приводиться к парам, показанным на рисунке 15.1. Соответствующую деформацию называют кручением стержня.

Найдем, наконец, коэффициент  $K$  в формуле (15.5) и формулу для касательных напряжений при кручении: формулы (15.7) и (15.5) дают

$$K = \frac{T}{I_p}, \quad \tau = \frac{T}{I_p} \rho, \quad (15.9)$$

где полярный момент инерции круга (15.8, 11.13)

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32}. \quad (15.10)$$

Вращающие моменты могут передаваться валу посредством шпонок, размещаемых в шпоночных пазах. Полярный момент инерции (15.8) сечения на рис. 15.5

$$I_p = I_p^K - I_p^n,$$

где  $I_p^K$  – полярный момент инерции круга (15.10);  $I_p^n$  – полярный момент инерции отрицательной площади сечения шпоночного паза, равный произведению этой площади на квадрат расстояния ее центра тяжести от центра  $C$ , то есть

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} - (\epsilon t_1) \left( \frac{d}{2} - \frac{t_1}{2} \right)^2 = \frac{\pi d^4}{32} - \frac{(\epsilon t_1)(d - t_1)^2}{4}. \quad (15.11)$$

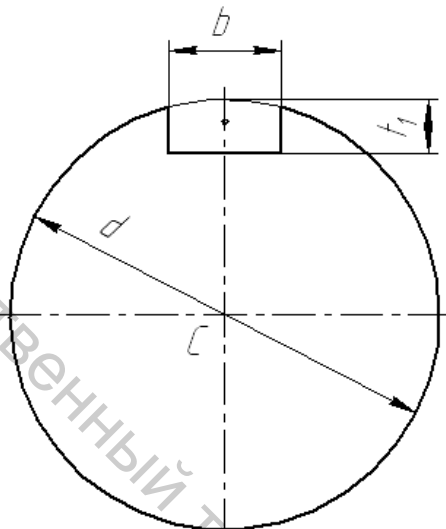


Рисунок 15.5 – К вычислению полярного момента инерции (15.11)

#### 15.4 Моменты сопротивления при кручении

Наибольшие касательные напряжения (15.9) действуют (рис. 15.4) на периферии сечения:

$$\tau_{\max} = \frac{T}{I_p} \rho_{\max} = \frac{T}{W_p}. \quad (15.12)$$

Момент сопротивления сечения при кручении в формуле (15.12)

$$W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}}. \quad (15.13)$$

Если сечения сплошные круговые, радиус  $\rho_{\max} = d/2$  и момент (15.13) (см. полярный момент инерции (15.10))

$$W_p = \frac{\pi d^4 / 32}{d/2} = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3. \quad (15.14)$$

Если сечение взято на участке со шпоночным пазом, радиус  $\rho_{\max} = d/2$  и момент (15.13) (см. формулу (15.11))

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} - \frac{(\epsilon t_1)(d - t_1)^2}{2d}. \quad (15.15)$$

## 15.5 Расчет на прочность

Выходные концы валов (с насаженными на них полумуфтами, шкивами, звездочками) работают на кручение. Условие прочности вала

$$\tau_{\max} \leq [\tau],$$

или (см. наибольшее касательное напряжение (15.12))

$$\frac{T}{W_p} \leq [\tau], \quad (15.16)$$

где момент сопротивления круглого сечения дается формулой (15.14).

Из условия (15.16) находится требуемый диаметр выходного конца вала:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{T}{0,2[\tau]}}, \quad (15.17)$$

допускаемое касательное напряжение  $[\tau] = 20 \dots 25$  МПа.

Найденный диаметр (15.17) и длина выходного участка вала согласуются с диаметром насадочного отверстия и длиной ступицы соединительной муфты (в курсовом проекте упругой втулочно-пальцевой МУВП или зубчатой МЗ), способной передать расчетный момент:

$$T_p = KT,$$

$K$  – коэффициент режима работы привода, или же с длинами ступиц шкива, звездочки ременной, цепной передач.

## Лекция 16. Напряженное состояние вала

### 16.1 Расчетная схема

На рисунке 16.1 показан быстроходный вал прямозубого редуктора в приводе, построенном по схеме ЭД → СМ → ЗП → ОП → П (см. лекцию 6). На него действуют окружная и радиальная силы в зацеплении шестерни с колесом, сила кривошипного эффекта работающей муфты

$$F_m \approx 125\sqrt{T_B}$$

и момент, передаваемый полумуфтой.

Перенесем все силы на ось вала: радиальная сила  $F_r$  в зацеплении переносится вдоль линии действия, окружная сила  $F_t$  – параллельным переносом. Во втором случае наряду с силой  $F_t$ , приложенной в точке  $C$  на оси вала, "возникает" пара сил с моментом, уравнивающим вращающий момент  $T_B$ . Действительно, момент "возникшей" пары, равный моменту переносимой силы  $F_t$  относительно новой точки приложения:

$$F_t \frac{d_1}{2} = \frac{2T_B}{d_1} \frac{d_1}{2} = T_B.$$

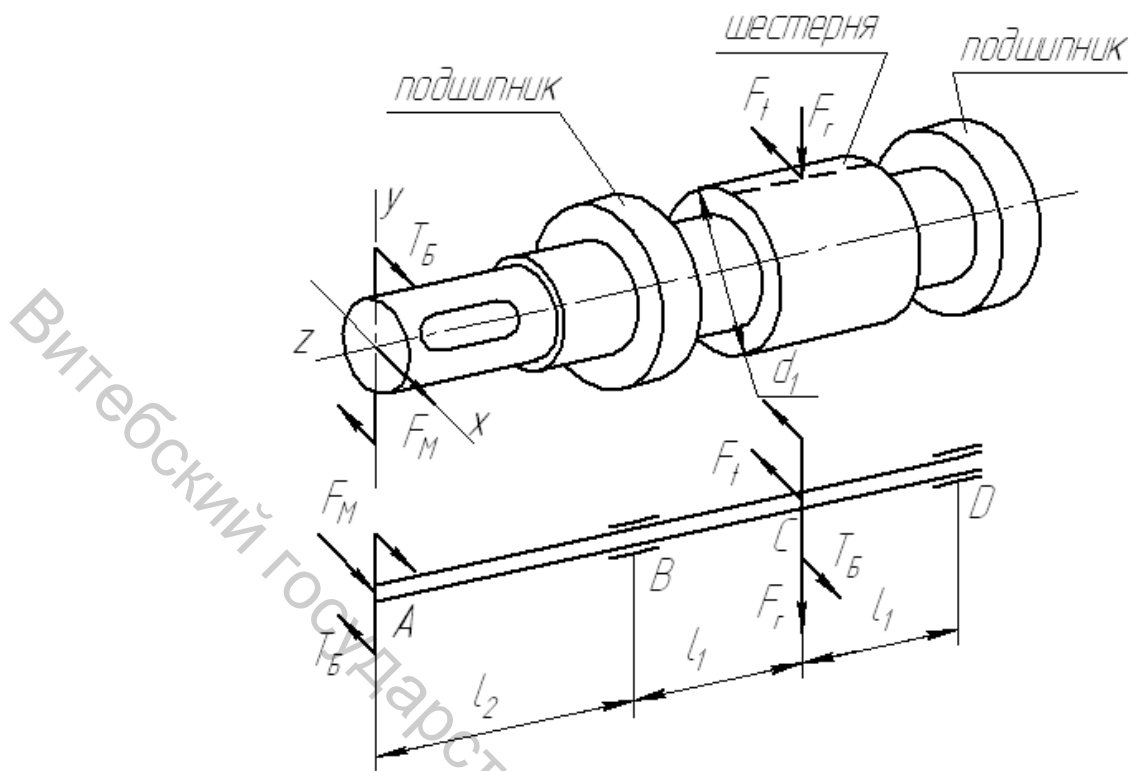


Рисунок 16.1 – Быстроходный вал редуктора и его расчетная схема

## 16.2 Опорные реакции

Силы, действующие на вал, воспринимаются подшипниками, передающими их корпусу редуктора. Со стороны корпуса действуют опорные реакции. Подшипники воспринимают их своими внешними кольцами и при посредстве тел качения (шариков или роликов) передают эти силы своим внутренним кольцам и, наконец, валу.

Представим все заданные силы на валу двумя системами сил – силами, действующими в вертикальной на рисунке плоскости  $YZ$ , и силами, действующими в горизонтальной плоскости  $XZ$ ; соответственно, и опорные реакции представляются своими вертикальными и горизонтальными составляющими.

На рисунке 16.2 показаны вертикальные силы. Единственная заданная сила  $F_r$  приложена в середине пролета  $BD$ , опорные реакции, уравнивающие силу  $F_r$ , очевидно, равны по величине. Уравнение проекций  $\Sigma Y = 0$ , или

$$R_{ey} - F_r + R_{Dy} = 0,$$

дает

$$R_{ey} = R_{Dy} = \frac{1}{2} F_r. \quad (16.1)$$

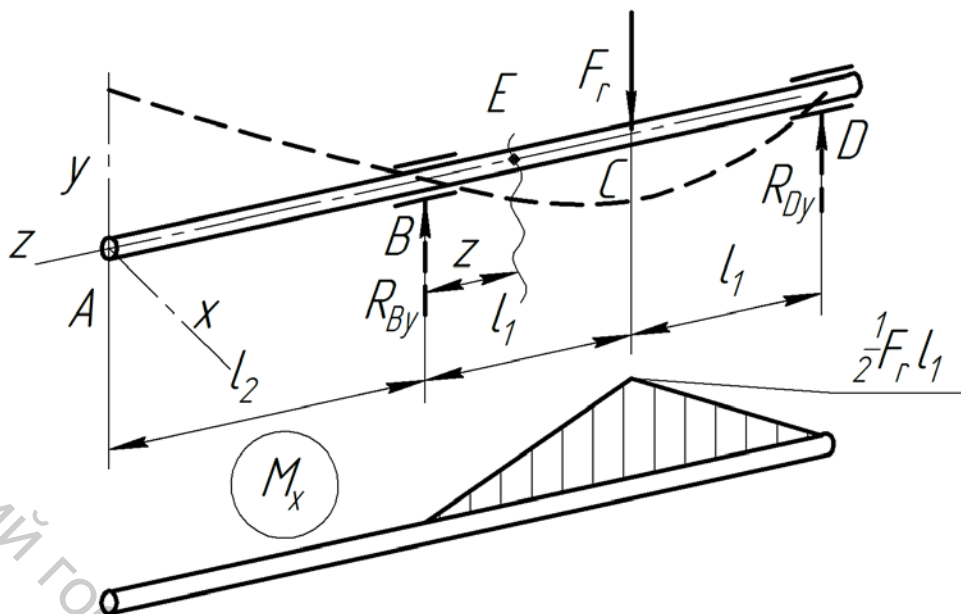


Рисунок 16.2 – Опорные реакции и изгибающие моменты в вертикальной плоскости

На рисунке 16.3 показаны горизонтальные силы. Опорные реакции удобно найти из уравнений моментов:

$$\begin{aligned} \sum m_{By} = 0, \quad -R_{Dx} \cdot 2l_1 + F_t \cdot l_1 + F_m l_2 &= 0, \\ R_{Dx} &= \frac{F_t \cdot l_1 + F_m \cdot l_2}{2l_1}; \\ \sum m_{Dy} = 0, \quad F_m (l_2 + 2l_1) - R_{Bx} \cdot 2l_1 - F_t l_1 &= 0, \\ R_{Bx} &= \frac{F_m (l_2 + 2l_1) - F_t \cdot l_1}{2l_1}. \end{aligned} \quad (16.2)$$

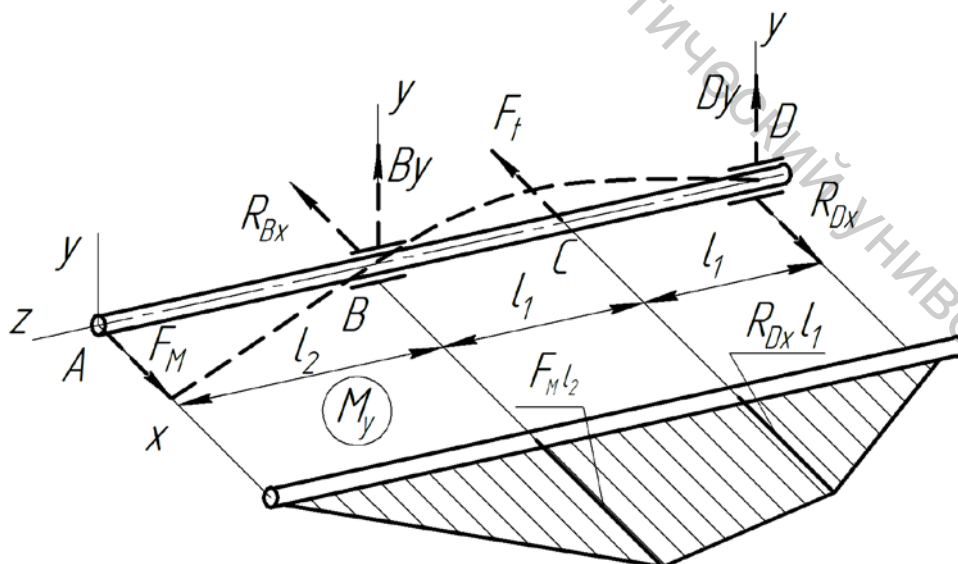


Рисунок 16.3 – Опорные реакции и изгибающие моменты в горизонтальной плоскости

Правило знаков для моментов в уравнениях равновесия (16.2): момент силы, "вращающей" вал вокруг взятой оси против хода часовой стрелки (при наблюдении с конца оси), считаем положительным. Например, силы  $F_m$  и  $F_t$  "вращают" вал вокруг оси  $B_y$  против хода часовой стрелки – моменты обеих сил в первом уравнении (16.2) положительные; реакция  $R_{Dx}$  "вращает" вал вокруг оси  $B_y$  по ходу часовой стрелки – ее момент в первом уравнении (16.2) отрицательный.

### 16.3 Изгибающие моменты

При изгибе в вертикальной плоскости (рис. 16.2) искривляется участок  $BD$ , консоль  $AB$  поворачивается, не искривляясь. На искривленном участке  $BD$  сжатыми оказываются верхние "волокна", в пределах всего участка  $BD$  изгибающие моменты  $M_x$  считаем положительными.

Изгибающий момент в произвольном сечении  $E$  участка  $BC$  найдем, приводя единственную "левую" силу  $R_{By}$  к сечению  $E$ , то есть перенося силу  $R_{By}$  в сечение  $E$  и добавляя к ней пару сил с моментом (изгибающим моментом)  $R_{By}z$ . Свяжем теперь положительный знак момента с направлением силы  $R_{By}$ : изгибающий момент вертикальной силы, направленной вверх, положительный.

Итак, в пределах участка  $BC$  изгибающий момент

$$M_x = R_{By}z,$$

изменяясь по линейному закону, изменяется от нуля в сечении  $B$  (при  $z = 0$ ) до наибольшего  $R_{By}l_1$  в сечении  $C$  (при  $z = l_1$ ).

В пределах участка  $DC$  удобнее пользоваться "правой" силой  $R_{Dy}$ . Положительный знак ее момента отвечает направлению силы  $R_{Dy}$  (направлена вверх). В сечении  $D$ , очевидно,  $M_x = 0$ , наибольший момент на участке  $DE$  возникает в наиболее удаленном от силы  $R_{Dy}$  сечении  $C$ :

$$M_x = R_{Dy}l_1.$$

Если учесть решение уравнения равновесия (16.1), найдем в сечении  $C$

$$M_x = R_{Dy}l_1 = R_{By}l_1 = \frac{1}{2}F_t l_1.$$

Как видим, величина изгибающего момента не зависит от того, какими силами – левыми или правыми – пользуемся при его вычислении.

График (эпюра) изменения изгибающего момента  $M_x$  по длине вала показан на рисунке 16.2.

В горизонтальной плоскости (рис. 16.3) искривляется весь вал. Изгибающий момент  $M_y$  считаем положительным, если он "создается" силой, направленной вперед.

На участке  $AB$  изгибающий момент изменяется от нуля (в сечении  $A$ ) до наибольшего (положительного)  $F_m l_2$ , действующего в сечении  $B$ .

На участке  $DC$  воспользуемся правой силой  $R_{Dx}$ , направленной вперед: изгибающий момент в сечении  $D$   $M_y = 0$ , в сечении  $C$   $M_y = R_{Dx}l_1 > 0$ . Соответствующая эпюра показана на рисунке 16.3.

### 16.4 Суммарный изгибающий момент

На рисунке 16.4 показаны изгибающие моменты (см. рис. 16.2 и 16.3), действующие во взаимно перпендикулярных плоскостях. Заметим, что их вовсе не обязательно изображать как пары сил, можно и так – дуговыми стрелками. Вообразим, что показанные на рисунке 16.4 стрелки изготовлены из гибкого материала, и прижмем их к плоскости поперечного сечения – получатся векторы  $\vec{M}_x$  и  $\vec{M}_y$  на рисунке 16.5. Их можно сложить по правилу параллелограмма, заменив два изгибающих момента одним моментом  $\vec{M}$ , равным их геометрической сумме. Оправдание этому сложению в приведении системы пар, то есть в замене нескольких пар одной парой.

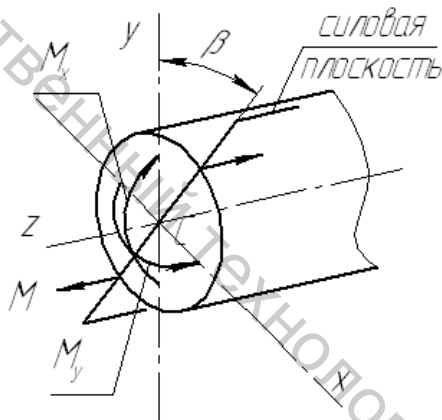


Рисунок 16.4 – Изгибающие моменты в поперечном сечении вала

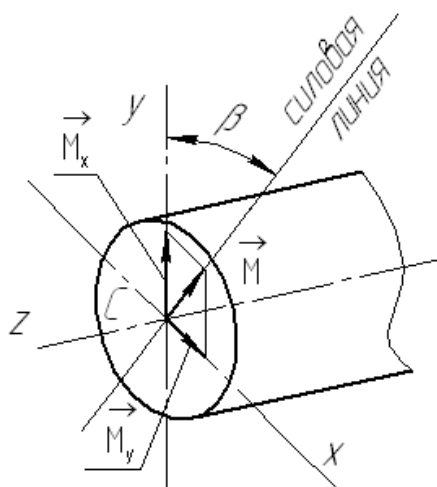


Рисунок 16.5 – Векторы изгибающих моментов складываются геометрически

## 16.5 Нормальные напряжения в поперечном сечении вала

Нормальные напряжения в случае действия двух изгибающих моментов равны сумме нормальных напряжений (13.5) от каждого из моментов в отдельности:

$$\sigma = -\frac{M_x}{I_x}y - \frac{M_y}{I_y}x. \quad (16.3)$$

Изгибающие моменты в формуле (16.3) – см. рис. 16.6 и 16.5 –

$$M_x = M \cos \beta, \quad M_y = M \sin \beta, \quad (16.4)$$

где  $\beta$  – угол наклона силовой линии (рис. 16.5), или силовой плоскости (рис. 16.4). Осевые моменты инерции круга

$$I_x = I_y = I_u \quad (16.5)$$

(так как круг одинаково расположен относительно осей  $x$  и  $y$ ). Формула (16.3) в обозначениях (16.4) и (16.5):

$$\sigma = -\frac{M \cos \beta}{I_u}y - \frac{M \sin \beta}{I_u}x = -\frac{M}{I_u}(x \sin \beta + y \cos \beta). \quad (16.6)$$

Выражение в скобках формулы (16.6) получается проектированием геометрической суммы  $\vec{x} + \vec{y} = \vec{\rho}$  (рис. 16.6) на направление силовой линии:

$$x \sin \beta + y \cos \beta = \rho \cos \gamma = h,$$

и напряжения (16.6)

$$\sigma = -\frac{M}{I_u}h. \quad (16.7)$$

В точках прямой  $u$ , перпендикулярной к силовой линии,  $h = 0$ , напряжения (16.7) равны нулю – это нейтральная линия при изгибе. Наибольшие по модулю напряжения действуют в точках, наиболее удаленных от линии  $u$ , в точках  $S$  и  $R$  (рис. 16.6):

$$\sigma_{\max} = \frac{M}{I_u}h_{\max} = \frac{M}{W_u}, \quad (16.8)$$

$$W_u = \frac{I_u}{h_{\max}} \quad (16.9)$$

– момент сопротивления круглого сечения вала при изгибе.

## 16.6 Осевой момент инерции и момент сопротивления круглого сечения

Полярный момент инерции

$$I_p = \int_A \rho^2 dA, = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA = I_y + I_x = 2I_u,$$

откуда осевой момент инерции площади круга (см. формулу (15.10))

$$I_u = \frac{1}{2} I_p = \frac{\pi d^4}{64}.$$

Момент сопротивления (16.9)

$$W_u = \frac{\pi d^4 / 64}{d / 2} = \frac{\pi d^3}{32} \approx 0,1d^3. \quad (16.10)$$

Момент инерции и момент сопротивления сечения на участке со шпоночным пазом (рис. 16.1) находятся аналогично тому, как это сделано в п. 15.3, 15.4 (см. формулы (15.11) и (15.15)):

$$W_u = \frac{\pi d^3}{32} - \frac{(\epsilon t_1)(d - t_1)^2}{2d} \quad (16.11)$$

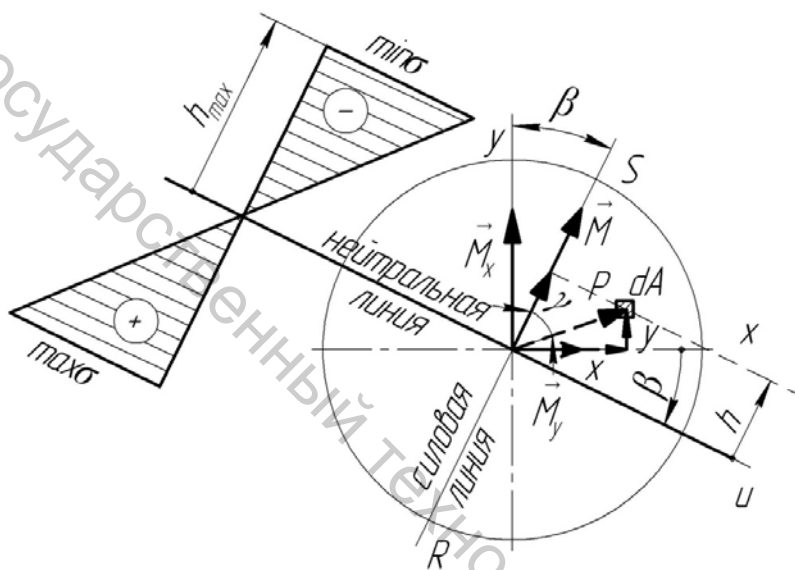


Рисунок 16.6 – Нормальные напряжения и их эпюра при изгибе вала

### 16.7 Напряженное состояние в опасных точках поперечного сечения вала

На рисунке 16.1 показан вал, работающий на изгиб с кручением. Наибольшие нормальные напряжения действуют (рис. 16.6) в точках  $R$  и  $S$  – точках пересечения окружности – границы сечения с силовой линией.

Наибольшие касательные напряжения действуют (рис. 15.4) в точках границы сечения, в точках  $R$  и  $S$  тоже. Наиболее опасные точки сечения – точки  $R$  и  $S$ . Напряжения в них (16.8) и (15.12)

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \frac{M}{W_u}, \\ \tau_{\max} &= \frac{T}{W_p}, \end{aligned} \quad (16.12)$$

где  $T$  – крутящий момент.

Моменты сопротивления при изгибе и кручении (16.10) и (15.14) в формулах (16.12)

$$W_u = 0,1d^3, \quad W_\rho = 0,2d^3,$$

суммарный изгибающий момент (рис. 16.5)

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}.$$

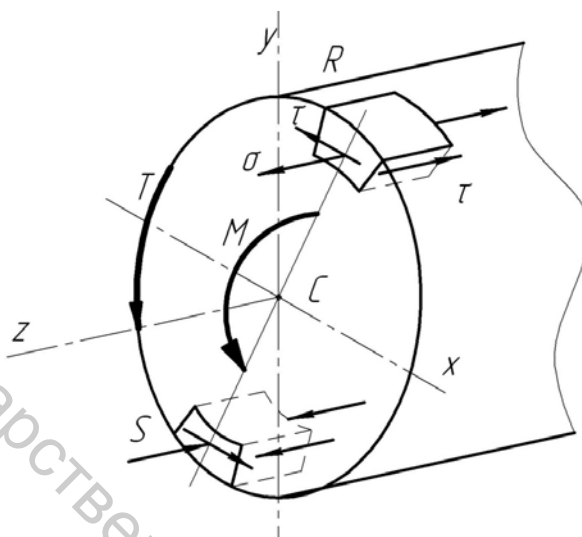


Рисунок 16.7 – Нормальные и касательные напряжения на поперечных и продольных площадках в окрестностях опасных точек

На рисунке 16.7 показаны бесконечно малые элементы, содержащие опасные точки сечения, на их гранях нормальные и касательные напряжения, подчиненные закону парности (15.4). Две грани элементов свободны от напряжений. Напряженное состояние на рисунке 16.7 называется плоским.

Вдобавок, нормальные напряжения действуют только на двух гранях из шести. Этот частный случай плоского напряженного состояния называют упрощенным.

## Лекция 17. Упрощенное плоское напряженное состояние (УПНС)

### 17.1 Напряженное состояние в точке

УПНС на рисунке 17.1 есть результат наложения (суперпозиции) чистого сдвига (ЧС) на рисунке 17.3 на линейное напряженное состояние (ЛНС) на рисунке 17.2. Первое имеем (рис. 15.3) при кручении круглого стержня, второе (рис.13.2) – при изгибе (и при растяжении-сжатии). Нормальные напряжения на рисунке 17.1 (растягивающие) считаем положительными, касательные напряжения, "вращающие" элемент по ходу часовой стрелки, – положительными; на "горизонтальных" площадках они отрицательные.

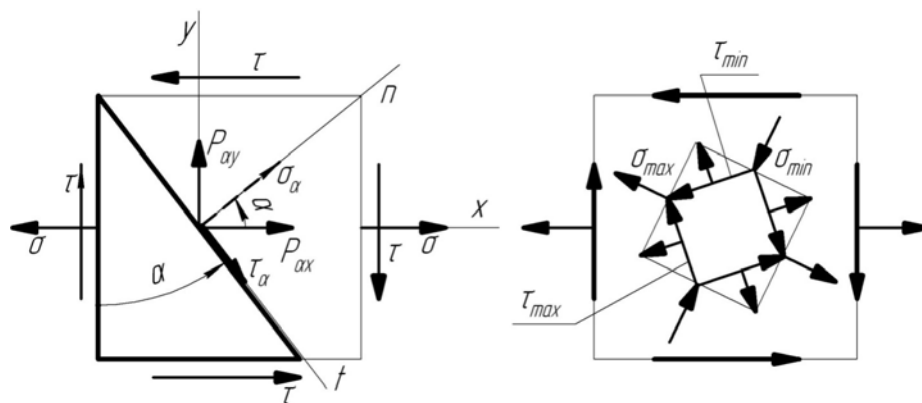


Рисунок 17.1 – УПНС: исходные напряжения, напряжения на произвольной площадке; главные напряжения, экстремальные касательные напряжения

Изучить напряженное состояние в точке – значит найти напряжения на любой площадке, проходящей через точку, или на любой площадке, проведенной внутри элемента, содержащего точку. Напряжения  $p_\alpha$  в УПНС, представленные на рисунке 17.1 составляющими  $\rho_{\alpha x}, \rho_{\alpha y}$ , найдем, суммируя такие же напряжения на той же площадке в ЛНС и ЧС.

Отделим мысленно левую часть элемента, находящегося в равновесии, от правой. Силы на рисунке 17.2

$$dN = \sigma dA, \quad dP_{\alpha x} = p_{\alpha x} dA_\alpha \quad (17.1)$$

получены умножением напряжений на площади граней элемента, площадь наклонной грани

$$dA_\alpha = \frac{dA}{\cos \alpha}.$$

Силы (17.1) уравновешены, следовательно:

$$dN = dP_{\alpha x},$$

напряжения

$$p_{\alpha x} = \sigma \cos \alpha. \quad (17.2)$$

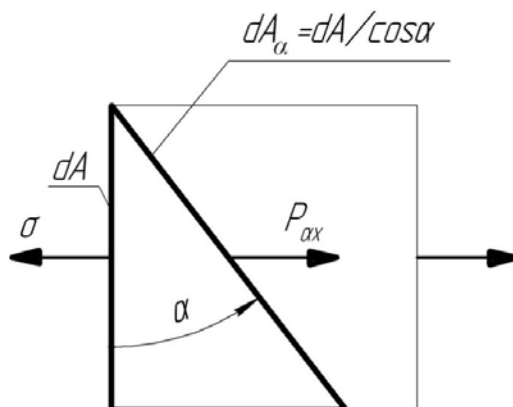


Рисунок 17.2 – ЛНС

## 17.2 Чистый сдвиг

Силы, действующие на грани левой части элемента, находящегося в равновесии,

$$dT = \tau dA, \quad dT' = \tau (dA) \operatorname{tg} \alpha;$$

$$dP_{ax} = p_{ax} dA / \cos \alpha, \quad dP_{ay} = p_{ay} \frac{dA}{\cos \alpha}.$$

Уравнения равновесия

$$dT = -dP_{ay}, \quad dT' = -dP_{ax};$$

напряжения

$$p_{ay} = -\tau \cos \alpha, \quad p_{ax} = -\tau \sin \alpha. \quad (17.3)$$

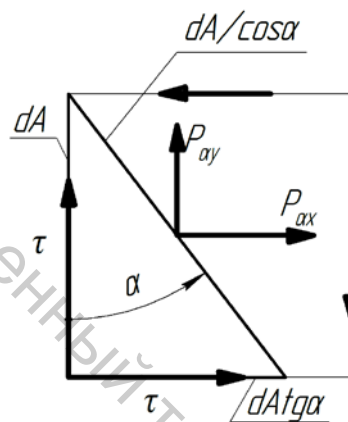


Рисунок 17.3 – Чистый сдвиг

## 17.3 Нормальные и касательные напряжения в УПНС

Составляющие напряжения  $p_\alpha$  в УПНС найдутся суммированием составляющих (17.2) и (17.3):

$$\begin{aligned} p_{ax} &= \sigma \cos \alpha - \tau \sin \alpha, \\ p_{ay} &= -\tau \cos \alpha. \end{aligned} \quad (17.4)$$

Нормальные напряжения – проекция напряжений  $p_\alpha$ , или сумма проекций напряжений (17.4) на нормаль  $n$  к площадке; касательные напряжения – сумма проекций напряжений (17.4) на ось  $t$ :

$$\sigma_\alpha = np_n \cdot p_\alpha = np_n \cdot p_{ax} + np_n \cdot p_{ay} = (\sigma \cos \alpha - \tau \sin \alpha) \cos \alpha - \tau \cos \alpha \sin \alpha;$$

$$\tau_\alpha = np_t \cdot p_\alpha = np_t \cdot p_{ax} - np_t \cdot p_{ay} = (\sigma \cos \alpha - \tau \sin \alpha) \sin \alpha + \tau \cos \alpha \cos \alpha,$$

или

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma \cos^2 \alpha - \tau \sin 2\alpha, \\ \tau_\alpha &= \frac{1}{2} \sigma \sin 2\alpha + \tau \cos 2\alpha. \end{aligned} \quad (17.5)$$

Введем в формулы (17.5) выражение

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2},$$

и выразим напряжения (17.5) через функции двойного угла:

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2} \cos 2\alpha - \tau \sin 2\alpha, \\ \tau_\alpha &= \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha + \tau \cos 2\alpha. \end{aligned} \quad (17.6)$$

#### 17.4 Максимумы и минимумы нормальных и касательных напряжений в УПНС

Функции

$$\begin{aligned} \varphi_1(\alpha) &= \frac{\sigma}{2} \cos 2\alpha - \tau \sin 2\alpha, \\ \varphi_2(\alpha) &= \frac{\sigma}{2} \sin 2\alpha + \tau \cos 2\alpha, \end{aligned} \quad (17.7)$$

входящие в формулы (17.6), можно написать в виде

$$\begin{aligned} \varphi_1(\alpha) &= A \left[ \frac{\sigma/2}{A} \cos 2\alpha - \frac{\tau}{A} \sin 2\alpha \right], \\ \varphi_2(\alpha) &= A \left[ \frac{\sigma/2}{A} \sin 2\alpha + \frac{\tau}{A} \cos 2\alpha \right], \\ A &= \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}. \end{aligned}$$

Коэффициенты при  $\cos 2\alpha$  и  $\sin 2\alpha$  не превышают единицы, а сумма их квадратов равна единице; следовательно, можно положить

$$\frac{\sigma/2}{A} = \cos \beta, \quad \frac{\tau}{A} = \sin \beta,$$

что позволит написать: функции (17.7)

$$\begin{aligned} \varphi_1(\alpha) &= \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \cos(2\alpha + \beta), \\ \varphi_2(\alpha) &= \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \sin(2\alpha + \beta); \end{aligned} \quad (17.8)$$

максимумы и минимумы функций (17.8)

$$\begin{aligned} \varphi_{1\max} \\ \varphi_{1\min} &= \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}, \\ \varphi_{2\max} \\ \varphi_{2\min} &= \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}. \end{aligned} \quad (17.9)$$

Введем максимумы и минимумы (17.9) в формулы (17.6) и найдем максимум и минимум нормальных напряжений (главные напряжения)

$$\sigma_{\max/\min} = \frac{\sigma}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad (17.10)$$

и максимум и минимум касательных напряжений

$$\tau_{\max/\min} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}. \quad (17.11)$$

Максимумы и минимумы (17.9) имеют место при углах  $2\alpha$ , разнящихся на  $180^\circ$ , то есть на взаимно перпендикулярных площадках: главные площадки, где действуют напряжения (17.10), взаимно перпендикулярны; площадки, где действуют экстремальные напряжения (17.11), взаимно перпендикулярны.

Равные значения функций (17.8) имеют место при углах  $2\alpha$ , разнящихся на  $90^\circ$ : площадки с напряжениями (17.11) наклонены к площадкам с главными напряжениями (17.10) под углами  $45^\circ$  (рис. 17.2).

Заметим: когда  $\cos(2\alpha + \beta)$  в первой из функций (17.8) делается максимальным или минимальным,  $\sin(2\alpha + \beta)$  во второй из функций делается равным нулю; когда  $\sin(2\alpha + \beta)$  становится максимальным или минимальным,  $\cos(2\alpha + \beta) = 0$ . Иными словами, на главных площадках касательных напряжений нет; однако, на площадках с экстремальными касательными напряжениями нормальные напряжения (17.6) равны  $\sigma/2$ .

### 17.5 Прочность при линейном напряженном состоянии и чистом сдвиге

Максимум и минимум (17.10) нормальных напряжений в ЛНС ( $\tau = 0$ )

$$\sigma_{\max} = \sigma, \quad \sigma_{\min} = 0 \quad (17.12)$$

действуют на исходных поперечных и продольных площадках (рис. 17.2).

Максимум и минимум (17.11) касательных напряжений в ЧС ( $\sigma = 0$ )

$$\tau_{\max} = \tau, \quad \tau_{\min} = -\tau \quad (17.13)$$

действуют на исходных поперечных и продольных площадках (рис. 17.3).

Именно этими обстоятельствами объясняется интерес к напряжениям в поперечных сечениях стержня при растяжении (сжатии), изгибе и кручении. Соответствующие условия прочности (см. экстремумы (17.12–17.13))

$$\sigma_{\max} = \sigma \leq [\sigma], \quad \tau_{\max} = \tau \leq [\tau], \quad (17.14)$$

допускаемые напряжения

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{пред}}{[s]}, \quad [\tau] = \frac{\tau_{пред}}{[s]}. \quad (17.15)$$

Предельные напряжения в определениях (17.15) связываются с наступлением текучести материала стержня, то есть

$[s] > 1$  – требуемый коэффициент запаса прочности, или коэффициент безопасности.

$$\sigma_{пред} = \sigma_T, \quad \tau_{пред} = \tau_T; \quad (17.16)$$

### 17.6 Критерий прочности Треска, Сен-Венана

Текучесть плоского образца (рис. 17.4) с полированной поверхностью при его растяжении в лаборатории сопровождается линиями Чернова, наклоненными к оси образца под углами  $45^\circ$ . Это следы скольжения слоев материала по плоскостям, на которых действуют максимум и минимум касательных напряжений (17.11).

Текучесть круглого образца (рис. 17.5) в его кручении имеет место в его поперечных сечениях, где действуют опять же напряжения (17.11).

Эти наблюдения натолкнули на мысль, что за текучесть ответственны наибольшие касательные напряжения (17.11): по Треска и Сен-Венану текучесть наступает тогда, когда наибольшие касательные напряжения (17.11) достигают некоторого предельного значения (17.16), не зависящего от вида напряженного состояния, зависящего только от свойств материала. Предел (17.16) можно определить при любом напряженном состоянии. Найдем его в линейном напряженном состоянии (рис. 17.4): при наступлении текучести

$$\tau_{\max|_{\tau=0}} = \frac{\sigma_T}{2} = \tau_T,$$

искомый предел (17.16)

$$\tau_T = \frac{\sigma_T}{2}, \quad (17.17)$$

$\sigma_T$  – предел текучести, определяемый в испытаниях лабораторных образцов на растяжение (сжатие).

Подставим предел (17.17) в условие наступления текучести в УПНС (рис. 17.1) (см. формулы (17.11)):

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} = \frac{\sigma_T}{2}.$$

Получим условие

$$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sigma_T. \quad (17.18)$$

Назовем левую часть условия (17.18) эквивалентным напряжением, условие прочности напишется в виде

$$\sigma_{экр} \leq [\sigma], \quad \sigma_{экр} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}; \quad (17.19)$$

$[\sigma]$  – допускаемое напряжение (17.15).

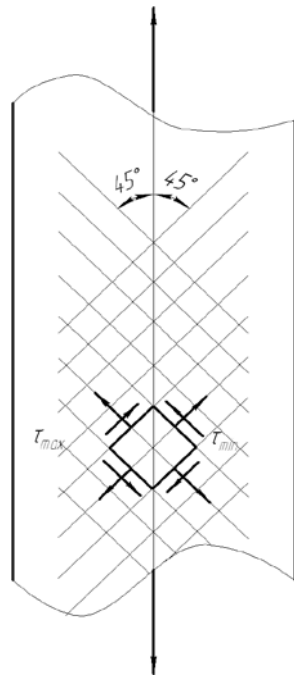


Рисунок 17.4 – Текучесть при растяжении сопровождается скольжением вдоль линий Чернова

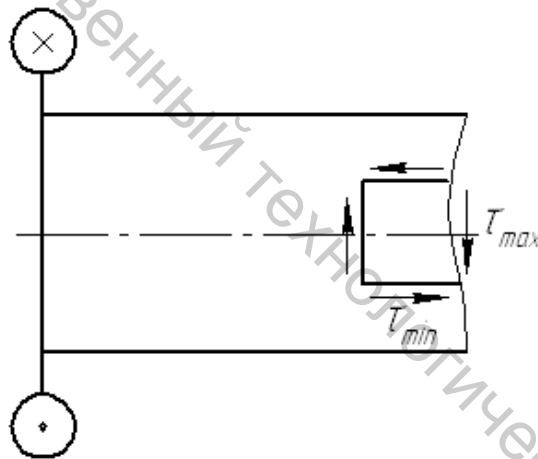


Рисунок 17.5 – Текучесть при кручении имеет место в поперечных сечениях

Заметим: условие (17.19) дает в ЛНС ( $\tau = 0$ ) первое из условий (17.14) и в ЧС ( $\sigma = 0$ ) – второе из условий (17.14) – при учете определения (17.17).

### 17.7 Коэффициент безопасности в УПНС

Коэффициент безопасности (см. первое из определений (17.15))

$$s = \frac{\sigma_T}{\sigma_{экв}}$$

или (см. определения (17.19) и (17.17))

$$s = \frac{\sigma_T}{\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{(\sigma_T / \sigma)^2} + \frac{1}{(\tau_T / \tau)^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{s_\sigma^2} + \frac{1}{s_\tau^2}}},$$

$$s = \frac{s_\sigma s_\tau}{\sqrt{s_\sigma^2 + s_\tau^2}}, \quad (17.20)$$

где  $s_\sigma$  и  $s_\tau$  – частные коэффициенты безопасности: первый определяется при учете только нормальных напряжений (в ЛНС (рис. 17.2) – составляющей части УПНС), второй – при учете только касательных напряжений (в ЧС (рис. 17.3) – второй составляющей УПНС).

## Лекция 18. Циклически изменяющиеся нормальные и касательные напряжения в поперечном сечении вала

### 18.1 Предел выносливости при симметричном цикле

На рисунке 18.1 показано поперечное сечение вращающегося вала, воспринимающего вместе с этим силы неизменного направления (рис. 18.1). Величина и плоскость действия изгибающего момента остаются при этом неизменными.

Однако нормальные напряжения (16.7) в точке  $M$  границы сечения изменяются:

$$\sigma = -\frac{M}{I_u} h = -\left(\frac{M d}{I_u 2}\right) \sin \omega t.$$

Учтем здесь определения (16.8 – 16.10) и напишем

$$\sigma = -\frac{M}{W_u} \sin \omega t = -\sigma_{\max} \sin \omega t. \quad (18.1)$$

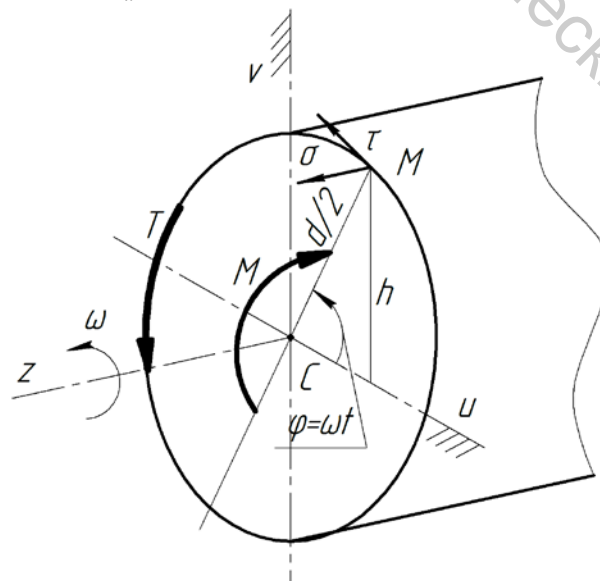


Рисунок 18.1 – Поперечное сечение вала, вращающегося с угловой скоростью  $\omega$

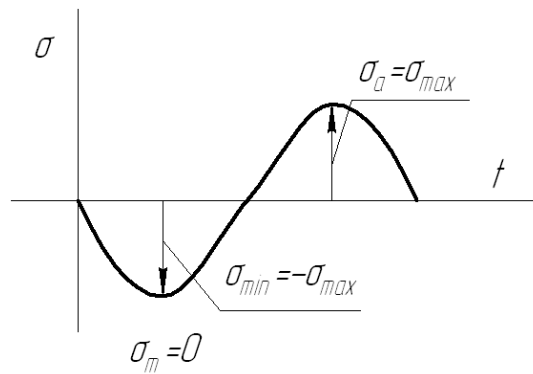


Рисунок 18.2 – Симметричный цикл нормальных напряжений

График напряжений (18.1) изображен на рисунке (18.2). Нормальные напряжения в поперечном сечении вала изменяются по симметричному циклу: их амплитуда и средняя величина

$$\sigma_a = \sigma_{\max}, \quad \sigma_m = 0, \quad (18.2)$$

минимальное напряжение

$$\sigma_{\min} = -\sigma_{\max},$$

коэффициент асимметрии цикла

$$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = -1. \quad (18.3)$$

Касательные напряжения в точке М изменяются в самом неблагоприятном случае по пульсирующему циклу (рис. 18.3): их амплитуда и средняя величина

$$\tau_a = \tau_m = \frac{1}{2} \tau_{\max}, \quad (18.4)$$

минимальное напряжение

$$\tau_{\min} = 0,$$

коэффициент асимметрии цикла

$$r = \frac{\tau_{\min}}{\tau_{\max}} = 0. \quad (18.5)$$

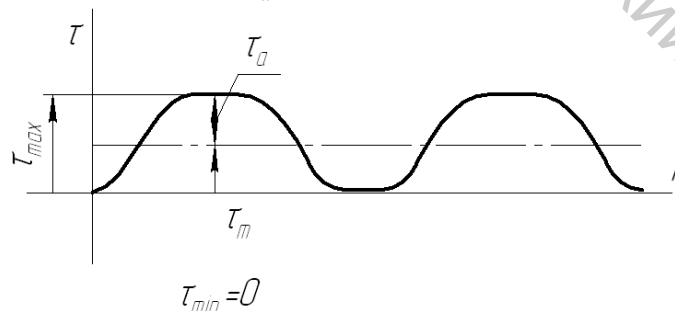


Рисунок 18.3 – Пульсирующий цикл касательных напряжений

Соответствующая кривая выносливости показана на рисунке 18.4. Предел выносливости (базовый) на нем –  $\sigma_{-1}$ , в индексе здесь коэффициент (18.3). Это наибольшее напряжение из напряжений  $\sigma_{\max}$ , при котором материал работает неограниченно долго.

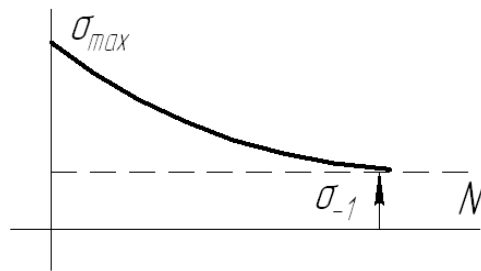


Рисунок 18.4 – Кривая выносливости

Величина предела выносливости детали, геометрически подобной лабораторному образцу, отличается от предела  $\sigma_{-1}$ . Размеры детали отличаются от размеров образца; качество поверхности детали отличается от качества поверхности образца; деталь снабжена, как правило, концентраторами напряжений – галтелями, шпоночными пазами (рис. 18.5), способными вызвать местные всплески напряжений – их концентрацию. Чем больше размеры детали, тем вероятнее дефекты материала – зародыши усталостных трещин в ее объеме. Чем грубее поверхность детали, тем вероятнее возникновение трещин именно на поверхности. Понятно, что трещина "охотнее развивается" там, где напряжения относительно высоки (возле концентраторов напряжений).

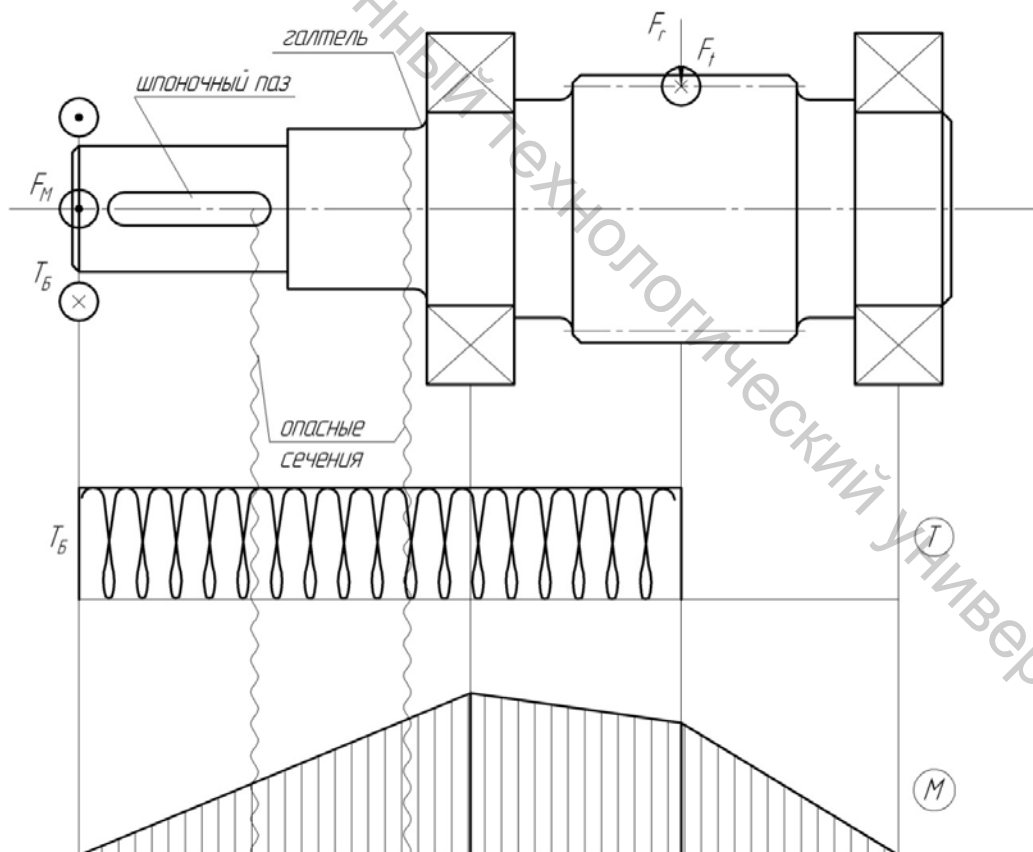


Рисунок 18.5 – Концентраторы напряжений на валу

Полагают в первом приближении, что перечисленные факторы действуют независимо друг от друга: предел выносливости детали

$$\sigma_{-1\sigma} = \frac{\sigma_{-1}\varepsilon_\sigma\beta}{K_\sigma}, \quad \sigma_{-1\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{K_d}, \quad K_d = \frac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma\beta}, \quad (18.6)$$

где  $\varepsilon_\sigma, \beta, K_\sigma$  – масштабный фактор, коэффициент качества поверхности детали и коэффициент концентрации напряжений,  $K_d$  – коэффициент снижения предела выносливости образца.

## 18.2 Произвольный цикл напряжений

Произвольный цикл напряжения (например, нормальных напряжений  $\sigma$ ) представляется наложением напряжений (18.1), изменяющихся (рис. 18.2) по симметричному циклу с амплитудой (18.2), на постоянные напряжения  $\sigma_m$  (рис. 18.6):

$$\sigma = \sigma_m + \sigma_a \sin \omega t.$$

Наибольшее и наименьшее напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_{\max} &= \sigma_m + \sigma_a, \\ \sigma_{\min} &= \sigma_m - \sigma_a; \end{aligned} \quad (18.7)$$

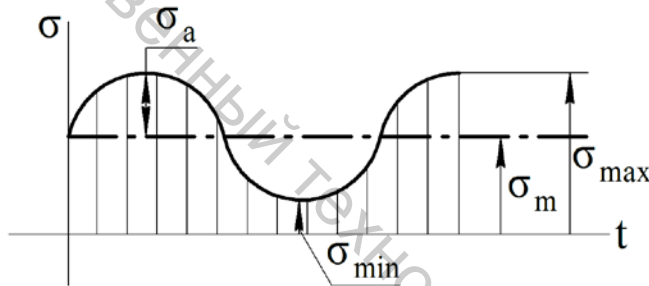


Рисунок 18.6 – Произвольный цикл напряжений

коэффициент асимметрии – см. определения (18.3, 18.5) –

$$r = \frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = \frac{1 - \sigma_a / \sigma_m}{1 + \sigma_a / \sigma_m},$$

где появляется коэффициент подобия

$$K = \frac{\sigma_a}{\sigma_m}. \quad (18.8)$$

Используя его, напишем

$$r = \frac{1 - K}{1 + K}. \quad (18.9)$$

Наоборот, коэффициент (18.8)

$$K = \frac{1 - r}{1 + r}. \quad (18.10)$$

Коэффициенты (18.9) одинаковы у всех подобных циклов – с одним и тем же коэффициентом (18.10); следовательно, все симметричные циклы ( $r = -1$ ) подобны, для них коэффициент (18.10) равен  $\infty$ , все пульсирующие циклы ( $r = 0$ ) подобны, для них коэффициент (18.10, 18.8) равен 1 – см. значения (18.4).

### 18.3 Диаграмма предельных амплитуд

На рисунке 18.7 показан образец с шайбами, охватывающими подшипники качения; между ними вставлена заранее сжатая пружина, растягивающая образец. К шайбам подвешиваются грузы  $F$ , изгибающие вращающийся образец: на постоянные растягивающие напряжения налагаются изгибные напряжения, изменяющиеся по симметричному циклу (рис. 18.2).

Задав постоянные растягивающие напряжения  $\sigma_m$  (задавая предварительную осадку пружины), изменяем грузы  $F$  (изменяем амплитуду симметричной составляющей цикла на рисунке 18.6), пока не достигнем предельной амплитуды ( $\sigma_a$ ), отвечающей пределу выносливости  $\sigma_r$  ( $r$  – коэффициент асимметрии предельного цикла на рис. 18.8). Предельный цикл может быть изображен точкой  $L$  с координатами  $\sigma_m$  и  $(\sigma_a)_{пр}$ . Сумма (18.7) дает предел выносливости

$$\sigma_r = \sigma_m + (\sigma_a)_{пр} \quad (18.11)$$

для цикла с коэффициентом подобия (18.8).

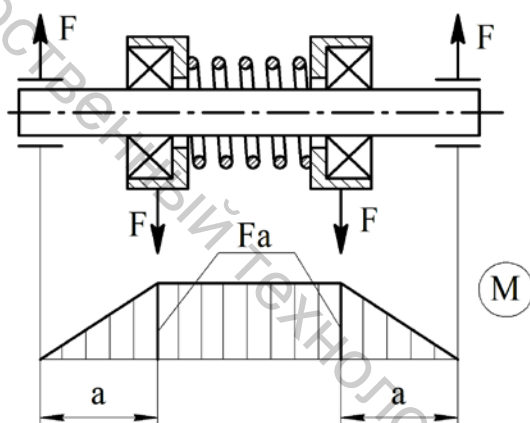


Рисунок 18.7 – Устройство, создающее произвольный цикл напряжений (рис. 18.6)

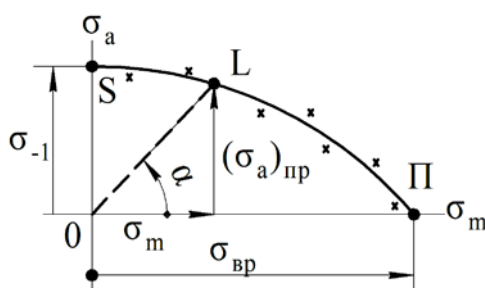
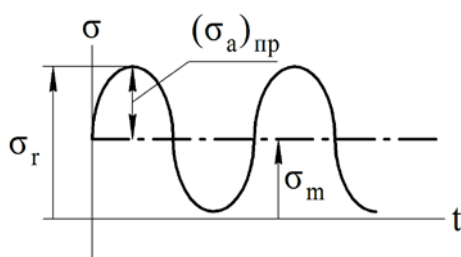


Рисунок 18.8 – Предельный цикл напряжений и диаграмма предельных амплитуд

$$K = \frac{(\sigma_a)_{np}}{\sigma_m}. \quad (18.12)$$

Коэффициент асимметрии  $r$  находится по формуле (18.9).

Все циклы с коэффициентом (18.12) изображаются точками луча  $OL$ . Располагая диаграммой (рис. 18.8), построенной по экспериментальным точкам, можно найти по формуле (18.11) предел выносливости для любого цикла – если найти координаты предельной точки  $L$ . Для этого: по заданному коэффициенту  $r$  находим коэффициент подобия (18.10) и, проводя под углом  $\alpha = \arctg K$  луч  $OL$ , точку пересечения с диаграммой предельных амплитуд. Например, луч, проведенный под  $45^\circ$ , даст предельную точку  $P$ , отвечающую пульсирующему циклу.

В расчетной практике пользуются точками  $S$  (отвечает пределу  $\sigma_{-1}$ ),  $P$  (отвечает пределу  $\sigma_0$ ) и  $\Pi$  (отвечает пределу прочности  $\sigma_{вр}$ ), проводя через них хорды диаграммы – получаем схематизированную диаграмму.

#### 18.4 Запас выносливости

Построим для образца (рис. 18.9) схематизированную диаграмму. Переходя к детали, скорректируем предельные амплитуды, используя коэффициент  $K_d$  (18.6) – наподобие коррекции предела выносливости при симметричном цикле – его предельной амплитуды.

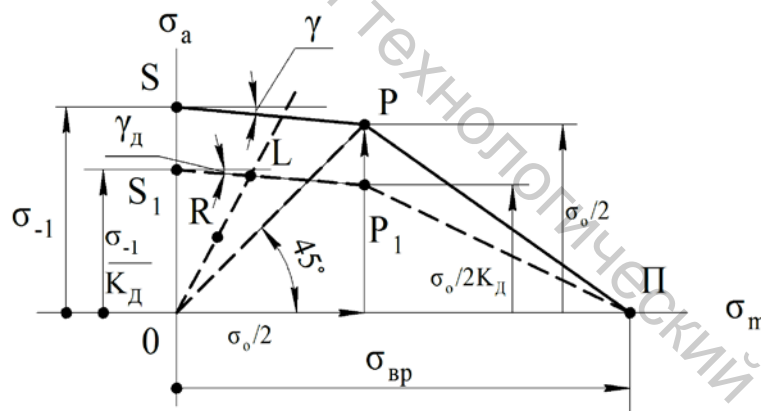


Рисунок 18.9 – Диаграмма предельных амплитуд для детали

Пусть заданы напряжения  $\sigma_m$ ,  $\sigma_a$  рабочего цикла. По координатам  $\sigma_m$ ,  $\sigma_a$  строим рабочую точку  $R$ . Запас выносливости определим отношением

$$s_r = \frac{OL}{OR},$$

где  $L$  – предельная точка – точка пересечения луча  $OR$  с диаграммой  $S_1P_1$ . Уравнение диаграммы

$$(\sigma_a)_{np} = \frac{\sigma_{-1}}{K_d} - (\tg \gamma_d)(\sigma_m)_{np}.$$

Вводя сюда координаты рабочей точки, получим уравнение

$$\sigma_a s_r = \frac{\sigma_{-1}}{K_d} - \psi_d (\sigma_m s_r), \quad \psi_d = \operatorname{tg} \gamma_d,$$

откуда получается коэффициент запаса выносливости:

$$s_r = \frac{\sigma_{-1}/K_d}{\sigma_a + \psi_d \sigma_m} = \frac{\sigma_{-1}}{K_d \sigma_a + K_d \psi_d \sigma_m}. \quad (18.13)$$

Пользуясь рисунком 18.9, находим последовательно:

$$\begin{aligned} \psi &= \operatorname{tg} \gamma = \frac{\frac{\sigma_{-1} - \sigma_0}{2}}{\frac{\sigma_0}{2}} = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}, \\ \psi_d \in \operatorname{tg} \gamma_d &= \frac{\frac{\sigma_{-1}/K_d - \sigma_0/2}{\sigma_0/2}}{(2K_d)} = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0 K_d} = \frac{\psi}{K_d}, \\ K_d \psi_d &= K_d \frac{\psi}{K_d} = \psi. \end{aligned} \quad (18.14)$$

Формула (18.13) принимает – при учете коэффициентов (18.14, 18.6) – вид

$$s_r = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma \beta} \sigma_a + \psi \sigma_m}. \quad (18.15)$$

### 18.5 Запасы выносливости вала

Нормальные напряжения в поперечных сечениях вала изменяются (рис. 18.2) по симметричному циклу ( $\sigma_m = 0, \sigma_a = \sigma_{\max}$ ): частный запас (18.15)

$$s_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{\frac{K_\sigma}{\varepsilon_\sigma \beta} \sigma_a} = \frac{\sigma_{-1} \varepsilon_\sigma \beta}{K_\sigma \sigma_a}. \quad (18.16)$$

Касательные напряжения изменяются (рис. 18.3) по пульсирующему циклу ( $\tau_m = \tau_a = \tau_{\max}/2$ ): частный запас (18.15)

$$s_\tau = \frac{\tau_{-1}}{\frac{K_\tau}{\varepsilon_\tau \beta} \tau_a + \psi_\tau \tau_m}. \quad (18.17)$$

Запас при учете одновременно действующих нормальных и касательных напряжений (17.20):

$$s = \frac{s_\sigma s_\tau}{\sqrt{s_\sigma^2 + s_\tau^2}}. \quad (18.18)$$

Однако коэффициент чувствительности углеродистой стали 45 (валовой), содержащей 0,45% углерода (среднее содержание), к асимметрии цикла

напряжений  $\psi_\tau \approx 0,05 (\ll 1)$ . Если вторым слагаемым в знаменателе формулы (18.17) пренебречь, получится формула, во всем аналогичная формуле (18.16).

### 18.6 Запасы в опасных сечениях вала

Запасы выносливости находим во всех (опасных) сечениях, где имеются концентраторы напряжений (рис. 18.5), а также в сечениях, где крутящий и изгибающий моменты относительно велики либо порознь, либо совместно. Опасные сечения могут оказаться круглыми или такими, как на рисунке 15.5. Их моменты сопротивления даются формулами (15.14–15.15) и (16.10–16.11), нормальные и касательные напряжения в их опасных точках – формулами (16.12).

В дальнейшем находятся (в каждом из опасных сечений) коэффициенты в формулах (18.16–18.18), амплитуды напряжений в опасных точках (18.2) и (18.4) и, наконец, частные и общий запасы (18.16, 18.17, 18.18). Удовлетворяются [4, с. 305] общим запасом

$$s \geq 1,5.$$

### Лекция 19. Подшипники качения

Подшипники служат опорами вала, они воспринимают нагрузки, действующие на вал, и передают их на корпус редуктора, вместе с этим фиксируя вал в определенном положении.

Подшипники различают по виду трения: в подшипниках скольжения (рис. 19.1) опорный участок вала – цапфа (шип) скользит по поверхности подшипника; в подшипниках качения трение скольжения заменено трением качения (рис. 19.2) – трением шариков или роликов об опорные поверхности колец, наружного, посаженного в корпус редуктора, и внутреннего, насаженного на вал. Тела качения располагаются в “гнездах” сепаратора – свободно плавающего кольца, разделяющего и направляющего шарики (ролики).

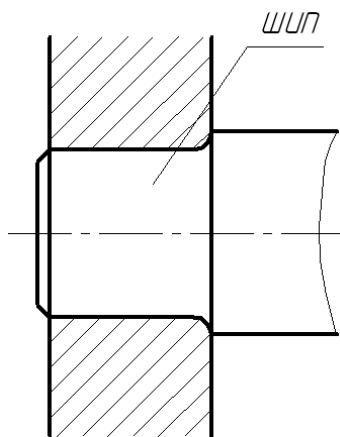


Рисунок 19.1 – Подшипник скольжения

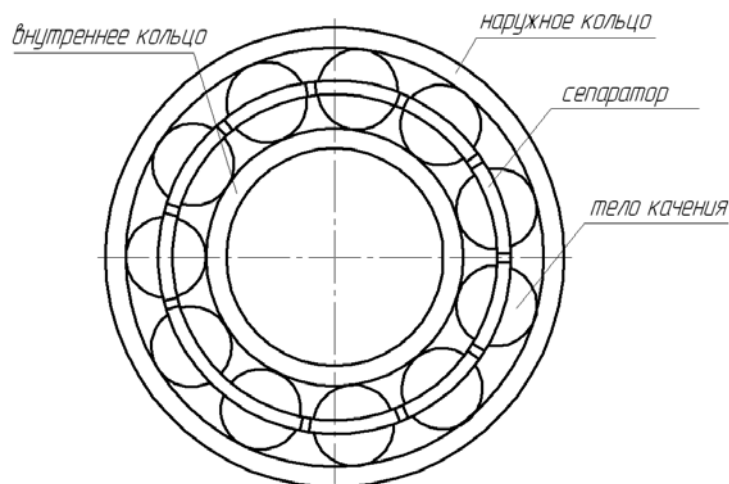


Рисунок 19.2 – Подшипник качения

### 19.1 Основные типы подшипников качения

Наиболее простые и дешевые – радиальные однорядные шарикоподшипники (рис. 19.3) типа 0, предназначенные для восприятия, в основном, радиальной нагрузки  $F_r$  и сравнительно небольших осевых нагрузок

$$F_a \leq 0,2(C_0 - F_r),$$

где  $C_0$  – допускаемая (статическая) радиальная грузоподъемность (приводится в соответствующем каталоге), в скобках неиспользованная статическая грузоподъемность. Возможны небольшие (до  $1/4^\circ$ ) перекосы вала.

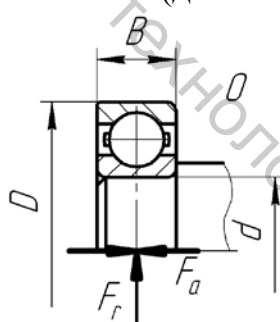


Рисунок 19.3 – Радиальный однорядный шарикоподшипник

Радиальные двухрядные сферические (самоустанавливающиеся) подшипники типа 1 (рис. 19.4) допускают значительный перекося вала (до  $3^\circ$ ). Наряду с радиальной нагрузкой допустимы небольшие осевые:

$$F_a \leq 0,2(C_0 - F_r). \quad (19.1)$$

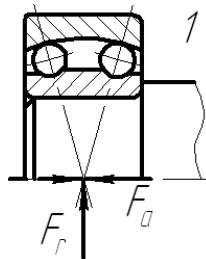


Рисунок 19.4 – Радиальный самоустанавливающийся шарикоподшипник

Такой же перекос допускают радиальные двухрядные сферические (самоустанавливающиеся) роликоподшипники типа 3 (рис. 19.5). Допускаемая радиальная нагрузка на них вдвое больше, чем на подшипники типа 1. Соответственно возрастают и осевые нагрузки (19.1).

Шарики и бочкообразные ролики в подшипниках 1 и 3 (рис. 19.4 и 19.5) катятся по сферическим поверхностям наружных колец. При перекосе вала внутреннее кольцо подшипника типа 1 (3) поворачивается вместе с шариками (роликами) относительно наружного. Шарiki (ролики), перекатившись, остаются на той же сферической поверхности – подшипники самоустанавливаются .

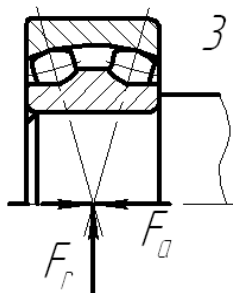


Рисунок 19.5 – Радиальный самоустанавливающийся роликоподшипник

Если требуется восприятие сравнительно больших осевых нагрузок, применяют радиально-упорные однорядные шарикоподшипники типа 6 (рис. 19.6) и роликоподшипники типа 7 (рис. 19.7) – конические. Допускаемая радиальная нагрузка на первые на 40 % больше, на вторые – на 90 % больше, чем на подшипники типа 0. Осевая (односторонняя!) нагрузка

$$F_a \leq 0,7(C_0 - F_r).$$

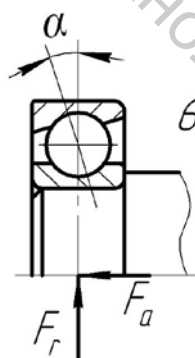


Рисунок 19.6 – Радиально-упорный шарикоподшипник

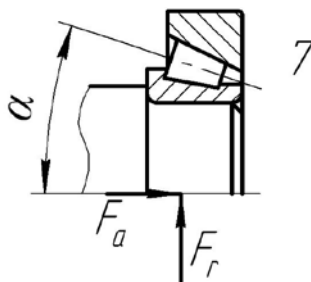


Рисунок 19.7 – Конический подшипник

## 19.2 Серии диаметров и ширин [4, с. 330–331]

Подшипники выпускаются сериями. В пределах одной серии изменяются как внутренние диаметры  $d$  (диаметры насадочных отверстий), так и габаритные размеры (рис. 19.3)  $D$  и  $B$  (по мере изменения диаметра  $d$ ). Вместе с ростом размеров растет нагрузочная способность подшипников. Если диаметры  $d$  одинаковы, но подшипники взяты из различных серий, они различаются габаритными размерами  $D$  и  $B$  и, опять же, нагрузочной способностью.

Основных серий 4: особо легкая 1, легкая 2, средняя 3, тяжелая 4. Предварительно выбирают подшипники легкой или средней серии и только после проверки пригодности выбранных подшипников берут, если требуется, подшипники соответственно средней или тяжелой серий.

## 19.3 Точность подшипников качения [4, с. 331]

Наиболее дешевы подшипники, относящиеся к нормальному классу точности 0. Подшипники, относящиеся к повышенному 6, высокому 5, особо высокому 4 и сверхвысокому 2, стоят дорого; относящиеся к классу 5 стоят вдвое дороже, относящиеся к сверхвысокому классу 2 – в десять раз дороже, чем подшипники нормального класса 0.

## 19.4 Цифровые обозначения подшипников

Диаметр насадочного отверстия подшипника (внутренний диаметр  $d$ ) получаем умножением числа, составленного двумя первыми справа цифрами, на 5. Третья цифра справа дает номер серии диаметров и ширин (п. 19.2). Четвертая цифра указывает тип подшипника (п. 19.1). Пятая цифра, если она есть, – на конструктивные особенности подшипника. Пятая цифра в цифровом обозначении подшипников типа 6 (рис. 19.6) отвечает углу контакта  $\alpha$ : при  $\alpha = 12^\circ$  пятая цифра 3, при  $\alpha = 26^\circ$  – 4, при  $\alpha = 36^\circ$  – 6.

Если у подшипников типа 0 (рис. 19.3) конструктивных особенностей нет, в их цифровом обозначении три цифры (0, отвечающий типу, не ставится).

## 19.5 Выбор типа подшипника

Если осевая нагрузка, действующая на подшипник, небольшая – не превышающая 30 % радиальной нагрузки ( $F_a \leq 0,3F_r$ ), и не требуется самоустановка, следует ориентироваться на подшипники типа 0 (рис. 19.3). Если же требуется самоустановка, используют подшипники типов 1 и 3 (рис. 19.4 и 19.5), причем шарикоподшипники 1 предпочтительнее, так как подшипники 3 дороже первых примерно в 3 раза.

Если на подшипники действуют радиальная и осевая нагрузка, превышающая 30 % радиальной, применяют радиально-упорные подшипники типов 6 и 7 (рис. 19.6 и 19.7) – с большим углом контакта  $\alpha$  при больших

отношениях  $F_a/F_r$ . При  $F_a/F_r = 0,3 \dots 0,7$  берется подшипник 6 с углом  $\alpha = 12^\circ$ , при  $F_a/F_r = 0,7 \dots 1$  – подшипник 6 с углом  $\alpha = 26^\circ$ , при  $F_a/F_r > 1$  – подшипник 6 с углом  $\alpha = 36^\circ$ , при  $F_a/F_r \geq 1,5$  лучше взять конический подшипник 7.

### 19.6 Проверка подшипника на статическую грузоподъемность

Сравнительно тихоходные тяжело нагруженные подшипники, делающие не более 1 об/мин, приходят в негодность из-за остаточных деформаций: лунок и вмятин на беговых дорожках. Их проверяют по допускаемой статической грузоподъемности  $C_0$ , указанной в каталоге. Грузоподъемность  $C_0$  – статическая радиальная нагрузка, при которой суммарная остаточная деформация колец и тел качения в наиболее нагруженной точке подшипника равна 0,0001 диаметра тела качения.

Проверка производится по условию

$$P_{\text{экв}} \leq C_0,$$

где эквивалентная статическая нагрузка

$$P_{\text{экв}} = X_0 F_r + Y_0 F_a \geq F_r,$$

$X_0$  и  $Y_0$  – коэффициенты радиальной  $F_r$  и осевой  $F_a$  нагрузок.

### 19.7 Проверка подшипников на долговечность

Сравнительно быстроходные подшипники, делающие более 1 об/мин, разрушаются при длительной работе в нормальных условиях из-за усталостного выкрашивания колец и тел качения. Номинальная (каталожная) динамическая грузоподъемность  $C$  – постоянная радиальная нагрузка, при которой 90 % подшипников, взятых для испытаний, выдерживают 1 миллион оборотов без появления признаков усталостного выкрашивания.

Долговечность подшипника в млн. об.

$$L = \left( \frac{C}{P_{\text{экв}}} \right)^p, \quad (19.2)$$

где  $p$  – показатель степени, равный 3 для шарикоподшипников и 3,33 для роликоподшипников, эквивалентная нагрузка

$$P_{\text{экв}} = (X F_r + Y F_a) K_\sigma K_T, \quad (19.3)$$

$X$  и  $Y$  – коэффициенты радиальной  $F_r$  и осевой  $F_a$  нагрузок на подшипник,  $K_\sigma$  – коэффициент безопасности, зависящий от характера нагрузки,  $K_T$  – температурный коэффициент, равный 1, если температура подшипника не превышает  $100^\circ\text{C}$ . Если осевая нагрузка достаточно мала:

$$F_a/F_r \leq e,$$

где  $e$  – параметр осевого нагружения, коэффициенты в формуле (19.3)

$$X = 1, Y = 0.$$

В частности, эквивалентная нагрузка (19.3) в формуле (19.2) при радиальной нагрузке на радиальные шарикоподшипники типа 0 (рис.19.3)

$$P_{\text{экв}} = F_r K_\sigma K_T.$$

Долговечность в часах

$$L_h = \frac{L \cdot 10^6}{n \cdot 60} \text{ час},$$

где  $n$  об/мин – частота вращения вала. Удовлетворяются долговечностью в 20000 часов, или в 10000 часов, если предусмотреть смену подшипников по истечении этих десяти тысяч часов.

Заметим: радиальная нагрузка  $F_r$  на радиально-упорные подшипники 6, 7 уравнивается реакциями, нормальными к опорным поверхностям тел качения – коническим поверхностям. Радиальные составляющие таких реакций дополняются (рис. 19.8) осевыми составляющими

$$S = eF_r$$

(или реакциями  $S = 0,83eF_r$ , возникающими в конических подшипниках), которые могут оказаться неуравновешенными. Однако осевые нагрузки на подшипники не порождают радиальных реакций и уравниваются «самостоятельно». В схеме на рис. 19.8 реакция  $S_l$  должна уравниваться суммой реакции  $S_n$  и осевой нагрузки на вал  $F_a$ . Если

$$S_n + F_a \geq S_l,$$

то осевые реакции, равные нагрузкам на подшипники,

$$F_{ал} = S_n + F_a, F_{ап} = S_n;$$

если же

$$S_n + F_a \leq S_l,$$

то осевые реакции

$$F_{ал} = S_l, F_{ап} = S_l - F_a.$$

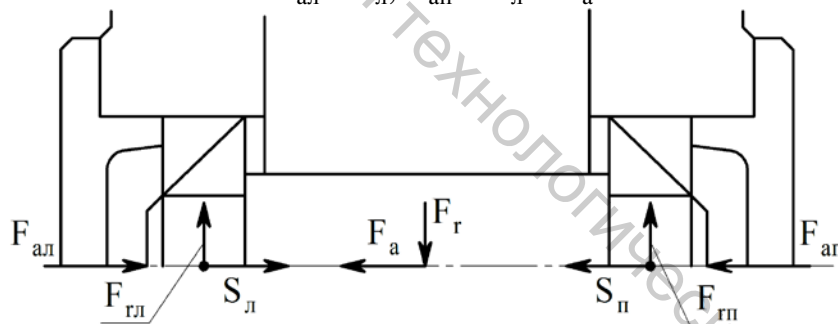


Рисунок 19.8 – Радиальные и осевые реакции радиально-упорных подшипников

## 19.8 Схемы установки подшипников

На рисунке 19.9 изображена схема установки с фиксирующей и плавающей опорами. Первая воспринимает радиальную и осевую нагрузку, вторая – только радиальную. В первой из них внутреннее кольцо подшипника зажато между упорным буртиком вала 2 и шлицевой гайкой 1, наружное кольцо – между упорным буртиком в корпусе 3 и торцом крышки 4; во второй внутреннее кольцо подшипника зажато между буртиком вала и пружинным кольцом 5.

Желательна равномерная нагрузка опор. Поэтому плавающей делают опору, нагруженную большей радиальной нагрузкой.

При температурных колебаниях плавающий подшипник перемещается на величину удлинения (укорочения) вала. Перемещение его может случиться под нагрузкой – поверхность под подшипником изнашивается. Чтобы снизить

возможный износ, плавающей (при наличии только радиальных нагрузок) делают опоры, нагруженную меньшей из нагрузок.

По схеме (на рисунке 19.9) устанавливают (в отдельных корпусах) подшипники типов 1, 3 приводных валов ленточных транспортеров и цепных конвейеров.

Подшипники относительно коротких валов редукторов устанавливают “в распор” (рис. 19.10), предусматривая осевой зазор  $a = 0,2 \dots 0,5$  мм, предохраняющий нагревающийся вал от заземления в опорах.

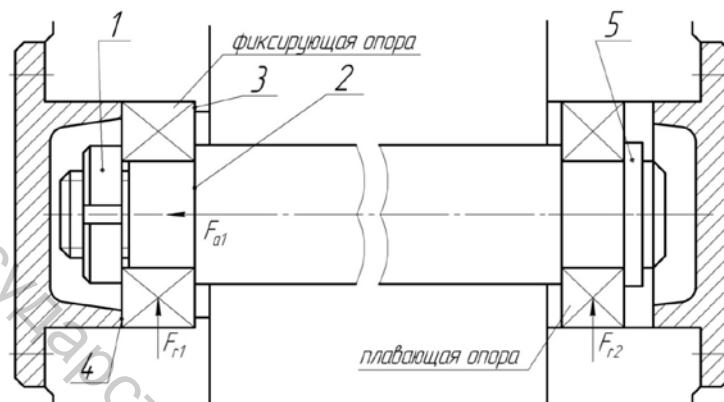


Рисунок 19.9 – Установка подшипников в фиксирующей и плавающей опорах: 1 – шлицевая гайка со стопорной шайбой, 2 – упорный буртик на валу, 3 – упорный буртик в корпусе, 4 – торец крышки, 5 – кольцо пружинное упорное



Рисунок 19.10 – Установка подшипников в “распор”

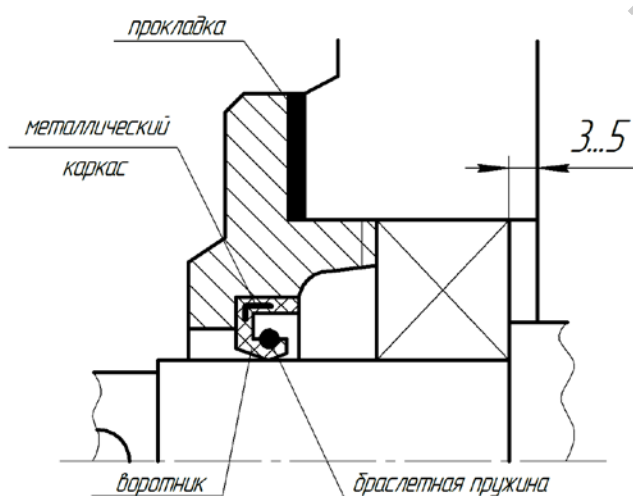


Рисунок 19.11 – Манжетное уплотнение

Кольца подшипников должны вращаться легко, свободно. Вместе с этим большие зазоры в подшипниках недопустимы. Чем больше радиальный зазор, тем хуже условия работы тел качения. Требуются оптимальные зазоры. Их создают, регулируя подшипники. Только в случае, показанном на рисунке 19.9, подшипник в фиксирующей опоре не регулируют. Необходимый зазор создан при изготовлении подшипника.

Если же подшипники установлены “в распор”, их регулируют, перемещая их наружные кольца – подкладывая (рис. 19.11) под фланцы привертных крышек подшипников наборы тонких металлических прокладок (толщинами 0,1; 0,2; 0,4; 0,8 мм). Дополнительно регулируется осевое положение вала.

### 19.9 Смазка подшипников закрытых передач

Подшипники редуктора смазываются тем же маслом, что и зубчатые колеса. При вращении колес масло разбрызгивается, попадая на стенки корпуса, стекая с них и попадая в подшипники. Для удержания масла подшипники “вдвигают” в отверстия корпуса на 3–5 мм.

Смазка подшипников предполагает надежное уплотнение подшипниковых узлов – защиту их от вытекания масла наружу и попадания пыли и грязи. Наиболее распространены манжетные уплотнения из масло- и бензостойкой резины с внутренним металлическим каркасом. Уплотняющий элемент манжеты – эластичный воротник, прижимаемый к валу браслетной пружиной. Манжета устанавливается так, чтобы воротник с пружиной был обращен в сторону подшипника. Давление масла способствует прижатию воротника к поверхности вала.

## Лекция 20. Ременные передачи

Ременная передача (рис. 20.1), состоящая из двух шкивов и ремня (ремней), передает движение посредством сил трения, действующих между ремнем (ремнями) и шкивами.

Силы трения появляются при “попытке” ремня (ремней), натянутого и прижатого к шкивам, скользить по ним. Предварительное натяжение ремня (ремней) производится натяжным устройством.

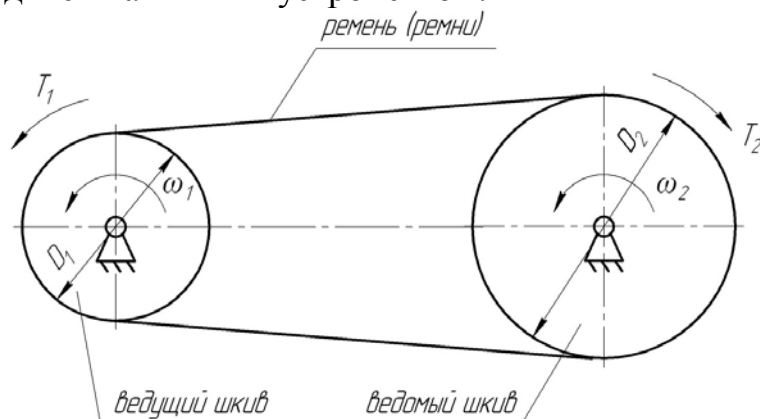


Рисунок 20.1 – Ременная передача

Ременные передачи в отличие от зубчатых передач работают бесшумно, на высоких скоростях; способны передавать движение на сравнительно большие (до 15 м) расстояния; при перегрузках ремень (ремни) проскальзывает по шкивам – передача не повреждается.

Вместе с этим, размеры шкивов намного превышают размеры зубчатых колес; предварительное натяжение ремня (ремней) намного (в 2-3 раза) увеличивает нагрузку на подшипники; передаточное число оказывается зависимым от нагрузки (не постоянно).

Наиболее распространена клиноременная передача – обычно с несколькими клиновыми ремнями. На рисунке 20.2 показаны фрагменты ремней, расположенные за шкивом передачи. На рисунке 20.3 показана плоскоременная передача – с одним плоским ремнем.

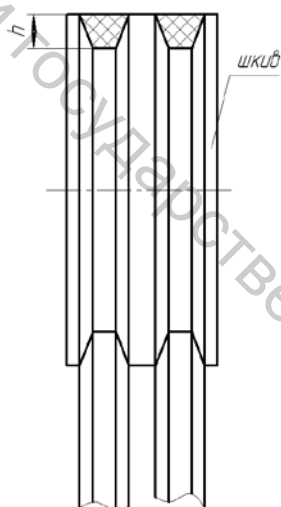


Рисунок 20.2 – Клиновые ремни

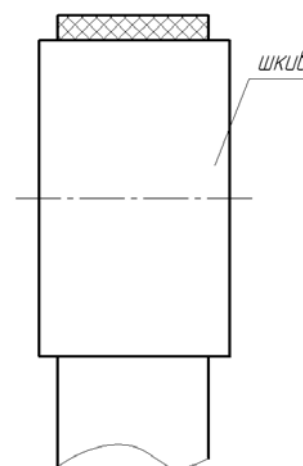


Рисунок 20.3 – Плоский ремень

## 20.1 Кинематика ременной передачи

Если считать, что ремень не проскальзывает по шкивам, скорость его (в первом приближении) равна окружным скоростям шкивов:

$$V_1 = \omega_1 \frac{D_1}{2} = V = \omega_2 \frac{D_2}{2} = V_2, \quad (20.1)$$

передаточное отношение

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{D_2}{D_1} = u. \quad (20.2)$$

Но скольжение ремня по шкивам неизбежно.

Действительно, ведущая ветвь ремня (рис. 20.4) натянута сильнее ведомой. По мере огибания ведущего шкива натяжение ремня ослабевает, упругое удлинение ремня становится меньше – ремень “сжеживается”, скользя по ремню. Это скольжение называется упругим. Из-за него ремень отстает от ведущего шкива, но обгоняет ведомый; скорости (20.1) не равны:

$$V_1 = \omega_1 \frac{D_1}{2} > V > \omega_2 \frac{D_2}{2} = V_2,$$

передаточное отношение (20.2)

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} > \frac{D_2}{D_1} = u, \quad (20.3)$$

$$i = \frac{D_2}{D_1(1-\varepsilon)},$$

где  $\varepsilon \approx 0,01 \dots 0,02$  – коэффициент упругого скольжения. При этих значениях коэффициента  $\varepsilon$  отношение (20.3), практически, не отличается от числа (20.2).

## 20.2 Геометрия ременной передачи

Синус угла наклона ведущей ветви ремня к горизонту находится из рассмотрения  $\Delta O_1 O_2 C$  (рис. 20.4):

$$\sin \frac{\beta}{2} = \frac{O_2 C}{O_1 O_2} = \frac{D_2 - D_1}{2a},$$

или (при обычно небольших углах  $\beta$ )

$$\beta \approx \frac{D_2 - D_1}{a} = D_1 \frac{u - 1}{a},$$

что дает угол обхвата ведущего шкива

$$\alpha^\circ = 180^\circ - \beta \approx 180^\circ - \frac{D_1}{a}(u - 1) \cdot 57^\circ, \quad (20.4)$$

$a$  – межосевое расстояние,  $u$  – передаточное число (20.2).

Длина ремня

$$L = 2a \cos \frac{\beta}{2} + (\pi - \beta) \frac{D_1}{2} + (\pi + \beta) \frac{D_2}{2},$$

где

$$\cos \frac{\beta}{2} = \sqrt{1 - \sin^2 \frac{\beta}{2}} \approx 1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\beta}{2} \approx 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\beta}{2} \right)^2;$$

приблизненно

$$L \approx 2a + \frac{\pi}{2}(D_1 + D_2) + \frac{(D_2 - D_1)^2}{4a}. \quad (20.5)$$

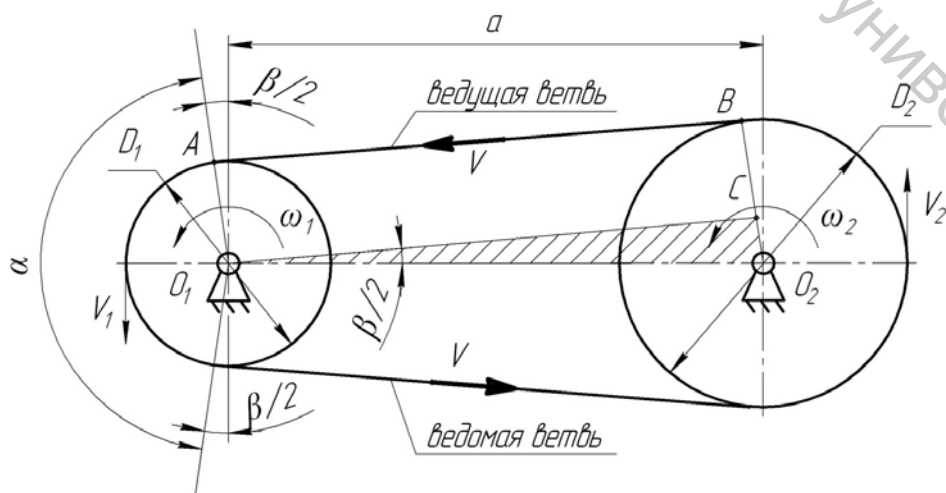


Рисунок 20.4 – К определению угла обхвата и длины ремня

### 20.3 Силы в передаче

На рисунке 20.5 показан ведущий шкив неработающей передачи (ветви ремня натянуты силами предварительного натяжения  $S_0$ ) и работающей передачи (ведущая ветвь натянута сильнее ведомой:  $S_1 > S_2$ ). Понятно, что натяжение ведущей ветви  $S_1 > S_0$ , или

$$S_1 = S_0 + \Delta S; \quad (20.6)$$

ведущая ветвь получает дополнительное удлинение, что компенсируется таким же по величине дополнительным укорочением ведомой ветви (так как длина ремня задана, она одна и та же в неработающей и работающей передаче):

$$S_2 = S_0 - \Delta S. \quad (20.7)$$

Сумма натяжений (20.6–20.7) ветвей ремня

$$S_1 + S_2 = 2S_0. \quad (20.8)$$

Ведущий шкив работающей передачи вращается равномерно – сумма моментов сил, действующих на него, равна 0:

$$S_1 \frac{D_1}{2} - S_2 \frac{D_2}{2} - T_1 = 0,$$

разность натяжений

$$S_1 - S_2 = 2T_1 / D_1 \quad (20.9)$$

равна окружной силе, или полезной нагрузке

$$F_T = \frac{2T_1}{D_1}.$$

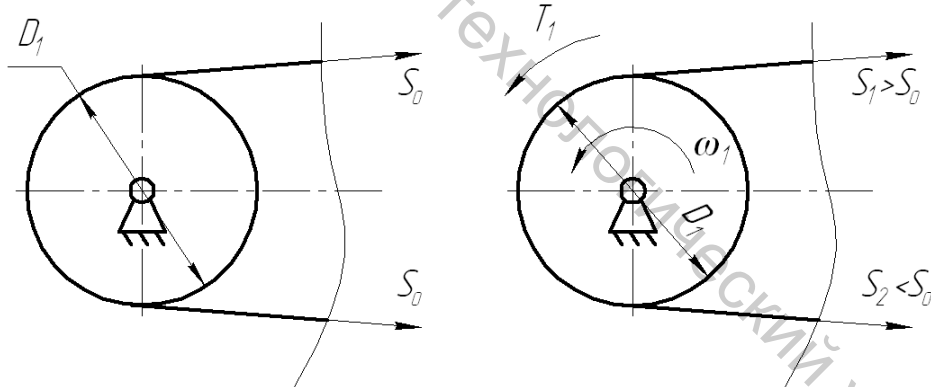


Рисунок 20.5 – Неработающая и работающая передачи:  $S_0$  – силы предварительного натяжения,  $S_1$  и  $S_2$  – натяжения ветвей ремня

### 20.4 Формула Эйлера

Уравнения (20.8) и (20.9) требуется дополнить связью между натяжениями  $S_1$  и  $S_2$ . Рассмотрим (с целью найти эту связь) равновесие бесконечно короткого фрагмента ремня на ведущем шкиве (рис. 20.6). Уравнения равновесия (в проекциях на касательную  $t$  и нормаль  $n$  к поверхности шкива):

$$-S \cos \frac{d\varphi}{2} + (S + dS) \cos \frac{d\varphi}{2} - fdN = 0, \quad (20.10)$$

$$dN - S \sin \frac{d\varphi}{2} - (S + dS) \sin \frac{d\varphi}{2} = 0.$$

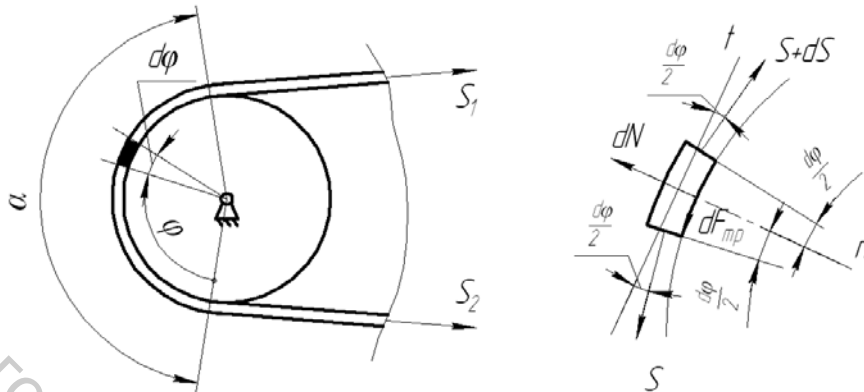


Рисунок 20.6 – К выводу формулы Эйлера

В уравнения (20.10) входят натяжения в сечениях, ограничивающих фрагмент ремня, нормальная реакция  $dN$  поверхности шкива и сила трения, определяемая законом Амонтона

$$dF_{mp} = fdN,$$

$f$  – коэффициент трения.

Пределы

$$\cos \frac{d\varphi}{2} = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \cos \frac{\Delta\varphi}{2} = \cos 0 = 1,$$

$$\frac{\sin \frac{d\varphi}{2}}{\frac{d\varphi}{2}} = \lim_{\Delta\varphi \rightarrow 0} \frac{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} = 1,$$

что позволяет заменить  $\sin \frac{d\varphi}{2}$  на  $\frac{d\varphi}{2}$ ; бесконечно малую  $dSd\varphi$  второго порядка отбрасываем. Уравнения (20.10) переписываются:

$$dS = fdN,$$

$$dN = Sd\varphi.$$

В итоге получается одно дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными

$$\frac{dS}{S} = fd\varphi.$$

Его интегрирование дает искомую связь:

$$\int_{S_2}^{S_1} \frac{dS}{S} = \int_0^{\alpha} fd\varphi, \quad \ln S|_{S_2}^{S_1} = \alpha f, \quad (20.11)$$

$$S_1 = S_2 e^{\alpha f}.$$

Решение системы трех уравнений (20.8, 20.9 и 20.11):

$$\begin{aligned}
 S_2 &= F_t \frac{1}{e^{f\alpha} - 1}, \\
 S_1 &= F_t \frac{e^{f\alpha}}{e^{f\alpha} - 1}, \\
 S_0 &= \frac{1}{2} F_t \frac{e^{f\alpha} + 1}{e^{f\alpha} - 1}.
 \end{aligned}
 \tag{20.12}$$

## 20.5 Фактор трения

Назовем произведение  $f\alpha$  фактором трения и найдем, что при  $f\alpha \rightarrow 0$  все силы (20.12) становятся бесконечно большими; передача полезной нагрузки становится невозможной. Передача работает тем лучше, чем больше фактор трения  $f\alpha$ . Увеличить его можно, используя натяжной ролик (рис. 20.7) или повышая трение в передаче.

На рисунке 20.8 показан фрагмент клинового ремня в канавке (ручье) шкива. Силы трения действуют на конических поверхностях ручья. Нормальные реакции этих поверхностей, возникающие под давлением на фрагмент (см. силу  $dP$ ), находятся из уравнения равновесия фрагмента

$$2dN \sin \frac{\varphi}{2} = dP:$$

$$dN = \frac{dP}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}.$$

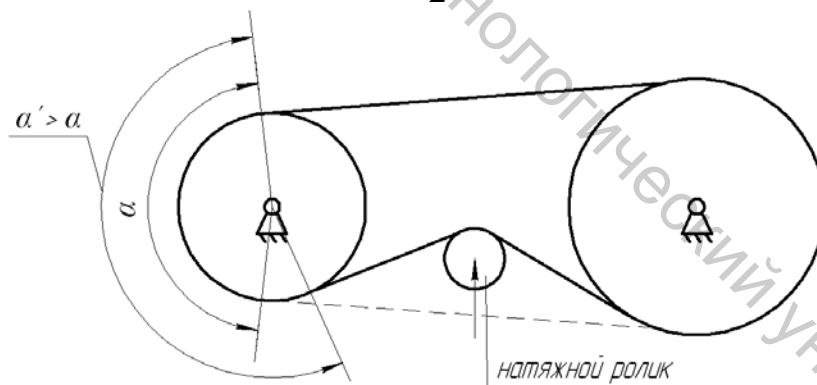


Рисунок 20.7 – Передача с натяжным роликом

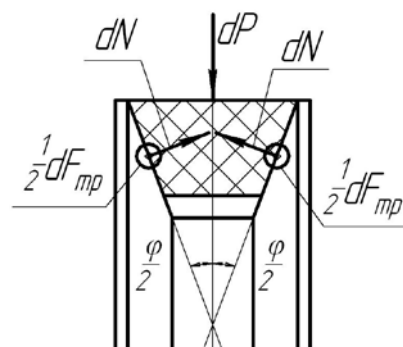


Рисунок 20.8 – Силы трения в клиноременной передаче

Суммарная сила трения

$$dF_{mp} = 2fdN = \left( \frac{f}{\sin \frac{\varphi}{2}} \right) dP = f'dP,$$

где  $f' = \frac{f}{\sin \frac{\varphi}{2}}$  – приведенный коэффициент трения.

В плоскоременной передаче (рис. 20.9)

$$dF_{mp} = fdP.$$

Для стандартных клиновых ремней  $\varphi = 40^\circ$ ,  $f' / f \approx 3$ . Трение в клиноременной передаче примерно в 3 раза больше трения в плоскоременной передаче.

Соответственно, угол обхвата (20.4) в клиноременной передаче может быть снижен до  $120^\circ$  (и даже до  $90^\circ$ ) против  $\alpha \geq 150^\circ$  в плоскоременной передаче; межосевое расстояние может быть снижено:

$$0,55(D_1 + D_2) + h \leq a \leq 2(D_1 + D_2), \quad (20.13)$$

где  $h$  – толщина ремня (рис. 20.2), против

$$a \geq 2(D_1 + D_2);$$

передаточное число (отношение), наоборот, может быть увеличено до 7 (даже до 10) – против  $u \leq 5$  плоскоременной передачи.

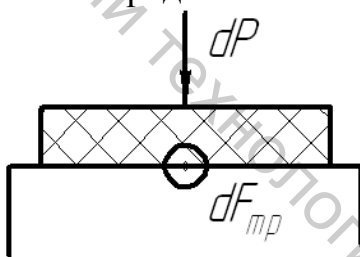


Рисунок 20.9 – Сила трения в плоскоременной передаче

## Лекция 21. Напряжения в ремне

### 21.1 Напряжения от центробежных сил

Всякий бесконечно короткий фрагмент (элемент) ремня, огибая любой из шкивов, движется по окружности – испытывая воздействие центробежных сил инерции  $dF_u$  (рис. 21.1). Дополнительное натяжение ремня находится из уравнения проекций на нормаль к поверхности шкива:

$$-dF_u + 2S_v \sin \frac{d\varphi}{2} = 0, \quad (21.1)$$

где сила инерции

$$dF_u = \left( \frac{\gamma}{g} A \frac{D}{2} d\varphi \right) \frac{V^2}{D/2},$$

$\gamma/g$  – плотность материала ( $\gamma$  – удельный вес,  $g$  – ускорение свободного падения),  $A$  – площадь поперечного сечения,  $0,5Dd\varphi$  – длина элемента ремня, в скобках масса элемента,  $V^2/(D/2)$  – центростремительное ускорение; синус бесконечно малого угла  $d\varphi/2$  может быть заменен углом  $d\varphi/2$  (см. п. 20.4).

Уравнение (21.1) переписывается:

$$\left(\frac{\gamma}{g}Ad\varphi\right)V^2 = S_v d\varphi;$$

дополнительное натяжение ремня

$$S_v = \frac{\gamma}{g}AV^2, \quad (21.2)$$

напряжения в ремне

$$\sigma_v = \frac{S_v}{A} = \frac{\gamma}{g}V^2. \quad (21.3)$$

Дополнительное натяжение (21.2) ослабляет контакт ремня со шкивами, уменьшая силы трения и снижая нагрузочную способность передачи. Однако, снижение это заметно только при высоких скоростях ремня ( $V > 25\text{м/с}$ ).

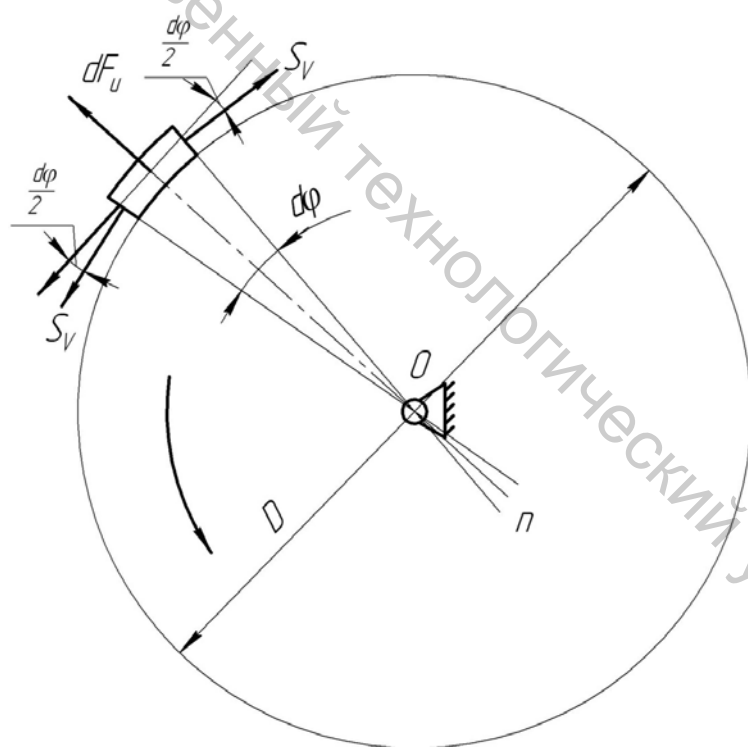


Рисунок 21.1 – Центробежная сила и дополнительное натяжение

## 21.2 Напряжения при изгибе ремня

Ремень, огибая любой из шкивов, искривляется – изгибается. На рисунке 21.2 показан бесконечно короткий фрагмент (элемент) ремня. Наибольшее удлинение получает наружный слой ремня:

$$\varepsilon_{\max} = \frac{(D/2 + h)d\varphi - (D/2 + h/2)d\varphi}{(D/2 + h/2)d\varphi} = \frac{h/2}{(D/2 + h/2)} \approx \frac{h}{D}$$

(так как толщина ремня  $h$  много меньше диаметра шкива). Наибольшие напряжения при изгибе ремня (по закону Гука)

$$\sigma_u = E\varepsilon_{\max} = E \frac{h}{D}. \quad (21.4)$$

Напряжения (21.4) не играют никакой полезной роли, более того они, как увидим далее, – главная причина разрушения ремня от усталости.

Напряжения (21.4) можно снизить, если увеличить отношение  $D/h$ . Его рекомендуемые значения для плоских ремней

$$40 \geq \frac{D_1}{h} \geq 30,$$

для клиновых ремней

$$20 \geq \frac{D_1}{h} \geq 15.$$

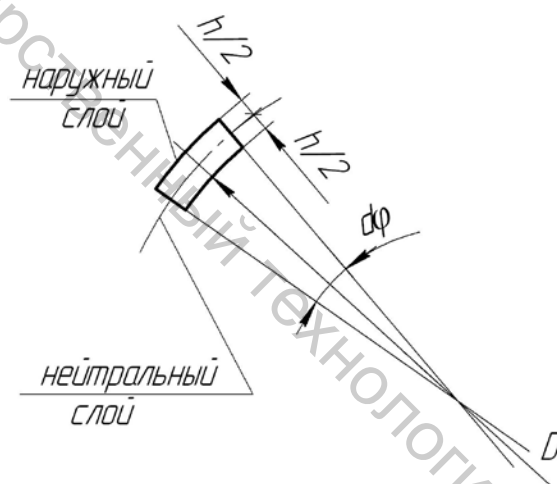


Рисунок 21.2 – Элемент ремня при его изгибе на шкиве

### 21.3 Напряжения в ремне

Разность натяжений ветвей ремня (20.6, 20.7) равна с другой стороны полезной нагрузке (20.9): дополнительное усилие к предварительному натяжению ремня

$$\Delta S = F_t / 2,$$

то есть натяжения (20.6, 20.7) ветвей ремня

$$S_1 = S_0 + \frac{1}{2} F_t,$$

$$S_2 = S_0 - \frac{1}{2} F_t;$$

(21.5)

соответствующие напряжения

$$\sigma_1 = \frac{S_0}{A} + \frac{1}{2} \frac{F_t}{A} = \sigma_0 + \frac{1}{2} \sigma_F, \quad (21.6)$$

$$\sigma_2 = \sigma_0 - \frac{1}{2} \sigma_F, \quad (21.7)$$

где

$$\sigma_0 = S_0 / A \quad (21.8)$$

– напряжение предварительного натяжения,  $\sigma_F = F_t / A$  – полезное напряжение.

Наибольшие напряжения получим, если к напряжениям (21.6) добавим напряжения (21.4) (напряжения (21.3) считаем пренебрежимо малыми):

$$\sigma_{\max} = \sigma_0 + \frac{\sigma_F}{2} + \sigma_u; \quad (21.9)$$

наименьшие напряжения

$$\sigma_{\min} = \sigma_0 - \frac{\sigma_F}{2} \quad (21.10)$$

равны напряжениям (21.7).

На рисунке 21.3 показан цикл напряжений в поперечном сечении ремня. Напряжения  $\sigma_u$ , возникая в момент набегания ремня на шкив и исчезая в момент сбегания ремня со шкива, делают напряжения в ремне изменяющимися циклически. Вместе с этим возникает проблема долговечности ремня. Выдерживая до усталостного разрушения определенное число циклов – пробегов, ремень тем долговечнее, чем меньше число его пробегов в единицу времени

$$v = \frac{V}{L}, \quad (21.11)$$

где  $L$  – длина ремня (20.5). Плоские ремни допускают  $[v] = 5 \text{ с}^{-1}$ , клиновые  $[v] = 20 \text{ с}^{-1}$ .

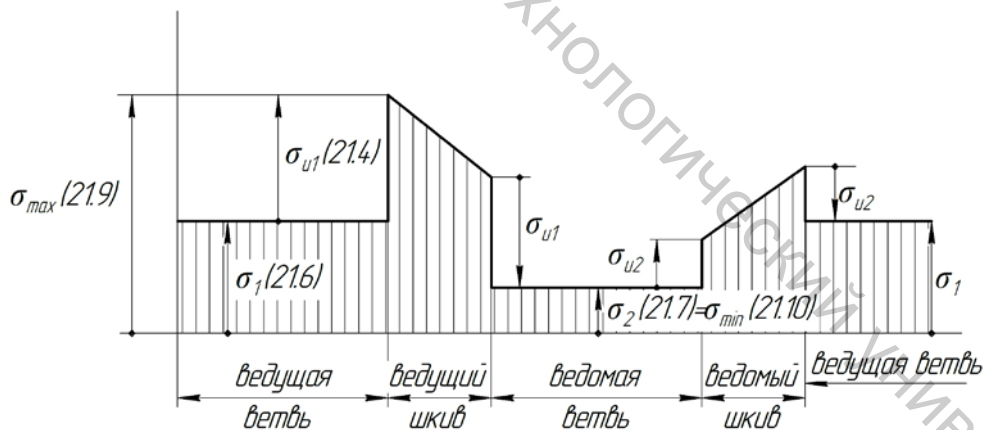


Рисунок 21.3 – Циклически изменяющиеся напряжения в ремне: напряжения при изгибе на ведущем шкиве (21.4), напряжения при изгибе на ведомом шкиве  $\sigma_{u2} = Eh / D_2 < \sigma_{u1}$

Уравнение кривой выносливости ремня (ремней)

$$\sigma_{\max}^m N = const,$$

где  $\sigma_{\max}$  – наибольшее напряжение в ремне (ремнях),

$$N = (2v \cdot 3600) L_h$$

– число циклов (перегибов) ремня за срок службы  $L_h$  час,  $m$  ( $= 8$  для клиновых ремней,  $= 5$  для плоских ремней) – показатель кривой выносливости. Принимая за

базовое число циклов  $10^7$  и за предел выносливости (предел усталости) напряжение  $\sigma_y$  ( $= 9$  для клиновых ремней,  $\approx 6$  для плоских ремней), найдем срок службы ремней (их долговечность):

$$N = (2\nu \cdot 3600)L_h = \left( \frac{\sigma_y}{\sigma_{\max}} \right)^m 10^7 C_u C_H, \quad L_h = \left( \frac{\sigma_y}{\sigma_{\max}} \right)^m \frac{10^7 C_u C_H}{2\nu \cdot 3600},$$

где введены коэффициент передаточного числа  $C_u$  и коэффициент нагрузки  $C_H$  (при постоянной нагрузке  $C_H = 1$ ).

#### 21.4 Расчет клиноременной передачи

Стандартное сечение ремня и стандартный диаметр ведущего шкива  $D_1$  (рис. 20.1–20.2) выбираются в зависимости от момента полезного сопротивления  $T_2$  на ведомом шкиве. Его диаметр (предварительное значение) получается умножением диаметра  $D_1$  на передаточное число (20.2):

$$D_2' = D_1 u;$$

после этого принимается по стандарту. Межосевое расстояние дается рекомендацией (20.13), длина ремня – формулой (20.5).

Скорость ремня (20.1)

$$V = \omega_1 \frac{D_1}{2};$$

число пробегов (21.11) не должно превышать допускаемое  $[v]=20\text{с}^{-1}$ .

Полезная нагрузка (20.9)

$$F_t = \frac{2T_1}{D_1},$$

полезное напряжение

$$\sigma_F = \frac{F_t}{A},$$

где площадь сечения, возможно, нескольких ремней  $A = A_0 z$  ( $A_0$  – площадь сечения одного ремня).

Составляя условие тяговой способности

$$\sigma_F \leq [\sigma_F],$$

или

$$\frac{F_t}{A_0 z} \leq [\sigma_F], \quad (21.12)$$

найдем требуемое число ремней:

$$z \geq \frac{F_t}{[\sigma_F] A_0}, \quad (21.13)$$

где  $[\sigma_F]$  – допускаемое полезное напряжение. Заметим, число (21.13) не должно превышать 6; в противном случае ремни окажутся нагруженными неравномерно – одни будут перегружены, другие – недогружены.

## 21.5 Допускаемое полезное напряжение

Допускаемое полезное напряжение  $[\sigma_F]_0$  в стандартных условиях (угол обхвата (20.4) равен  $180^\circ$ , скорость ремня (20.1) равна 10 м/с, рабочая нагрузка постоянная) определяется напряжением (21.8) предварительного натяжения  $\sigma_0$  (рекомендуется  $\sigma_0 = 1,2$  МПа, при больших напряжениях снижается долговечность ремня), сечением ремня и диаметром ведущего шкива  $D_1$ . Действительно, с ростом отношения  $D_1 / h$  ( $h$  – толщина ремня) снижаются “вредные” напряжения изгиба ремня (21.4), как следствие, допускаемое полезное напряжение может быть повышено.

Отклонение реальных условий от стандартных учитывается коэффициентом угла обхвата (20.4)  $C_\alpha$ , скоростным коэффициентом  $C_V$  и коэффициентом режима нагрузки  $C_P$ : допускаемое полезное напряжение в условии тяговой способности (21.12)

$$[\sigma_F] = [\sigma_F]_0 C_\alpha \cdot C_V \cdot C_P.$$

## 21.6 Силы, действующие на валы ременной передачи

Сила давления на вал ведущего шкива (рис. 21.4) – равнодействующая натяжений  $S_1$  и  $S_2$  (21.5) на рисунке 20.5, перенесенных на ось вала  $O_1$ . Проектируя векторную сумму

$$\vec{Q} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$$

на прямую  $O_1O_2$ , получим проекцию равнодействующей:

$$Q \cos \gamma = S_1 \cos \frac{\beta}{2} + S_2 \cos \frac{\beta}{2},$$

$$Q \cos \gamma = \left[ (S_0 + \frac{1}{2}F) + (S_0 - \frac{1}{2}F) \right] \cos \frac{\beta}{2},$$

что дает равнодействующую

$$Q \approx 2S_0 \cos \frac{\beta}{2}, \quad (21.14)$$

при обычно малом угле  $\gamma$  силы  $Q$  считаем направленными вдоль прямой  $O_1O_2$  (рис. 21.4).

Предварительное натяжение ремня в формуле (21.14) – см. формулы (21.6), (21.7), (21.8) –

$$S_0 = \sigma_0 A = \sigma_0 A_0 z.$$

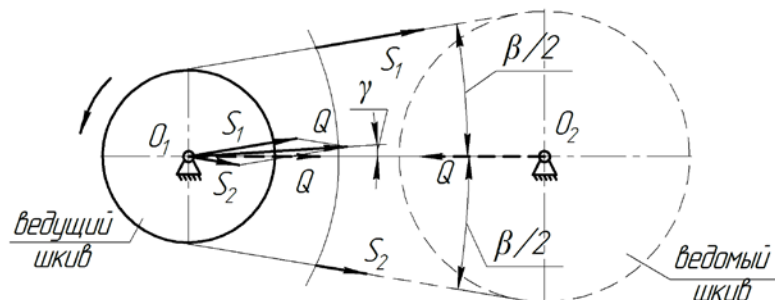


Рисунок 21.4 – Силы, действующие на валы передачи

## Лекция 22. Цепная передача

В отличие от ременных передач, использующих трение между ремнем и шкивами, цепные передачи работают на основе зацепления цепи со звездочками (рис. 22.1). Цепи стальные, их прочность намного выше прочности ремней. Оба обстоятельства определяют передачу значительно больших нагрузок, но все-таки меньших, чем те, что передаются зубчатыми колесами.

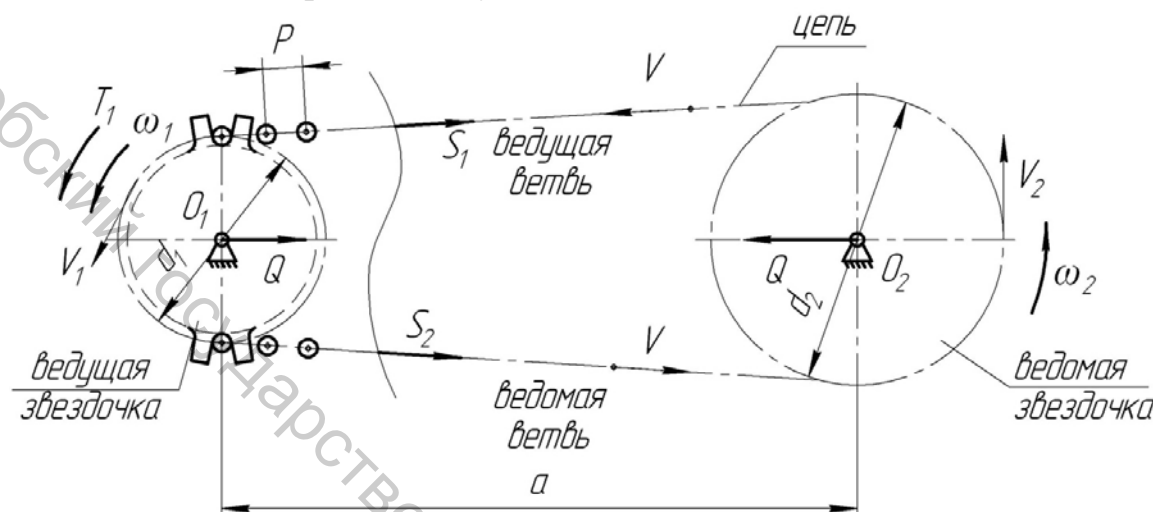


Рисунок 22.1 – Цепная передача:  $d_1$  и  $d_2$  – делительные диаметры,  $P$  – шаг цепи

Цепь не проскальзывает по звездочкам, поэтому способна работать на кратковременных перегрузках без буксования, среднее за оборот передаточное отношение неизменно.

Достаточные углы обхвата (20.4) в ременных передачах получаются при достаточно больших межосевых расстояниях и невысоких передаточных числах. Угол обхвата в цепных передачах не столь важен, они надежно работают, обеспечивая высокие передаточные отношения при сравнительно малых межосевых расстояниях.

Однако ремень огибает шкивы по окружностям – передача работает плавно и бесшумно; цепь огибает звездочки, соприкасаясь своими звеньями со сторонами многоугольников – с этим связаны шум, производимый передачей, дополнительные динамические нагрузки, износ шарниров цепи.

### 22.1 Конструкция втулочно-роликовой цепи и звездочек

Шарнир втулочно-роликовой цепи образован валиком 1 (рис. 22.2), впрессованным в две пластины внешнего звена 2 и свободно вращающимся в втулке 3, впрессованной в две пластины внутреннего звена 4. Ролик 5 заменяет трение скольжения в контакте с зубьями звездочек на значительно меньшее трение качения. Шаг цепи  $P$  – расстояние между осями соседних валиков.

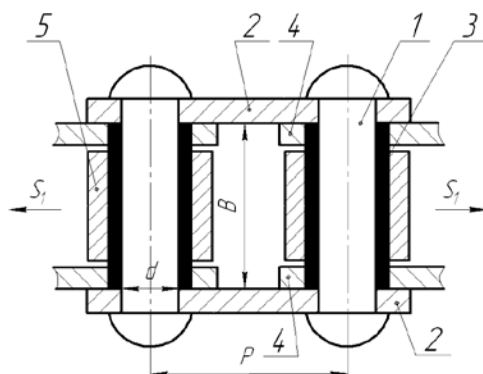


Рисунок 22.2 – Конструкция звена втулочно-роликовой цепи

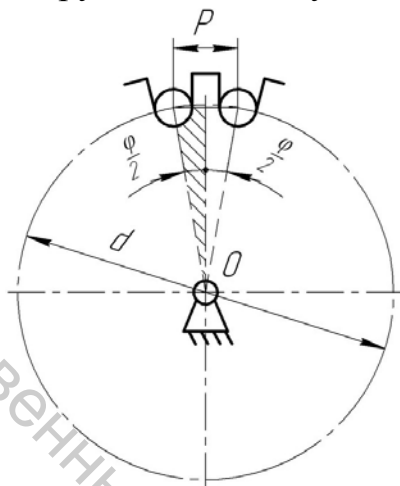


Рисунок 22.3 – Звездочка цепной передачи

На рисунке 22.3 изображена звездочка цепной передачи. Центры шарниров цепи располагаются на ее делительной окружности. Решая треугольник, заштрихованный на рисунке, найдем связь

$$\frac{P/2}{d/2} = \sin \frac{\varphi}{2}, \quad \varphi = \frac{2\pi}{z}, \quad (22.1)$$

где  $z$  – число зубьев звездочки. Делительный диаметр ее

$$d = \frac{P}{\sin \frac{\pi}{z}} \approx \frac{Pz}{\pi} \quad (22.2)$$

пропорционален (в приближении) числу  $z$ .

## 22.2 Передаточное число

Если считать в первом приближении, что цепь огибает звездочки по делительным окружностям, окружные скорости звездочек (рис. 22.1)

$$V_1 = \omega_1 \frac{d_1}{2} \approx V \approx \omega_2 \frac{d_2}{2} = V_2, \quad (22.3)$$

где  $V$  – скорость цепи. Передаточное отношение

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} \approx \frac{d_2}{d_1}$$

равно (см. формулу (22.2)) числу

$$u = \frac{z_2}{z_1}. \quad (22.4)$$

### 22.3 Удары в передаче

В момент, показанный на рисунке 22.4, шарнир 1 цепи “попал” во впадину звездочки 1' и в дальнейшем движении вместе со звездочкой описывает дугу I'A0', поднимая и опуская цепь. Шарнир 2, придя в положение I, опускается вместе с цепью (со скоростью V), встречая поднимающуюся со скоростью V' впадину 2'. Соприкосновение шарнира и предназначенной ему впадины сопровождается ударом. Удары в передаче порождают шум и являются одной из причин разрушения шарниров цепи и зубьев звездочки.

Всякий шарнир цепи претерпевает за пробег два удара: встречаясь с ведущей звездочкой и встречаясь с ведомой звездочкой. Число ударов в единицу времени

$$\nu = 2 \frac{V}{L} \leq [\nu], \quad (22.5)$$

где (см. формулу для числа пробогов в единицу времени (21.11)) V – скорость цепи (22.3), длина цепи (20.5)

$$L = 2a + \frac{\pi}{2}(d_1 + d_2) + \frac{(d_2 - d_1)^2}{4a}, \quad (22.6)$$

$$a = (30 \dots 50)P, \quad (22.7)$$

где  $a = (30 \dots 50)P$  – рекомендуемое межосевое расстояние передачи (рис. 22.1),  $[\nu]$  – допускаемое число ударов.

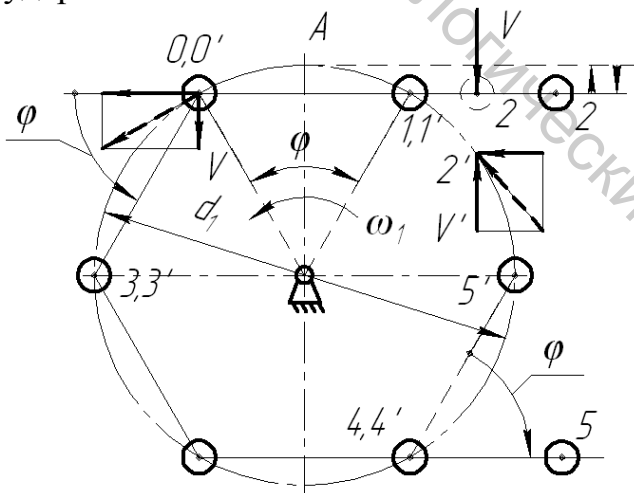


Рисунок 22.4 – Шарнир 1 (изображен кружком) во впадине 1' (обозначена точкой) перемещается по дуге I'A0, поднимая и опуская цепь; когда шарнир 1 попадает в положение 0, шарнир 2 опускается вместе с цепью со скоростью V, впадина 2' поднимается со скоростью V'; войдя в зацепление, звено 1-0 поворачивается на угол φ, выходя из зацепления, звено 4-5 поворачивается на угол φ

## 22.4 Износ цепи

Звено цепи  $1-0$ , войдя в контакт со звездочкой и переходя в положение  $0-3$ , поворачивается (рис. 22.4) на угол  $\varphi$  (рис. 22.3). Еще один поворот на тот же угол совершается, когда цепь выходит из зацепления со звездочкой, не оставаясь в положении  $4'-5'$ , а переходя в положение  $4-5$ .

За один пробег в каждом шарнире цепи совершается 4 поворота – два на ведущей звездочке, два – на ведомой; они – основная причина износа валиков 1 и втулок 3 шарнира (рис. 22.2). Угол поворота (22.1) тем больше, чем меньше число зубьев звездочки. Увеличивая число зубьев, снижаем износ шарниров. Увеличивая межосевое расстояние (22.7), увеличиваем длину цепи (22.6) и тем самым снижаем число пробегов (21.11) – уменьшая число поворотов в шарнирах (и их износ).

## 22.5 Оптимальное число зубьев

Износ валиков и втулок шарниров цепи увеличивает ее шаг. Соответственно растут делительные диаметры (22.2) звездочек – диаметры окружностей, на которых располагаются центры шарниров (рис. 22.3):

$$d + \Delta d \approx \frac{P + \Delta P}{\sin \frac{\pi}{z}} \approx d + \frac{\Delta P}{\frac{\pi}{z}}. \quad (22.8)$$

Шарниры удаляются от осей вращения и, в конце, цепь спадает со звездочек. Приращение делительного диаметра (22.8) пропорционально (в первом приближении) числу ее зубьев – звездочка с большим числом зубьев (ведомая) первой потеряет зацепление с цепью.

Итак, при больших числах зубьев звездочек цепь изнашивается (см. п. 22.4) медленнее, зато мало изношенная, не потерявшая своей прочности, спадает со звездочек. При малых числах зубьев цепь, наоборот, изнашивается быстрее, зато вплоть до разрыва не теряет зацепления со звездочками. Существует оптимальное число зубьев (ведущей звездочки), определяющее наибольший срок службы цепи, не теряющей зацепления.

С ростом передаточного числа (22.4) число зубьев ведомой звездочки  $z_2 = z_1 \cdot u$  увеличивается, вероятность потери зацепления возрастает (желательные числа  $z_2 \leq 100 \dots 120$ ) – рекомендуемое число  $z_1$  снижается. В быстроходных передачах число пробегов (21.11) больше, чем в тихоходных, вместе с ним растут частота ударов (22.5), число поворотов в шарнирах цепи, и, как следствие, износ шарниров – число  $z_1$  следует увеличить.

## 22.6 Давление в шарнирах цепи

Цепь рассчитывают по износостойкости шарниров, за основной расчетный критерий принимают удельное давление в шарнире, определяемое натяжением ведущей ветви  $S_1$  (рис. 22.1).

Натяжения ветвей цепи аналогичны натяжениям ветвей ремня на рисунке 20.5. Однако силы предварительного натяжения  $S_0$  не играют в цепной передаче той определяющей роли, которую они играют в ременной. Обычно величина  $S_0$  составляет несколько процентов полезной нагрузки  $F_t$  (20.9); натяжение ведомой ветви равно большему из усилий  $S_0$  и  $S_V$  (аналогичной силе (21.2) в ременной передаче, составляющей  $\sim 0,1\% F_t$ ). Уравнение, буквально повторяющее уравнение (20.9), дает силы

$$S_2 \ll F_t, S_1 \approx F_t. \quad (22.9)$$

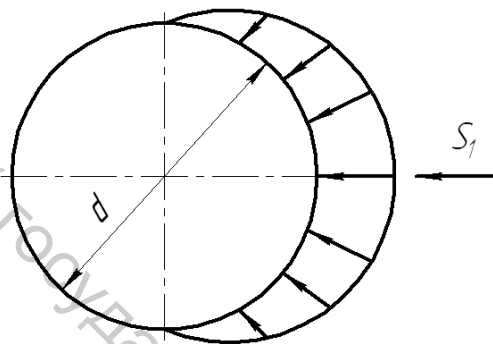


Рисунок 22.5 – Давление на поверхности валика

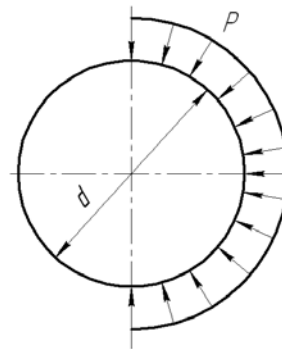


Рисунок 22.6 – Равномерно распределенное давление

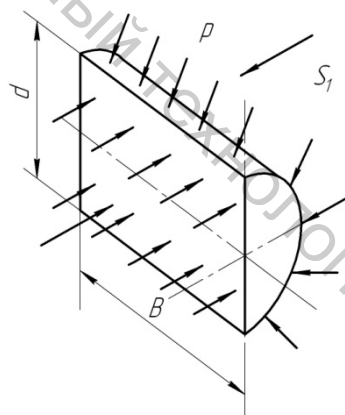


Рисунок 22.7 – Равновесие половины валика в жидкости

Давление в шарнире распределяется по поверхности валика (рис. 22.5) неравномерно. Имея в виду его среднее значение, найдем величину давления, равномерно распределенного по поверхности валика (рис. 22.6). Вообразим (рис. 22.7) половину валика, погруженную в жидкость и находящуюся там в равновесии. Давление жидкости равномерно распределено по всей поверхности валика, оно одно и то же на плоской и на цилиндрической поверхности. Равные в равновесии равнодействующие сил давления на этих поверхностях равны произведению давления на площадь  $dB$  плоской части поверхности валика.

Возвращаясь к шарниру ведущей ветви, найдем среднее давление на поверхности валика

$$p = \frac{S_1}{dB},$$

или, при учете величины натяжения  $S_1$  (22.9),

$$p = \frac{F_t}{dB}. \quad (22.10)$$

## 22.7 Допускаемое давление в шарнирах цепи

Условие износостойкости цепи имеет вид

$$p \leq [p], \quad (22.11)$$

где  $p$  – среднее давление в шарнирах цепи (22.10),  $[p]$  – допускаемое давление в заданных условиях работы передачи. Оно определяется, в основном, допускаемым давлением  $[p]_0$  в стандартных условиях. Эти условия: нагрузка на передачу постоянная, работа в одну смену в сухом помещении без пыли, смазка передачи капельная с частотой 20 кап/мин, натяжение цепи регулируется перемещением оси одной из звездочек, наклон линии центров передачи  $O_1O_2$  (рис. 22.1) к горизонту не превышает  $60^\circ$ , межосевое расстояние выбрано по рекомендации (22.7). Чем быстроходнее передача, тем выше частота поворотов в шарнирах, тем выше вероятность быстрого износа, тем меньше допускаемое давление  $[p]_0$ .

Отклонение заданных (реальных) условий от стандартных учитывается соответствующими коэффициентами, коэффициент эксплуатации

$$K_э = K_d \cdot K_{\text{реж}} \cdot K_c \cdot K_{\text{рег}} \cdot K_n \cdot K_a,$$

допускаемое давление в условии (22.11)

$$[p] = \frac{[p]_0}{K_э}. \quad (22.12)$$

## 22.8 Практический расчет цепной передачи

Допускаемое давление в стандартных условиях определяется для известного (стандартного) шага  $P$  частотой вращения  $n_1$  ведущей звездочки. Пока шаг цепи неизвестен, допускаемое давление (в целях предварительного расчета) берется как среднее допускаемых давлений в цепях со всеми стандартными шагами. Это среднее используем в определении (22.12) и давление (22.12) – в условии износостойкости (22.11).

Давление в шарнирах цепи дается формулой (22.10), где полезная нагрузка (см. формулу (20.9))

$$F_t = \frac{2T_1}{d_1}. \quad (22.13)$$

Вращающий момент на ведущей звездочке в формуле (22.13)

$$T_1 = 9550 \frac{P_1 \cdot 1000}{n_1} \text{ Н} \cdot \text{мм}, \quad (22.14)$$

где  $P_1$  кВт и  $n_1$  об/мин – заданная мощность на ведущей звездочке и ее частота вращения; делительный диаметр ведущей звездочки (22.2)

$$d_1 \approx \frac{Pz_1}{\pi}. \quad (22.15)$$

Полагая, наконец, цепь однорядной, используем в условии (22.11) известное из практики соотношение  $dB \approx 0,28P^2$  и перепишем условие (22.11), подставляя в него выражения (22.13), (22.14), (22.15) и допускаемое давление (22.12):

$$p = \frac{F_t}{dB} = \frac{2 \cdot 9550 P_1 \cdot 1000 / n_1}{(Pz_1 / \pi) \cdot 0,28P^2} \leq \frac{[p]_0}{K_s},$$

или

$$\frac{2\pi \cdot 9550 P_1 \cdot 1000 \cdot K_s}{0,28P^3 z_1 n_1} \leq [p]_0.$$

Требуемый шаг однорядной цепи

$$P = 598 \sqrt[3]{\frac{P_1 K_s}{z_1 n_1 [p]_0}}, \quad (22.16)$$

где  $z_1$  – рекомендуемое оптимальное число зубьев ведущей звездочки.

Пользуясь шагом (22.16), выбираем, по крайней мере, две стандартные цепи: с шагом не меньше шага (22.16) и с шагом не больше шага (22.16). В дальнейшем, используя передаточное число (22.4), определяем для каждой из цепей число зубьев ведомой звездочки  $z_2 = z_1 u$ , делительные диаметры звездочек (22.2), межосевое расстояние (22.7), длину цепи (22.6), скорость цепи (22.3) и проверяем условие (22.5).

Наконец, проверяем условие износостойкости (22.11): находим с этой целью вращающий момент (22.14), полезную нагрузку (22.13), давление (22.10), допускаемое давление в стандартных условиях и допускаемое давление (22.12).

Давление на опоры (рис. 22.1)

$$Q = 1,2F_t.$$

## Лекция 23. Резьбовые соединения

### 23.1 Крепёжные и ходовые резьбы

Поверхность резьбы образуется перемещением плоского контура (например, треугольного) вдоль винтовой линии на поверхности цилиндра (рис. 23.1). Соответственно, получаются треугольные (метрические), прямоугольные, трапециевидные, круглые резьбы – на рисунке 23.2 показаны сечения резьб плоскостями, проведенными через ось цилиндрической поверхности, и основные размеры:  $d$  – наружный,  $d_2$  – средний и  $d_1$  – внутренний диаметры; шаг  $P$ .

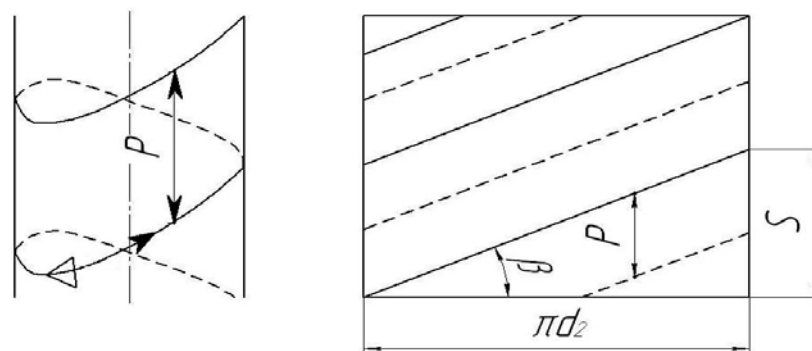


Рисунок 23.1 – Образование резьбы, развёртка винтовых линий двухзаходной резьбы

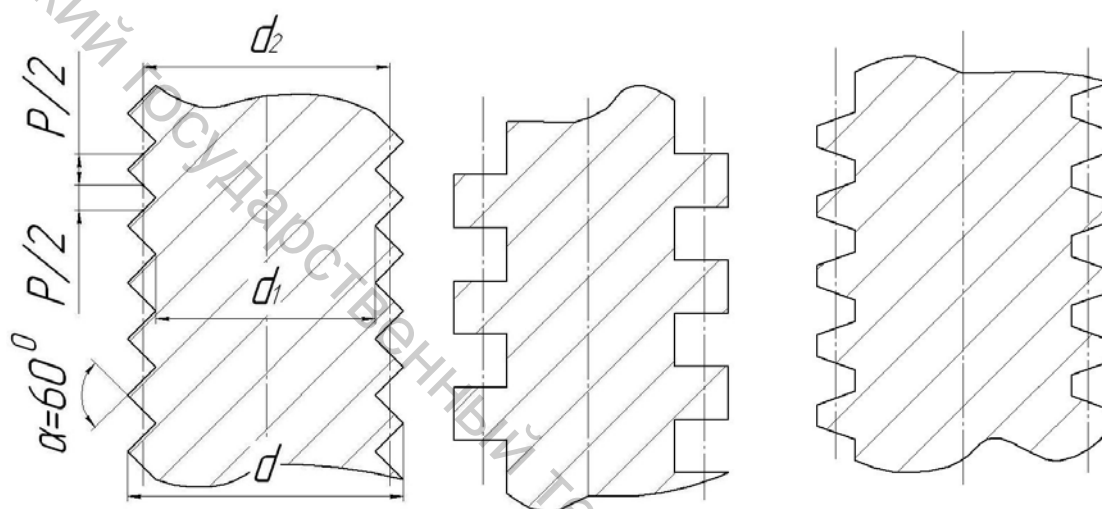


Рисунок 23.2 – Аксиальные сечения резьб и их основные размеры

Если цилиндрическую поверхность диаметром  $d_2$  развернуть на плоскости, винтовая линия на рисунке 23.1 изобразится наклонной прямой ( $\beta$  – угол подъема резьбы). Ход резьбы

$$S = (\pi d_2) \operatorname{tg} \beta.$$

В случае однозаходной резьбы ход резьбы равен её шагу  $P$ . Крепёжные резьбы все однозаходные. Многозаходные резьбы, образованные несколькими винтовыми линиями, используются как ходовые (например, в передачах «винт-гайка»). На рисунке 23.1 показана (на развёртке цилиндра) двухзаходная резьба, её шаг

$$P = \frac{S}{2};$$

ход резьбы с  $n$  заходами

$$S = n \cdot P,$$

угол подъёма резьбы

$$\beta = \operatorname{arctg} \frac{S}{\pi d_2} = \operatorname{arctg} \frac{nP}{\pi d_2}. \quad (23.1)$$

## 23.2 Основные виды резьбовых соединений

На рисунках 23.3–23.5 показаны болтовое, шпильчное и винтовое соединения.

Все они соединяют две детали 1 и 2 и состоят из болта 3 и гайки 4 (рис. 23.3), из шпильки 3 и гайки 4 (рис. 23.4), из винта 3 и детали 2, играющей роль гайки (рис. 23.5). На рисунках 23.3–23.4 изображена пружинная шайба 5, предотвращающая самоотвинчивание гайки. Простая шайба 5 на рисунке 23.5 предохраняет поверхность детали под головкой винта от повреждений (возможных при завинчивании винта).

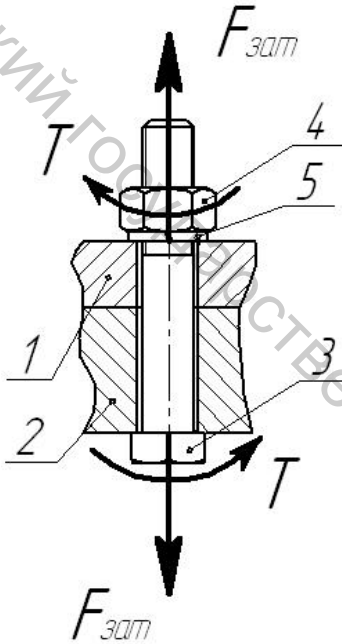


Рисунок 23.3 – Болтовое соединение:  
кручение и  
растяжение болта

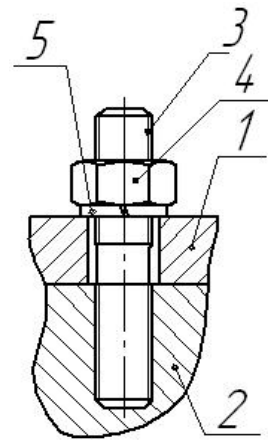


Рисунок 23.4 – Шпильчное соединение

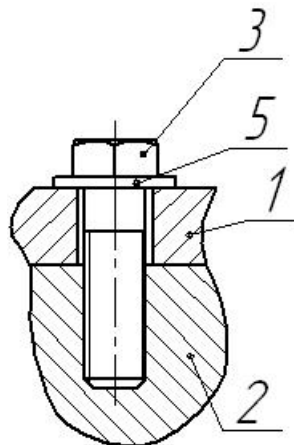


Рисунок 23.5 – Винтовое соединение

### 23.3 Амонтоново трение

Пусть твёрдое тело (рис. 23.6) находится на шероховатой плоскости, пусть на него действует сила  $S$ , её составляющие: нормальная сила, прижимающая тело к плоскости,

$$S_n = S \cos \alpha \quad (23.3)$$

и касательная сила, сдвигающая тело,

$$S_r = S \sin \alpha. \quad (23.2)$$

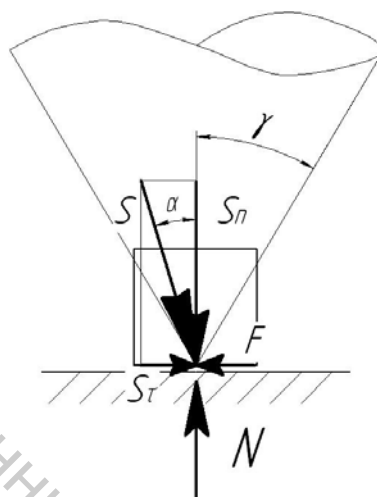


Рисунок 23.6 – Конус трения

Если тело покоится, первая сила (23.2) уравновешена нормальной реакцией:

$$N = S_n, \quad (23.4)$$

вторая (23.3) – силой трения:

$$F = S_r. \quad (23.5)$$

Наибольшая сила трения определяется законом Амонтона

$$F_{mp} = fN, \quad (23.6)$$

где  $f$  – коэффициент трения. Условие покоя (равновесия) тела

$$F < F_{mp},$$

или – см. формулы (23.5, 23.3, 23.6, 23.4, 23.2) –

$$S \sin \alpha < f \cdot S \cos \alpha, \quad (23.7)$$

$$\operatorname{tg} \alpha < f.$$

Построим конус с углом трения при вершине

$$\gamma = \operatorname{arctg} f,$$

условие равновесия (23.7) приобретает вид

$$\alpha < \gamma. \quad (23.8)$$

На рисунке 23.7 изображены наклонная шероховатая плоскость с конусом трения и тело на ней, находящееся под действием вертикальной силы.

Условие равновесия (23.8) в этом случае –

$$\beta < \gamma: \quad (23.9)$$

если сила, действующая на тело, находится в конусе трения, не касаясь его поверхности, тело покоится.

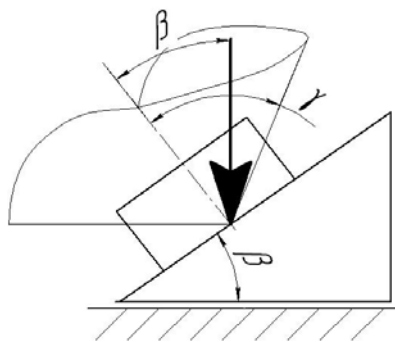


Рисунок 23.7 – Груз на наклонной плоскости

### 23.4 Трение в резьбе

При завинчивании гайки 4 болтового соединения (рис. 23.3) винт-болт 3, удерживаемый от вращения, перемещается в гайке подобно ходовому винту в передаче “гайка–винт” (см. эту передачу в испытательной машине УММ-5). Однако перемещение болта как целого невозможно – оно тормозится его головкой. Перемещается нарезанная часть болта – как следствие, стержень болта получает упругое удлинение. Стремясь вернуться к прежнему размеру, болт прижимает гайку к поверхности детали. Сила давления гайки на деталь и противоположная сила (реакция детали), прижимающая резьбу гайки к резьбе болта, называются силами затяжки соединения. Как только завинчивание гайки прекращается, гайка оказывается в положении груза (рис. 23.7) на наклонной плоскости. Роль наклонной плоскости играет резьба болта; роль силы, действующей на груз, – сила затяжки. Если угол резьбы (23.1) – угол наклона плоскости на рисунке 23.7 – отвечает условию (23.9), гайка оказывается в режиме самоторможения – самоотвинчивания не происходит. В крепёжных резьбах  $\beta = 1,5 \dots 4^\circ$ ;  $\gamma = 6 \dots 16^\circ$ . Все крепёжные резьбы самотормозящие.

Однако, в соединениях, подверженных вибрациям, сцепление резьб болта и гайки слабеет, трение снижается, конус трения (рис. 23.8) сужается, сила затяжки  $F_{зат}$  оказывается вне его, гайка, самоотвинчиваясь, скользит по резьбе болта. Пружинная шайба на рисунках 23.3, 23.4, расправляясь, поддерживает контакт и уровень сцепления резьб гайки и винта, препятствуя самоотвинчиванию гайки.

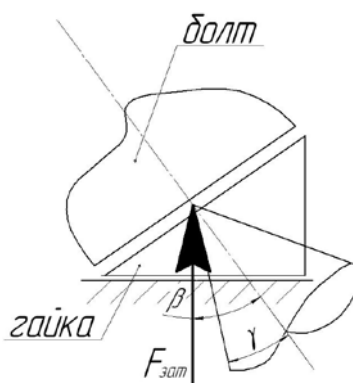


Рисунок 23.8 – Фрагменты гайки и болта

### 23.5 Резьба метрическая

Сравним резьбы треугольную ( $\alpha = 60^\circ$ ) и прямоугольную (рис. 23.9).

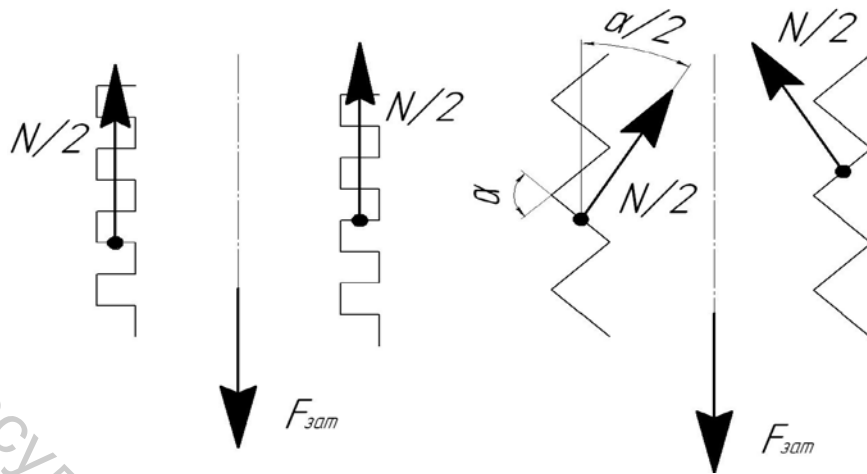


Рисунок 23.9 – Трение в прямоугольной и треугольной резьбах

Силы давления на поверхности резьбы распределены по ней, представим (условно) эти силы двумя сосредоточенными силами. В прямоугольной резьбе

$$2 \cdot \frac{N}{2} = F_{зам},$$

суммарная наибольшая сила трения (23.6)

$$F_{mp} = fN = fF_{зам}; \quad (23.10)$$

в треугольной резьбе

$$2 \cdot \frac{N}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = F_{зам},$$

$$F_{mp} = fN = \left( \frac{f}{\cos \frac{\alpha}{2}} \right) \cdot F_{зам}. \quad (23.11)$$

Как видим, приведенный коэффициент трения в формуле (23.11) больше коэффициента (23.10) в

$$\frac{1}{\cos \frac{\alpha}{2}} \approx 1,17 \text{ раз,}$$

или на 17 %. Основные крепёжные резьбы – треугольные метрические – названы так, поскольку их размеры измеряются в мм – в отличие от дюймовых резьб. Прямоугольные резьбы (и близкие к ним) используют в винтовых механизмах (например, в передачах “гайка–винт”), нуждающихся в малом трении – в интересах снижения износа и повышения КПД.

Если прибегнуть (рис. 23.10) в треугольной резьбе к мелкому шагу, угол  $\beta$  (23.1) уменьшится, что снизит (см. условие (23.9)) вероятность самоотвинчивания.

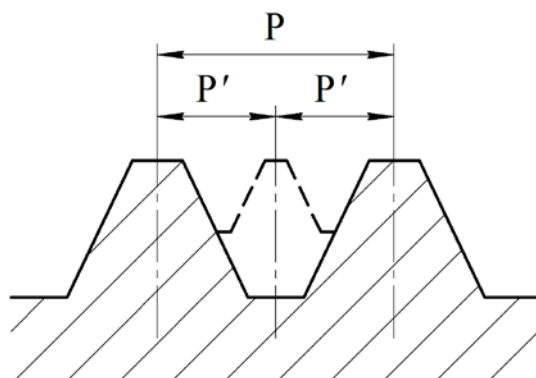


Рисунок 23.10 – Резьба с мелким шагом

Метрические резьбы с мелкими шагами используют в жезловых маслоуказателях, в отдушниках, в маслосливных пробках – в деталях, должных обеспечивать надёжное уплотнение.

### 23.6 Расчёт затянутого болта на прочность

Действуя гаечным ключом, мы закручиваем (рис. 23.3) посредством сил трения в резьбе стержень болта. Вместе с этим возникают силы затяжки, растягивающие болт. Напряжённое состояние стержня болта – упрощённое плоское (рис. 23.11).

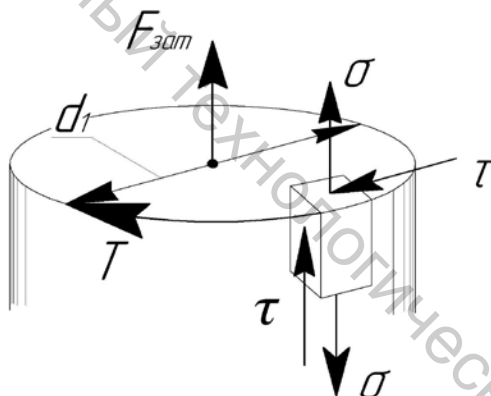


Рисунок 23.11 – Напряжённое состояние болта

Соответствующее эквивалентное напряжение

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} . \quad (23.12)$$

Касательные напряжения при затяжке болтов со стандартной метрической резьбой (возникающие при кручении) могут быть учтены в формуле (23.12) коэффициентом 1,3:

$$\sigma_{\text{экв}} \approx 1,3\sigma ,$$

где растягивающие напряжения

$$\sigma = \frac{F_{\text{зат}}}{\frac{\pi d_1^2}{4}} ,$$

$d_1$  – внутренний диаметр резьбы. Условие прочности:

$$\sigma_{\text{экв}} = 1,3 \cdot \frac{F_{\text{зам}}}{\pi d_1^2} \leq [\sigma]. \quad (23.13)$$

Предварительная затяжка болтов предотвращает раскрытие стыка – при наличии внешней нагрузки, раскрывающей его. Под её действием (рис. 23.12) болт получает добавочное удлинение; упругие детали, сжатые в соединении, частично восстанавливают свой первоначальный размер, то есть тоже удлиняются. Можно считать, что на силы, действующие в затянутом соединении, налагаются силы при растяжении системы болт–деталь (рис. 22.13).

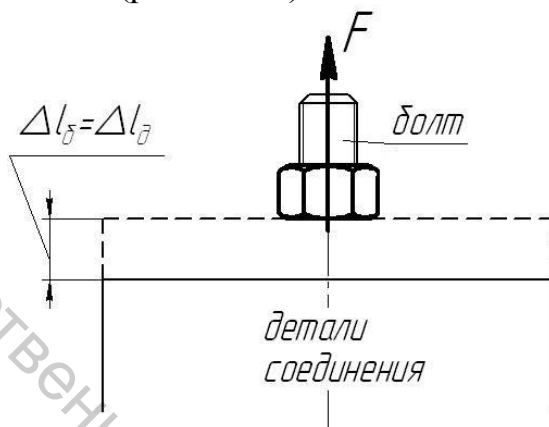


Рисунок 23.12 – Удлинения болта и деталей под действием внешней нагрузки

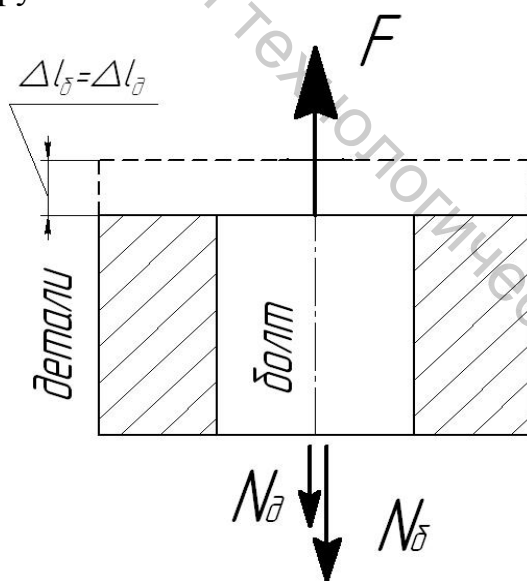


Рисунок 23.13 – Система болт–деталь

Последние находятся из уравнения равновесия

$$F = N_б + N_д \quad (23.14)$$

и уравнения совместности удлинений

$$\Delta l_б = \Delta l_д. \quad (23.15)$$

Уравнение (23.15) можно переписать, вспомнив, что упругое удлинение пропорционально растягивающей силе:

$$\frac{N_{\delta}}{C_{\delta}} = \frac{N_{\delta}}{C_{\delta}}, \quad (23.16)$$

где  $C_{\delta}$  и  $C_{\delta}$  – жёсткости болта и деталей. Решая уравнения (23.14, 23.16) совместно, найдём силы в соединении (при растяжении системы болт–деталь):

$$N_{\delta} = \frac{F}{1 + \frac{C_{\delta}}{C_{\delta}}}, \quad (23.17)$$

$$N_{\delta} = \frac{F}{1 + \frac{C_{\delta}}{C_{\delta}}}.$$

Вводя в выражения (23.17) обозначения

$$\lambda = \frac{1}{1 + \frac{C_{\delta}}{C_{\delta}}},$$

$$1 - \lambda = \frac{1}{1 + \frac{C_{\delta}}{C_{\delta}}}$$

( $\lambda$  – коэффициент внешней нагрузки), напишем формулы для сил, действующих в предварительно затянутом соединении при его растяжении внешней нагрузкой  $F$ : расчётная нагрузка на болт

$$F_p = F_{\text{зам}} + \lambda F, \quad (23.18)$$

остаточная затяжка стыка

$$F_{\text{ст}} = F_{\text{зам}} + \lambda F, \quad (23.19)$$

Графики зависимостей (23.18, 23.19) показаны на рисунке 23.14.

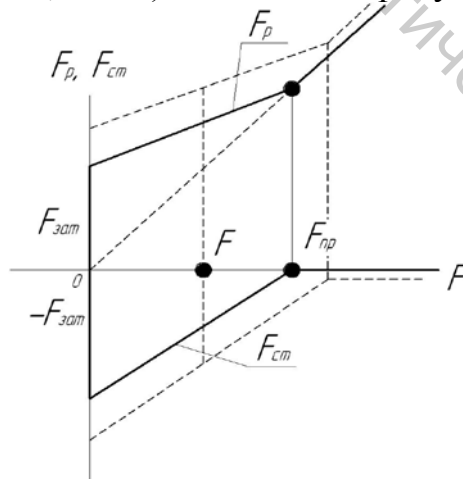


Рисунок 23.14 – Чем больше силы затяжки, тем далее действующая нагрузка  $F$  от нагрузки  $F_{\text{пр}}$ , раскрывающей стык; – при ней  $F_{\text{ст}} = 0$

На рисунке видно: чем больше усилие затяжки, тем далее действующая нагрузка  $F$  от нагрузки  $F_{\text{пр}}$ , раскрывающей стык. Полагают

$$F_{зам} = KF, \quad (23.20)$$

где  $K = 1,3 \dots 2$  – коэффициент затяжки (коэффициент запаса по нераскрытию стыка).

В приближённых расчётах коэффициент  $\lambda = 0,2 \dots 0,3$ ; расчётная нагрузка на болт (23.18)

$$F_p = F_{зам} + (0,2 \dots 0,3)F, \quad (23.21)$$

усилие затяжки соединения даётся рекомендацией (23.20). Расчётная нагрузка (23.21) подставляется в условие прочности (23.13), коэффициент 1,3 сохраняем, учитывая касательные напряжения при возможной затяжке соединения под нагрузкой (что не рекомендуется).

Затяжка соединения может потребоваться и как гарантия против сдвига деталей в стыке (рис. 23.15).

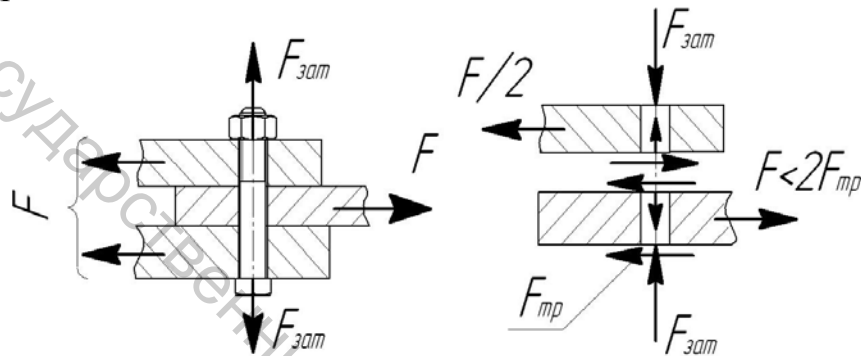


Рисунок 23.15 – Действующая сила  $F$  не превышает наибольших сил трения (силы трения действуют в двух плоскостях стыка)

Если болт вставлен в отверстие деталей с зазором, внешняя нагрузка уравнивается силами трения, гарантия против сдвига даётся условием

$$F \leq i \cdot F_{тр} = i \cdot F_{зам} \cdot f,$$

где  $i$  – число плоскостей стыка деталей. Вводя здесь коэффициент запаса  $K$ , найдём требуемое усилие затяжки:

$$F_{зам} = \frac{KF}{if},$$

где  $K = 1,3 \dots 1,5$ .

Если болт вставляется в отверстия деталей без зазора, он работает (рис. 23.16) на срез и смятие.

Условие прочности болта на срез по плоскостям стыка деталей

$$\tau = \frac{F}{\frac{\pi d^2}{4} \cdot i} \leq [\tau],$$

$[\tau]$  – допускаемое напряжение на срез; условие прочности на смятие (см. формулу для давления в шарнирах цепи (22.10))

$$\sigma_{см} = \frac{F}{dh_2} \leq [\sigma_{см}],$$

$[\sigma_{см}]$  – допускаемое напряжение на смятие того из материалов деталей или болта, который слабее. Условие равнопрочности всех частей соединения на рисунке 23.16

$$h_2 = 2h_1.$$

Требуемый диаметр болта находится из обоих условий, принимается больший из них.

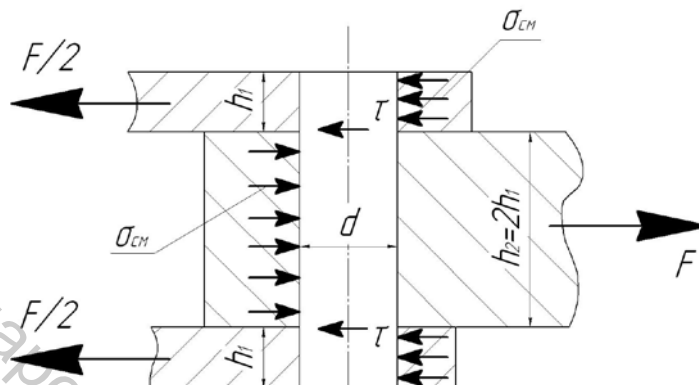


Рисунок 23.16 – Болт, вставленный в отверстия деталей без зазора, работает на срез и смятие

## Лекция 24. Расчетные схемы механической части электропривода

Кинематические схемы приводов (вроде тех, что изображены на рисунках 24.2, 24.4) не отражают податливости всех элементов кинематических цепей (под нагрузкой все они деформируются в той или иной степени). Вместе с этим невозможно сравнивать массы элементов привода, движущиеся с различными скоростями. То же относится и к силам, действующим на них.

Именно, поэтому необходимы расчетные механические схемы приводов, в которых массы (и моменты инерции), силы (и моменты) и жесткости механических связей заменены эквивалентными величинами, приведенными к одной и той же расчетной скорости (обычно к угловой скорости ротора двигателя).

Основные требования [5, с. 20] при этом: сохранение запаса потенциальной энергии деформаций механических связей и кинетической энергии системы, а также мощностей (работ в единицу времени), действующих в системе сил и моментов.

### 24.1 Приведение масс

Из равенства кинетических энергий

$$\frac{I_{кпр} \omega_1^2}{2} = \frac{I_k \omega_k^2}{2}$$

находим приведенный момент инерции  $k$ -ой массы, вращающейся с угловой скоростью  $\omega_k$ :

$$I_{кпр} = \frac{I_k \omega_k^2}{\omega_1^2} = \frac{I_k}{\left(\frac{\omega_1}{\omega_k}\right)^2} = \frac{I_k}{i_{1к}^2}, \quad (24.1)$$

где  $\omega_1$  – угловая скорость ротора двигателя,  $i_{1к} = \omega_1 / \omega_k$  – передаточное отношение от вала двигателя (вала приведения) к  $k$ -му валу вращающейся массы.

В случае  $j$ -ой массы, движущейся поступательно (со скоростью  $V_j$ ),

$$\frac{I_{jпр} \omega_1^2}{2} = \frac{m_j V_j^2}{2},$$

$$I_{jпр} = \frac{m_j V_j^2}{\omega_1^2} = m_j \left(\frac{V_j}{\omega_1}\right)^2 = m_j \rho_{1j}^2,$$

где  $\rho_{1j} = V_j / \omega_1$  – радиус приведения массы  $m_j$ .

## 24.2 Приведение сил

Из равенства мощностей

$$M_{прк} \omega_1 = M_k \omega_k$$

находим приведенный вращающий момент:

$$M_{прк} = \frac{M_k \omega_k}{\omega_1} = \frac{M_k}{\left(\frac{\omega_1}{\omega_k}\right)} = \frac{M_k}{i_{1к}}. \quad (24.2)$$

Приведенная сила в поступательном движении  $j$ -го звена

$$F_{прj} = \frac{F_j V_j}{\omega_1} = F_j \left(\frac{V_j}{\omega_1}\right) = F_j \rho_{1j}.$$

## 24.3 Приведение жесткостей механических связей

Полагая связь упругой (подчиняющейся (рис. 24.1) закону Гука), найдем потенциальную энергию деформаций связи – она равна работе «момента»  $T$  на угловом перемещении – угле «закручивания»  $\Delta\varphi$  (площади графика на рисунке 24.1):

$$U = \frac{1}{2}(C\Delta\varphi)\Delta\varphi = \frac{1}{2}C(\Delta\varphi)^2,$$

где  $C$  – жесткость связи (коэффициент пропорциональности в законе Гука),  $\Delta\varphi$  – «угол закручивания» связи. Из равенства потенциальных энергий

$$\frac{1}{2}C_{кпр}(\Delta\varphi_1)^2 = \frac{1}{2}C_k(\Delta\varphi_k)^2,$$

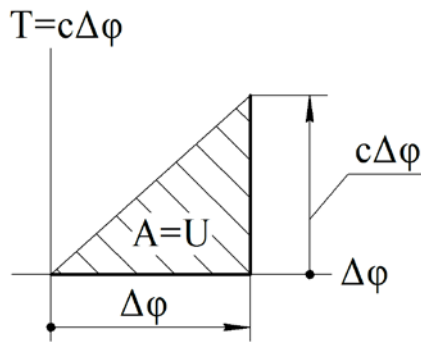


Рисунок 24.1 – К вычислению потенциальной энергии деформаций упругой связи

находим приведенную жесткость  $k$ -ой связи, работающей на кручение:

$$C_{кпр} = \frac{C_k (\Delta\varphi_k)^2}{(\Delta\varphi_1)^2} = \frac{C_k}{\left(\frac{\Delta\varphi_1}{\Delta\varphi_k}\right)^2} = \frac{C_k}{i_{1к}^2}, \quad (24.3)$$

где отношение угловых перемещений равно передаточному отношению  $i_{1к}$ .

В случае связи, работающей на растяжение–сжатие:

$$\frac{1}{2} C_1 (\Delta\varphi_1)^2 = \frac{1}{2} C_k (\Delta l_k)^2, \quad (24.4)$$

$$C_1 = \frac{C_k (\Delta l_k)^2}{(\Delta\varphi_1)^2} = C_k \left(\frac{\Delta l_k}{\Delta\varphi_1}\right)^2 = C_k \rho_{1к}^2.$$

#### 24.4 Двухмассовая упругая система

Обратимся к кинематической схеме привода вентилятора (рис. 24.2).

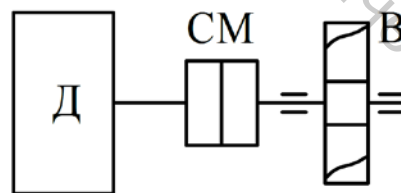


Рисунок 24.2 – Кинематическая схема электропривода вентилятора:  $Д$  – ротор двигателя,  $СМ$  – упругая соединительная муфта,  $В$  – рабочее колесо вентилятора

Расчетные механические схемы представлены на рисунке 24.3. На нем (схема  $a$ ) показаны относительно большие массы ротора двигателя и рабочего колеса вентилятора (с моментами инерции  $I_1$ ,  $I_4$ ), сравнительно небольшие массы полумуфт  $I_2$ ,  $I_3$ , относительно высокие жесткости валов двигателя и рабочего колеса  $C_1$ ,  $C_3$  и жесткость наиболее податливой связи полумуфт  $C_2$ . Представление о моментах инерции дают размеры соответствующих элементов

схемы, о податливостях безмассовых механических связей – длины соответствующих отрезков вала.

Имея в виду, что движение многомассовых упругих систем, в основном, определяется наибольшими массами и наименьшими жесткостями, перейдем к рассмотрению двухмассовой упругой системы (схема б). В ней наибольшие массы  $I_1$  и  $I_4$  объединены с массами полумуфт  $I_2$  и  $I_3$  (сравнительно небольшими отличиями скоростей  $\omega_2$  и  $\omega_3$  от скоростей  $\omega_1$  и  $\omega_4$  пренебрегаем), податливости валов суммируются:

$$\frac{1}{C_{\text{экв}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}.$$

В некоторых задачах возможно пренебречь податливостью  $\frac{1}{C_{\text{экв}}}$  (полагая эквивалентную жесткость  $C_{\text{экв}}$  бесконечно большой) и рассматривать (схема в) жесткое приведенное механическое звено.

Заметим [5, с. 25]: двухмассовая схема (б) достаточно хорошо заменяет реальную систему (рис. 24.2), чего нельзя сказать о схеме в.

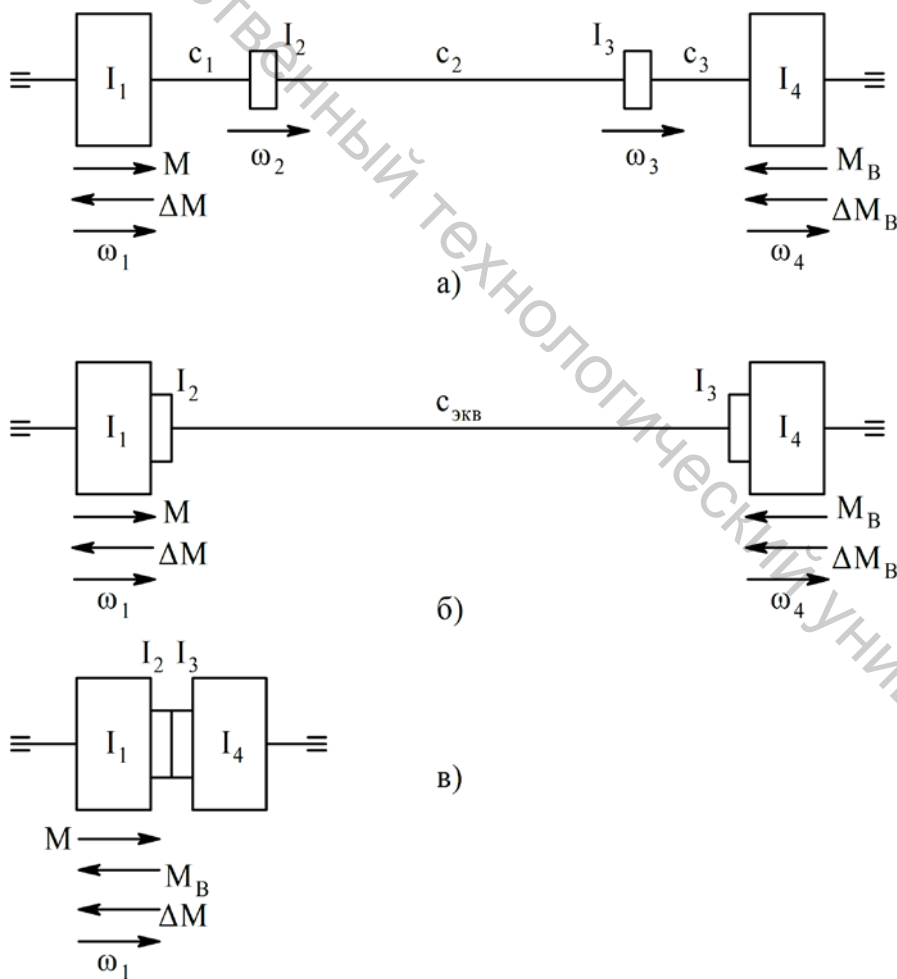


Рисунок 24.3 – Расчетные механические схемы электропривода вентилятора:  $M$  – момент, развиваемый двигателем,  $M_B$  – момент полезного сопротивления на рабочем колесе,  $\Delta M$  и  $\Delta M_B$  – моменты потерь на трение в подшипниках

На рисунке 24.4 представлена кинематическая схема привода с массами, движущимися с различными скоростями.

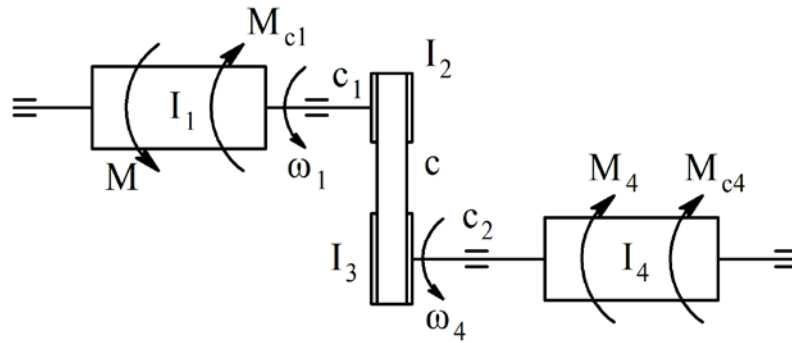


Рисунок 24.4 – Кинематическая схема привода с ременной передачей:  $I_2$  и  $I_3$  – моменты инерции шкивов,  $c$  – жесткость упругого податливого ремня

Пользуясь приведенными моментами инерции (24.1)

$$I_{3np} = \frac{I_3}{i_{14}^2}, \quad I_{4np} = \frac{I_4}{i_{14}^2}, \quad i_{14} = \frac{\omega_1}{\omega_4},$$

приведенными моментами полезного и вредного сопротивления (24.2)

$$M_{4np} = \frac{M_4}{i_{14}}, \quad M_{c4np} = \frac{M_{c4}}{i_{14}}$$

и эквивалентной податливостью

$$\frac{1}{C_{эка}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_{np}} + \frac{1}{C_{2np}},$$

где приведенные жесткости (24.3, 24.4)

$$C_{2np} = \frac{C_2}{i_{14}^2}; \quad C_{np} = c\rho_{1P}^2, \quad \rho_{1P} = \frac{V_p}{\omega_1},$$

где  $V_p$  – скорость ремня, приходим к рассмотрению двухмассовой упругой системы на рисунке 24.5.

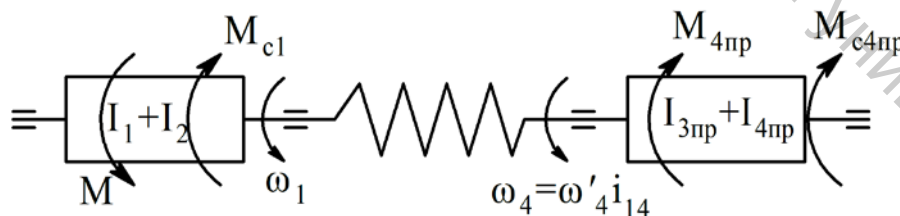


Рисунок 24.5 – Двухмассовая упругая система – модель привода на рисунке 24.4

### 24.5 Пуск двигателя

Пренебрегая моментом потерь на трение  $M_{c4}$  (рис. 24.5), рассмотрим двухмассовую упругую систему на рисунке 24.6 с несколько иными

обозначениями. На нем  $M_o$  – постоянный момент двигателя,  $M_c$  – постоянный момент потерь на трение,  $T$  – моменты «закручивающие» упругую связь.

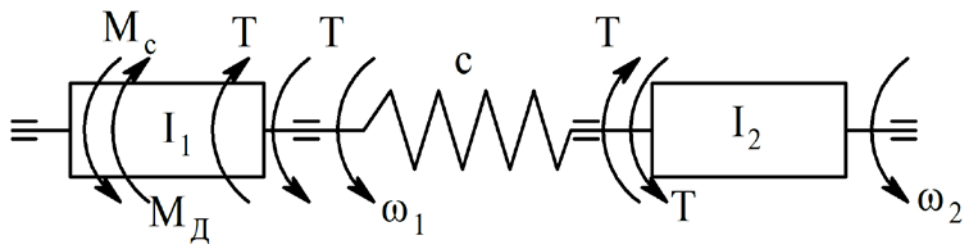


Рисунок 24.6 – Пуск двигателя

Уравнение движения ротора двигателя

$$M - T = I_1 \dot{\omega}_1, \quad M = M_o - M_c. \quad (24.5)$$

Закон Гука в приложении к упругой связи

$$T = c(\varphi_1 - \varphi_2), \quad (24.6)$$

где  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  – угловые перемещения ее концов; уравнение движения приведенного выходного звена

$$T = I_2 \dot{\omega}_2 \quad (24.7)$$

(точкой обозначено однократное дифференцирование по времени) .

Дважды дифференцируем соотношение (24.6) и выражая ускорения  $\dot{\omega}_1$  и  $\dot{\omega}_2$  из уравнений (24.5, 24,7), получим дифференциальное уравнение относительно крутящего момента  $T$  :

$$\begin{aligned} \ddot{T} &= c(\dot{\omega}_1 - \dot{\omega}_2) = c \left( \frac{M - T}{I_1} - \frac{T}{I_2} \right), \\ \ddot{T} + c \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} T &= c \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} \frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2} \frac{M}{I_1}. \end{aligned} \quad (24.8)$$

Вводя в уравнение (24.8) обозначения

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= c \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2}, \\ \varepsilon &= \frac{M}{I_1 + I_2} = const, \end{aligned}$$

перепишем его:

$$\ddot{T} + \Omega^2 T = \Omega^2 I_2 \varepsilon. \quad (24.9)$$

Его общее решение складывается из общего решения однородного уравнения

$$\ddot{T} + \Omega^2 T = 0$$

и какого-либо частного решения исходного неоднородного уравнения (24.9):

$$T = C_1 \sin \Omega t + C_2 \cos \Omega t + I_2 \varepsilon. \quad (24.10)$$

Произвольные постоянные  $C_1$  и  $C_2$  в решении (24.10) находятся из начальных условий пуска – в момент  $t = 0$  угловые скорости, угловое ускорение ротора, производная крутящего момента

$$\omega_{10} = 0, \omega_{20} = 0, \dot{\omega}_{10} = \frac{M}{I_1}, \dot{T}_0 = c(\omega_{10} + \omega_{20}) = 0 \quad (24.11)$$

(получаем из соотношения (24.6)), крутящий момент

$$T_0 = 0 \quad (24.12)$$

(получается из уравнения (24.5)). Подставляя решение (24.10) и производную

$$\dot{T} = \Omega(C_1 \cos \Omega t - C_2 \sin \Omega t)$$

в условия (24.11, 24.12), находим постоянные  $C_1$  и  $C_2$ :

$$C_1 = 0, C_2 = -I_2 \varepsilon.$$

Решение, отвечающее начальным условиям (24.11), (24.12),

$$T = I_2 \varepsilon (1 - \cos \Omega t). \quad (24.13)$$

Угловое ускорение ротора двигателя находится из уравнения (24.5):

$$\dot{\omega}_1 = \frac{M - T}{I_1} = \frac{M}{I_1} - \frac{I_2 \varepsilon}{I_1} (1 - \cos \Omega t).$$

Возвращаясь здесь к обозначениям в уравнении (24.8), получим ускорение ротора:

$$\dot{\omega}_1 = \varepsilon + \varepsilon \frac{I_2}{I_1} \cos \Omega t.$$

Угловая скорость ротора

$$\omega_1 = \varepsilon t + \frac{\varepsilon I_2}{\Omega I_1} \sin \Omega t + D_1. \quad (24.14)$$

Начальное условие  $\omega_{10} = 0$  дает  $D_1 = 0$ .

Угловое ускорение выходного звена находится из уравнения (24.7) с использованием решения (24.13):

$$\dot{\omega}_2 = \frac{T}{I_2} = \varepsilon (1 - \cos \Omega t),$$

угловая скорость

$$\omega_2 = \varepsilon t - \frac{\varepsilon}{\Omega} \sin \Omega t + D_2. \quad (24.15)$$

Начальное условие  $\omega_{20} = 0$  дает  $D_2 = 0$ .

Из решений (24.14), (24.15) видно, что угловые скорости масс  $I_1$  и  $I_2$  получаются наложением (рис. 24.7) гармонических колебаний с частотой  $\Omega$ , происходящих в противофазе, на равноускоренное движение с угловым ускорением  $\varepsilon$  (которое получается, если пренебречь податливостью упругой связи, то есть из рассмотрения жесткого приведенного звена). При малом моменте инерции  $I_2$  угловая скорость

$$\omega_1 \approx \varepsilon t$$

изменяется во времени по линейному закону, тогда как угловая скорость  $\omega_2$  колеблется по закону (24.15), так как амплитуда ее колебаний  $\varepsilon / \Omega$  зависит только от ускорения  $\varepsilon$  и частоты  $\Omega$  свободных колебаний системы.

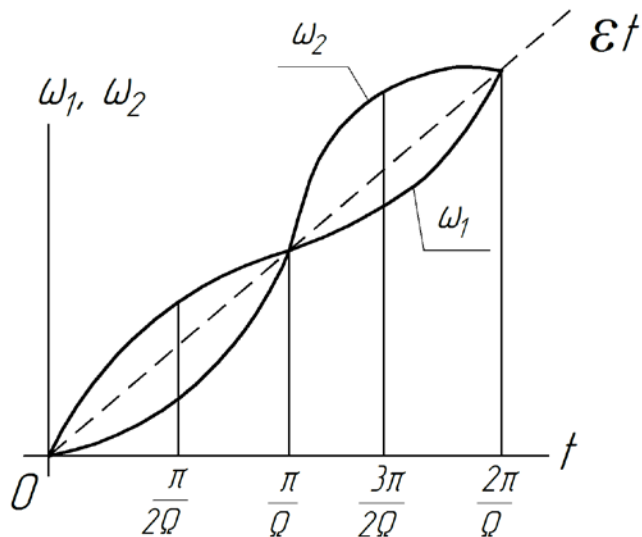


Рисунок 24.7 – Угловые скорости при пуске двигателя

Решение (24.13) представлено на рисунке 24.8. Как видим, возможна большая (двукратная) перегрузка упругой связи – по сравнению со средней нагрузкой  $I_2 \varepsilon$ .

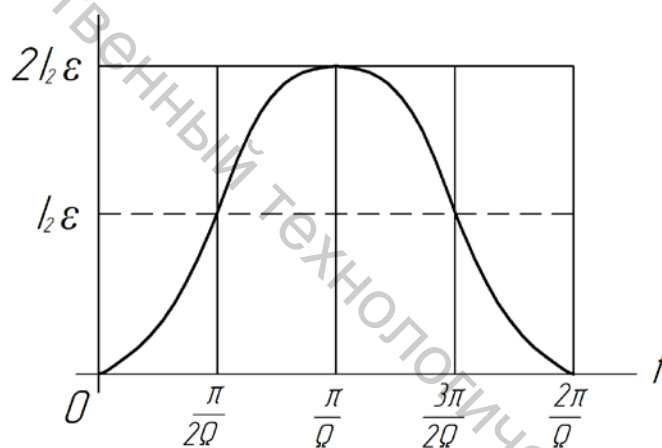


Рисунок 24.8 – Крутящий момент в упругой связи

## Литература

1. Артоболевский, И. И. Сборник задач по теории механизмов и машин : учебник для студентов вузов / И. И. Артоболевский, Б. В. Эдельштейн. – Москва : Наука, 1973. – 256 с.
2. Артоболевский, И. И. Теория механизмов и машин : учебник для студентов высших технических учебных заведений / И. И. Артоболевский. – 3-е изд., перераб. и доп. – Москва : Наука, 1975. – 640 с.
3. Кузьмин, А. В. Курсовое проектирование деталей машин : справочное пособие. Ч. 1 / А. В. Кузьмин [и др.]. – Минск : Вышэйшая школа, 1982. – 208 с.
4. Иванов, М. Н. Детали машин : учебник для студентов машиностроительных специальностей вузов / М. Н. Иванов. – 3-е изд., доп. и перераб. – Москва : Высшая школа, 1976. – 399 с.
5. Чиликин, М. Г. Теория автоматизированного электропривода : учебное пособие для вузов / М. Г. Чиликин, В. И. Ключев, А. С. Сандлер. – Москва : Энергия, 1979. – 616 с.

Учебное издание

## ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

Курс лекций

Составители: Федосеев Гелий Николаевич, Корнеенко Дмитрий Викторович

Редактор *А.В. Локтионов*

Технический редактор *Е.С. Посканная*

Корректор *Е.М. Богачёва*

Компьютерная верстка *Е.С. Посканная*

Подписано к печати \_\_\_\_\_ Формат 60x84 1/16 . Бумага офсетная № 1.  
Гарнитура "Таймс". Усл. печ. листов \_\_\_\_\_. Уч.-изд. листов \_\_\_\_\_.  
Тираж \_\_\_\_ экз. Заказ № \_\_\_\_\_

---

Учреждение образования "Витебский государственный технологический университет" 210035, г. Витебск, Московский пр., 72

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/172 от 12 февраля 2014 г.