

В. Н. Сакевич, А. В. Минченко

МЕХАНИКА МАТЕРИАЛОВ

Допущено Министерством образования Республики Беларусь в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений по специальностям "Технология пряжи, тканей, трикотажа и нетканых материалов", "Конструирование и технология швейных изделий", "Конструирование и технология изделий из кожи"

Минск
"Техноперспектива"
2009

УДК 539.3/.8
ББК 30.121
С 15

Рецензенты: доктор технических наук, профессор *А. Н. Орда*,
заведующий кафедрой «Теоретическая механика и теория
механизмов и машин» БГАТУ
доктор технических наук, профессор *В. М. Сурин*,
ответственный за цикл дисциплин по технической механике
БГУИР

С 15 **Сакевич, В. Н.**

Механика материалов : учеб. пособ. для вузов / В. Н. Сакевич,
А. В. Минченко. – Минск: Техноперспектива, 2009. – 239 с.

ISBN 978–985–6591-66-5.

В пособии изложен курс "Механика материалов", отвечающий программе Минобразования для подготовки специалистов по специальностям 1-50 01 01 "Технология пряжи, тканей, трикотажа и нетканых материалов"; 1-50 01 02 "Конструирование и технология швейных изделий"; 1-50 02 01 "Конструирование и технология изделий из кожи".

Пособие предназначено для студентов технологических специальностей высших учебных заведений, учащихся колледжей, аспирантов и преподавателей.

УДК 539.3/.8
ББК 30.121

ISBN 978–985–6591-66-5

© Сакевич В. Н., Минченко А. В., 2009
© ЗАО "Техноперспектива", 2009

ПРЕДИСЛОВИЕ

Во многих высших учебных заведениях для ряда специальностей курс «Механика материалов» (ранее существовавшее название "Сопротивление материалов") изучается по сокращенной программе. Для такой программы целесообразно иметь краткий учебник, в котором содержался бы основной материал изучаемой дисциплины.

Настоящая книга написана на основе использования многолетнего опыта преподавания дисциплины «Сопротивление материалов» на кафедре "Сопротивление материалов и деталей машин" Витебского государственного технологического университета. В книге в доступной, но достаточно строгой форме изложены основные разделы классического курса механики материалов, а именно: растяжение и сжатие, кручение, изгиб, статически неопределимые системы (метод сил), теория напряженного состояния, теория прочности, прочность при циклически изменяющихся напряжениях, устойчивость, колебания упругих систем, расчет гибких нитей.

Целью книги является:

1) восполнить недостаток в кратких учебных пособиях по механике материалов, многие из которых были написаны еще в бывшем СССР и в настоящее время стали библиографической редкостью;

2) обновить изложение некоторых разделов, что связано с непрерывным усовершенствованием и уточнением расчетных методик и существенным расширением объема сведений и представлений, полагаемых в основу методов расчета на прочность деталей машин и усовершенствованием самих расчетных методов накопившихся за последние 15-20 лет.

Основные вопросы курса проиллюстрированы большим количеством примеров, имея в виду, что студенты параллельно с изучением теоретического материала приобретут навыки в решении задач.

Книга рассчитана в основном на студентов высших учебных заведений. В то же время ей могут пользоваться учащиеся колледжей, так как необходимый материал, предусмотренный программой для колледжей можно найти в соответствующих главах и параграфах.

Для измерения величин принята Международная система единиц (СИ). Обозначения величин приняты в соответствии с международным стандартом ИСО, учтены новые ГОСТы.

При изложении теоретического материала, выборе справочного материала и составлении задач использованы источники, указанные в библиографическом списке.

Авторы выражают благодарность преподавателям кафедры «Сопротивление материалов и детали машин» Витебского государственного технологического университета за полезные замечания по рукописи учебного пособия.

Авторы также выражают признательность рецензентам - доктору технических наук, профессору А. Н. Орде и доктору технических наук, профессору В. М. Сурину - за внимательное прочтение рукописи и ценные замечания, позволившие улучшить содержание учебного пособия.

Все замечания и пожелания будут приняты авторами с благодарностью. Письма просим направлять по адресу: **igsakevich@yandex.ru**.

Авторы

Витебский государственный технологический университет

*Учиться – все равно, что плыть против течения реки.
Чуть остановился – и тебя относит назад.*

Китайская пословица

ГЛАВА 1

ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Основная задача сопротивления материалов состоит в разработке инженерных методов конструирования и расчета наиболее типичных элементов конструкций на прочность, жесткость и устойчивость при заданной долговечности, одновременно обеспечивающих экономичность.

Прочность – это способность конструкции выдерживать заданную нагрузку, не разрушаясь.

Деформирование – свойство конструкции изменять свои геометрические размеры и форму под действием внешних сил.

Жесткость – это способность конструкции сопротивляться действию внешних нагрузок с деформациями (перемещениями), допустимыми без нарушения её работоспособности.

Устойчивость – свойство конструкции сохранять при действии внешних сил заданную форму равновесия.

Долговечность конструкции состоит в ее способности сохранять необходимые для эксплуатации свойства в течение заранее предусмотренного отрезка времени. **Надежность** конструкции обеспечивается, если она сохраняет прочность, жесткость и устойчивость при гарантированной долговечности. Ее **экономичность** в значительной мере определяется расходом материала, применением менее дефицитных конструкционных материалов, возможностью изготовления деталей по наиболее прогрессивным технологиям. Надежность и экономичность – противоречивые требования.

Все расчеты в сопротивлении материалов реального объекта начинаются с выбора расчетной схемы. При выборе расчетной схемы вводятся упрощения в систему сил, приложенных к элементу объекта, в геометрию объекта, принимается ряд гипотез о свойствах материалов, т.е. выбираются модели нагружения, модели формы, модели материала.

Модели нагружения содержат схематизацию внешних нагрузок по величине, характеру распределения (сосредоточенная или распределенная сила или момент), а также воздействию внешних полей и сред. Внешние силы, действующие на элемент конструкции, подразделяются на 3 группы: 1) сосредоточенные силы, 2) распределенные силы, 3) объемные или массовые силы. Сосредоточенные силы — силы, действующие на небольших участках поверхности детали (например, давление шарика шарикоподшипника на вал, давление колеса на рельсы и т.п.). Распределенные силы приложены к значительным участкам поверхности (например, давление пара в паропроводе, трубопроводе, котле, давление воздуха на крыло самолета и т.д.). Объемные или массовые силы приложены каждой частице материала (например, силы тяжести, силы инерции). По характеру действия во времени нагрузки делятся на **статические** и **динамические**.

Объекты, изучаемые в сопротивлении материалов.

Все тела можно разделить по их геометрической форме на три группы

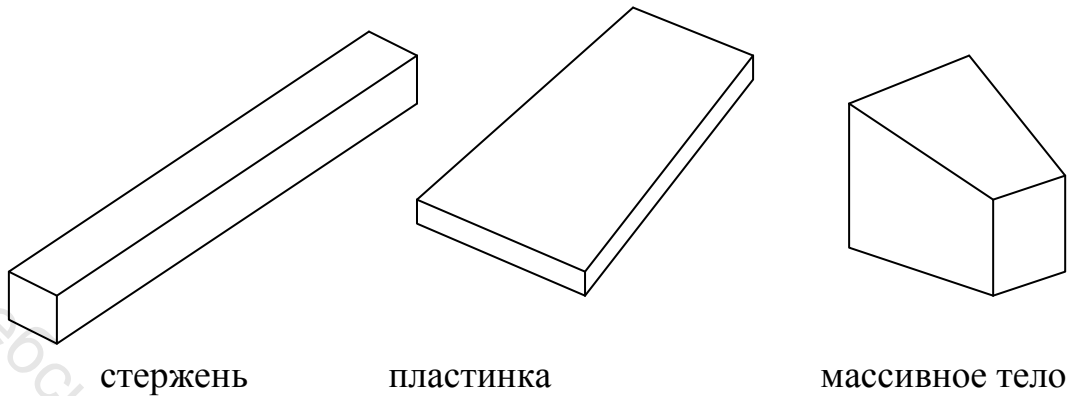


Рис. 1.1 Основные типы элементов конструкций

(рис. 1.1): стержни (или брусья), пластинки с оболочками и массивные тела. Стержень - это элемент конструкции, у которого один размер - длина - значительно больше двух других. У пластинки толщина значительно меньше двух других размеров. Массивные тела имеют все три размера одного порядка. **В сопротивлении материалов изучаются брусья.**

Гипотезы о материале. В сопротивлении материалов предполагается, что материал *однородный* (свойства его одинаковы во всех точках), *изотропный* (свойства в точке одинаковы по всем направлениям) и *упругий* (после снятия нагрузки деформация исчезает). Принимается *гипотеза о*

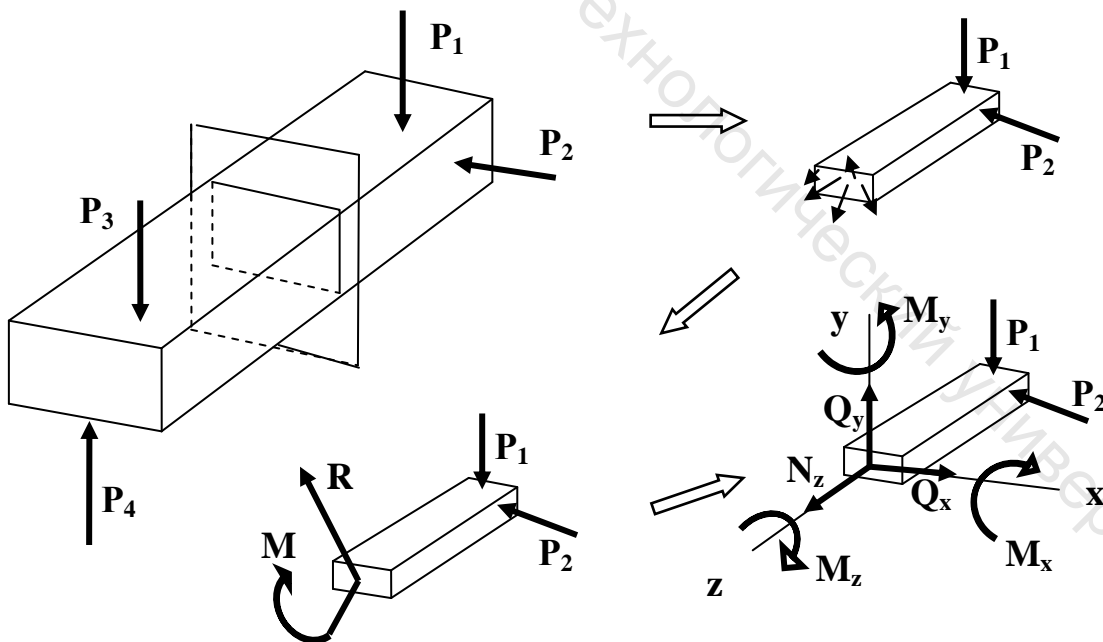


Рис. 1.2 Определение внутренних усилий методом сечений

сплошности: считается, что весь объем тела сплошь, непрерывно заполнен веществом.

Гипотеза плоских сечений. Данная гипотеза гласит: поперечные сечения бруса, плоские и нормальные к его оси до деформации остаются плоскими и нормальными к новому положению оси после деформации.

1.1. Метод сечений

Метод сечений - это основной метод в сопротивлении материалов, с помощью которого определяются внутренние силы, действующие в поперечном сечении бруса. Метод состоит в том, что в интересующем нас месте (рис. 1.2) мы мысленно рассекаем брус на две части, одну часть отбрасываем и заменяем её действие внутренними силами.

Все множество внутренних сил поперечного сечения приводим к центру тяжести сечения – получаем главный вектор \mathbf{R} и главный момент \mathbf{M} внутренних сил. Далее главный вектор и главный момент раскладываем на

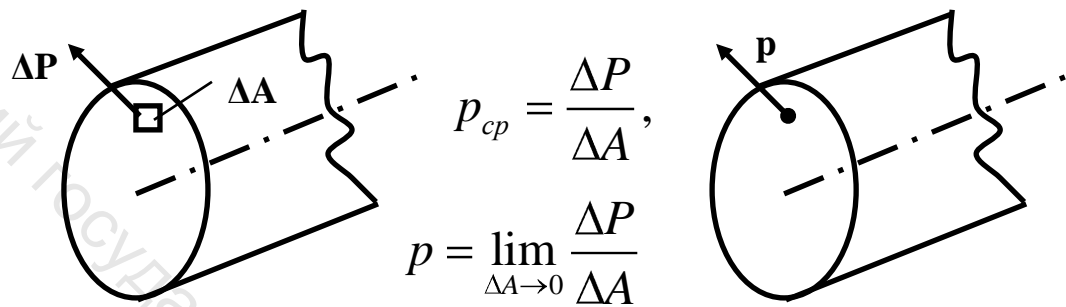


Рис. 1.3 Напряжения в сечении элемента

составляющие по осям координат. Таким образом, получаем шесть внутренних силовых факторов.

Декартовы оси координат располагают следующим образом: начало – в центре тяжести сечения, ось z направляют по внешней нормали к сечению, оси x и y лежат в плоскости поперечного сечения.

Внутренние силовые факторы:

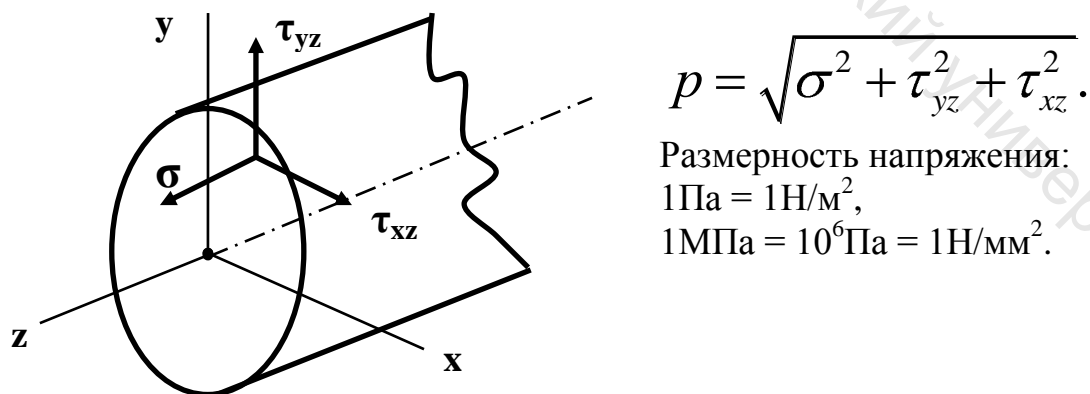
N_z – продольная сила,

Q_y, Q_x - поперечные силы,

M_z (или T) – крутящий момент,

M_x, M_y – изгибающие моменты.

Итак, N_z, Q_y, Q_x есть алгебраическая сумма проекций на



Размерность напряжения:

1 Па = 1 Н/м²,

1 МПа = 10⁶ Па = 1 Н/мм².

Рис. 1.4 Нормальное и касательное напряжение на площадке

соответствующую ось z, y, x всех внутренних сил, действующих в поперечном сечении бруса. M_z, M_y, M_x это алгебраическая сумма

моментов относительно соответствующей оси всех внутренних сил сечения.

1.2. Понятие о напряжениях

На рис. 1.3 показана внутренняя сила ΔP , действующая по некоторой площадке ΔA . Разделим эту силу на величину площадки – получим среднее напряжение p_{cp} , действующее по этой площадке. Предел этого отношения при стремлении площадки к нулю дает напряжение p в данной точке. Раскладываем вектор p по осям координат и получаем нормальное напряжение σ и касательные напряжения τ_{yz} и τ_{xz} (рис. 1.4).

1.3. Выражение внутренних силовых факторов через внешние силы

Внутренние силовые факторы определяются с помощью метода сечений. Рассекая брус, получаем левую и правую части его относительно разреза. Ниже на рис. 1.5 показана правая часть бруса с внешними силами, к ней

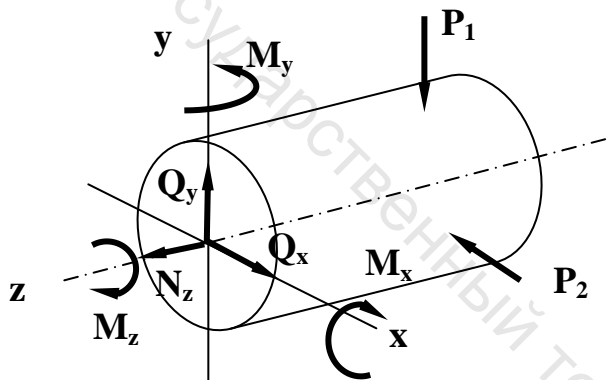


Рис. 1.5 Правая часть бруса с внешними силами, к ней приложенными, и с внутренними силовыми факторами, действующими в сечении

приложенными и с внутренними силовыми факторами, действующими в сечении. Эта пространственная система сил находится в равновесии, следовательно, можно составить шесть уравнений равновесия: три уравнения проекций всех сил на оси x, y, z и три уравнения моментов относительно этих осей.

Составим уравнение проекций всех сил на ось z . Из внутренних силовых факторов в это уравнение войдет только продольная сила.

$$\sum P_z = 0. N_z + \sum P_{z \text{ в. пр.}} = 0. N_z = - \sum P_{z \text{ в. пр.}} \quad (1.1)$$

Здесь индекс «в. пр.» означает, что берутся проекции внешних правых сил (справа от сечения). Однако из равновесия всех внешних сил следует, что сумма проекций правых сил численно равна сумме проекций левых сил. Следовательно,

$$|N_z| = |\sum P_{z \text{ в. пр.}}| = |\sum P_{z \text{ в. лев.}}| \quad (1.2)$$

Итак, продольная сила численно равна алгебраической сумме проекций на ось z всех внешних сил, расположенных справа или слева от рассматриваемого сечения.

Аналогично, из уравнений проекций на оси x и y получим Q_x и Q_y .

Поперечная сила Q_x (Q_y) численно равна алгебраической сумме проекций на ось x (y) всех внешних сил, расположенных справа или слева от сечения.

Теперь составим уравнение моментов $\sum m_z = 0$. В это уравнение войдет из внутренних силовых факторов только крутящий момент M_z .

$$M_z + \sum m_z(P_{\text{в. пр.}}) = 0. |M_z| = |\sum m_z(P_{\text{в. пр.}})| = |\sum m_z(P_{\text{в. лев.}})| \quad (1.3)$$

Аналогично выражаются изгибающие моменты. Итак, правило для вычислений: M_z, M_x, M_y численно равны алгебраической сумме моментов относительно соответствующей оси z, x, y всех внешних сил, расположенных справа или слева от сечения.

Правило знаков будет установлено в дальнейшем для каждого внутреннего силового фактора.

В общем случае в сечении могут иметь место все шесть силовых факторов. Однако достаточно часто на практике встречаются случаи, когда некоторые внутренние усилия отсутствуют. Такие виды нагружения бруса получили специальные названия (табл. 1.1).

Сопротивления, при которых в поперечном сечении бруса действует одно внутреннее усилие, условно называются **простыми**. При одновременном действии в сечении бруса двух и более усилий сопротивление бруса называется **сложным**.

Заметим, что при выполнении практических расчетов, для наглядности, как правило, определяются графики функций внутренних силовых факторов относительно координатной оси, направленной вдоль продольной оси стержня. Графики изменения внутренних усилий вдоль продольной оси стержня называются **эпюрами**.

Таблица 1.1 Простейшие случаи сопротивления

Вид напряженного состояния	Силовые факторы					
	N_z	Q_x	Q_y	M_z	M_x	M_y
Растяжение/сжатие	+	0	0	0	0	0
Кручение	0	0	0	+	0	0
Чистый изгиб относительно оси x	0	0	0	0	+	0
Чистый изгиб относительно оси y	0	0	0	0	0	+
Поперечный изгиб относительно оси x	0	0	+	0	+	0
Поперечный изгиб относительно оси y	0	+	0	0	0	+

Примечание: + означает наличие усилия, 0 – его отсутствие.

1.4. Выражение внутренних силовых факторов через напряжения

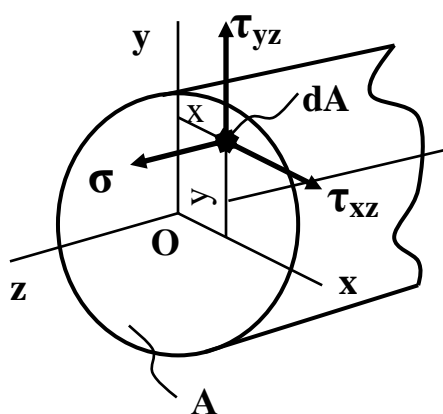


Рис. 1.6

На рис. 1.6 показано некоторое сечение бруса, взята площадка dA с координатами x и y . По площадке действуют внутренние силы σdA , $\tau_{yz}dA$ и $\tau_{xz}dA$. Выразим элементарную продольную силу dN_z , действующую по этой площадке. Напомним, что по определению продольная сила есть сумма проекций на ось z всех внутренних сил сечения. Из трех показанных внутренних сил на ось z дает проекцию лишь сила σdA .

$$dN_z = \sigma dA, N_z = \int_A \sigma dA. \quad (1.4)$$

Аналогично получим

$$dQ_y = \tau_{yz} dA, \quad Q_y = \int_A \tau_{yz} dA. \quad (1.5)$$

$$dQ_x = \tau_{xz} dA, \quad Q_x = \int_A \tau_{xz} dA. \quad (1.6)$$

Элементарный изгибающий момент dM_x дает сила σdA , умноженная на расстояние y до оси x .

$$dM_x = \sigma dA y, \quad M_x = \int_A \sigma y dA. \quad (1.7)$$

Аналогично,

$$dM_y = \sigma dA x, \quad M_y = \int_A \sigma x dA. \quad (1.8)$$

$$M_z = \int_A (\tau_{yz} x - \tau_{xz} y) dA. \quad (1.9)$$

Итак, получены шесть интегральных зависимостей, связывающих напряжения с внутренними силовыми факторами. В дальнейшем они будут использованы в выводах расчетных формул.

1.5. Перемещения и деформации

Под действием внешних сил твердые тела изменяют свою геометрическую форму, а точки тела неодинаково перемещаются в пространстве. Вектор \vec{T} , имеющий свое начало в точке A недеформированного состояния, а конец в т. A' деформированного состояния, называется вектором полного перемещения т. A (рис. 1.7, а). Его проекции на оси x, y, z называются осевыми перемещениями и обозначаются u, v и w , соответственно.

Для того, чтобы охарактеризовать интенсивность изменения формы и размеров тела, рассмотрим точки A и B его недеформированного состояния, расположенные на расстоянии S друг от друга (рис. 1.7, б).

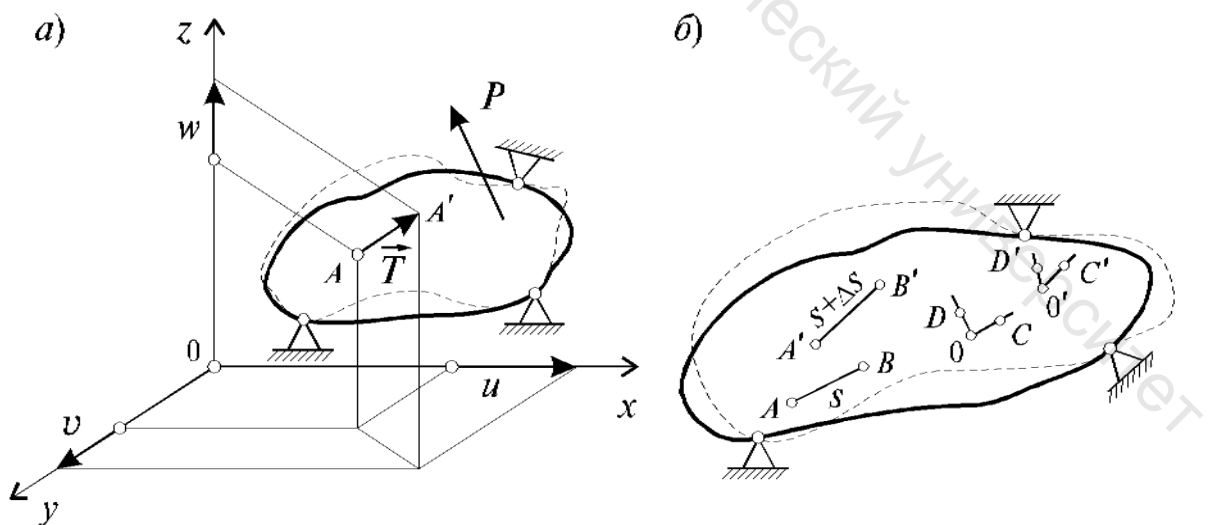


Рис. 1.7. Деформация элемента

Пусть в результате изменения формы тела эти точки переместились в положение A' и B' , соответственно, а расстояние между ними увеличилось на величину ΔS и составило $S + \Delta S$. Величина

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta \bar{S}}{S} \right) = \bar{\varepsilon} \quad (1.10)$$

называется линейной деформацией в точке A по направлению AB . Если рассматривать деформации по направлениям координатных осей x, y, z , то в обозначения соответствующих проекций линейной деформации вводятся индексы $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$.

Линейные деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$, как правило, сопровождаются изменением объема тела, а форма тела с сохранением объема меняется только при угловых деформациях. Для их определения рассмотрим прямой угол, образованный в недеформированном состоянии двумя отрезками OD и OC (рис. 1.7, б). При действии внешних сил указанный угол DOC изменится и примет новое значение $D'O'C'$. Величина

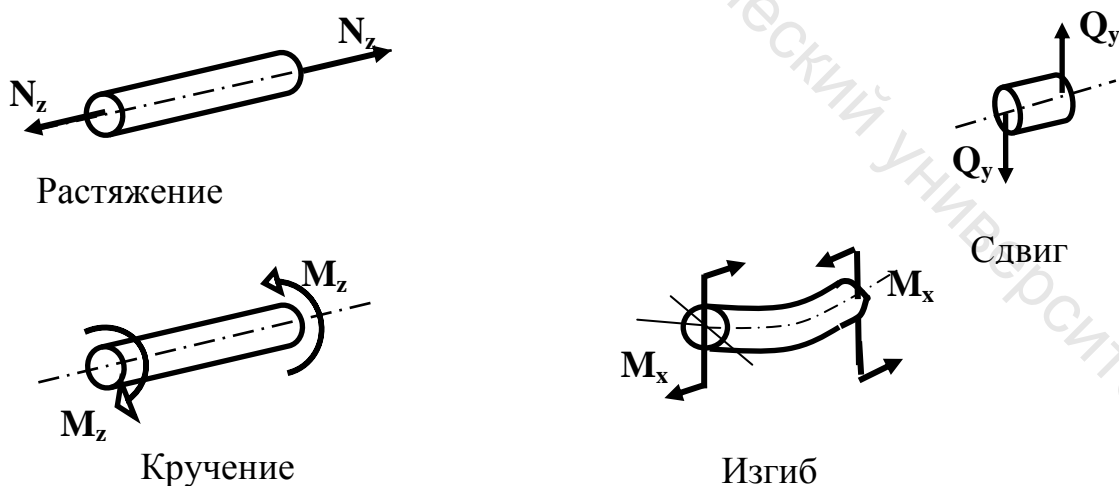
$$\lim_{OC \rightarrow 0, OD \rightarrow 0} (\angle DOC - \angle D'O'C') = \gamma \quad (1.11)$$

называется угловой деформацией, или сдвигом в точке O в плоскости COD . Относительно координатных осей деформации сдвига обозначаются $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$.

Совокупность линейных и угловых деформаций по различным направлениям и плоскостям в данной точке образует деформированное состояние в точке.

Каждому из внутренних усилий N_z, Q_y, M_z, M_x соответствует определенный вид деформации бруса (рис. 1.8).

Рис. 1.8. Связь вида деформации с внутренними усилиями в брус



1.6. Виды опорных закреплений

С технической точки зрения опорные закрепления конструкций весьма разнообразны. При формировании расчетной схемы все многообразие существующих опорных устройств схематизируется в виде ряда основных

типов опор, из которых наиболее часто встречаются: шарнирно-подвижная опора (возможные обозначения для нее представлены на рис. 1.9,*а*), шарнирно-неподвижная опора (рис. 1.9,*б*) и жесткое защемление, или заделка (рис. 1.9,*с*).

В шарнирно-подвижной опоре возникает одна опорная реакция, перпендикулярная опорной плоскости. Такая опора лишает опорное сечение одной степени свободы, то есть препятствует смещению в направлении

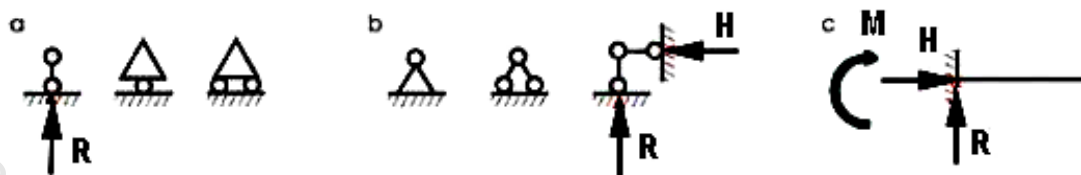


Рис. 1.9 Схематизация основных типов опор

опорной плоскости, но допускает перемещение в перпендикулярном направлении и поворот опорного сечения.

В шарнирно-неподвижной опоре возникают вертикальная и горизонтальная реакции. Здесь невозможны перемещения по направлениям опорных стержней, но допускается поворот опорного сечения.

В жесткой заделке возникают вертикальная и горизонтальная реакции и опорный (реактивный) момент. При этом опорное сечение не может смещаться и поворачиваться.

При расчете систем, содержащих жесткую заделку, возникающие опорные реакции можно не определять, выбирая при этом отсеченную часть так, чтобы заделка с неизвестными реакциями в нее не попадала. При расчете систем на шарнирных опорах реакции опор должны быть определены обязательно. Уравнения статики, используемые для этого, зависят от вида системы (балка, рама и др.) и будут приведены в соответствующих разделах курса.

1.7. Закон Гука и принцип независимости действия сил

Многочисленные экспериментальные наблюдения за поведением деформируемых тел показывают, что в определенных диапазонах перемещения точек тела пропорциональны действующим на него нагрузкам. Впервые указанная закономерность была высказана в 1776 году английским ученым Гуком и носит название *закона Гука*.

В соответствии с этим законом перемещение произвольно взятой точки *A* (рис. 1.7, *а*) нагруженного тела по некоторому направлению, например, по оси *x*, а может быть выражено следующим образом:

$$u = \delta_x P, \quad (1.12)$$

где *P* – сила, под действием которой происходит перемещение *u*; δ_x – коэффициент пропорциональности между силой и перемещением.

Очевидно, что коэффициент δ_x зависит от физико-механических свойств материала, взаимного расположения точки *A* и точки приложения и направления силы *P*, а также от геометрических особенностей системы.

Таким образом, последнее выражение следует рассматривать как закон Гука для данной системы.

В современной трактовке закон Гука определяет линейную зависимость между напряжениями и деформациями, а не между силой и перемещением. Коэффициенты пропорциональности в этом случае представляют собой физико-механические характеристики материала и уже не связаны с геометрическими особенностями системы в целом.

Системы, для которых соблюдается условие пропорциональности между перемещениями и внешними силами, подчиняются *принципу суперпозиции*, или *принципу независимости действия сил*.

В соответствии с этим принципом перемещения и внутренние силы, возникающие в упругом теле, считаются независимыми от порядка приложения внешних сил. То есть, если к системе приложено несколько сил, то можно определить внутренние силы, напряжения, перемещения и деформации от каждой силы в отдельности, а затем результат действия всех сил получить как сумму действий каждой силы в отдельности. Принцип независимости действия сил является одним из основных способов при решении большинства задач сопромата.

Контрольные вопросы

- 1.1. Что такое прочность, жесткость, деформирование и устойчивость конструкции?
- 1.2. На какие три группы можно разбить внешние силы, действующие на элемент конструкции?
- 1.3. Что такое стержень, пластина и массивное тело?
- 1.4. Сформулируйте гипотезу сплошности.
- 1.5. В чем заключается гипотеза однородности материала?
- 1.6. Что такое изотропные и анизотропные материалы?
- 1.7. Что такое напряжение? На какие компоненты принято раскладывать полное напряжение? Как они называются и обозначаются?
- 1.8. В чем заключается сущность метода сечений?
- 1.9. Что мы называем внутренними силами? Какой метод применяется для их изучения?
- 1.10. Возникают ли внутренние силы в ненагруженном теле? В недеформированном теле?
- 1.11. Что мы называем отсеченной частью тела? В чем заключается основная идея метода сечений?
- 1.12. Почему обе отсеченные части, на которые разделено тело некоторым произвольным сечением, равноценны с точки зрения определения внутренних сил, действующих в этом сечении?
- 1.13. Что означает простое и сложное сопротивление бруса?
- 1.14. Как выражаются внутренние силовые факторы через напряжения?
- 1.15. Что такое линейная и угловая деформации?

- 1.16. Основные виды деформаций бруса.
- 1.17. Виды опорных закреплений.
- 1.18. Сформулируйте закон Гука.
- 1.19. Сформулируйте принцип независимости действия сил.

Витебский государственный технологический университет

ГЛАВА 2

РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

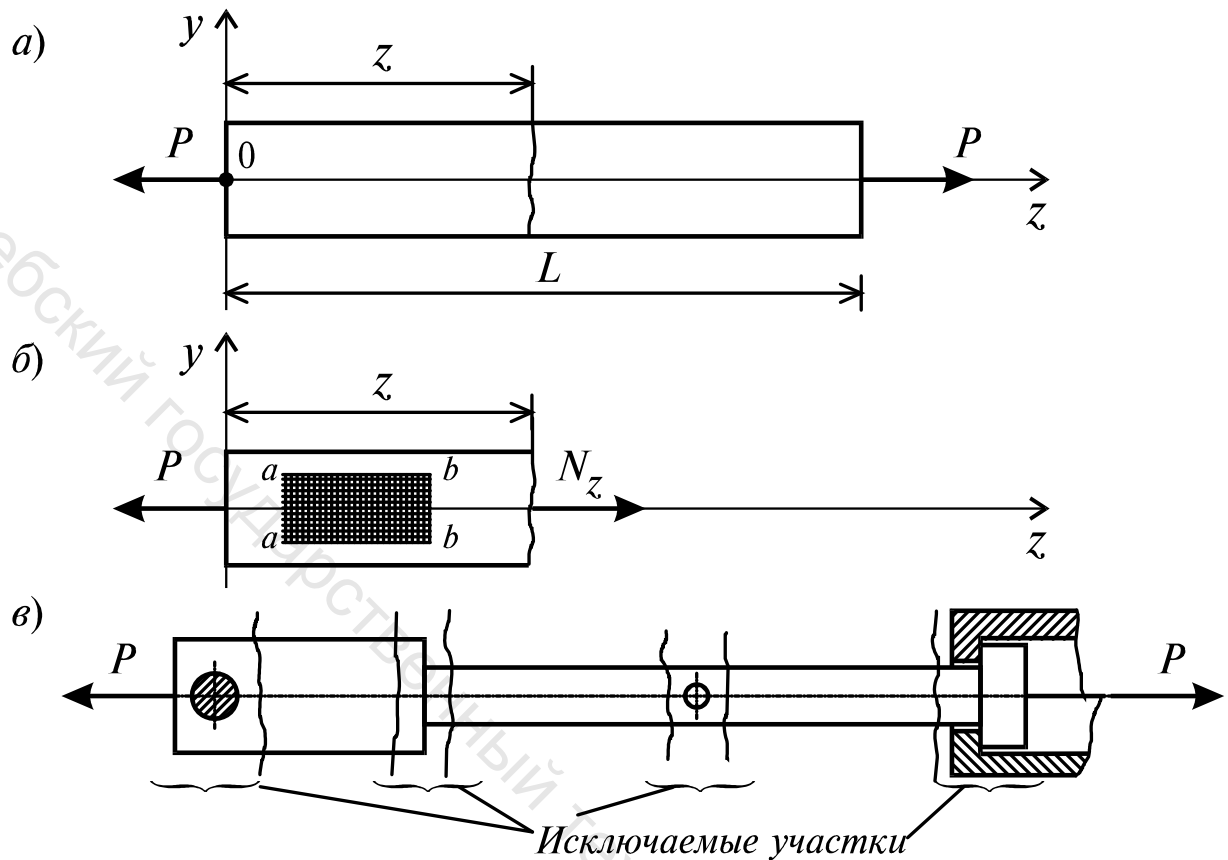


Рис. 2.1. Схема испытания образцов на растяжение

Под растяжением (сжатием) понимают такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях бруса возникает лишь один внутренний силовой фактор - продольная сила N_z .

Рассмотрим однородный прямолинейный стержень длиной l и площадью поперечного сечения A , на двух концах которого приложены две равные по величине и противоположно направленные центральные продольные силы P (рис. 2.1, а). Поместим начало плоской системы координат uz в центре тяжести левого сечения, а ось z направим вдоль продольной оси стержня. Для определения величин внутренних усилий воспользуемся методом сечений. Задавая некоторое сечение на расстоянии z ($0 \leq z \leq l$) от начала системы координат и рассматривая равновесие левой относительно заданного сечения части стержня (рис. 2.1, б), приходим к следующему уравнению:

$$\sum F_z = 0, \quad -P + N = 0,$$

откуда следует, что $N_z = P = \text{const}$.

Примем для N_z следующее правило знаков. Если сила N_z направлена от сечения, т.е. вызывает положительную деформацию (растяжение), то она считается положительной. В обратном случае – отрицательной.

Нормальная сила N_z приложена в центре тяжести сечения, является равнодействующей внутренних сил в сечении

$$N_z = \int_A \sigma \cdot dA. \quad (2.1)$$

Но из формулы (2.1) нельзя найти N_z без знания закона распределения нормальных напряжений σ в поперечных сечениях стержня. Для выяснения этого вопроса обратимся к анализу характера деформирования стержня.

Если на боковую поверхность этого стержня нанести прямоугольную сетку (рис. 2.1, б), то после нагружения поперечные линии $a-a$, $b-b$ и т.д. переместятся параллельно самим себе, откуда следует, что все поверхностные продольные волокна удлинятся одинаково. Если предположить также, что и внутренние волокна работают таким же образом, то можно сделать вывод о том, что поперечные сечения в центрально растянутом стержне смещаются параллельно начальным положениям, что соответствует *гипотезе плоских сечений*, введенной швейцарским ученым Д. Бернулли, гласящей, что *плоские сечения до деформации остаются плоскими и после деформации*. Значит, все продольные волокна стержня находятся в одинаковых условиях, а, следовательно, нормальные напряжения во всех точках поперечного сечения должны быть также одинаковы и равны

$$\sigma = \frac{N_z}{A}, \text{ где } A \text{ – площадь поперечного сечения стержня.}$$

Высказанное предположение о равномерном распределении внутренних сил в поперечном сечении справедливо для участков, достаточно удаленных от мест: резкого изменения площади поперечного сечения (рис. 2.1, в); скачкообразного изменения внешних нагрузок; скачкообразного изменения физико-механических характеристик конструкций. Основанием для такого утверждения служит *принцип Сен-Венана*, справедливый для любого типа напряженного состояния и формулируемый следующим образом: *особенности приложения внешних нагрузок проявляются, как правило, на расстояниях, не превышающих характерных размеров поперечного сечения стержня*.

Итак, формула для напряжений при растяжении (сжатии):

$$\sigma = N_z / A, \quad (2.2)$$

а условие прочности:

$$\max \sigma = \frac{\max N_z}{A} \leq \sigma, \quad (2.3)$$

где σ допускаемое напряжение для выбранного материала, площадь поперечного сечения A предполагается постоянной по длине бруса.

Для определения допускаемого напряжения материала $[\sigma]$ проводится экспериментальное исследование с целью определения опасного (предельного) значения напряжения для данного материала.

На рисунке 2.2 показаны диаграммы растяжения экспериментальных образцов из пластичного и хрупкого материалов. Диаграмма показывает зависимость между напряжением и относительным удлинением ε . Относительное удлинение (или укорочение) стержня есть отношение его абсолютного удлинения (укорочения) Δl к первоначальной длине l .

$$\varepsilon = \Delta l / l \quad (2.4)$$

Рассмотрим диаграмму пластичного материала. Участок ОА диаграммы есть область выполнения закона Гука: напряжение прямо пропорционально деформации.

$$\sigma = E\varepsilon. \quad (2.5)$$

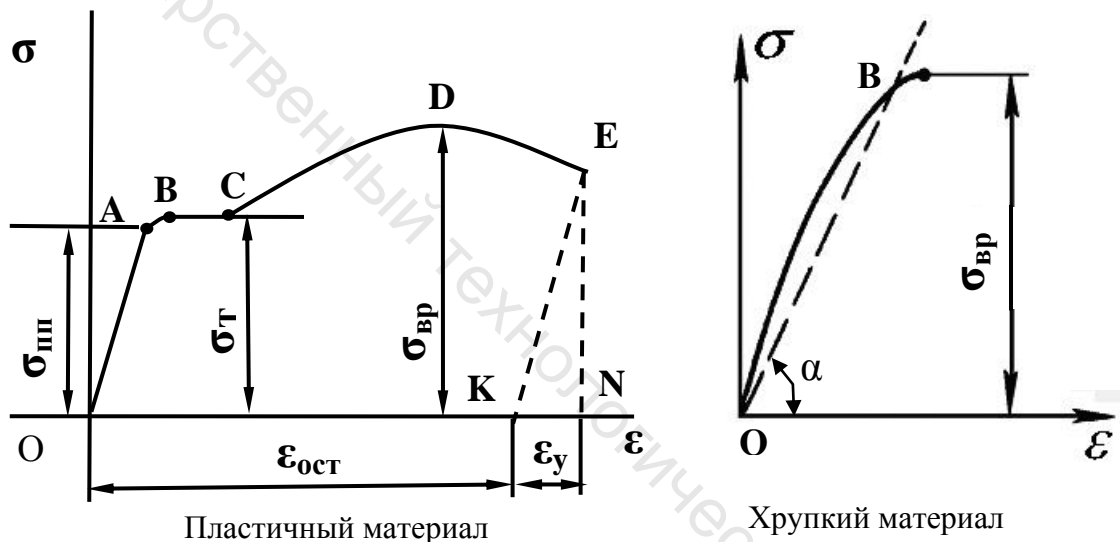


Рис. 2.2. Диаграммы растяжения экспериментальных образцов из пластичного и хрупкого материалов

Здесь E – модуль продольной упругости материала. Максимальное напряжение, до которого выполняется закон Гука, называют пределом пропорциональности и обозначают $\sigma_{пл}$. Участок ОА характерен также тем, что вся деформация после снятия нагрузки исчезает – такую деформацию называют упругой. Участок ВС называют площадкой текучести материала, а соответствующее напряжение называется пределом текучести $\sigma_{т}$. Наибольшее напряжение $\sigma_{вр}$ называется временным сопротивлением или пределом прочности. В процессе нагружения образца в нем после зоны упругости (точка А) развиваются два вида деформаций: упругая и пластическая. Пластическую деформацию называют также остаточной, так как эта деформация не исчезает после снятия нагрузки. В момент разрыва образца (точка Е) он мгновенно разгружается (КЕ – линия разгрузки) и упругая деформация ε_y исчезает, а остаточная $\varepsilon_{ост}$ – остается. У пластичных

материалов $\varepsilon_{\text{ост}}$ достигает 20% и больше. Мерой пластичности является $\varepsilon_{\text{ост}}$ при разрыве. Чем больше $\varepsilon_{\text{ост}}$, тем более пластичным считается материал. Противоположным свойству пластичности является свойство *хрупкости*, т. е. способность материала разрушаться без образования заметных остаточных

Таблица 2.1 Механические характеристики некоторых материалов

Материал	Характеристика		
	E, ГПа	σ_T , МПа	$\sigma_{\text{вр}}$, МПа
Сталь Ст.3	200	240/240	450/-
Сталь 15	200	210/210	350/-
Сталь 45	200	340/340	610/-
Сталь 30ХГСА	200	950/950	1200/-
Чугун СЧ15-32	150	-	150/640
Медь прутковая	110	250/250	320/-
Дуралюмин Д16	75	240/240	420/-
Дельта-древесина	20	-	250/160
Текстолит	30	75/115	127/168

Примечание: В знаменателе указана соответствующая характеристика при сжатии

Таблица 2.2 Коэффициенты поперечной деформации (коэффициент Пуассона) некоторых материалов

Название материала	μ	Название материала	μ
Сталь	0,23 - 0,33	Свинец	0,45
Медь	0,31 - 0,34	Латунь	0,32—0,42
Бронза	0,32 - 0,35	Алюминий	0,32—0,36
Чугун	0,23 - 0,27	Цинк	0,21
Стекло	0,25	Камень	0,16 - 0,34
Бетон	0,08 - 0,18	Каучук	0,47
Пробка	0,00	Фанера	0,07
Целлулоид	0,39		

деформаций. Материалы, обладающие этим свойством, называются *хрупкими*. Для таких материалов величина $\varepsilon_{\text{ост}}$ при разрыве не превышает 2—5%, а в ряде случаев измеряется долями процента. К хрупким материалам относятся чугун, высокоуглеродистая инструментальная сталь, стекло, кирпич, камни и др. Диаграмма растяжения хрупких материалов не имеет площадки текучести и зоны упрочнения и выраженного прямолинейного начального участка (рис. 2.2). При определении деформаций с

использованием формул, выражающих закон Гука, значение модуля упругости E находят как тангенс угла α наклона прямой, проведенной через начальную точку диаграммы O и точку B , соответствующую напряжению, при котором определяют деформацию. Такой модуль упругости называют *секущим*.

Вернемся к определению допустимого напряжения. Оно получается делением опасного напряжения на допустимый коэффициент запаса.

$$[\sigma] = \sigma_{\text{опасное}} / [n]. \quad (2.6)$$

За опасное напряжение принимается предел текучести σ_T для пластичных материалов и предел прочности $\sigma_{вр}$ для хрупких. В коэффициенте запаса заложены такие факторы как неполнота и неточность расчетов, дефекты материала, погрешности изготовления конструкции, ее назначение и долговечность, перспективы роста нагрузок со временем.

При растяжении образца происходит не только увеличение его длины, но и уменьшение размеров поперечного сечения. Поперечная относительная деформация обозначается ε' и связана с продольной деформацией соотношением:

$$\varepsilon' = -\mu\varepsilon, \quad (2.7)$$

где μ – коэффициент Пуассона. При пользовании формулой (2.7) удлинение считается положительным, а укорочение – отрицательным. Коэффициент Пуассона для изотропных материалов лежит в пределах $0 \leq \mu \leq 0.5$. Упругие свойства и коэффициенты Пуассона некоторых материалов даны в таблицах 2.1 и 2.2.

Для сталей различных марок $E = 195-206$ ГПа, $\mu = 0,23-0,31$, для сплавов алюминия $E = 69-71$ ГПа, $\mu = 0,30-0,33$. Следует отметить уникальное свойство пробкового дерева ($\mu \approx 0$), из-за которого оно широко используется как пробка для закупорки бутылок. У каучука и материалов на основе каучука, т.е. резин $\mu \approx 0,5$. Заметим, что из физических соображений $\mu \leq 0,5$.

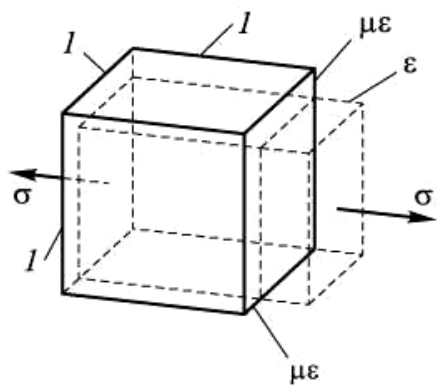


Рис. 2.3. Изменение объема кубика при деформации

Для того чтобы понять этот факт, рассмотрим объемную деформацию кубика с единичными ребрами, растянутого в одном из координатных направлений.

На рис. 2.3 штриховыми линиями показано деформированное состояние такого кубика.

Его ребра в направлении растяжения удлинятся на величину ε , а в поперечном направлении укоротятся на величину $\mu\varepsilon$.

Найдем приращение объема ΔV кубика. Его объем до деформации $V_0 = 1 \times 1 \times 1$, а после деформации $V = (1 + \varepsilon)(1 - \mu\varepsilon)(1 - \mu\varepsilon)$.

Тогда $\Delta V = V - V_0 = (1 + \varepsilon)(1 - \mu\varepsilon)(1 - \mu\varepsilon) - 1 = (1 - 2\mu)\varepsilon - \mu^2\varepsilon^2 + \mu^2\varepsilon^3$. Так как деформации малы, т.е. $\varepsilon \ll 1$, то вторым и третьим слагаемыми в этой сумме можно пренебречь по сравнению с первым. Поэтому $\Delta V \approx$

$(1 - 2\mu)\varepsilon$. Отсюда видно,

что $\Delta V = 0$ при $\mu = 0,5$. А это значит, что объем материала при деформации

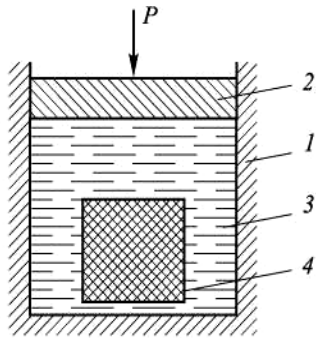


Рис. 2.4. Устройство вечного двигателя

не изменяется, т.е. материал является несжимаемым. Практически несжимаемыми являются многие жидкости. Опыты показывают, что при течении металлов величина μ также близка к 0,5.

Если бы коэффициент μ оказался большим 0,5, то, как следует из формулы для изменения ΔV , такой материал обладал бы парадоксальными свойствами: при растягивающих деформациях его объем уменьшался бы, а при сжимающих — увеличивался. Такое свойство позволило бы создать вечный двигатель. Основу такого двигателя могло бы составить устройство, изображенное на рис. 2.4. Оно состоит из абсолютно жесткого цилиндра 1 с поршнем 2. Объем цилиндра заполнен несжимаемой жидкостью 3, в которую погружен некоторый объем 4 из материала с $\mu > 0,5$. При нагружении поршня силой P объем 4 увеличился бы и поршень передвинулся бы навстречу силе, т.е. была бы совершена отрицательная работа. Иными словами, если бы сила P создавалась каким-либо грузом, то этот груз вместе с поршнем 2 поднялся бы на некоторую величину и таким образом совершенно «бесплатно» образовался бы необходимый для вечного двигателя запас энергии.

Из закона Гука получаем формулу для удлинения:

$$\Delta l = N_z l / E A. \quad (2.8)$$

2.1. Определение продольной силы – построение эпюры N_z

Продольная сила, как и любой другой внутренний силовой фактор, определяется посредством метода сечений. Рассекая брус в некотором сечении, и отбрасывая одну его часть, находим алгебраическую сумму проекций внешних сил на ось z , действующих на оставленную часть. Эта сумма и будет являться численным значением продольной силы в данном сечении. Правило знаков для продольной силы: растяжение – знак “плюс”, сжатие – “минус”.

Пример 2.1. Для стального бруса, показанного на рис. 2.5 построить эпюру N_z и определить его удлинение Δl .

Решение. Продольную силу N_z в поперечном сечении определяем методом сечений из условия равновесия правой отсеченной части бруса. Величина продольной силы N_z в каком-нибудь поперечном сечении бруса равна алгебраической сумме всех внешних продольных сил, действующих на брус по одну сторону от рассматриваемого сечения. Разбиваем брус на участки, как показано на рис. 2.5. Проводя произвольное поперечное сечение на каждом участке бруса, найдем значения продольных усилий для каждого участка по формуле $N_z = \sum P_{\text{прав}}$: Участок 1-2. $N_2 = P$. Участок 2-3. $N_3 = P - 2P = -P$. Участок 3-4. $N_4 = P - 2P + 3P = 2P$. Построим график изменения силы N_z вдоль оси стержня. В данном случае график изменения продольной силы представлен на рис. 2.5. Графики такого рода в сопротивлении материалов называются **эпюрами**. Они штрихуются линиями, которые проводятся в направлении откладываемой на графике величины. В нашем случае значение силы N_z

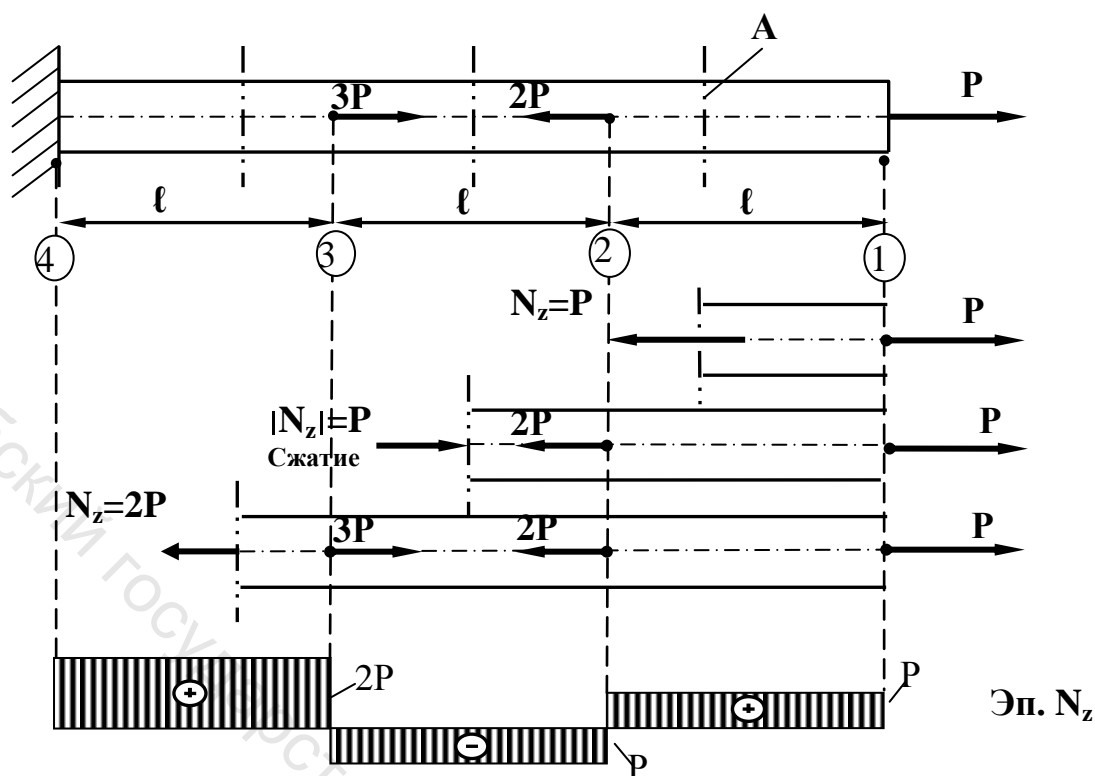


Рис. 2.5. Схема к расчету стального бруса

откладывается вверх или вниз, поэтому штриховка проведена вертикально. Положительная величина откладывается вверх, а отрицательная - вниз. Для ступенчатых стержней полное изменение длины бруса определяется как алгебраическая сумма удлинений его отдельных частей, в пределах которых E , N и A постоянны: $\Delta l = \sum \Delta l_i$. Используя формулу (2.8) найдем удлинение Δl

$$\text{бруса: } \Delta l = \sum \Delta l_i = \Delta l_{1-2} + \Delta l_{2-3} + \Delta l_{3-4} = \frac{Pl}{EA} + \frac{(-P)l}{EA} + \frac{2Pl}{EA} = 2 \frac{Pl}{EA}$$

2.2. Расчет статически неопределимых стержневых систем

Под n раз статически неопределимой системой понимается такая, конструкция, у которой число неизвестных усилий превышает число уравнений равновесия на n единиц.

Для расчета такой стержневой системы нужно дополнительно к уравнениям равновесия составить уравнения совместности деформаций или ещё их называют уравнениями перемещений. Эти уравнения отражают особенности геометрических связей, наложенных на деформируемые системы.

Пример 2.2. Прямой однородный стержень (рис. 2.6) жестко закреплен по концам и нагружен продольной силой P . Требуется определить наибольшие напряжения, возникающие в стержне.

Решение. Система один раз статически неопределима, поскольку две реакции опор X и R_3 не могут быть определены из одного уравнения равновесия $R_3 + P - X = 0$. Дополнительное уравнение перемещений должно

отразить тот факт, что общая длина бруса не меняется. Для составления уравнения совместности деформаций отбрасываем правую заделку, и ее

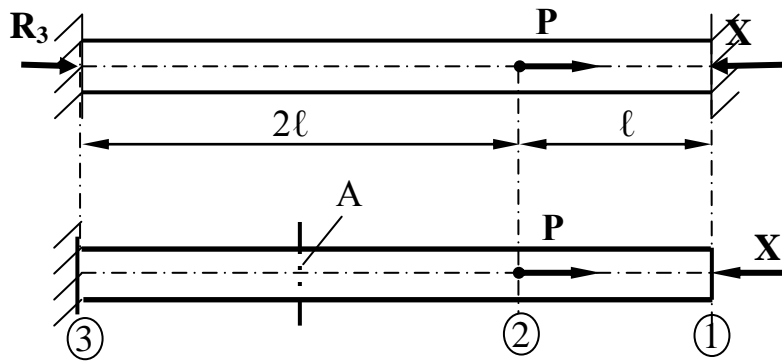


Рис. 2.6. Схема к расчету однородного стержня

действие заменяем неизвестной реакцией X . Полученную систему называют эквивалентной. Потребуем, чтобы эквивалентная система деформировалась также, как и заданная - это значит, что удлинение всего бруса Δl должно быть равно нулю. Рассмотренный метод решения, когда за неизвестные принимаются усилия в отброшенных связях, называется **методом сил**.

$$\Delta l = \sum \Delta l_i = \Delta l_{1-2} + \Delta l_{2-3} = \frac{(-X)l}{EA} + \frac{(-X + P)2l}{EA} = 0.$$

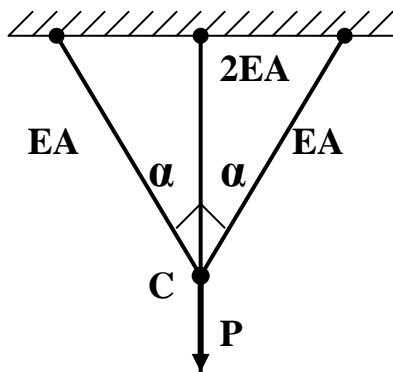


Рис. 2.7. Стержневая система

Решая это уравнение совместно с уравнением статики, найдем: $X = \frac{2}{3}P$, $R_3 = -\frac{1}{3}P$. Знак минус указывает, что реакция опоры R_3 направлена противоположно показанному направлению на рис.2.6. Наибольшее напряжение $\sigma_{\max} = \frac{2P}{3A}$

Пример 2.3. Для заданной статически неопределимой (один раз) стержневой системы (рис. 2.7) определить допускаемое значение силы P , если известно допускаемое значение напряжения $[\sigma]$.

Решение. Дана симметричная стержневая система из трех стержней, сходящихся в узле. Для расчета таких систем, состоящих из нескольких стержней, применяют способ решения, который называется **способом сравнения деформаций**. Для составления уравнений равновесия вырезаем узел C и показываем усилия в стержнях N_1 , N_2 , N_3 . Рис. 2.8 - это схема сил. Так как здесь имеет место частный случай плоской системы сил (все силы сходятся в одной точке), то из трех уравнений статики остаются только два уравнения проекций сил на оси X и Y .

$$1) \sum F_{ix} = 0, \quad -N_1 \sin \alpha + N_3 \sin \alpha = 0,$$

$$2) \sum F_{iy} = 0, \quad N_1 \cos \alpha + N_2 + N_3 \cos \alpha - P = 0$$

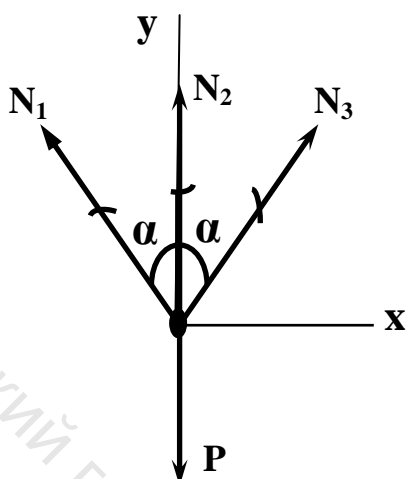


Рис. 2.8. Схема сил

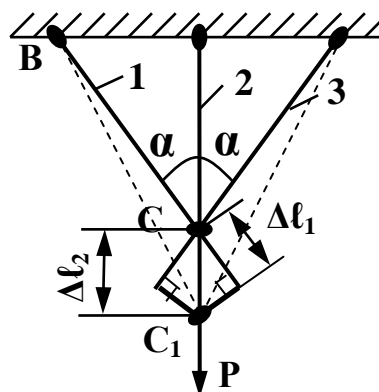


Рис. 2.9. Схема перемещений

Итак, мы получили два уравнения с тремя неизвестными - система один раз статически неопределима. Для составления уравнения совместности деформаций выполняем схему перемещений. Уравнения перемещений должны выразить тот факт, что узел С деформированной системы должен быть общим для всех стержней.

Как выполняется схема перемещений? В связи с удлинением стержней узел С перемещается вдоль второго стержня в новое положение С₁ (рис.2.9). Отрезок СС₁ и есть удлинение второго стержня Δℓ₂. Перемещение концов стержней 1 и 3 можно мысленно представить в два этапа. Подробно покажем на стержне 1. Отсоединив стержень 1 от шарнира С, растягиваем его вдоль своей оси на Δℓ₁ и затем поворотом вокруг шарнира В перемещаем конец стержня 1 в новое положение шарнира С₁. Следует иметь в виду, что деформации стержня и перемещения при повороте весьма малы по сравнению с характерными размерами стержневой конструкции (длиной стержней). Вследствие этого дугу окружности, по которой перемещается конец стержня 1 заменяем отрезком касательной, т.е. опускаем перпендикуляр из точки С₁ на направление первого стержня и получаем удлинение Δℓ₁. В результате построений получился характерный прямоугольный треугольник, у которого удлинения Δℓ₁ и Δℓ₂ связаны между собой как катет и гипотенуза. Уравнение совместности деформаций имеет вид: Δℓ = Δ₂ cos α. Аналогичные рассуждения справедливы и для стержня 3. Следует отметить, что в силу симметрии конструкции Δℓ₁ = Δℓ₃. Далее, подставив значения Δℓ₁ и Δℓ₂ в уравнение совместности деформаций, используя выражение (2.8) получим третье уравнение в следующем виде :

$$3) \frac{N_1 \ell_1}{EA} = \frac{N_2 \ell_2}{2EA} \cos \alpha .$$

Решая три уравнения с тремя неизвестными, находим искомые усилия. Из 1) следует, что $N_1=N_3$. Из 3) с учетом, что $l_2=l_1 \cos \alpha$ найдем $N_1=0,5N_2 \cos^2 \alpha$. Из 2) – $N_2=P/(1+\cos^3 \alpha)$. $N_1=0,5P \cos^2 \alpha/(1+\cos^3 \alpha)$.

Определяем напряжения σ_1 и σ_2 :

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{P \cos^2 \alpha}{2A(1+\cos^3 \alpha)}, \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{2A} = \frac{P}{2A(1+\cos \alpha)}. \quad \text{Очевидно, что}$$

$\sigma_2 \geq \sigma_1$. Из условия прочности (2.3) находим допускаемое значение силы [P] –

$$\max \sigma = \frac{P}{2A(1+\cos^3 \alpha)} = \sigma, \quad \text{откуда } [P] = 2A(1+\cos^3 \alpha) [\sigma].$$

Пример 2.4. Для заданной стержневой системы (рис. 2.10) определить допускаемое значение силы P, если известно допускаемое значение напряжения $[\sigma]$.

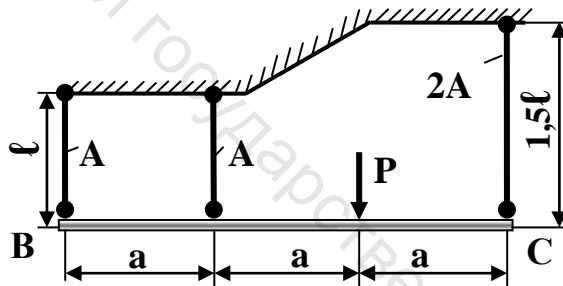


Рис. 2.10. Стержневая система

Решение. Решение задачи следует начинать с выбора деформированного состояния. Исходя из допущения об абсолютной жесткости стержня BC, заключаем, что все три нижних шарнира всегда будут расположены на одной прямой и можно, например, принять деформированное состояние

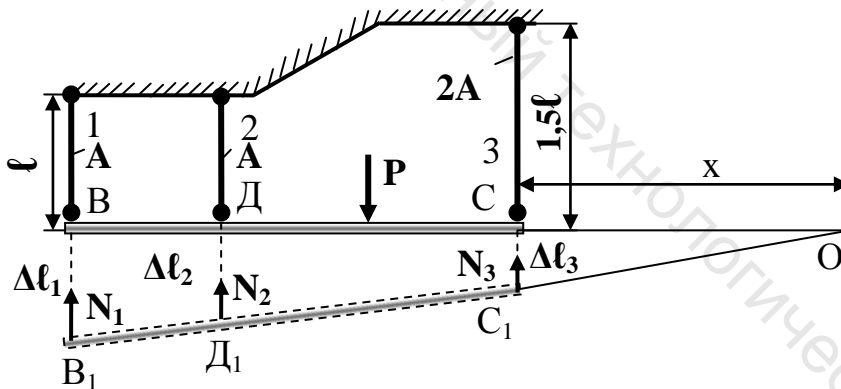


Рис. 2.11, а Схема перемещений для примера 2.4

как на рис. 2.11,а или 2.11,б. Следует отметить, что при решении статически неопределимых задач способом сравнения деформаций необходимо следить за тем, чтобы напряженное (силовое) состояние

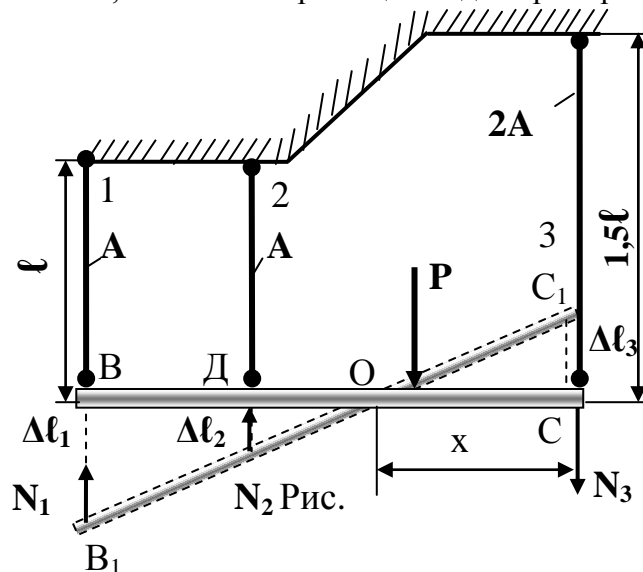


Рис. 2.11, б Схема перемещений

всегда соответствовало деформированному состоянию. Это означает, что если при выборе схемы деформаций какой-то стержень растянут (сжат), то и усилие в нем должно соответствовать растяжению (сжатию). Данное требование обосновывается более строгими методами решения подобных задач, например, методом сил или энергетическими методами, основанными на принципе

наименьшей работы. В противном случае возможны ошибки, что и будет показано на примере данной задачи. Для составления уравнений равновесия для стержня BC покажем схему сил, приложенных к стержню соответствующую схеме деформированного состояния. Для схемы, показанной на рис. 2.11а уравнения равновесия имеют вид:

$$1а) \sum F_{iy} = 0, \quad N_1 + N_2 + N_3 - P = 0,$$

$$2а) \sum m_B = 0, \quad N_2 a - P 2a + N_3 3a = 0.$$

Итак, мы получили два уравнения с тремя неизвестными - система один раз статически неопределима. Для составления уравнения совместности деформаций рассмотрим подобные треугольники $ОВВ_1$, $ОДД_1$ и $ОСС_1$. Из их подобия следует:

$$\frac{\Delta l_1}{3a + x} = \frac{\Delta l_2}{2a + x} = \frac{\Delta l_3}{x}.$$

Окончательно уравнение совместности деформаций примет вид:

$$2\Delta l_1 - 3\Delta l_2 + \Delta l_3 = 0.$$

Далее, подставив значения Δl_1 , Δl_2 и Δl_3 , используя выражение (2.8) получим третье уравнение в следующем виде:

$$3а) \quad 8N_1 - 12N_2 + 3N_3 = 0$$

Решая уравнения 1а-3а, находим усилия в стержнях: $N_1 = \frac{9}{55} P$, $N_2 = \frac{14}{55} P$, $N_3 =$

$\frac{32}{55} P$. Для схемы перемещений, показанной на рис. 2.11б уравнения равновесия имеют вид:

$$1б) \sum F_{iy} = 0, \quad N_1 + N_2 - N_3 - P = 0,$$

$$2б) \sum m_B = 0, \quad N_2 a - P 2a - N_3 3a = 0.$$

Для составления уравнения совместности деформаций рассмотрим подобные треугольники $ОВВ_1$, $ОДН_2$ и $ОСС_1$. Из их подобия следует:

$$\frac{\Delta l_1}{3a - x} = \frac{\Delta l_2}{2a - x} = \frac{\Delta l_3}{x}.$$

Окончательно уравнение совместности деформаций примет вид: $2\Delta l_1 - 3\Delta l_2 - \Delta l_3 = 0$. Далее, подставив значения Δl_1 , Δl_2 и Δl_3 , используя выражение (2.8) получим третье уравнение в следующем виде:

$$3б) \quad 8N_1 - 12N_2 - 3N_3 = 0.$$

Решая уравнения 1б-3б, находим усилия в стержнях: $N_1 = \frac{9}{55} P$, $N_2 = \frac{14}{55} P$,

$N_3 = -\frac{32}{55} P$. Сила N_3 направлена противоположно показанному на рис. 2.11б.

Отметим, что численно и по направлению усилия в стержнях совпадают для двух расчетных схем, приведенных на рис. 2.11а и 2.11б.

Посмотрим, что получится, если направление сил взять согласно схеме 2.11а, а схему перемещений согласно рис. 2.11б. В этом случае уравнениями равновесия будут уравнения 1а и 2а, а уравнение совместности деформаций

– 3б. Решая эти уравнения совместно, получим неверный результат: $N_1 = \frac{15}{49}P$

$$P, N_2 = \frac{2}{49}P, N_3 = \frac{32}{49}P.$$

Из этого примера видно, что необязательно заранее угадывать напряженное состояние стержней, но обязательно необходимо следить за тем, чтобы напряженное состояние всегда соответствовало деформированному состоянию.

Определяем напряжения σ_1, σ_2 и σ_3 :

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A} = \frac{9P}{55A}, \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A} = \frac{14P}{55A}, \quad \sigma_3 = \frac{N_3}{2A} = \frac{16P}{55A}. \quad \text{Из условия прочности (2.3)}$$

находим допускаемое значение силы [P] –

$$\max \sigma = \sigma_3 = \frac{16P}{55A} = \sigma, \quad \text{откуда } [P] = \frac{55A}{16} \sigma.$$

2.3. Свойство статически неопределимых систем

Запишем формулу для удлинений в следующем виде

$$\Delta l = \frac{N}{EA}, \quad \text{где } \frac{EA}{l} - \text{ жесткость стержня, а } EA - \text{ жесткость его поперечного}$$

сечения. Свойство статически неопределимых систем состоит в том, что если в системе увеличить (уменьшить) жесткость какого – либо стержня, то увеличивается (уменьшается) и усилие в этом стержне.

Покажем это на примере.

Пример 2.5. В стальную трубку (обозначим индексом 1) вставлен медный стержень (индекс 2). Через жесткую плиту они нагружены силой P (рис. 2.12). Жесткости поперечных сечений стержней E_1A_1 и E_2A_2 .

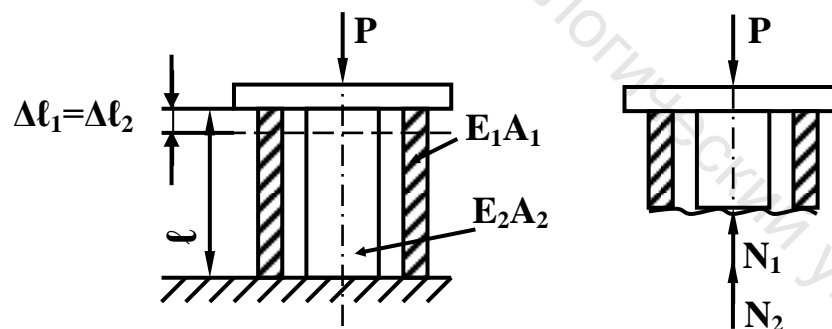


Рисунок 2.12. Расчетная схема

Решение. Уравнение равновесия:

$$1) N_1 + N_2 = P.$$

Уравнение деформаций $\Delta l_1 = \Delta l_2$ или с учетом выражения (2.8) получим:

$$\frac{N_1 \ell}{E_1 A_1} = \frac{\Delta \ell}{E_2 A_2} \quad \text{или} \quad N = \frac{E_2 A}{E_1 A} \quad 1. \quad \text{С учетом 1) получим}$$

$$N_1 = \frac{P}{1 + \frac{E_2 A_2}{E_1 A_1}}; \quad \Delta \ell = \frac{P}{\frac{E_1 A_1}{\ell} + \frac{E_2 A_2}{\ell}}$$

Как видим, увеличение $E_1 A_1$ приводит к увеличению N_1 . Это же справедливо и для второго стержня.

При решении многих практических задач возникает необходимость, наряду с удлинениями, обусловленными действием механических нагрузок, учитывать также удлинения, вызванные температурным воздействием. В этом случае пользуются принципом независимости действия сил (гипотеза Дюамеля – Неймана), и полные деформации рассматривают как сумму силовой и температурной деформаций:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha t, \quad (2.9)$$

где α – коэффициент температурного расширения материала; t – перепад температуры тела. Для однородного стержня, нагруженного по концам продольными силами P и равномерно нагретого по длине, получим:

$$\Delta \ell = \frac{P \ell}{EA} + \ell \alpha t. \quad (2.10)$$

Контрольные вопросы

2.1. От чего зависят знаки внутренних силовых факторов: от характера их действия на отсеченную часть или от направления координатных осей? Продольная сила N (рисунок 2.13) положительна или отрицательна?

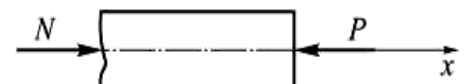


Рис. 2.13 Схема сил

- 2.2. Какое напряженно-деформированное состояние бруса называется растяжением-сжатием? При каких внешних нагрузках оно возникает?
- 2.3. В каком месте бруса внутренние силовые факторы будут изменяться скачкообразно?
- 2.4. Можно ли судить о прочности и жесткости бруса, зная только величину внутренних силовых факторов в его поперечных сечениях?
- 2.5. Что такое остаточная деформация?
- 2.6. Что такое абсолютные и относительные удлинения?
- 2.7. Что такое диаграмма растяжения? Как она строится?
- 2.8. Какой материал называется хрупким? Приведите примеры таких материалов.
- 2.9. Какой материал называется пластичным? Приведите примеры таких материалов.
- 2.10. Что такое коэффициент Пуассона?
- 2.11. Связан ли знак продольной силы N с направлением оси x бруса? В каком случае продольная сила считается положительной?

- 2.12. Какой характер деформации бруса предполагается гипотезой плоских сечений?
- 2.13. Как распределяются нормальные напряжения σ по поперечному сечению бруса при центральном растяжении-сжатии? Как их вычислить?
- 2.14. Приведите две формы записи закона Гука (связь между ε и σ и между Δl и N).
- 2.15. Что необходимо рассмотреть (помимо условий равновесия) для решения статически неопределимой системы?
- 2.16. В чем разница записи относительного удлинения Δl для ненагретого и нагретого брусьев?
- 2.17. Как записать условие прочности конструкции при растяжении-сжатии?
- 2.18. Что такое допускаемое напряжение?
- 2.19. Как выбирается опасное напряжение для пластичных и хрупких материалов?
- 2.20. Какие факторы обязательно учитываются при выборе коэффициента запаса?
- 2.21. Что такое эпюра?
- 2.22. Что значит статически неопределимая система?
- 2.23. Свойство статически неопределимых систем.
- 2.24. Особенности решения статически неопределимых задач способом сравнения деформаций.
- 2.25. Как связаны продольные и поперечные деформации?
- 2.26. Назовите характерные участки на диаграмме $\sigma(\varepsilon)$ для малоуглеродистой стали и определяющие их напряжения.

ГЛАВА 3

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

Сопротивление стержня различным видам деформаций зависит не только от его материала и размеров, но и от формы поперечных сечений. Рассмотрим основные геометрические характеристики поперечных сечений.

3.1. Статические моменты сечения. Центр тяжести

На рис. 3.1 показано произвольное поперечное сечение, расположенное в координатной плоскости xOy . Возьмем произвольную точку с координатами x , y и выделим вокруг нее бесконечно малую (элементарную) площадку dA . Разумеется, сумма всех элементарных площадок есть площадь сечения A . Это можно записать так

$$A = \int_A dA \quad (3.1)$$

Статическим моментом S_x сечения (фигуры) относительно какой-либо оси x (рис. 3.1) называется сумма произведений элементарных площадок dA на их расстояние y

до данной оси, численно равная интегралу

$$S_x = \int_A y dA \quad (3.2)$$

Статические моменты имеют размерность см^3 (м^3) и могут быть больше нуля, меньше нуля и равны нулю. Если отождествить площадь с силой, то интеграл (3.2) можно рассматривать как сумму моментов сил dA относительно оси x . По известной из теоретической механики теореме о моменте равнодействующей можно написать

$$S_x = \int_A y dA = A \cdot y_c, \quad (3.3)$$

где A – площадь всей фигуры (равнодействующая);
 y_c – расстояние от центра тяжести фигуры до оси x .

Из формулы (3.3) следует формула для определения координаты центра тяжести

$$y_c = \frac{S_x}{A}, \quad (3.4)$$

Аналогично статический момент относительно оси y

$$S_y = \int_A x dA = A \cdot x_c, \quad (3.5)$$

откуда

$$x_c = \frac{S_y}{A}. \quad (3.6)$$

Из этих формул следует, что если x и y проходят через центр тяжести, фигуры, то статический момент относительно этих осей равен нулю. Такие оси называются **центрными осями**.

Если сечение можно представить в виде отдельных простых частей (прямоугольников, треугольников и т.д.), для которых известны положения центров тяжести, то в этом случае статический момент всего сечения можно получить как сумму статических моментов этих простых частей. Это непосредственно следует из свойств определенного интеграла.

Если сечение имеет ось симметрии, то последняя всегда проходит через центр тяжести, а потому статический момент относительно оси симметрии всегда равен нулю.

Для определения положения центра тяжести нужно провести вспомогательные оси координат x_B, y_B и разбить сложное сечение на простейшие части (рис. 3.2), положение центров тяжести которых известно, и вычислить положение центра тяжести фигуры x_0 и y_0 по ниже приведенным формулам.

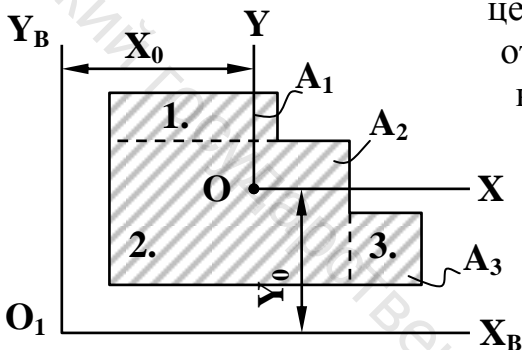


Рис. 3.2. Схема для определения положения центра тяжести сложного сечения

$$x_0 = \frac{S_{y_B}}{A} = \frac{\sum A_i \cdot x_i}{\sum A_i} = \frac{A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + A_3 \cdot x_3}{A_1 + A_2 + A_3} \quad (3.7)$$

$$y_0 = \frac{S_{x_B}}{A} = \frac{\sum A_i \cdot y_i}{\sum A_i} = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2 + A_3 \cdot y_3}{A_1 + A_2 + A_3} \quad (3.8)$$

Пример 3.1. Определить положение центра тяжести сечения (рисунок 3.3).

Решение. Разбиваем сечение на два прямоугольника. Проводим вспомогательные оси x и y . По формулам (3.7) и (3.8) получим:

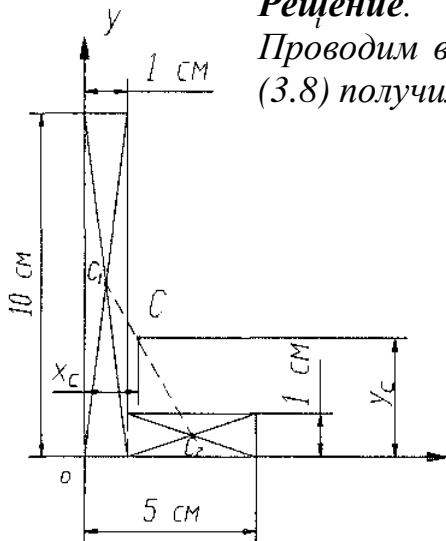


Рис. 3.3 Схема сечения к примеру 3.1

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2}{A_1 + A_2} = \frac{10 \cdot 1 \cdot 0,5 + 4 \cdot 1 \cdot 3}{10 + 4} = 1,21 \text{ см.}$$

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2}{A_1 + A_2} = \frac{10 \cdot 1 \cdot 5 + 4 \cdot 1 \cdot 0,5}{10 + 4} = 3,71 \text{ см.}$$

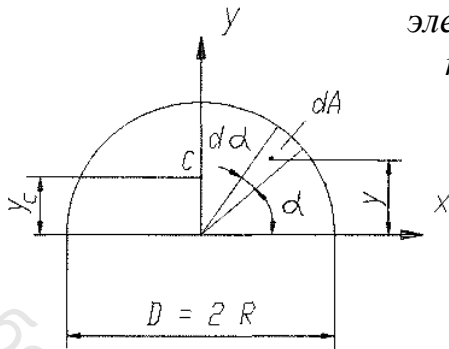
По этим координатам находим точку C - центр тяжести сечения

Пример 3.2. Определить положение центра тяжести сечения, имеющего форму полукруга (рис. 3.4).

Решение. Ось y является осью симметрии, следовательно, центр тяжести сечения

лежит на этой оси. Для определения его положения воспользуемся формулой (3.4).

Вычислим статический момент полукруга относительно оси x , выделив элементарный сектор. Его площадь равна площади треугольника с основанием $R \cdot d\alpha$ и высотой R : $dA = \frac{1}{2} \cdot R \cdot d\alpha \cdot R$, а ордината центра тяжести



$$= \frac{2}{3} \cdot R \cdot \sin \alpha; \quad \text{тогда}$$

$$S_x = \int_A y dA = \int_0^\pi \frac{2}{3} R \sin \alpha \cdot \frac{1}{2} R^2 d\alpha = \frac{2}{3} \cdot R$$

Рис. 3.4. Схема сечения к примеру 3.2

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{\frac{2}{3} \cdot R^3}{\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot R^2} = \frac{4}{3} \cdot \frac{R}{\pi} \approx 0,424 \cdot R.$$

и координата центра тяжести

3.2. Моменты инерции сечения

Осевым моментом инерции сечения относительно оси x называется сумма произведений элементарных площадок dA на квадрат их расстояний до данной оси, численно равная интегралу

$$I_x = \int_A y^2 dA \quad (3.9)$$

Аналогично относительно оси y

$$I_y = \int_A x^2 dA, \quad (3.10)$$

где y — расстояние от элементарной площадки dA до оси x (см. рисунок 3.1), x — расстояние от элементарной площадки dA до оси y .

Полярным моментом инерции сечения относительно данной точки (полюса) называется сумма произведений элементарных площадок dA на квадрат их расстояний до этой точки, определяемая интегралом вида

$$I_p = \int_A \rho^2 dA, \quad (3.11)$$

где ρ — расстояние от площадки dA до точки (полюса) (см. рис. 3.1), относительно которой вычисляется полярный момент инерции.

Осевой и полярный моменты инерции — величины всегда положительные, так как в формулы (3.9), (3.10) и (3.11) координаты произвольной площадки входят в квадрате.

Центробежным моментом инерции сечения относительно осей x и y называется сумма произведений элементарных площадок dA на их расстояния до этих осей, определяемая интегралом вида

$$I_{xy} = \int_A xy dA, \quad (3.12)$$

где x, y - расстояния от площадки dA до осей x и y .

Размерность моментов инерции – см^4 (м^4).

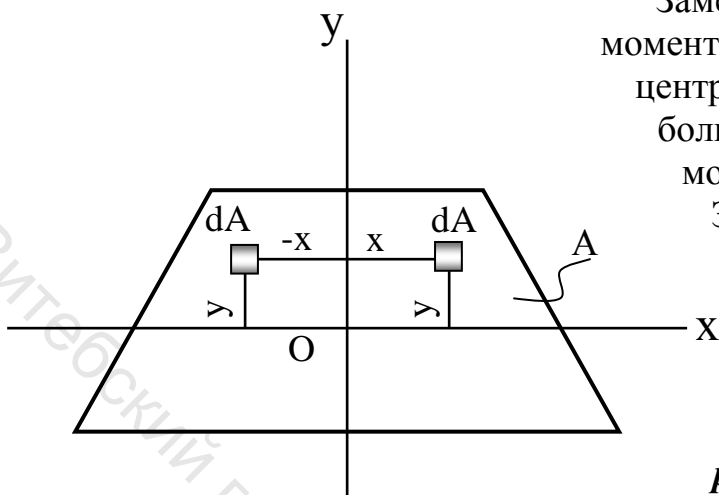


Рис. 3.5. Сечение осью симметрии

Заметим, что осевые и полярный моменты инерции всегда положительны, а центробежный момент может быть больше нуля, меньше нуля, а также может быть равен нулю.

Замечание: *если взаимно перпендикулярные оси x и y или одна из них являются осями симметрии фигуры, то относительно таких осей центробежный момент инерции равен нулю.* Для сечения,

показанного на рис. 3.5, центробежный момент инерции для пары симметрично расположенных площадок равен нулю.

Действительно, для симметричной фигуры всегда можно выделить два элемента ее площади (рис. 3.5), которые имеют одинаковые координаты y и равные, но противоположные по знаку абсциссы x . Суммируя выделенные элементы парами по всей площади сечения, получим нулевое значение центробежного момента инерции.

$$I_{xy} = \int_A xy dA = \int_{A_{\text{лев}}} (-x) y dA + \int_{A_{\text{прав}}} xy dA = 0$$

Легко доказать, что полярный момент инерции относительно какой-либо точки равен сумме осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей, проходящих через эту точку.

Из рисунка 3.1 видно, что $\rho^2 = x^2 + y^2$. Подставив это значение в выражение (3.11), получим $I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA$.

Следовательно,

$$I_p = I_x + I_y \tag{3.13}$$

3.3. Определение моментов инерции сечения относительно осей, параллельных центральным осям

На рис. 3.6 оси OX и OY – центральные. Следовательно, статические моменты S_x и S_y равны нулю. Пусть даны площадь сечения и моменты инерции относительно этих осей. Требуется найти моменты инерции относительно осей x_1 и y_1 , которые проведены параллельно центральным осям на расстояниях b и c от них. Из чертежа видно, что $X_1 = X + c$, $Y_1 = Y + b$. Следовательно,

$$I_{x_1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y + b)^2 dA = \int_A (y^2 + 2by + b^2) dA =$$

$$= \int_A y^2 dA + 2b \int_A y dA + b^2 \int_A dA = I_x + 2 \cdot b \cdot S_x + b^2 \cdot A.$$

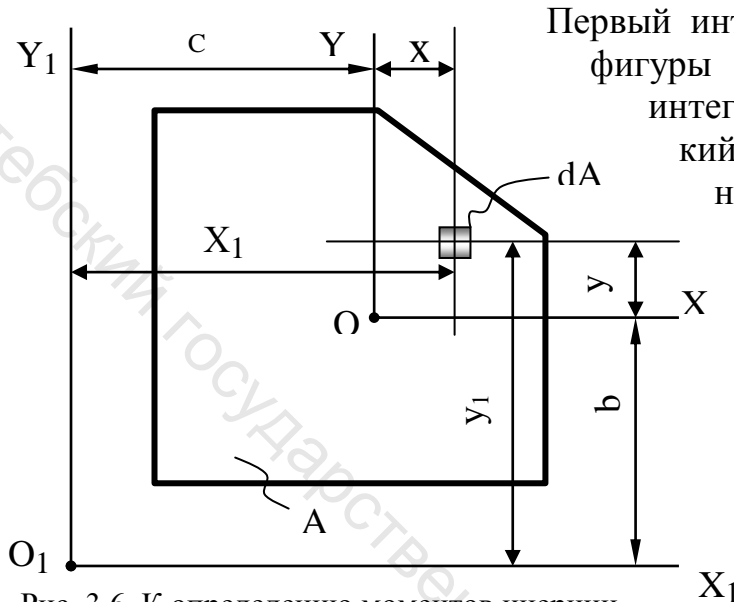


Рис. 3.6. К определению моментов инерции сечения относительно осей, параллельных центральным осям

относительно центральной оси, параллельной данной, плюс произведение площади фигуры на квадрат расстояния между осями.

Из формул (3.14) и (3.15) видно, что момент инерции относительно центральной оси меньше, чем момент инерции относительно любой нецентральной оси, параллельной первой.

Момент инерции относительно центральной оси называется *центральным моментом инерции*.

$$I_{x_1 y_1} = \int_A x_1 y_1 dA = \int_A (x + c)(y + b) dA = \int_A xy dA + c \int_A y dA +$$

$$+ b \int_A x dA + bc \int_A dA = I_{xy} + S_x + S_y + bcA = I_{xy} + b \cdot c \cdot A. \quad (3.16)$$

3.4 Моменты инерции простых сечений

1. Прямоугольник.

Как показано на рис. 3.7, элементарная площадка взята в виде бесконечно тонкой полоски. Поэтому в выражении для момента инерции сделан переход от интегрирования по площади к интегрированию по переменной y . За dA примем площадь бесконечно тонкого слоя $dA = b dy$. Тогда

Первый интеграл – это момент инерции I_x фигуры относительно оси x . Второй интеграл, представляющий статический момент относительно центральной оси x , равен нулю. Третий интеграл дает площадь сечения. Таким образом,

$$I_{x_1} = I + b^2 \cdot A, \quad (3.14)$$

Аналогично

$$I_{y_1} = I + c^2 \cdot A. \quad (3.15)$$

Момент инерции относительно любой оси равен моменту инерции

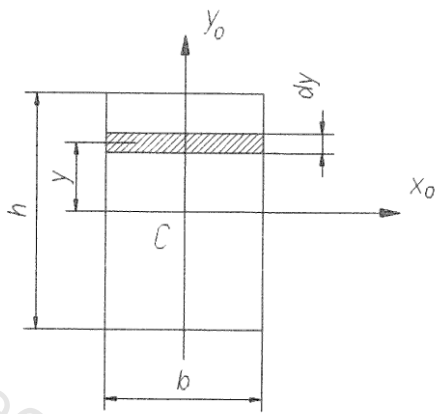


Рис. 3.7. Схема сечения

$$I_{x_0} = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy = \frac{b \cdot h^3}{12} \quad (3.17)$$

Аналогично,

$$I_{y_0} = \frac{h \cdot b^3}{12} \quad (3.18)$$

2. Круг.

Для круглого сечения (рис. 3.8) проще найти полярный момент

инерции относительно центра круга

$$I_p = \int_A \rho^2 dA. \quad \text{За } dA \text{ примем площадь}$$

бесконечно тонкого кольца толщиной $d\rho$:

$$dA = \pi \cdot \rho \cdot d\rho, \text{ тогда}$$

$$I_p = 2\pi \int_0^r \rho^3 d\rho = \frac{\pi \cdot r^4}{2}.$$

Следовательно,

$$I_p = \frac{\pi \cdot r^4}{2} = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \approx 0,1 \cdot d^4. \quad (3.19)$$

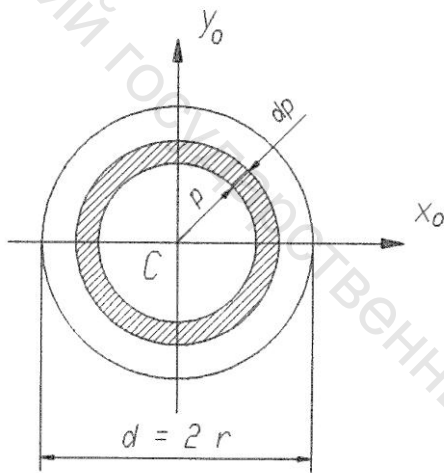


Рис. 3.8. Схема сечения

Теперь найдем I_{x_0} . Для круга, согласно формуле (3.13), получаем

$$I_p = 2 \cdot I_{x_0} = 2 \cdot I_{y_0},$$

откуда

$$I_{x_0} = I_{y_0} = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi \cdot r^4}{4} = \frac{\pi \cdot d^4}{64} \approx 0,05 \cdot d^4. \quad (3.20)$$

3. Кольцо.

Момент инерции кольца (рис. 3.9) получаем вычитанием из момента инерции сплошного круга момента инерции кругового отверстия.

$$I_{x_0} = \frac{\pi \cdot D^4}{64} - \frac{\pi \cdot d^4}{64} = \frac{\pi \cdot D^4}{64} \cdot (1 - \alpha^4), \quad (3.21)$$

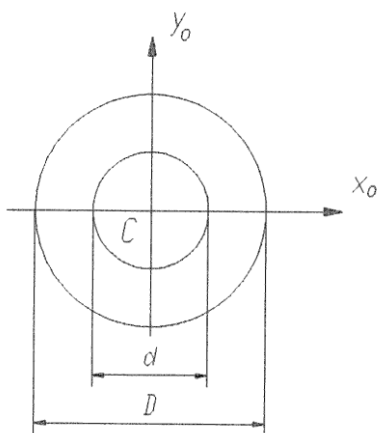


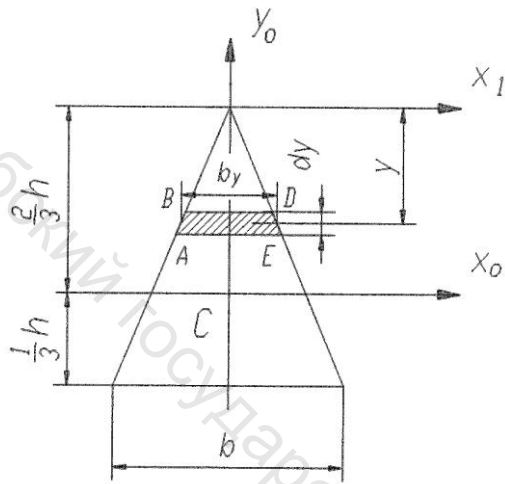
Рис. 3.9. Схема сечения

где $\alpha = \frac{d}{D}$. Аналогично полярный момент инерции

$$I_p = \frac{\pi \cdot D^4}{32} - \frac{\pi \cdot d^4}{32} = \frac{\pi \cdot D^4}{32} (1 - \alpha^4) \quad (3.22)$$

4. Равнобедренный треугольник.

Определим момент инерции относительно оси x_1 , параллельной основанию проходящей через вершину треугольника (рис. 3.10)



$$I_{x_1} = \int_A y^2 dA.$$

За dA примем площадь бесконечно тонкой трапеции $ABDE$, площадь которой можно считать равной площади прямоугольника

$$dA = b_y \cdot dy,$$

где b_y длина прямоугольника, которую легко получить из подобия треугольников

$$b_y = \frac{y}{h} \cdot b,$$

тогда

$$I_{x_1} = \frac{b}{h} \int_0^h y^3 dy = \frac{b \cdot h^3}{4}. \quad (3.23)$$

Определим момент инерции относительно центральной оси, для чего используем формулу (3.14):

$$I_{x_0} = I_{x_1} - b^2 \cdot A = \frac{b \cdot h^3}{4} - \left(\frac{2}{3} \cdot h\right)^2 \cdot \frac{b \cdot h}{2} = \frac{b \cdot h^3}{36}. \quad (3.24)$$

Аналогичным образом определяя момент инерции относительно центральной оси y_0 , получаем формулу

$$I_{y_0} = \frac{b^3 \cdot h}{48}. \quad (3.25)$$

3.5. Моменты инерции сложных фигур

Момент инерции сложной фигуры равен сумме моментов инерции ее составных частей

$$I_x = I_x^I + I_x^{II} + I_x^{III} + \dots \quad (3.26)$$

Это непосредственно следует из свойств определенного интеграла

$$\int_A y^2 dA = \int_{A_1} y^2 dA + \int_{A_2} y^2 dA + \dots,$$

где

$$A = A_1 + A_2 + \dots$$

Таким образом, для вычисления момента инерции сложной фигуры надо разбить ее на ряд простых фигур, вычислить моменты инерции этих фигур и затем просуммировать эти моменты инерции.

Данная теорема справедлива также и для центробежного момента инерции.

Моменты инерции прокатных сечений (двутавров, швеллеров, уголков и т.д.) приводятся в таблицах сортамента.

Пример 3.3. Определить положение центра тяжести, вычислить моменты инерции сечения (рис. 3.11) относительно вертикальной и горизонтальной центральных осей.

Решение. 1. Определяем положение центра тяжести.

Сечение имеет ось симметрии y , следовательно, она является центральной осью. Для определения координаты центра тяжести вводим вспомогательную ось x' и разбиваем сечение на две фигуры: прямоугольник - I и треугольник - II. Координату центра тяжести определяем по формуле

$$y_c = \frac{A_1 \cdot y_1 - A_2 \cdot y_2}{A_1 - A_2},$$

где A_1 - площадь первой фигуры (прямоугольника);

A_2 - площадь второй фигуры

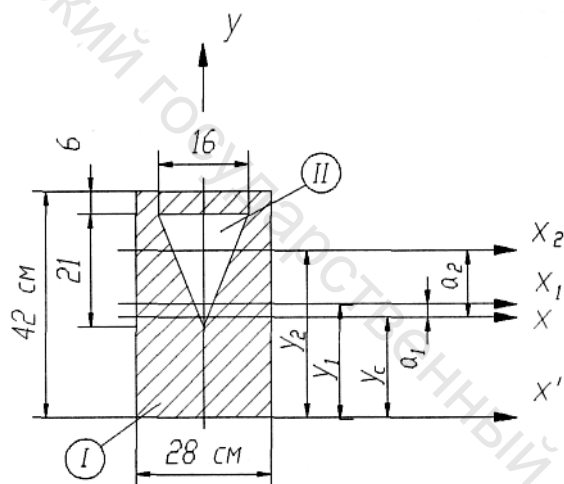


Рис. 3.11. Схема сложного сечения

(треугольника);

y_1 - расстояние от оси x' до центра тяжести прямоугольника;

y_2 - расстояние от оси x' до центра тяжести треугольника.

Знак минус в формуле говорит о том, что вторая фигура у нас вырез. Тогда:

$$A_1 = 42 \cdot 28 = 1176 \text{ см}^2, \quad A_2 = \frac{1}{2} \cdot 16 \cdot 21 = 168 \text{ см}^2,$$

$$y_1 = \frac{1}{2} \cdot 42 = 21 \text{ см}, \quad y_2 = 42 - 6 - \frac{1}{3} \cdot 21 = 29 \text{ см}.$$

$$y_c = \frac{1176 \cdot 21 - 168 \cdot 29}{1176 - 168} = 19,67 \text{ см}.$$

2. Вычисляем моменты инерции относительно центральных осей x и y :

$$I_x = I_x^I - I_x^{II},$$

$$I_y = I_y^I - I_y^{II}.$$

Для вычисления момента инерции прямоугольника I_x^I относительно оси x используем формулу (3.14)

$$I_x^I = I_{x_1}^I + a_1^2 \cdot A_1,$$

где $I_{x_1}^I$ - момент инерции прямоугольника относительно собственной центральной оси x_1 ;

a_1 - расстояние от оси x до центра тяжести прямоугольника. Тогда по формуле (3.17)

$$I_{x_1}^I = \frac{28 \cdot 42^3}{12} = 172872 \text{ см}^4,$$

$$a_1 = 21 - 19,67 = 1,33 \text{ см},$$

$$I_x^I = 172872 + 1,33^2 \cdot 1176 = 174952 \text{ см}^4.$$

Аналогично вычисляем момент инерции треугольника относительно оси x

$$I_x^{II} = I_{x_2}^{II} + a_2^2 \cdot A_2.$$

По формуле (3.24):
$$I_{x_2}^{II} = \frac{16 \cdot 21^3}{36} = 4116 \text{ см}^4,$$

$$a_2 = 29 - 19,67 = 9,33 \text{ см},$$

$$I_x^{II} = 4116 + 9,33^2 \cdot 168 = 18740 \text{ см}^4.$$

Суммарный момент инерции относительно оси x

$$I_x = 174952 - 18740 = 1562212 \text{ см}^4.$$

Для вычисления момента инерции относительно оси y используем формулы (3.18) и (3.25):

$$I_y = \frac{42 \cdot 28^3}{12} - \frac{16^3 \cdot 21}{48} = 76832 - 1792 = 75040 \text{ см}^4.$$

3.6. Определение моментов инерции сечения при повороте осей координат

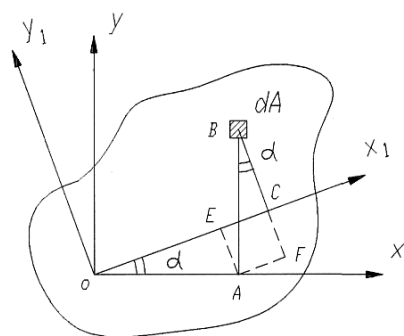


Рис. 3.12. К определению моментов инерции сечения при повороте осей координат

Пусть даны площадь и моменты инерции сечения относительно осей x и y . И даны новые оси x_1 и y_1 , повернутые на угол α относительно исходных осей (рис. 3.12). Пусть $I_x > I_y$ и положительный угол α отсчитывается от оси x против часовой стрелки. Требуется найти моменты инерции относительно этих осей. Новые координаты выражаются через старые следующим образом:

$$x_1 = OC = OE + EC = OE + AE = x \cos \alpha + y \sin \alpha, \quad (3.27)$$

$$y_1 = BC = BF - AE = y \cos \alpha - x \sin \alpha. \quad (3.28)$$

Теперь определим моменты инерции относительно осей x_1 и y_1 :

$$I_{x_1} = \int_A y_1^2 dA = \int_A (y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha)^2 dA =$$

$$= \int_A y^2 \cos^2 \alpha \cdot dA - 2 \int_A x \cdot y \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha \cdot dA + \int_A x^2 \cdot \sin^2 \alpha \cdot dA,$$

или

$$I_{x_1} = I_x \cdot \cos^2 \alpha + I_y \cdot \sin^2 \alpha - I_{xy} \cdot \sin 2\alpha; \quad (3.29)$$

Аналогично

$$I_{y_1} = \int_A (x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha)^2 dA = I_x \cdot \sin^2 \alpha + I_y \cos^2 \alpha + I_{xy} \sin 2\alpha; \quad (3.30)$$

$$I_{x_1 y_1} = \int_A (x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha)(y \cdot \cos \alpha - x \cdot \sin \alpha) dA =$$

$$= \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha. \quad (3.31)$$

Складывая (3.29) и (3.30), получаем

$$I_{x_1} + I_{y_1} = I_x + I_y = I_P. \quad (3.32)$$

Вычитая (3.30) из (3.29), получаем

$$I_{x_1} - I_{y_1} = (I_x - I_y) \cdot \cos 2\alpha - 2I_{xy} \cdot \sin 2\alpha. \quad (3.33)$$

Формула (3.32) показывает, что сумма моментов инерции относительно любых взаимно перпендикулярных осей не меняется при их повороте.

Формула (3.33) может служить для вычисления центробежного момента инерции относительно осей x , y по известным осевым моментам инерции относительно осей x , y и x_1 , y_1 .

3.7. Главные оси инерции и главные моменты инерции

При изменении угла величины I_{x_1} , I_{y_1} и $I_{x_1 y_1}$ изменяются. Найдем значение угла, при котором I_{x_1} и I_{y_1} имеют экстремальные значения, для чего возьмем от I_{x_1} и I_{y_1} первую производную по α и приравняем ее нулю:

$$\frac{dI_{x_1}}{d\alpha} = -2I_x \cdot \cos \alpha_0 \cdot \sin \alpha_0 + 2I_y \cdot \sin \alpha_0 \cdot \cos \alpha_0 - 2I_{xy} \cdot \cos 2\alpha_0 = 0,$$

или

$$-(I_x - I_y) \cdot \sin 2\alpha_0 - 2I_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}. \quad (3.34)$$

Эта формула определяет положение двух осей, относительно одной из которых осевой момент инерции максимален, а относительно другой - минимален.

Такие оси называются *главными*. Моменты инерции относительно главных осей называются *главными моментами инерции*.

Если $\alpha_0 > 0$, то оси поворачиваются против часовой стрелки. Ось максимума всегда составляет меньший угол с той из осей, относительно которой момент инерции имеет большее значение.

Величину главных моментов инерции найдем из формул (3.29) и (3.30), подставив в них значение α_0 из формулы (3.34), при этом используем известные формулы тригонометрии для функций двойных углов.

После преобразований получим следующую формулу для определения главных моментов инерции:

$$I_{\frac{\max}{\min}} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(I_x - I_y)^2 + 4I_{xy}^2}. \quad (3.35)$$

Исследуя вторую производную $\frac{d^2 I_{x_1}}{d\alpha^2}$, можно установить, что для данного случая ($I_x > I_y$) максимальный момент инерции I_{\max} имеет место относительно главной оси, повернутой на угол α_0 по отношению к оси x , а минимальный момент инерции - относительно другой перпендикулярной оси. В большинстве случаев в этом исследовании нет необходимости, так как по конфигурации сечений видно, какая из главных осей соответствует максимуму момента инерции. Кроме формулы (3.35), для определения главных моментов инерции можно пользоваться также формулами (3.29) и (3.30). При этом сам собой решается вопрос: относительно какой главной оси получается максимальный момент инерции и относительно какой оси минимальный.

Покажем теперь, что относительно главных осей центробежный момент инерции равен нулю.

Действительно, приравнявая $I_{x_1 y_1}$ по формуле (3.31) нулю, получаем

$$\frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha_0 + I_{xy} \cos 2\alpha_0 = 0,$$

откуда для $\operatorname{tg} 2\alpha_0$ вновь получается формула (3.34).

Таким образом, главными осями инерции называются оси, обладающие следующими свойствами:

1. Центробежный момент инерции относительно этих осей равен нулю.

2. Моменты инерции относительно главных осей имеют экстремальные значения (относительно одной - максимум, относительно другой - минимум).

Главные оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются *главными центральными осями инерции*.

Во многих случаях удается сразу определить положение главных центральных осей. Если фигура имеет ось симметрии, то она является одной из главных центральных осей, вторая проходит через центр тяжести сечения перпендикулярно первой. Сказанное следует из того обстоятельства, что относительно оси симметрии и любой оси, ей перпендикулярной, центробежный момент инерции равен нулю.

Используя формулы (3.29) - (3.31), можно показать, что в случае, если два главных центральных момента инерции сечения равны между собой, то у этого сечения любая центральная ось является главной, и все главные центральные моменты инерции одинаковы (круг, квадрат, шестиугольник, равносторонний треугольник).

Действительно, предположим, что для какого-то сечения оси x и y - главные центральные оси и, кроме того, $I_x = I_y$. Тогда из формул (3.29) и (3.30) получим, что $I_x = I_y = I_{x_1} = I_{y_1}$, а по формуле (3.31) убедимся, что $I_{x_1 y_1} = 0$, т.е. любые оси x_1 и y_1 являются главными центральными осями инерции такой фигуры.

В заключение введем понятие *радиуса инерции и момента сопротивления* сечения относительно координатных осей x и y .

Радиусы инерции - i_x и i_y определяются по формулам:

$$i_x = \sqrt{\frac{I_x}{F}}; i_y = \sqrt{\frac{I_y}{F}}. \quad (3.36)$$

Размерность радиуса инерции [см, м].

Осевой момент сопротивления — отношение момента инерции относительно оси к расстоянию от нее до наиболее удаленной точки сечения.

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} \quad (3.37)$$

Размерность *момента сопротивления* [см³, м³].

Особенно важны моменты сопротивления относительно главных центральных осей:

▪ прямоугольник:

$$W_x = \frac{I_x}{h/2} = \frac{bh^2}{6}; \quad W_y = \frac{I_y}{b/2} = \frac{b^2h}{6}; \quad (3.38)$$

▪ круг:

$$W_x = W_y = \frac{I_x}{R} = \frac{\pi \cdot R^3}{4} = \frac{\pi \cdot D^3}{32}, \quad (3.39)$$

трубчатое сечение (кольцо): $W_x = W_y = \frac{I_x}{D/2} = \frac{\pi \cdot D^3}{32} (1 - \alpha^3)$ (3.40)

где $\alpha = d / D$.

Полярный момент сопротивления — отношение полярного момента инерции к расстоянию от полюса до наиболее удаленной точки сечения: $W_p = \frac{J_p}{\rho_{\max}}$.

Для круга

$$W_p = \frac{\pi \cdot R^3}{2} = \frac{\pi D^3}{16}. \quad (3.41)$$

Пример 3.4. Вычислить центробежный момент инерции уголка 140x90x10 относительно центральных осей x и y (рис. 3.13).

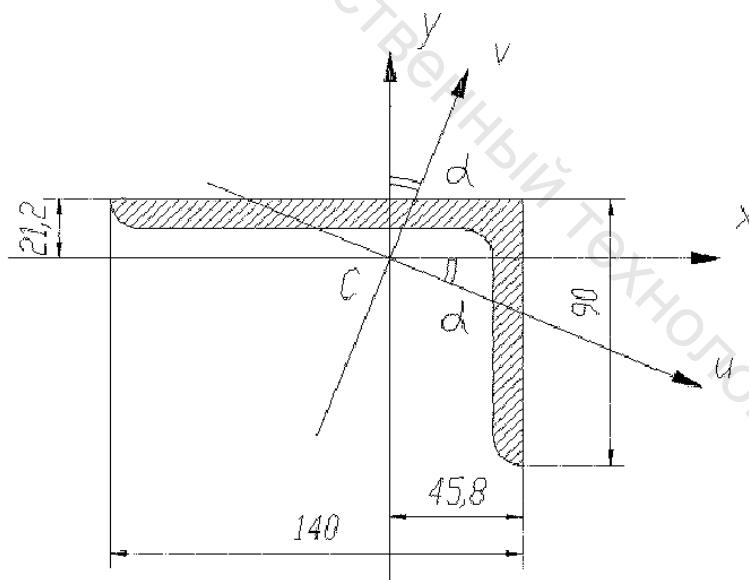


Рис. 3.13. Уголок

Решение. Для определения центробежного момента инерции воспользуемся формулой (3.31), при этом за исходные оси примем главные центральные оси u и v , относительно которых центробежный момент инерции

I_{uv} равен нулю.

Из таблиц сортамента определяем:

$$\begin{aligned} I_x &= 146 \text{ см}^4, \\ I_y &= 444 \text{ см}^4, \\ I_u &= 85,5 \text{ см}^4, \end{aligned}$$

$$\text{tga} = 0,409.$$

Зная tga , находим угол $\alpha = 22,24^\circ$.

По формуле (3.32) вычисляем момент инерции относительно второй главной центральной оси v :

$$I_v = I_x + I_y - I_u = 146 + 444 - 85,5 = 504,5 \text{ см}^4.$$

По формуле (3.31): $I_{xy} = \frac{I_u - I_v}{2} \sin 2\alpha + I_{uv} \cos 2\alpha$.

$$I_{xy} = \frac{85,5 - 504,5}{2} \sin(2 \cdot 22,24^\circ) = -146,8 \text{ см}^4.$$

Пример 3.5. Вычислить главные центральные моменты инерции и главные радиусы инерции сечения (рис. 3.14).

Решение. Определяем координаты центра тяжести, для чего проводим вспомогательные оси x' и y' и разбиваем сечение на две фигуры: швеллер(I) и уголок (II), для которых все необходимые данные находим в таблицах сортамента.

Фигура	Площадь сечения, $A, \text{см}^2$	Положение Центра тяжести		Моменты инерции относительно собственных центральных осей, см^4	
		$x_0, \text{см}$	$y_0, \text{см}$	горизонтальной	вертикальной
Швеллер №20а	25,2	2,28	-	1670	139
Уголок 140×90×10	22,2	4,58	2,12	146	444

Координаты центра тяжести сечения определяем по формулам:

$$x_c = \frac{A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2}{A_1 + A_2};$$

$$y_c = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2}{A_1 + A_2},$$

где A_1 - площадь первой фигуры (швеллера);

A_2 - площадь второй фигуры (уголка);

x_1 - расстояние от оси y' до центра тяжести швеллера;

x_2 - расстояние от оси y' до центра тяжести уголка;

y_1 - расстояние от оси x' до центра тяжести швеллера;

y_2 - расстояние от оси x' до центра тяжести уголка.

$$x_1 = 14 + 2,28 = 16,28 \text{ см},$$

$$x_2 = 14 - 4,58 = 9,42 \text{ см};$$

$$y_1 = 10 \text{ см},$$

$$y_2 = 20 - 2,12 = 17,88 \text{ см},$$

$$x_c = \frac{25,2 \cdot 16,28 + 22,2 \cdot 9,42}{25,2 + 22,2} = 13,07 \text{ см};$$

$$y_c = \frac{25,2 \cdot 10 + 22,2 \cdot 17,88}{25,2 + 22,2} = 13,69 \text{ см}.$$

По этим данным наносим точку C - центр тяжести сечения и проводим вертикальную и горизонтальную центральные оси x_c и y_c .

Вычисляем моменты инерции относительно этих осей:

$$I_{x_c} = I_{x_c}^I + I_{x_c}^{II},$$

$$I_{y_c} = I_{y_c}^I + I_{y_c}^{II},$$

Для вычисления момента инерции швеллера $I_{x_c}^I$ используем формулу (3.14):

$$I_{x_c}^I = 1670 + (-3,69)^2 \cdot 25,2 = 2013 \text{ см}^4,$$

где $I_{x_c} = 1670 \text{ см}^4$ момент инерции швеллера относительно собственной центральной оси x_1 ;

$A_1 = 25,2 \text{ см}^2$ - площадь сечения швеллера;

$a_1 = 10 - 13,69 = -3,69 \text{ см}$ - координата центра тяжести швеллера по оси y_c .

Аналогично находим момент инерции уголка

$$I_{x_c}^{II} = 146 + (4,19)^2 \cdot 22,2 = 536 \text{ см}^4,$$

где $I_{x_2} = 146 \text{ см}^4$ момент инерции уголка относительно собственной центральной оси x_2 ,

$A_2 = 22,2 \text{ см}^2$ - площадь сечения уголка;

$a_2 = 17,88 - 13,69 = 4,19 \text{ см}$ - координата центра тяжести уголка по

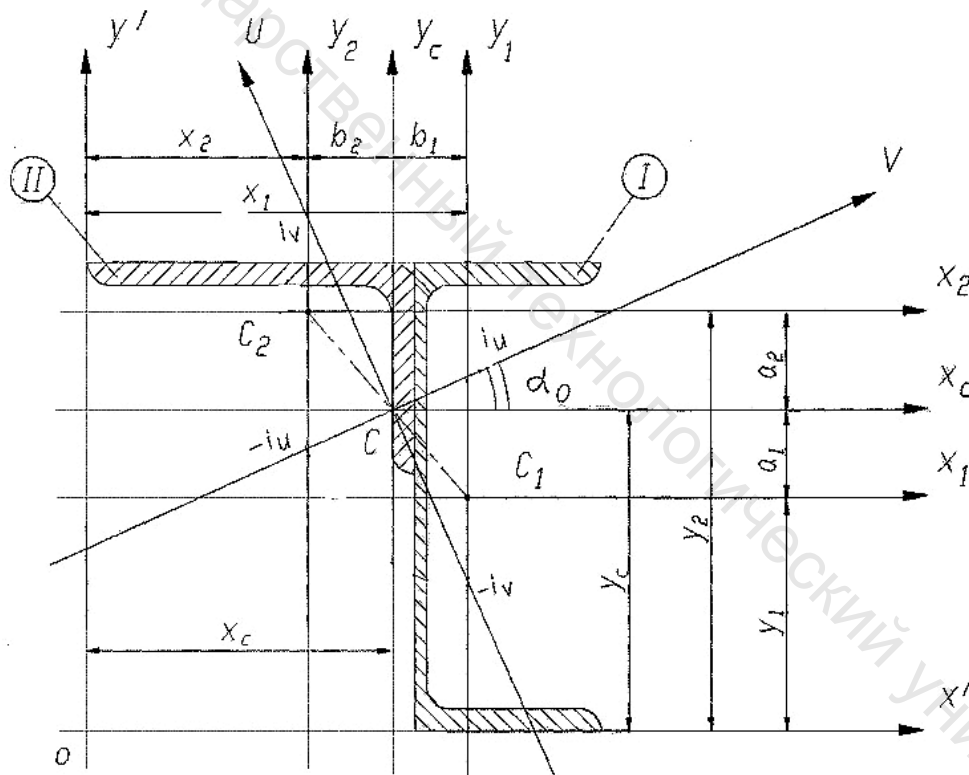


Рис. 3.14. Сложное сечение

оси y_c . Суммарный момент инерции сечения относительно оси x_c равен

$$I_{x_c} = 2013 + 536 = 2549 \text{ см}^4.$$

Точно так же вычисляем момент инерции сечения относительно оси y_c .

Для швеллера

$$I_{y_c}^I = 139 + (3,21)^2 \cdot 25,2 = 399 \text{ см}^4,$$

где $b_1 = 16,28 - 13,07 = 3,21$ см - координата центра тяжести швеллера по оси x_c .

Для уголка

$$I_{y_c}^{\text{II}} = 444 + (-3,65)^2 \cdot 22,2 = 740 \text{ см}^4,$$

где $b_2 = 9,42 - 13,07 = -3,65$ см - координата центра тяжести уголка по оси x_c .

Суммарный момент инерции сечения относительно оси y_c равен

$$I_{y_c} = 399 + 740 = 1139 \text{ см}^4.$$

Вычисляем центробежный момент инерции сечения относительно осей x_c и y_c . Для этого воспользуемся формулой (3.16). Так как швеллер имеет горизонтальную ось симметрии x_1 , то собственные центральные оси швеллера x_1 и y_1 являются главными осями, и поэтому первое слагаемое в формуле (3.16) для швеллера равно нулю.

Для уголка собственные центральные оси, параллельные осям x_c и y_c , т.е. оси x_2 и y_2 , не являются главными осями, поэтому первое слагаемое в формуле (3.16) для уголка не равно нулю. Его следует вычислить так же, как это было сделано в примере 3.4. Там было получено значение центробежного момента инерции такого же уголка относительно осей x и y , равное $I_{xy} = -146,8 \text{ см}^4$.

Следовательно, центробежный момент инерции всего сечения будет равен $I_{x_c y_c} = [0 + (-3,69)(3,21) \cdot 25,2] + [-146,8 + (4,19)(-3,65) \cdot 22,2] = -785 \text{ см}^4$.

Определяем положение главных центральных осей по формуле (3.34):

$$\operatorname{tg} 2\alpha_0 = -\frac{2I_{x_c y_c}}{I_{x_c} - I_{y_c}} = -\frac{2(-785)}{2549 - 1139} = 1,113,$$

$$\alpha_0 = 24,03^\circ.$$

Отложим этот угол (против часовой стрелки) и проведем главные центральные оси u и v . Если бы α_0 получился со знаком «минус», то главные центральные оси были бы повернуты относительно осей x_c и y_c по ходу часовой стрелки.

Вычисляем главные центральные моменты инерции по формуле (3.35)

$$I_{\frac{\max}{\min}} = \frac{2549 + 1139}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(2549 - 1139)^2 + 4 \cdot (-785)^2} = 1844 \pm 1015.$$

Следовательно,

$$I_v = I_{\max} = 2899 \text{ см}^4, \quad I_u = I_{\min} = 789 \text{ см}^4.$$

Находим главные радиусы инерции по формулам (3.36):

$$i_v = i_{\max} = \sqrt{\frac{2899}{47,4}} = 7,82 \text{ см}, \quad i_u = i_{\min} = \sqrt{\frac{789}{47,4}} = 4,08 \text{ см}.$$

Пример 3.6. Определить центробежный момент инерции прямоугольного треугольника относительно осей, совпадающих с его катетами (рис. 3. 15).

Решение. Центробежный момент вычисляем по формуле

$$I_{x_1 y_1} = \int_A x_1 y_1 dA.$$

За элементарную площадь примем площадь полоски AB

$$dA = c \cdot dy.$$

Абсцисса x_1 центра тяжести

полоски AB равна $x_1 = \frac{c}{2}.$

Но из условия подобия треугольников DEK и DAB следует

$$c = \frac{b}{h}(h - y_1).$$

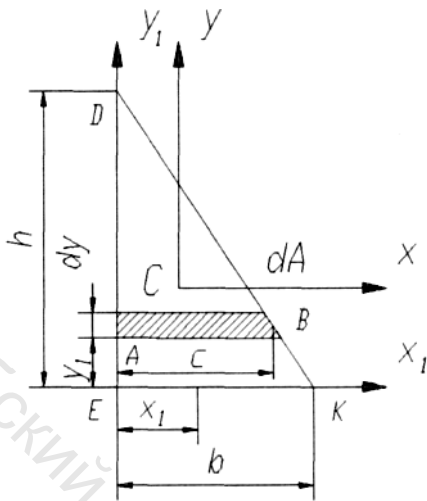


Рис. 3.15. Прямоугольный треугольник

Таким образом,
$$I_{x_1 y_1} = \frac{b^2}{2h^2} \int_0^h (h - y_1)^2 y_1 dy = \frac{b^2 h^2}{24}.$$

Для определения центробежного момента инерции относительно центральных осей воспользуемся формулой (3.16)

$$I_{xy} = I_{x_1 y_1} - A \frac{h}{3} \cdot \frac{b}{3} = -\frac{b^2 h^2}{72}.$$

Контрольные вопросы

- 3.1. Для чего нужно знать геометрические характеристики сечений?
- 3.2. От чего зависят знак и величина статического момента?
- 3.3. Что называется центральной осью сечения?
- 3.4. Что такое центр тяжести сечения?
- 3.5. Покажите, что ось симметрии является центральной осью.
- 3.6. Как определить положение центра тяжести сечения по известным его статическим моментам и площади?
- 3.7. Как связаны между собой полярный и осевые моменты инерции фигуры?
- 3.8. От чего зависят знак и величина центробежного момента инерции?
- 3.9. Какие оси называются главными осями инерции?
- 3.10. Покажите, что ось симметрии является одной из главных осей инерции.
- 3.11. Как связаны моменты инерции фигуры относительно параллельных координатных осей? Как упрощается эта связь, если одна из осей центральная?
- 3.12. Полярный момент инерции круга $I_p = \frac{\pi D^4}{32}$. Чему равен момент инерции круга относительно его центральной оси?
- 3.13. Воспользовавшись выражением момента инерции круга относительно

его центральных осей и свойством аддитивности, вычислить момент инерции для кольца с наружным и внутренним диаметром D и d соответственно.

3.14. Относительно каких осей осевые моменты инерции принимают экстремальные значения? Чему равны эти значения?

3.15. Для квадрата, показанного на рис. 3.16 поставьте знак ($<$, $>$, $=$) в выражении $I_x I_y$.

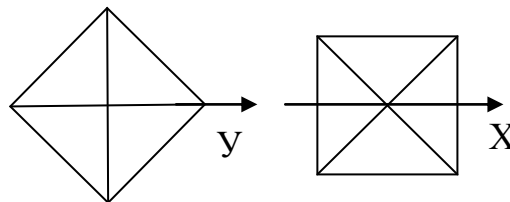


Рис. 3.16

Витебский государственный технологический университет

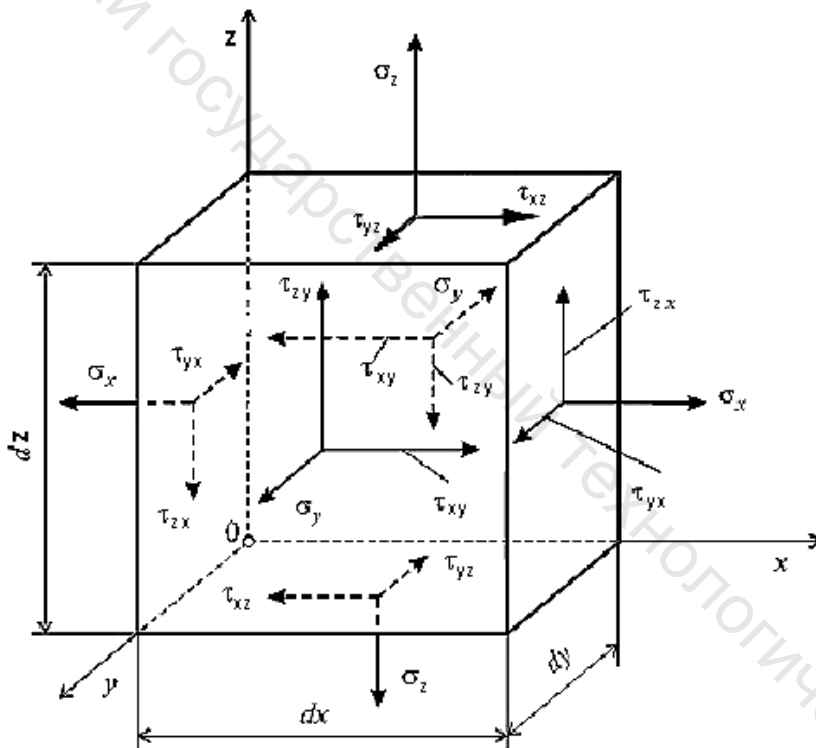
ГЛАВА 4

ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ. ГИПОТЕЗЫ ПРОЧНОСТИ

Понятие напряжения в точке тела связано с площадкой, проходящей через данную точку. Однако через точку тела можно провести бесчисленное множество площадок (секущих плоскостей).

Совокупность всех нормальных и касательных напряжений, действующих по всем площадкам, проведенным через данную точку, называется напряженным состоянием в точке.

Для изучения напряженного состояния в точке поступают следующим образом. Вокруг точки вырезают бесконечно близкими сечениями элементарный прямоугольный параллелепипед. Считается, что грани параллелепипеда



(площадки) проходят через рассматриваемую точку. Таким образом, исходными являются три взаимно перпендикулярные площадки с действующими на них напряжениями.

Нормаль к площадке определяет индекс соответствующего нормального напряжения. Первый индекс у касательного напряжения указывает на ось, параллельно которой оно направлено, а второй индекс ука-

Рис. 4.1. Напряжение на гранях элемента

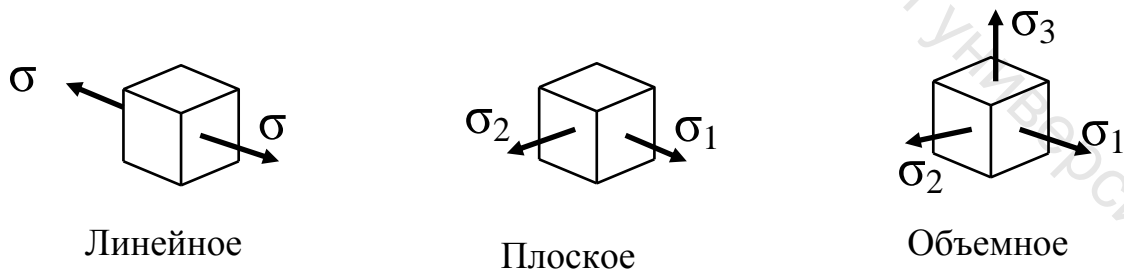


Рис. 4.2 Напряженные состояния, представленные главными напряжениями

зывает на нормаль к площадке, по которой действует это напряжение (рис. 4.1).

Напряженные состояния делятся на три вида (рис. 4.2): линейное (одноосное), плоское (двухосное) и объемное (трехосное). В дальнейшем мы будем рассматривать плоское напряженное состояние и, как частный случай, линейное напряженное состояние.

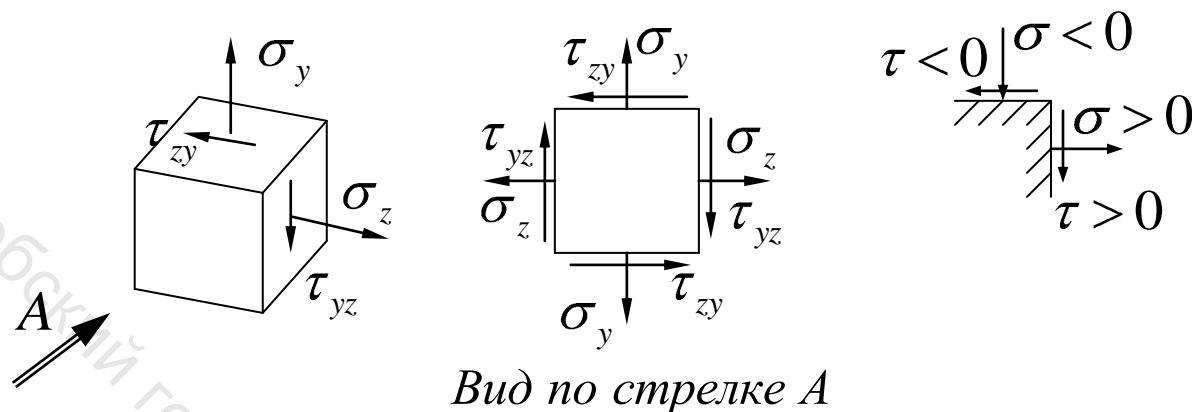


Рис. 4.3. Правило знаков для напряжений

Напряженное состояние называется плоским, если в нем есть только одна площадка, свободная от напряжений.

На рис. 4.3 показано правило знаков для напряжений: нормальное напряжение положительно, если оно растягивающее, касательное напряжение положительно, если оно стремится повернуть элемент по часовой стрелке.

4.1. Закон парности касательных напряжений

Закон гласит: *касательные напряжения, действующие на взаимно перпендикулярных площадках, равны по величине и противоположны по знаку.*

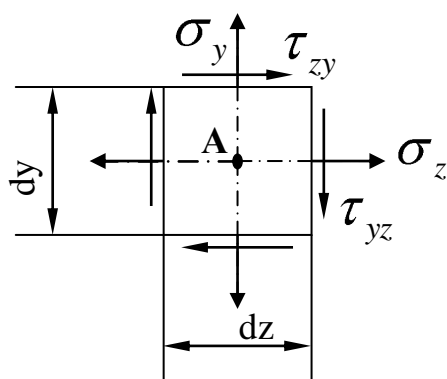


Рис. 4.4. Напряжение на гранях элемента

Для доказательства этого примем, что касательные напряжения на обеих площадках положительны (смотри рис. 4.4). Так как выделенный элемент напряженного состояния находится в равновесии, то составим уравнение моментов относительно точки А.

$$\sum m_A = 0;$$

$$2\tau_{yz} \cdot dy \cdot dx \cdot \frac{dz}{2} + 2\tau_{zy} \cdot dz \cdot dx \cdot \frac{dy}{2} = 0,$$

откуда следует

$$\tau_{zy} = -\tau_{yz}. \tag{4.1}$$

Заметим, что размер элемента, перпендикулярный плоскости чертежа (толщина), равен dx . Поэтому площади элемента, по которым действуют элементарные силы – $dydx$ и $dzdx$.

4.2. Нормальные и касательные напряжения, действующие по наклонным площадкам плоского напряженного состояния

Пусть заданы напряжения на двух взаимно перпендикулярных



Рис. 4.5. Элементарная призма и напряжения ее гранях-площадках

площадках. Поставим задачу найти напряжения σ_α и τ_α по наклонной площадке, нормаль к которой составляет угол α к оси z (ось z есть нормаль к вертикальной площадке). На приведенном рис. 4.5 все касательные напряжения показаны положительными, поэтому в дальнейшем будем делать подстановку с учетом (4.1) $\tau_{zy} = -\tau_{yz}$.

Для определения искомых напряжений разрежем параллелепипед по наклонной площадке – получим трехгранную призму. Соотношения между площадками имеют вид: $dA_z = dA \cdot \cos \alpha$, $dA_y = dA \cdot \sin \alpha$. Так как призма находится в равновесии, то составим уравнение проекций сил на нормаль n .

$$\sum F_n = 0, \sigma_\alpha \cdot dA - \sigma_y \cdot dA_y \cdot \sin \alpha - \tau_{zy} \cdot dA_y \cdot \cos \alpha - \sigma_z \cdot dA_z \cdot \cos \alpha + \tau_{yz} \cdot dA_z \cdot \sin \alpha = 0.$$

После преобразований получим

$$\sigma_\alpha = \sigma_z \cdot \cos^2 \alpha + \sigma_y \cdot \sin^2 \alpha - \tau_{yz} \cdot \sin 2\alpha. \quad (4.2)$$

Подставим вместо α в (4.2) $\alpha + 90^\circ$, получим

$$\sigma_{\alpha+90^\circ} = \sigma_z \cdot \sin^2 \alpha + \sigma_y \cdot \cos^2 \alpha + \tau_{yz} \cdot \sin 2\alpha. \quad (4.3)$$

Сложив выражения (4.2) и (4.3) получим

$$\sigma_\alpha + \sigma_{\alpha+90^\circ} = \sigma_z + \sigma_y. \quad (4.4)$$

Итак, сумма нормальных напряжений, действующих на двух взаимно перпендикулярных площадках есть величина постоянная.

Касательное напряжение τ_α получим из уравнения проекций $\sum F_t = 0$.

$$\tau_{\alpha} = \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{yz} \cdot \cos 2\alpha \quad (4.5)$$

4.3. Главные площадки и главные напряжения

Площадки, по которым действуют экстремальные нормальные напряжения (max, min) называются главными площадками, а сами напряжения называются главными.

Положение главных площадок найдем из условия равенства нулю первой производной от σ_{α} по α из выражения (4.2). Условие экстремума -

$$\frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} = 0, \text{ или}$$

$$\frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} = -\sigma_z \cdot \sin 2\alpha + \sigma_y \cdot \sin 2\alpha - \tau_{yz} \cdot 2 \cdot \cos 2\alpha = 0. \quad (4.6)$$

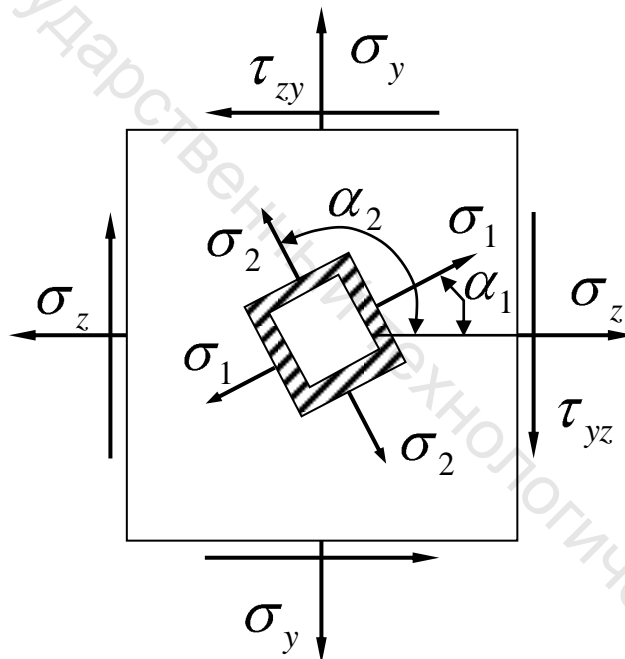


Рис.4.6. Две группы напряжений определяют одно и то же напряженное состояние в точке

Решим уравнение (4.6) относительно угла

$$\operatorname{tg} 2\alpha_{1,2} = -\frac{2\tau_{yz}}{\sigma_z - \sigma_y} \quad (4.7)$$

Полученное значение тангенса дает два значения для угла α , отличающихся на 90° ($\alpha_1 = \alpha$, $\alpha_2 = \alpha + 90^\circ$), следовательно, главные площадки взаимно перпендикулярны.

Индекс 1 приписывают наибольшему главному напряжению, индекс 2 – наименьшему (алгебраически, то есть с учетом знака).

Свойство главных площадок: на главных площадках касательные напряжения равны нулю.

Замечание: теория моментов инерции и теория плоского напряженного состояния имеют полную математическую аналогию. Ниже в таблице 4.1 дано сопоставление формул.

Таблица 4.1 Сопоставление формул

Моменты инерции	Плоское напряженное состояние
$I_{x_1} = I_x \cos^2 \alpha + I_y \sin^2 \alpha - I_{xy} \sin 2\alpha.$	$\sigma_\alpha = \sigma_z \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha - \tau_{yz} \cos 2\alpha.$
$I_{x_1 y_1} = \frac{I_x - I_y}{2} \sin 2\alpha + I_{xy} \cos 2\alpha.$	$\tau_\alpha = \frac{\sigma_z - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_{yz} \cos 2\alpha.$
$tg 2\alpha_{1,2} = -\frac{2I_{xy}}{I_x - I_y}.$	$tg 2\alpha_{1,2} = -\frac{2\tau_{yz}}{\sigma_z - \sigma_y}.$

4.4. Графическое представление формул плоского напряженного состояния - круг Мора

Рассмотрим плоское напряженное состояние, заданное главными площадками (рисунок 4.7). Преобразуем выражение (4.2) для σ_α , заменив $\cos^2 \alpha$ и $\sin^2 \alpha$ через $\cos 2\alpha$ по формулам

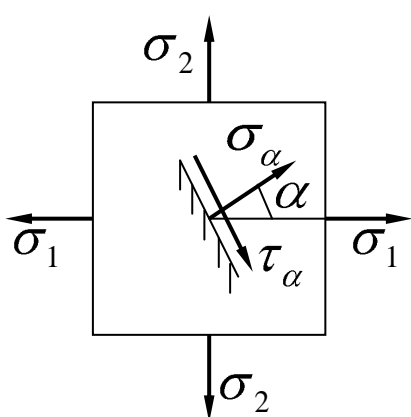


Рис. 4.7. Напряжение на гранях элемента

$$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}, \quad \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2}.$$

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= \sigma_1 \cos^2 \alpha + \sigma_2 \sin^2 \alpha = \\ &= \sigma_1 \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} + \sigma_2 \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} = \\ &= \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Из выражения (4.5) по аналогии получим

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha \quad (4.9)$$

Теперь запишем параметрическое уравнение окружности радиуса R с центром, лежащим на оси x .

$$\begin{aligned} x &= a + R \cos \varphi, \\ y &= R \sin \varphi. \end{aligned} \quad (4.10)$$

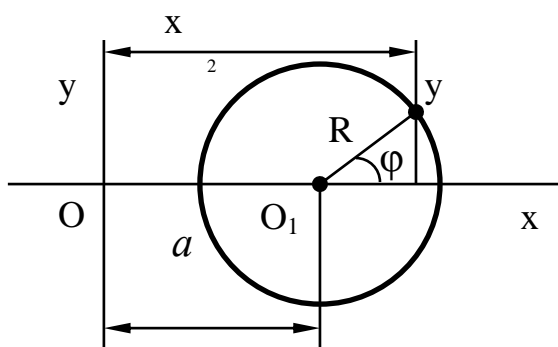
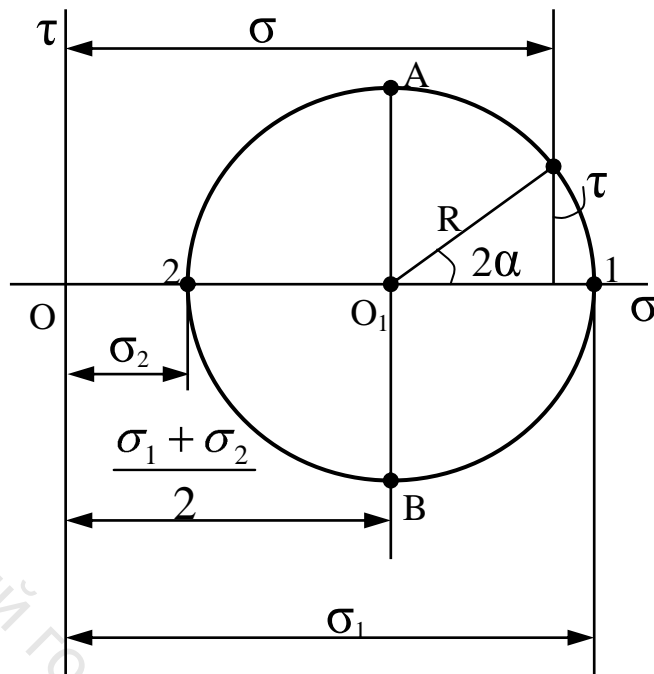


Рис. 4.8. Окружность, построенная по уравнениям (4.10)

Сопоставление выражений (4.8), (4.9) и (4.10) приводит к выводу, что формулы

(4.8) - (4.9) представляют собой параметрическое уравнение окружности в осях $\sigma - \tau$. Мы получили замечательное графическое изображение плоского напряженного состояния, которое называют кругом Мора (по имени автора



Соответствие величин:

$$x = \sigma$$

$$y = \tau$$

$$\varphi = 2\alpha$$

$$a = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2)$$

$$R = \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2)$$

Рис. 4.9. Круг напряжений (круг Мора)

немецкого ученого Отто Мора). Каждой точке круга Мора с координатами σ , τ соответствует площадка с этими напряжениями – мы получили возможность увидеть все площадки напряженного состояния.

Заметим, что, если угол между площадками α , то угол между соответствующими радиусами 2α - удваивается. Следовательно, взаимно перпендикулярные площадки отображаются на круге Мора точками, лежащими на концах его диаметра. Точки 1 и 2 отображают главные площадки. Действительно, σ_1 – наибольшее, а σ_2 – наименьшее напряжение. Здесь же хорошо видно, что только на главных площадках $\tau = 0$. А на площадках А и В касательные напряжения наибольшие, но разного знака, так как согласно закону парности касательных напряжений на взаимно перпендикулярных площадках касательные напряжения численно равны и противоположны по знаку. Эти площадки составляют с главными угол 45° , так как между соответствующими радиусами на круге Мора угол 90° .

4.5. Вывод формулы для главных напряжений

Пусть напряженное (рис. 4.10) состояние задано двумя взаимно перпендикулярными площадками А и В (неглавными). Построим круг Мора. Для этого в координатной плоскости $\sigma - \tau$ наносим точку А по значениям σ_z и τ_{yz} , а затем – точку В по σ_y и τ_{zy} . Соединив точки А и В, получаем диаметр круга АВ и его центр O_1 . Затем проводим окружность радиуса R. На основании рис. 4.10 получаем выражение для главных напряжений.

$$\sigma_{1,2} = OO_1 \pm R = OO_1 \pm \sqrt{O_1C^2 + AC^2} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{yz}^2}.$$

$$\sigma_{1,2} = \frac{\sigma_z + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_z - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_{yz}^2} \quad (4.11)$$

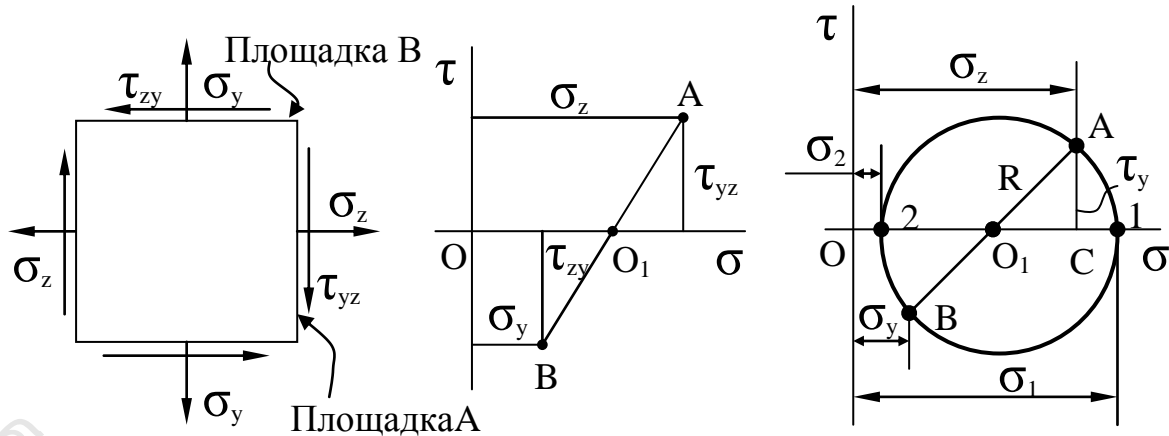
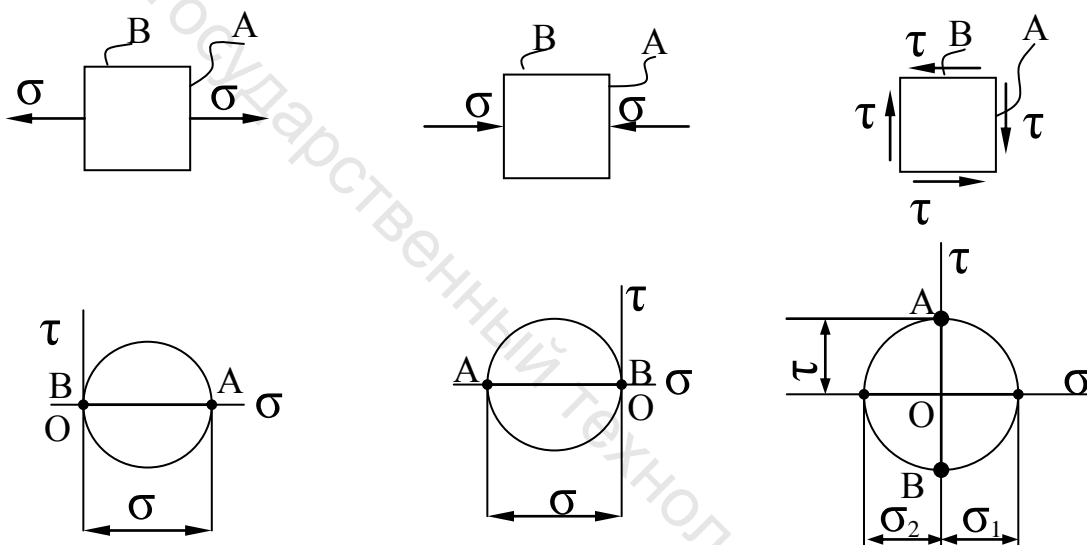


Рис. 4.10. Построение круга Мора



Растяжение

2. Сжатие

3. Чистый сдвиг

Рис. 4.11. Частные случаи кругов Мора

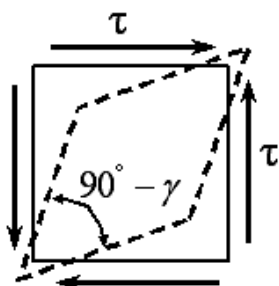


Рисунок 4.12
Чистый сдвиг

Дополнение к чистому сдвигу: как видно по рис. 4.12, чистый сдвиг это такое напряженное состояние, при котором по четырем граням элемента действуют только касательные напряжения. Деформация характеризуется углом сдвига γ – это искажение первоначально прямого угла.

Как показывает эксперимент, между напряжением и деформацией имеет место прямо пропорциональная зависимость – **закон Гука при сдвиге:**

$$\tau = G \gamma. \quad (4.12)$$

G – модуль сдвига (или модуль поперечной упругости).

4.6. Понятие о круге Мора для объемного напряженного состояния

В объемном напряженном состоянии (рис. 4.13) имеют место три главные площадки (они взаимно перпендикулярны), по которым действуют

три главных напряжения σ_1 , σ_2 и σ_3 . При этом индексы проставляют так, что $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ алгебраически. Следует обратить внимание на τ_1 -наибольшее

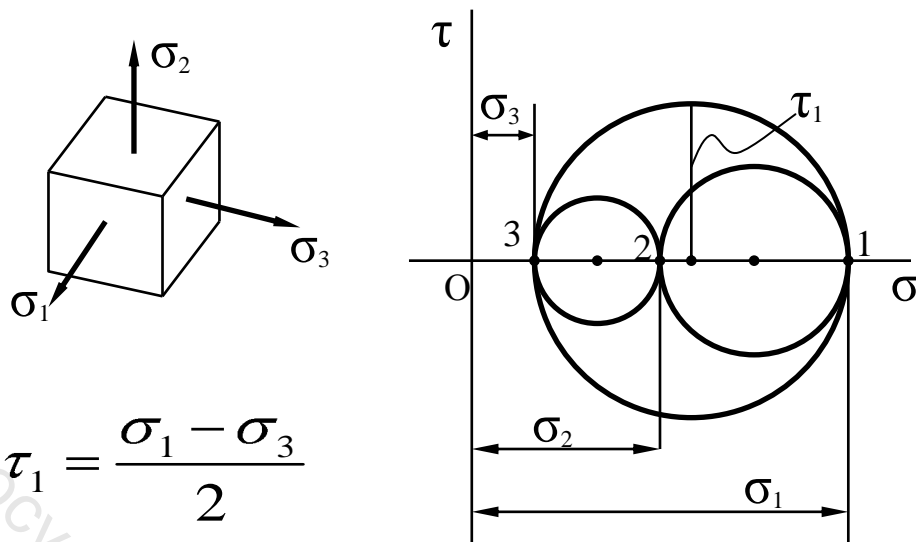


Рис. 4.13. Объемное напряженное состояние, представленное тремя кругами Мора касательное напряжение.

4.7. Частный случай плоского напряженного состояния

При расчете элементов конструкций обычно имеет место частный

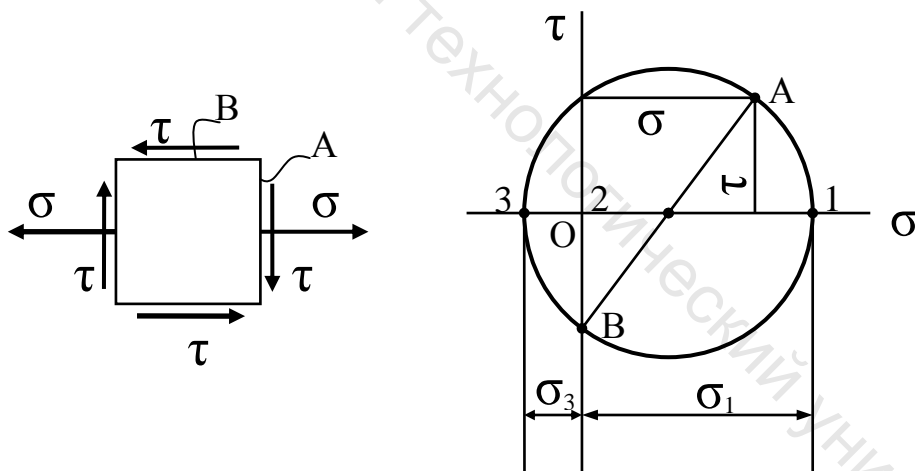


Рис. 4.14. Круг Мора для упрощенного плоского напряженного состояния

случай плоского напряженного состояния или его называют еще упрощенным. Это случай, когда на одной из двух исходных площадок нормальное напряжение равно нулю (рис. 4.14). Введены следующие переменные:

$$\sigma_z = \sigma, \quad \sigma_y = 0, \quad \tau_{yz} = \tau. \quad (4.13)$$

На рис. 4.14 показан круг Мора для этого напряженного состояния. Из (4.11) с учетом (4.13) получим выражения для главных напряжений:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}, \\ \sigma_2 &= 0, \\ \sigma_3 &= \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}.\end{aligned}\quad (4.14)$$

4.8. Обобщенный закон Гука

Рассмотрим объемное напряженное состояние (рис. 4.15). Поставим задачу определить относительные удлинения в направлении осей 1, 2 и 3.

Принцип независимости действия сил гласит: усилия, напряжения и деформации от суммы сил равны сумме усилий, напряжений и деформаций от каждой силы в отдельности.

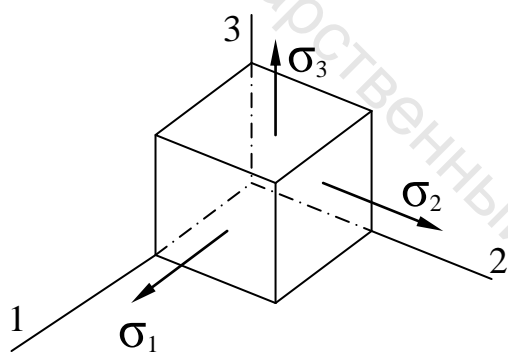


Рис. 4.15. Объемное напряженное состояние, представленное главными напряжениями

На основании этого принципа удлинение ε_1 запишем как сумму удлинений от каждой элементарной силы в отдельности. Ниже дан вывод формулы для ε_1 . $\varepsilon_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{12} + \varepsilon_{13}$, где

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_1}{E}, \quad \varepsilon_{12} = -\mu\varepsilon_{22} = -\mu\frac{\sigma_2}{E},$$

$$\varepsilon_{13} = -\mu\varepsilon_{33} = -\mu\frac{\sigma_3}{E}.$$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} \sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} \sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)$$

(4.15)

Выражения для ε_2 и ε_3 получены круговой перестановкой индексов.

4.9 О прочности в сложном напряженном состоянии. Гипотезы прочности

При рассмотрении напряжений мы видели, что в сечениях возникают одновременно нормальные и касательные напряжения и связанные с ними линейные и угловые деформации. Поэтому даже в самом простом случае напряженного состояния, в таком, как, например, растяжение бруса в

одном направлении, причиной наступления опасного состояния материала могут быть нормальные или касательные напряжения, достигающие определенных пределов для данного материала. В дальнейшем под опасным состоянием материала мы условимся понимать для пластичных материалов наступление состояния текучести, а для хрупких — наступление разрушения в обычном смысле этого слова. Деление материалов на хрупкие и пластичные является условным. Материал, показавший себя пластичным при простом растяжении, в случае всестороннего растяжения может разрушиться, как хрупкий, без значительных остаточных деформаций. И наоборот, хрупкий при простом растяжении материал может вести себя при другом напряженном состоянии, как пластичный. Поэтому правильнее говорить не о хрупком и пластичном материале, а о хрупком или пластичном состояниях материала.

У такого хрупкого материала, как чугун, сопротивление отрыву частиц меньше, чем сопротивление сдвигу. Поэтому нарушение сцепления между отдельными его частицами происходит до появления заметных остаточных деформаций и разрушение происходит вследствие отрыва. У пластичного материала, как, например, у мягкой стали, сопротивление сдвигу вначале меньше сопротивления отрыву. Поэтому в таком материале происходит сдвиг элементов кристаллической решетки по кристаллографическим плоскостям, вследствие чего в нем появляются остаточные деформации. С появлением первых остаточных деформаций сопротивление сдвигу начинает расти. Окончательное разрушение материала сопровождается значительными пластическими деформациями.

Таким образом, прочность материалов, находящихся в хрупком состоянии, характеризуется величиной сопротивления отрыву частиц, а прочность пластичных материалов характеризуется величиной сопротивления образованию остаточных деформаций, сопротивления сдвигу.

При одноосном напряженном состоянии бруса вопрос об истинной причине разрушения материала не имеет большого практического значения, так как допускаемые напряжения всегда могут быть определены из результатов непосредственного испытания материала.

Иначе дело обстоит при сложном напряженном состоянии, когда брус, например, растягивается по двум взаимно перпендикулярным направлениям. В таких случаях опытное определение величин, характеризующих условия разрушения материала, и выяснение причин разрушения сопряжено с большими трудностями.

Для того чтобы при сложном напряженном состоянии судить о наступлении разрушения материала по пределу текучести или пределу прочности, полученным при простом растяжении, необходимо знать истинную причину наступления разрушения материала. До настоящего времени на основании теоретических и опытных исследований было высказано несколько предположений о причине разрушения материалов. Предположения эти носят названия теорий прочности. Теории прочности

ставят своей задачей оценить на основании характеристик материалов, полученных при простом растяжении или сжатии, возможность разрушения материала, находящегося в сложном напряженном состоянии.

Сразу отметим тот факт, что до сих пор в науке нет точной теории, решившей проблему прочности сложного напряженного состояния. Поэтому при выполнении расчетов прибегают к гипотезам прочности.

Идея гипотез прочности состоит в том, что на основании некоторого критерия, взятого чисто гипотетически, данному сложному напряженному состоянию $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ сопоставляется равноопасное (эквивалентное) простое растяжение с напряжением $\sigma_{\text{эКВ}}$ (эквивалентное напряжение).

Равноопасными считаются напряженные состояния, у которых равны коэффициенты запаса.

По закону сопоставления сложного напряженного состояния простому растяжению и различаются теории прочности. Итак, гипотезы прочности позволяют получить зависимость

$$\sigma_{\text{эКВ}} = f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3). \quad (4.16)$$

и записать условие прочности в виде

$$\sigma_{\text{эКВ}} \leq [\sigma]. \quad (4.17)$$

Наиболее распространенными из них являются следующие.

I. Теория наибольших нормальных напряжений (теория Галилея)

Эквивалентные напряжения определяются равенством

$$\sigma_{\text{эКВ}} = \sigma_1 \leq [\sigma]. \quad (4.18)$$

Может применяться для хрупких материалов при $\sigma_3 > 0$.

II. Теория наибольших линейных деформаций (теория Мариотта-Сен-Венана).

Эквивалентные напряжения находятся из условия равенства

$$\varepsilon_{\text{эКВ}} = \varepsilon_1 \quad (4.19)$$

где $\varepsilon_{\text{эКВ}}$ и ε_1 — главная деформация исходного напряженного состояния и линейная деформация в эквивалентном одноосном состоянии.

Из обобщенного закона Гука (4.15) в главных осях и того же закона (2.5) для одноосного напряженного состояния следует равенство:

$$\sigma_{\text{эКВ}} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma]. \quad (4.20)$$

Вторая теория может применяться для хрупких материалов при $\sigma_3 < 0$.

III. Теория наибольших касательных напряжений (теория Кулона-Треска-Сен-Венана).

Эквивалентные напряжения определяются равенством

$$\tau_{\text{max}} = \tau_{\text{эКВ max}} \quad (4.21)$$

где τ_{\max} и $\tau_{\text{экв}\max}$ — максимальные касательные напряжения в исходном и эквивалентном напряженном состоянии. В случае объемного напряженного состояния максимальные касательные напряжения равны (рис. 4.16) $\tau_{\max} = \tau_1 = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$. При одноосном напряженном состоянии

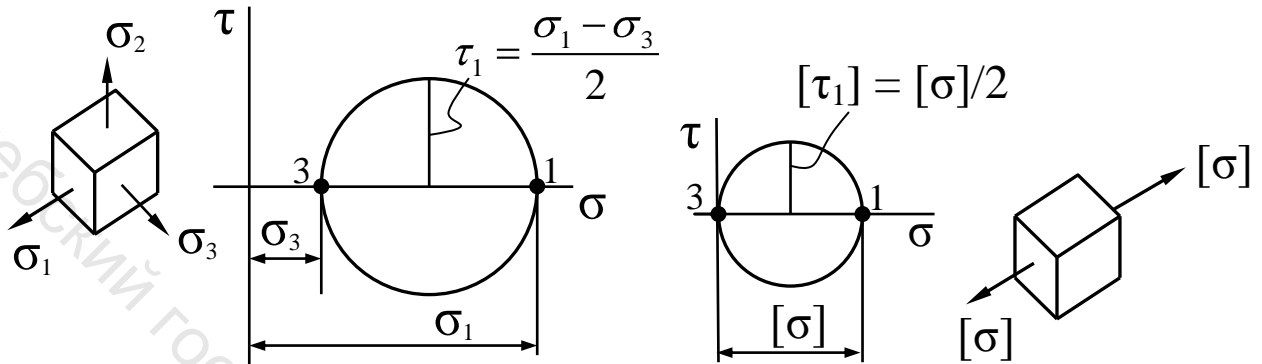


Рис. 4.16. Расчетная схема для доказательства критерия (4.22)

$\tau_{\text{экв}\max} = [\tau_1] = [\sigma]/2$. Отсюда получаем следующий критерий эквивалентности:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma]. \quad (4.22)$$

Для упрощенного плоского напряженного состояния с учетом (4.14) критерий эквивалентности (4.21) будет иметь вид:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sigma_1 - \sigma_3 = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \quad (4.23)$$

Третья теория применяется для пластичных материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие при любых напряженных состояниях.

IV. Теория энергии формоизменения (теория Мизеса-Генки-Хубера).

Получившая широкое распространение для пластичных материалов, энергетическая теория основана на предположении, что опасное состояние материала независимо от напряженного состояния наступает тогда, когда удельная потенциальная энергия деформации связанная с изменением формы, достигает определенной величины. Это предположение приводит к следующему условию эквивалентности:

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - (\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_1\sigma_3)} \leq \sigma \quad (4.24)$$

Так же, как и третья, четвертая теория используется для пластичных материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие при любых напряженных состояниях.

V. Теория Мора.

Это теория прочности, которая обобщает третью теорию прочности на случай, когда $[\sigma]_p \neq [\sigma]_{сж}$.

Для случая, когда $\sigma_3 < 0$ и $[\sigma]_p \neq [\sigma]_{сж}$ условием прочности по теории Мора будет:

$$\sigma_{экр} = \sigma_1 - \sigma_3 \frac{\sigma_p}{\sigma_{сж}} \leq \sigma_p \quad (4.25)$$

Для частных случаев, когда $[\sigma]_p = [\sigma]_{сж}$, эта теория прочности совпадает полностью с третьей теорией прочности. Теория наибольших касательных напряжений и теория Мора дают лучшее совпадение с опытами, чем первые две теории. Однако и они не могут быть признаны совершенными.

Факт разрушения бруса, растягиваемого по трем взаимно перпендикулярным направлениям с равными напряжениями, т. е. когда $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 > 0$, не может быть объяснен касательными напряжениями, которые равны в этом случае нулю.

Наиболее часто на практике применяются последние три теории.

Контрольные вопросы

4.1. Какое состояние материала называется линейным, плоским и объемным напряженным состоянием?

4.2. В чем заключается закон парности касательных напряжений?

4.3. Чему равна сумма нормальных напряжений по двум взаимно перпендикулярным площадкам?

4.4. По каким формулам определяются нормальное и касательное напряжения в плоскостях наклонных сечений в общем случае плоского напряженного состояния?

4.5. Что такое главные площадки? Сколько их? Как они взаимно ориентированы? Чему равны касательные напряжения на этих площадках? Какие напряжения называются главными? Как они обозначаются и соотносятся между собой?

4.6. Что такое круг Мора? Как ориентированы площадки, которым на плоскости Мора соответствуют точки окружностей, проходящих через точки σ_1 и σ_3 , σ_2 и σ_3 , σ_1 и σ_2 соответственно? Частные случаи кругов Мора?

4.7. Каким площадкам соответствуют точки, лежащие в области, заключенной между окружностями круговой диаграммы Мора?

4.8. В какой площадке из всех, проходящих через данную точку, действуют максимальные касательные напряжения?

4.9. Как определить главные напряжения для плоского напряженного состояния?

4.10. Как выражаются относительные деформации через напряжения при объемном напряженном состоянии?

4.11. Как записывается закон Гука при сдвиге?

4.12. Возникают ли при кручении нормальные напряжения?

4.13. Что такое удельная потенциальная энергия изменения объема и удельная потенциальная энергия изменения формы?

4.14. Какие напряженные состояния называются равноопасными?

4.15. Что положено в основу сравнения двух напряженных состояний в гипотезах прочности? Почему сложное напряженное состояние обычно сравнивается с одноосным?

4.16. Для чего служат теории прочности?

4.17. Какой критерий равноопасности положен в основу теории максимальных нормальных напряжений? В каких случаях находит применение эта теория?

4.18. Какой критерий равноопасности устанавливается в теории наибольших деформаций? В каких случаях она дает удовлетворительные результаты?

4.19. На основе какого критерия строится теория максимальных касательных напряжений? Для каких материалов она нашла широкое применение в расчетах?

4.20. Какой критерий равноопасности положен в основу энергетической теории прочности? Для каких материалов она используется?

4.21. Какой подход положен в основу теории предельных состояний? Как для заданного напряженного состояния здесь определяется предельное состояние? Для каких материалов и напряженных состояний эта теория дает наилучшие результаты?

ГЛАВА 5 КРУЧЕНИЕ

Под кручением понимается такой вид нагружения, при котором в поперечных сечениях бруса возникает только крутящий момент. Прочие силовые факторы, т.е. N_z , Q_x , Q_y , M_x , M_y равны нулю.

5.1. Определение крутящего момента. Построение эпюры M_z

Для крутящего момента, независимо от формы поперечного сечения бруса, принято следующее правило знаков. Если наблюдатель смотрит на поперечное сечение со стороны внешней нормали и видит момент M_z направленным против часовой стрелки, то момент считается положительным. При противоположном направлении моменту приписывается отрицательный знак. Можно принять наоборот. Рассмотрим пример, показанный на рис. 5.1. Для построения эпюры крутящих моментов

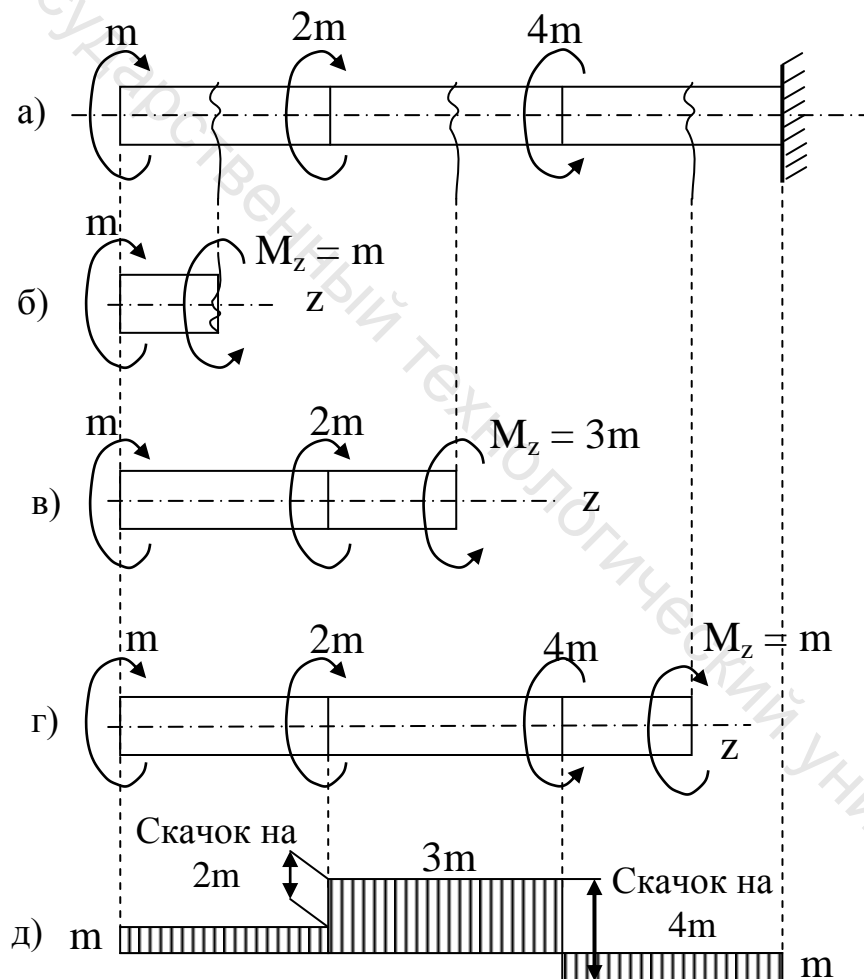


Рис. 5.1. Расчетная схема бруса

M_z применим традиционный метод сечений – на расстоянии z от начала координат рассечем брус на две части и правую часть отбросим (рис. 5.1б, 5.1в, 5.1г). Для равновесия оставшейся части бруса, т. е. левой части необходимо, чтобы алгебраическая сумма всех моментов, действующих на нее, была равна нулю. На рис. 5.1б, 5.1в и 5.1г поэтапно показан такой

расчет. Для наглядного представления о характере распределения и величине крутящих моментов по длине стержня строятся эпюры (графики) этих моментов (рисунок 5.1д). По эпюрам видно, что скачки на эпюре в тех сечениях, в которых приложены сосредоточенные моменты – на величину этих моментов.

5.2. Предпосылки к теории кручения круглого бруса

Нанесем на поверхность круглого бруса тонкие линии (риски) вдоль волокон и по контуру поперечных сечений. На рис. 5.2, данном ниже, показан брус с рисками до и после деформации. Наблюдение картины деформирования позволяет сделать следующие выводы (ввести предпосылки).

Предпосылки: 1. Сечения, плоские до деформации, остаются плоскими после деформации (гипотеза плоских сечений) и расстояния между ними не

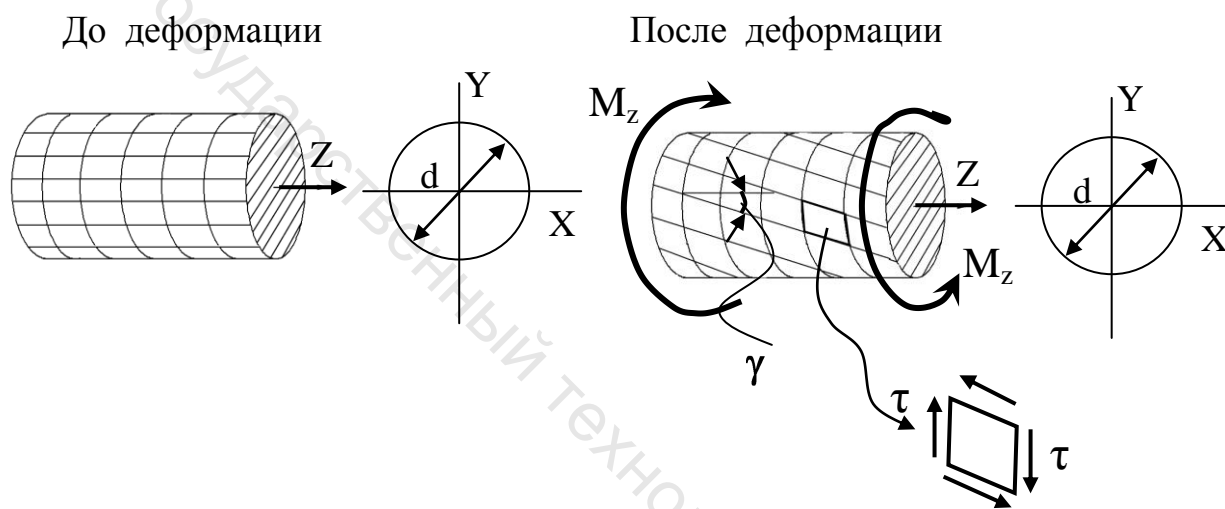


Рис. 5.2. Деформация бруса при кручении

меняются, то есть $\varepsilon_z = 0$.

2. Сечение остается круглым и его диаметр не меняется, то есть $\varepsilon_x = \varepsilon_y = 0$.

3. Деформация продольных волокон сводится к сдвигу (γ – угол сдвига).

4. Материал следует закону Гука - $\tau = G \gamma$.

Запишем относительные удлинения согласно обобщенному закону Гука (4.15) и приравняем их нулю. Получим следующую систему однородных уравнений.

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)] = 0, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)] = 0, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] = 0.\end{aligned}\tag{5.1}$$

Эта система имеет единственное решение $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = 0$.

Итак, в поперечном сечении возникают лишь одни касательные напряжения.

5.3. Вывод формул для касательных напряжений и угла закручивания

При расчете бруса на кручение требуется решить две основные задачи. Во-первых, необходимо определить напряжения, возникающие в брусе, и, во-вторых, надо найти угловые перемещения сечений бруса в зависимости от величин внешних моментов.

На приведенном на рис. 5.3 в закрученного бруса даны два угла: γ – угол

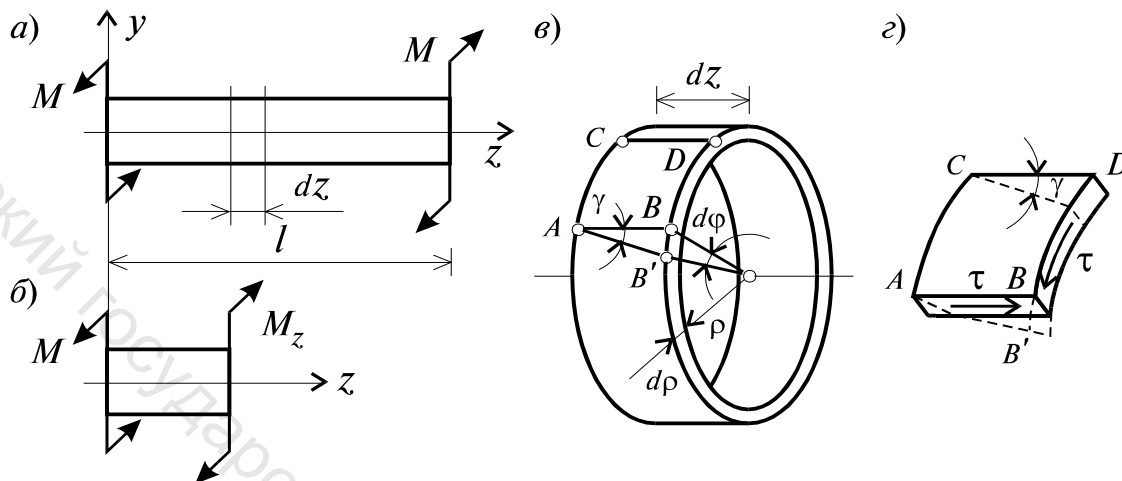


Рис. 5.3. Деформация элемента бруса при кручении

сдвига и φ – угол закручивания. Отношение угла φ к длине бруса называют относительным (или погонным) углом закручивания. Установим связь между относительным углом закручивания и углом сдвига. Двумя поперечными сечениями, как это показано на рис. 5.3, а, из состава бруса выделим элемент длиной dz , а из него в свою очередь двумя цилиндрическими поверхностями с радиусами ρ и $\rho + d\rho$ выделим элементарное кольцо, показанное на рис. 5.3, в. В результате кручения правое торцевое сечение кольца повернется на угол $d\varphi$. При этом образующая цилиндра AB повернется на угол γ и займет положение AB' . Дуга BB' равна с одной стороны, $\rho d\varphi$, а с другой стороны – γdz . Следовательно,

$$\gamma = \rho \frac{d\varphi}{dz}. \quad (5.2)$$

Если разрезать образовавшуюся фигуру по образующей и развернуть (рис. 5.3, г), то можно видеть, что угол γ представляет собой не что иное, как угол сдвига данной цилиндрической поверхности под действием касательных напряжений τ , вызванных действием крутящего момента. Обозначим

$$\theta = \frac{d\varphi}{dz}, \quad (5.3)$$

где θ – относительный угол закручивания. Этот угол представляет собой угол взаимного поворота двух сечений, отнесенный к расстоянию между ними. Величина θ аналогична относительному удлинению при простом растяжении или сжатии стержня.

Из совместного рассмотрения (5.2) и (5.3) и после некоторых преобразований, получим:

$$\gamma = \rho \theta. \quad (5.4)$$

Подставляя выражение (5.4) в выражение закона Гука для сдвига (4.12), в данном случае выражение касательных напряжений принимает следующий вид:

$$\tau = G \theta \rho, \quad (5.5)$$

где τ – касательные напряжения в поперечном сечении бруса. Парные им напряжения возникают в продольных плоскостях – в осевых сечениях, как показано на рис. 5.4. Величину крутящего момента M_z можно определить через τ с помощью следующих рассуждений. Момент относительно оси z от

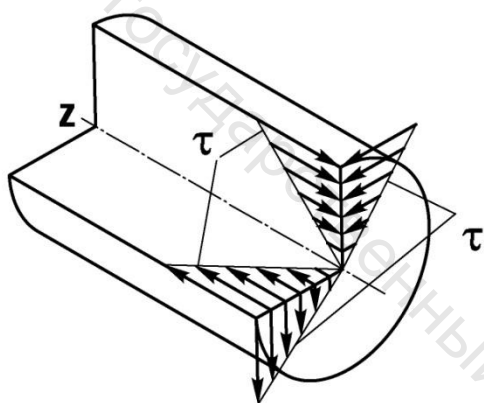


Рис. 5.4. Распределение касательных напряжений при кручении

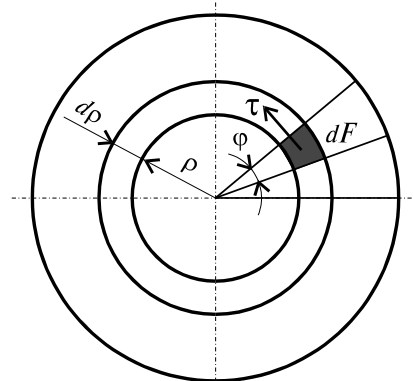


Рис. 5.5. Касательные напряжения в поперечном сечении вала

действиях касательных напряжений τ на элементарной площадке dA равен (рис. 5.5): $dM = \tau \rho dA$. Проинтегрировав это выражение по площади поперечного сечения вала, получим:

$$M_z = \int_A \tau \rho dA. \quad (5.6)$$

Из совместного рассмотрения (5.5) и (5.6) получим:

$$M_z = G \theta \int_A \rho^2 dA = G \theta I_p. \quad (5.7)$$

Откуда

$$\theta = \frac{M_z}{G I_p}. \quad (5.8)$$

Величина $G I_p$ называется жесткостью бруса при кручении, при этом, G – физическая характеристика жесткости, а I_p – геометрическая характеристика жесткости. Из (5.8), с учетом (5.3), интегрируя полученное выражение по длине z , получим взаимный угол поворота сечений:

$$\varphi(z) = \int_0^z \frac{M_z}{GI_p} dz. \quad (5.9)$$

Если крутящий момент M_z и жесткость GI_p постоянны на всем участке интегрирования, то из (5.9) получим:

$$\varphi(z) = \frac{M_z z}{GI_p} + \varphi(0), \quad (5.10)$$

где $\varphi(0)$ – угол закручивания сечения в начале системы отсчета, z – длина участка интегрирования.

Для определения выражения для напряжений, возвращаясь к формуле (5.5) и исключая из него θ , согласно (5.8), получим:

$$\tau(\rho) = \frac{M_z}{I_p} \rho. \quad (5.11)$$

В этой формуле ρ – расстояние от центра тяжести до точки, в которой определяется напряжение. Поскольку напряжения прямо пропорциональны ρ , то эпюра τ имеет вид, показанный на рис. 5.6. Наибольшие напряжения возникают в точках контура поперечного сечения при $\rho = R$. Величина

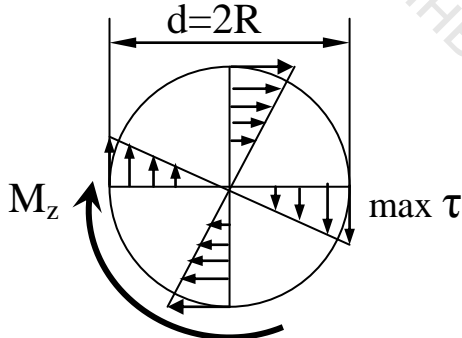


Рис. 5.6. Эпюра касательных напряжений τ

$W_p = \frac{I_p}{\rho_{\max}}$ называется полярным моментом

сопротивления поперечного сечения бруса в форме сплошного круга радиусом R . Определяется эта величина из следующих соображений:

$$I_p = \frac{\pi R^4}{2}; \rho_{\max} = R \rightarrow W_p = \frac{\pi R^3}{2} = \frac{\pi d^3}{16}, \quad (5.12)$$

(размерность – см^3).

Если же в бруске имеется внутренняя центральная полость радиусом $r = \frac{d_{\text{вн}}}{2}$, то

для кольца

$$W_p^k = \frac{\pi}{2} (R^3 - r^3) = \frac{\pi D^3}{16} (1 - c^4), \quad (5.13)$$

$$\text{где } c = \frac{r}{R} = \frac{d_{\text{вн}}}{D}.$$

Условие прочности:

$$\max \tau = \frac{\max M_z}{I_p} \rho_{\max} = \frac{\max M_z}{W_p} \leq [\tau] \quad (5.14)$$

При выполнении проектировочного расчета вала его диаметр определяется из условия равенства максимального напряжения допусжаемому значению.

$$\max \tau = \frac{\max M_z}{\frac{\pi d^3}{16}} = [\tau] \quad \rightarrow \quad d = \sqrt[3]{\frac{16 \max M_z}{\pi [\tau]}}. \quad (5.15)$$

Условие жесткости

Определим диаметр вала из условия жесткости: наибольший относительный угол закручивания (5.8) не должен превышать допусжаемого значения.

$$\max \frac{d\varphi}{dz} = \frac{\max M_z}{GI_p} \leq [\theta], \quad \frac{\max M_z}{G \frac{\pi d^4}{32}} = [\theta] \quad \rightarrow \quad d = \sqrt[4]{\frac{32 \max M_z}{\pi G [\theta]}}. \quad (5.16)$$

Здесь $[\theta]$ есть допусжаемый относительный угол закручивания в радианах на единицу длины вала.

В большинстве случаев допусжаемый относительный угол закручивания задают в градусах на 1 м длины, тогда взамен формулы (5.16) получим

$$d = \sqrt[4]{\frac{32 \max M_z}{\pi G [\theta]} \frac{\pi}{180}} = \sqrt[4]{\frac{5760 \max M_z}{\pi^2 G [\theta]}} = 4,92 \sqrt[4]{\frac{\max M_z}{G [\theta]}}. \quad (5.17)$$

Угол $[\theta]$ выбирают в зависимости от назначения вала и его размеров. Например, в приводах следящих систем, делительных механизмах и пр. допусжаемые углы закручивания ограничиваются секундами и минутами на 1 м длины, а в карданных валах автомобилей допусжают несколько градусов на метр. В машиностроении для валов средних размеров в «Справочнике машиностроителя» рекомендуется принимать допусжаемый угол закручивания равным $0,5^\circ$ на 1 м длины.

Пример 5.1. Определить диаметр стального вала вращающегося с угловой скоростью $\omega=100$ рад/с и передающего мощность $N=100$ кВт. Допускаемое напряжение $[\tau]=40$ МПа, допусжаемый угол закручивания $[\theta]=0,5$ град/м, $G=8 \cdot 10^4$ МПа.

Решение. Момент, передаваемый валом, определяем по формуле

$$T = \frac{N}{\omega} = \frac{100 \ 000}{100} = 1000 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

Крутящий момент во всех поперечных сечениях вала одинаков

$$M_z = T = 1000 \text{ Н} \cdot \text{м} = 1 \text{ кН} \cdot \text{м} = 1 \cdot 10^{-3} \text{ МН} \cdot \text{м}.$$

Диаметр вала по прочности определяем по формуле (5.15)

$$d = \sqrt[3]{\frac{16 \max M_z}{\pi [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 40}} = 0,05 \text{ м} = 5 \text{ см} = 50 \text{ мм}.$$

По формуле (5.17) определяем диаметр вала из условия жесткости

$$d = 4,92 \sqrt[4]{\frac{\max M_z}{G[\theta]}} = 4,92 \sqrt[4]{\frac{10^{-3}}{8 \cdot 10^4 \cdot 0,5}} = 0,0619 \text{ м} = 6,19 \text{ см} \approx 62 \text{ мм}.$$

Диаметр вала в данном случае определяется из условия жесткости и должен быть окончательно принят равным $d = 62 \text{ мм}$.

Пример 5.2. Подобрать размеры сечения трубчатого вала, передающего момент $M_z = 6 \text{ кН} \cdot \text{м}$, при соотношении диаметров $c = d/D = 0,8$ и допускаемом напряжении $[\tau] = 60 \text{ МПа}$. Сравнить вес этого трубчатого вала с валом равной прочности сплошного сечения.

Решение. Размеры трубчатого вала по прочности определяем по формуле (5.14) с учетом (5.13)

$$\frac{\max M_z}{[\tau]} = W_p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - c^4), \quad \text{откуда} \quad \text{найдем} \quad \text{размеры}$$

$$D = \sqrt[3]{\frac{16 \max M_z}{\pi [\tau] (1 - c^4)}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 6 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 60 \cdot (1 - 0,8^4)}} = 0,0952 \text{ м} = 9,52 \text{ см},$$

$$d = 0,8 \cdot D = 0,8 \cdot 9,52 = 7,62 \text{ см}. \quad \text{Площадь сечения} - A_{\text{тр}} = \frac{1}{4} \pi (D^2 - d^2) = 25,6 \text{ см}^2.$$

Диаметр вала сплошного сечения определяем по формуле (5.15)

$$D_{\text{сп}} = \sqrt[3]{\frac{16 \max M_z}{\pi [\tau]}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 6 \cdot 10^{-3}}{3,14 \cdot 60}} = 0,0799 \text{ м} \approx 8 \text{ см}. \quad \text{Его площадь сечения}$$

$A_{\text{сп}} = \frac{1}{4} \pi D_{\text{сп}}^2 = 50,3 \text{ см}^2$. Масса погонного метра вала пропорциональна площади его поперечного сечения. Таким образом, масса сплошного вала в $50,3/25,6 = 1,96$ раза больше массы трубчатого вала при одинаковой прочности.

5.4. Кручение бруса с некруглым поперечным сечением

На рис. 5.7 показан брус прямоугольного сечения после деформации.

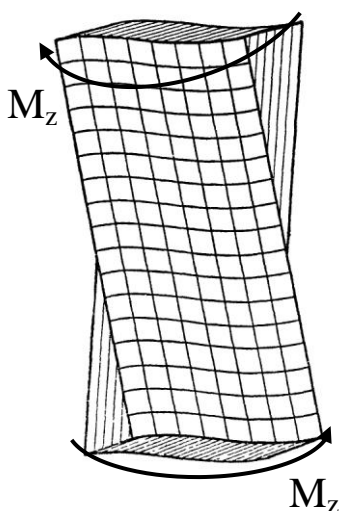


Рис. 5.7. Брус прямоугольного сечения после деформации

Искажение прямоугольной сетки, нанесенной на поверхность бруса, свидетельствует о том, что гипотеза плоских сечений в данном случае не выполняется. Определение напряжений в брус с некруглым поперечным сечением представляет собой сложную задачу и решается в теории упругости.

Таким образом, при определении углов сдвига, в данном случае, необходимо учитывать не только взаимный поворот сечений, но и деформации сечений в своей плоскости, связанных с их искривлением. Задача резко усложняется тем, что для некруглого сечения, напряжения должны определяться как функции уже не одного независимого переменного ρ а двух x -и y .

На рис. 5.8 показана, полученная методом

теории упругости, эпюра касательных напряжений для бруса прямоугольного сечения.

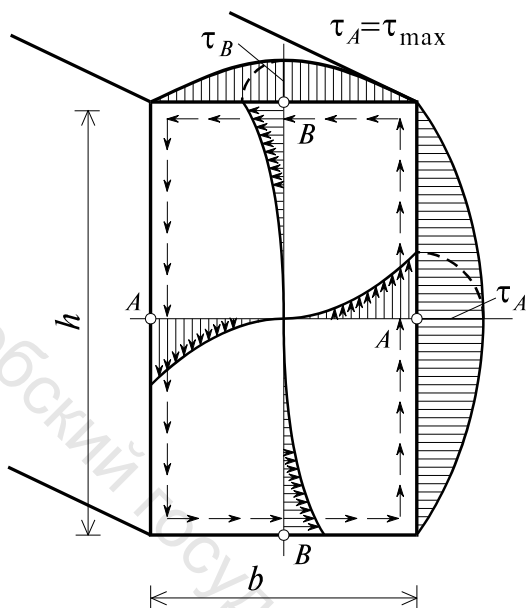


Рис. 5.8. Эпюра касательных напряжений

В углах, как видно, напряжения равны нулю, а наибольшие их значения возникают по серединам больших сторон:

в точке А $\tau_A = \tau_{\max} = \frac{M_z}{W_K}$, (5.18)

где $W_K = \alpha hb^2$ – аналог полярного момента сопротивления поперечного сечения прямоугольного бруса;

в точке В $\tau_B = \gamma \tau_{\max}$, (5.19)

здесь необходимо учесть, что b – малая сторона прямоугольника. Напряжение τ_{\max} может быть определено и по следующей приближенной формуле:

$$\tau_{\max} = \frac{M_z}{hb^2} \left(3 + 1,8 \frac{b}{h} \right). \quad (5.20)$$

Значение взаимного угла поворота сечений определяется по формуле:

$$\varphi(z) = \frac{M_z z}{GI_K}, \quad (5.21)$$

где $I_K = \beta hb^3$ – аналог полярного момента инерции поперечного сечения бруса.

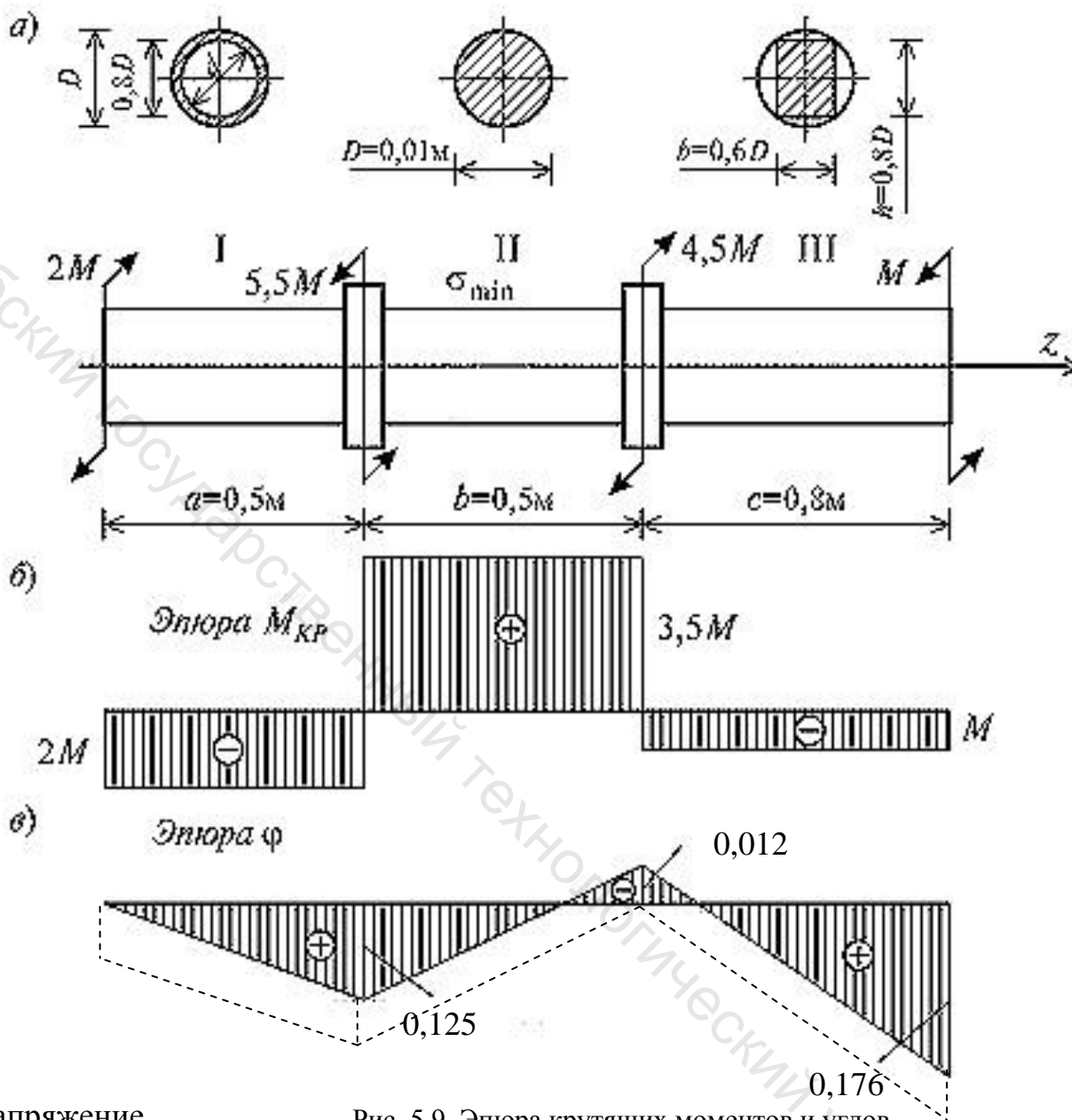
Коэффициенты α , γ и β зависят от отношения сторон h/b , и их значения приведены в табл. 5.1.

Таблица 5.1 Коэффициенты Сен-Венана

h/b	1	1,5	1,75	2	2,5	3	4	6	8	10	∞
α	0,208	0,231	0,239	0,246	0,258	0,267	0,228	0,299	0,307	0,313	0,333
β	0,141	0,196	0,214	0,229	0,249	0,263	0,281	0,299	0,307	0,313	0,333
γ	1,000	0,859	0,820	0,795	0,766	0,753	0,745	0,743	0,742	0,742	0,742

Пример 5.3. Стальной валик переменного сечения, испытывающего кручение, закручивается крутящими моментами, действующими в двух крайних и двух пролетных сечениях. Расчетная схема валика, ее геометрические размеры, величины и точки приложения внешних, крутящих моментов указаны на рис. 5.9, а.

Требуется: 1. Построить эпюру крутящих моментов; 2. Найти допускаемую величину момента M ; 3. Построить эпюру углов закручивания; Модуль упругости при сдвиге материала вала $G = 8 \cdot 10^7 \text{ кН/м}^2$. Допускаемое



напряжение материала вала $[\tau]=10^5 \text{ кН/м}^2$. Рис. 5.9. Эпюры крутящих моментов и углов закручивания срезу

Решение. 1. Построить эпюру крутящих моментов. Для определения величины крутящих моментов используется метод сечений. Согласно расчетной схеме (рис. 5.10, а) для I участка ($0 \leq z \leq 0,5 \text{ м}$):

$$\sum M_z = 2M + M_{z_1} = 0, \text{ откуда } M_{z_1} = -2M.$$

Согласно расчетной схеме (рис. 5.10, б) для участка II ($0,5 \text{ м} \leq z \leq 1,0 \text{ м}$):

$$\sum M_z = 2M - 5,5M + M_{z_2} = 0, \text{ откуда } M_{z_2} = 3,5M.$$

Согласно расчетной схеме (рис. 5.10, в) для участка III ($1,0 \text{ м} \leq z \leq 1,8 \text{ м}$):

$$\sum M_z = M + M_{z_3} = 0, \text{ откуда } M_{z_3} = -M.$$

По полученным данным строим эпюру крутящих моментов (рис. 5.9, б).

2. Найдем допускаемую величину момента $[M]$.

Допускаемая величина момента $[M]$ определяется из условия прочности

$$(5.14): \frac{\max M_z}{W_p} \leq [\tau].$$

Сначала определим моменты сопротивления сечения валика для каждого участка.

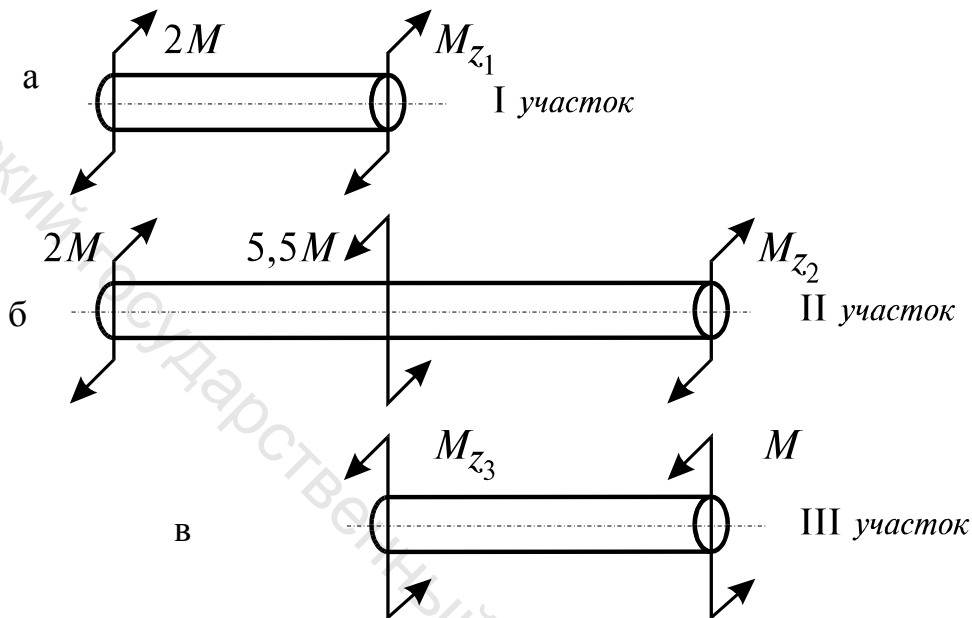


Рис. 5.10. Расчетная схема

I участок (трубчатое сечение) согласно (5.13):

$$W_1^p = \frac{\pi D^3}{16} (1 - c^4), \text{ где } c = \frac{d}{D} = 0,8;$$

$$W_1^p = \frac{3,14 \cdot (10^{-2})^3}{16} (1 - 0,8^4) = 116 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3.$$

II участок (круглое сечение):

$$W_2^p = \frac{\pi D^3}{16} = \frac{3,14 \cdot (10^{-2})^3}{16} = 196 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3.$$

III участок (прямоугольное сечение):

$$W_3^p = \alpha h b^2,$$

где α – коэффициент, зависящий от отношения сторон прямоугольного сечения h/b ($h > b$). В данном случае $h/b = 8/6 = 1,33$. В таблице 5.1 нет значения коэффициента α для найденного значения $h/b = 1,33$; имеются значения для $h/b = 1$ и для $h/b = 1,5$; значение α для $h/b = 1,33$ определим интерполированием:

$$\alpha = 0,208 + \frac{(0,231 - 0,208) \cdot (1,333 - 1)}{(1,5 - 1)} = 0,208 + 0,015 = 0,223, \text{ тогда}$$

$$W_3^p = \alpha hb^2 = 0,223 \cdot 0,8 \cdot 10^{-2} \cdot (0,6 \cdot 10^{-2})^2 = 64,2 \cdot 10^{-9} \text{ м}^3.$$

Подсчитаем теперь напряжения по участкам в зависимости от момента M :

$$\tau_1 = \frac{M_{z_1}}{W_1^p} = \frac{-2M}{116} \cdot 10^9 = -17,2 \cdot 10^6 \text{ М}, \quad \tau_2 = \frac{M_{z_2}}{W_2^p} = \frac{3,5M}{196} \cdot 10^9 = 17,9 \cdot 10^6 \text{ М},$$

$$\tau_3 = \frac{M_{z_3}}{W_3^p} = \frac{-M}{64,2} \cdot 10^9 = -15,6 \cdot 10^6 \text{ М}.$$

Определим напряжение для участка III по приближенной формуле (5.20):

$$\tau_3^{\max} = \frac{M_z}{hb^2} \left(3 + 1,8 \frac{b}{h}\right) = \frac{-M}{0,8 \cdot 10^{-2} (0,6 \cdot 10^{-2})^2} \left(3 + 1,8 \frac{0,6}{0,8}\right) = -15,1 \cdot 10^6 \text{ М}$$

Разница в полученных напряжениях составляет $(15,6 - 15,1)/15,6 \cdot 100\% = 3,2\%$.

Из сравнения результатов видно, что наиболее напряженным является участок II. Следует обратить внимание, что сравнивают напряжения без учета знака, т. е. их абсолютные значения.

Допускаемая величина момента $[M]$ определяется из зависимости:

$$\tau_2 = 17,9 \cdot 10^6 \text{ М} \leq [\tau], \text{ откуда } [M] = 10^5 \cdot 10^3 / 17,9 \cdot 10^6 = 5,8 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

3. Построим эпюру углов закручивания.

Сначала подсчитаем моменты инерции сечений валика относительно центра их кручения.

Участок I (трубчатое сечение):

$$I_{\rho}^I = \frac{\pi D^4}{32} (1 - C^4) = \frac{3,14 \cdot 10^{-8}}{32} (1 - 0,8^4) = 580 \cdot 10^{-12} \text{ м}^4.$$

Участок II (круглое сечение):

$$I_{\rho}^{II} = \frac{\pi D^4}{32} = \frac{3,14 \cdot 10^{-8}}{32} = 982 \cdot 10^{-12} \text{ м}^4.$$

Участок III (прямоугольное сечение):

$$I_{kp}^{III} = \beta h b^3 = 0,178 \cdot 0,8 \cdot 10^{-2} (6 \cdot 10^{-3})^3 = 308 \cdot 10^{-12} \text{ м}^4,$$

$$\text{где } \beta = 0,141 + \frac{(0,196 - 0,141) \cdot (1,333 - 1)}{(1,5 - 1)} = 0,141 + 0,037 = 0,178 \text{ при}$$

$$h/b = 1,33.$$

Угол закручивания на j -ом участке вала в соответствии с (5.10) определяется:

$$\varphi_j(z) = \frac{M_{z_j} (z - \ell_j)}{GI_p^j} + \varphi_{j-1},$$

где φ_{j-1} – угол закручивания на правом конце $(j-1)$ -го участка (для первого участка φ_0 – начальный угол закручивания вала); l_j – координата начала j -го участка.

Так как, в данном случае в пределах каждого из трех участков крутящие моменты и жесткости на кручение GI_p постоянны, то эпюры углов закручивания на каждом из участков будут линейны. В связи с этим, достаточно подсчитать их значения лишь на границах участков. Приняв, что левый конец вала зашпунт от поворота, т.е. $\varphi(0) = 0$, получим:

$$\varphi_1 = \frac{M_{z_1} a}{GI_p^I} = \frac{-2,5,8 \cdot 0,5}{8 \cdot 10^7 \cdot 10^3 \cdot 580 \cdot 10^{-12}} = -0,125 \text{ рад};$$

$$\varphi_2 = \varphi_1 + \frac{M_{z_2} b}{GI_p^{II}} = -0,125 + \frac{3,5 \cdot 5,8 \cdot 0,5}{8 \cdot 10^{10} \cdot 982 \cdot 10^{-12}} = -0,125 + 0,137 = 0,012 \text{ рад};$$

$$\varphi_3 = \varphi_2 + \frac{M_{z_3} c}{GI_p^{III}} = 0,012 - \frac{5,8 \cdot 0,8}{8 \cdot 10^{10} \cdot 308 \cdot 10^{-12}} = 0,012 - 0,188 = -0,176 \text{ рад}.$$

По полученным данным строим эпюру углов закручивания φ (рис. 5.9, в). Следует отметить, что в данной задаче за неподвижное сечение можно принять любое сечение и в этом случае эпюра углов закручивания φ будет получаться из построенной эпюры путем сдвига её вверх или вниз таким образом, чтобы угол закручивания в выбранном сечении был ноль. На рис. 5.9 это показано пунктиром. Выбрано $\varphi = 0$ в сечении конца II участка.

5.5. Кручение статически неопределимого бруса

Статически неопределимые задачи на кручение так же, как на растяжение и сжатие, включают в себя системы, в которых реакции закреплений и внутренние усилия не могут быть определены из условий статики.

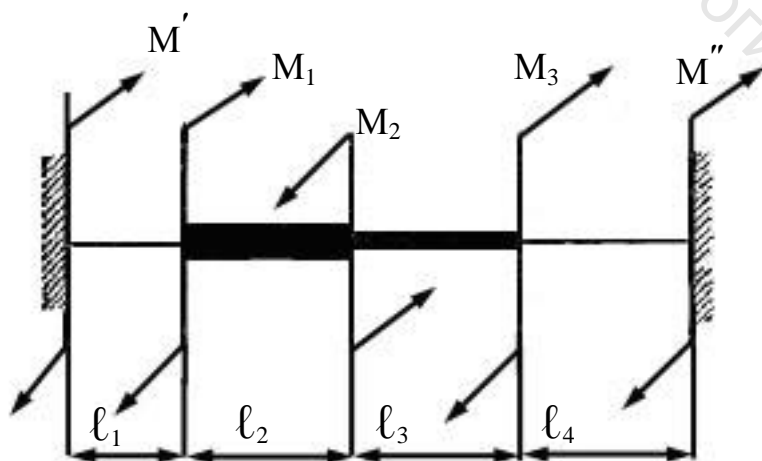


Рис. 5.11 Схема бруса

Расчет таких систем производится путем использования надлежащих условий статики и условий совместности перемещений. Последние условия основаны на

неразъединимости элементов, составляющих систему, и представляют собой геометрические зависимости между перемещениями элементов, входящих в систему.

Если дополнительные связи абсолютно жесткие, то их деформации равны нулю, а если дополнительные связи упругие, то их перемещения определяются через деформации, найденные по закону Гука.

Если все элементы статически неопределимой системы работают только на кручение, упругие перемещения будут определяться через углы закручивания.

Так, например, для систем, состоящих из нескольких прямолинейных элементов, соединенных соосно друг с другом, жестко заделанных по концам и нагруженных только внешними парами сил,

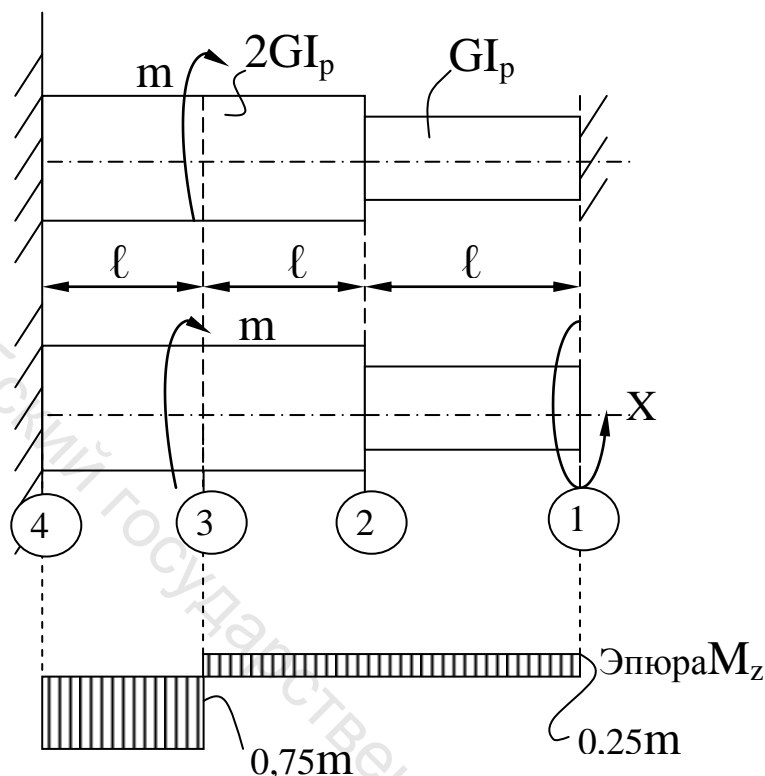


Рис. 5.12. Расчетная схема бруса и эпюра M_x

создающими кручение (рис. 5.11), условие статики представится алгебраической суммой моментов всех заданных M_1, M_2, M_3 и реактивных пар сил M', M'' относительно геометрической оси элементов. Эта сумма моментов должна равняться нулю.

Условие совместности перемещений представится алгебраической суммой углов закручивания на всех участках, которая в силу неповорачиваемости конечных сечений тоже должна равняться нулю.

Если одна из заделок стержня не жесткая, а упругая, то угол поворота упруго заделанного конца не равен нулю, а пропорционален величине реактивного момента. Если обе заделки не жесткие, а упругие, то полный угол закручивания должен равняться разности углов поворота в закрепленных сечениях.

Пример 5.4. Рассмотрим брус переменного сечения, заделанный с двух сторон (рис. 5.12). Поскольку в этой задаче можно составить лишь одно уравнение равновесия – уравнение моментов относительно оси z , в которое войдут два неизвестных, то задача один раз статически неопределима. Для составления уравнения деформаций сделаем дополнительный рисунок, отбросив правую заделку и заменив ее неизвестным моментом X . Эта схема называется эквивалентной. Из условия равенства нулю угла закручивания составляется уравнение деформаций: $\varphi_{1-4} = 0$. Или $\varphi_{1-2} + \varphi_{2-3} + \varphi_{3-4} = 0$. С учетом (5.10) получим следующее уравнение деформаций

$$\frac{X\ell}{GI_p} + \frac{X\ell}{2GI_p} + \frac{(X-m)\ell}{2GI_p} = 0.$$

Откуда $X = 0,25m$. По полученным данным строим энэру крутящих моментов.

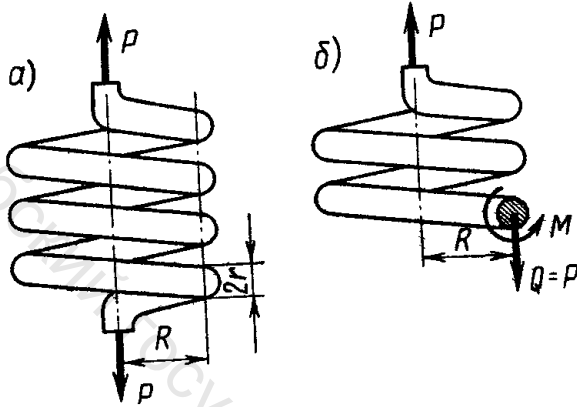


Рис. 5.13

Расчетная схема цилиндрической пружины с малым шагом витка

радиус проволоки, n – число витков пружины.

Отсечем часть пружины (рис. 5.13). Из условия равновесия отсеченной части следует, что в поперечном сечении проволоки действуют поперечная сила и крутящий момент. $Q = P$, $M = PR$.

Таким образом, пружина работает на срез и кручение. Пренебрегая малыми напряжениями, вызванными поперечной силой, получим касательные напряжения в пружине.

$$\tau = \frac{M}{W_p} = \frac{P \frac{D}{2}}{\frac{\pi d^3}{16}} = \frac{8PD}{\pi d^3}. \quad (5.22)$$

Также приведем формулу для осадки пружины λ .

$$\lambda = \frac{8PD^3 n}{Gd^4}. \quad (5.23)$$

Контрольные вопросы

- 5.1. Как формулируется закон Гука при сдвиге?
- 5.2. Какой модуль упругости больше: E или G ?
- 5.3. Какая зависимость существует между крутящим моментом, мощностью, передаваемой валом, и числом оборотов вала?
- 5.4. Какие предположения лежат в основе теории кручения стержня круглого сечения?
- 5.5. Какой угол называется полным углом закручивания?
- 5.6. Что называется полярным моментом инерции? Какова его размерность?

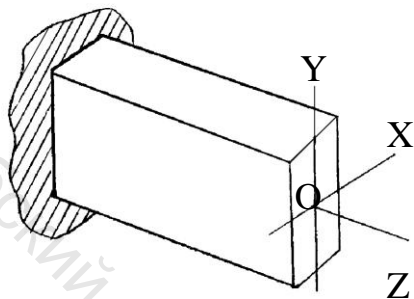
- 5.7. Как пишется формула полного угла закручивания?
- 5.8. Какая величина называется жесткостью при кручении?
- 5.9. В каких точках вала получаются наибольшие напряжения при кручении?
- 5.10. Как распределяются напряжения кручения по поперечному сечению вала?
- 5.11. Какая выгода достигается при высверливании валов?
- 5.12. По какой формуле определяется максимальное напряжение кручения стержня круглого сечения?
- 5.13. Что называется моментом сопротивления кручению? Какова его размерность?
- 5.14. По каким формулам определяются полярный момент инерции и момент сопротивления кручению круга и круглого кольца?
- 5.15. Как должен изменяться диаметр вала, если передаваемая им мощность остается без изменения, а число оборотов увеличивается?
- 5.16. Какие усилия и напряжения возникают при кручении в поперечных сечениях стержня.
- 5.17. Почему аппарат сопротивления материалов неприемлем при расчете равновесного состояния бруса некруглого поперечного сечения при кручении?
- 5.18. В каких точках сечения получаются наибольшие напряжения при кручении бруса прямоугольного сечения?
- 5.19. Какие напряжения возникают в витках цилиндрической винтовой пружины при ее сжатии и растяжении?
- 5.20. По какой формуле определяется осадка цилиндрической спиральной пружины?

ГЛАВА 6

ПРЯМОЙ ИЗГИБ

6.1. Основные понятия

На рис. 6.1 оси бруса ox и oy - главные центральные оси инерции сечения. Плоскости xoz и yoz - главные плоскости инерции балки. Если все силы, действующие на балку, лежат в одной из главных плоскостей инерции и перпендикулярны оси балки, то такой **изгиб называют прямым**. В противном случае изгиб называется косым.



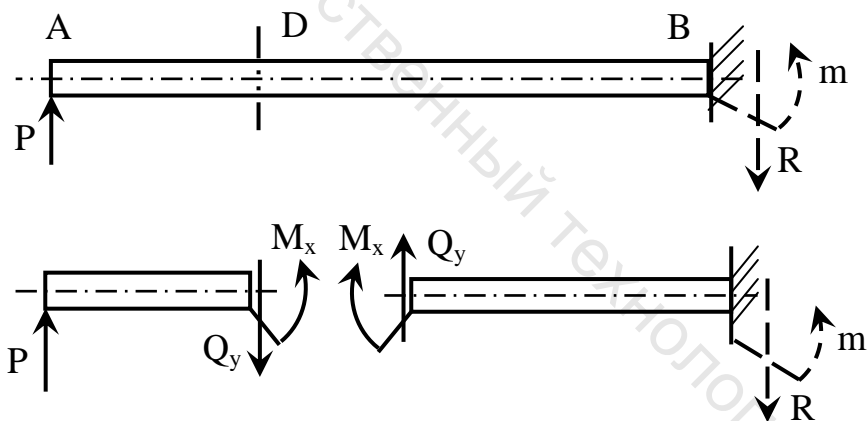
В данной главе изучается прямой изгиб.

6.2 Поперечная сила и изгибающий момент. Построение эпюр

Рис. 6.1. К определению прямого сгиба

На приведенном рис. 6.2 изображена консольная балка.

Консольной называют балку, у которой один конец свободный, а другой - жестко заделан.



Напомним, что с помощью метода сечений определяются внутренние силовые факторы. Разрежем балку в сечении D и раздвинем отсеченные части. Из условия равновесия отдельных частей следует, что из шести внутренних

Рис. 6.2 Консольная балка

силовых факторов здесь возникают два: поперечная сила Q_y и изгибающий момент M_x . Для определения Q_y нужно спроецировать на ось y все внешние силы, действующие на левую (или правую) часть балки. При этом нужно установить такое правило знаков, чтобы обе поперечные силы, показанные на рис. 6.2, были одного знака. Это правило дано на рис. 6.3.

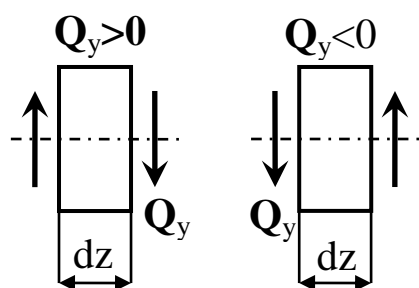


Рис. 6.3. К определению знаков поперечной силы

Для определения M_x нужно вычислить моменты относительно оси x сечения всех внешних сил, действующих на левую (или правую) часть бруса.

Правило знаков для изгибающего момента связано с характером изгиба консоли, которая получается, если в самом разрезе мысленно поместить заделку. Если консоль изгибается вверх (сжатые слои бруса – верхние), то момент положительный, если изгибается вниз (сжатые слои – нижние), то момент отрицательный.

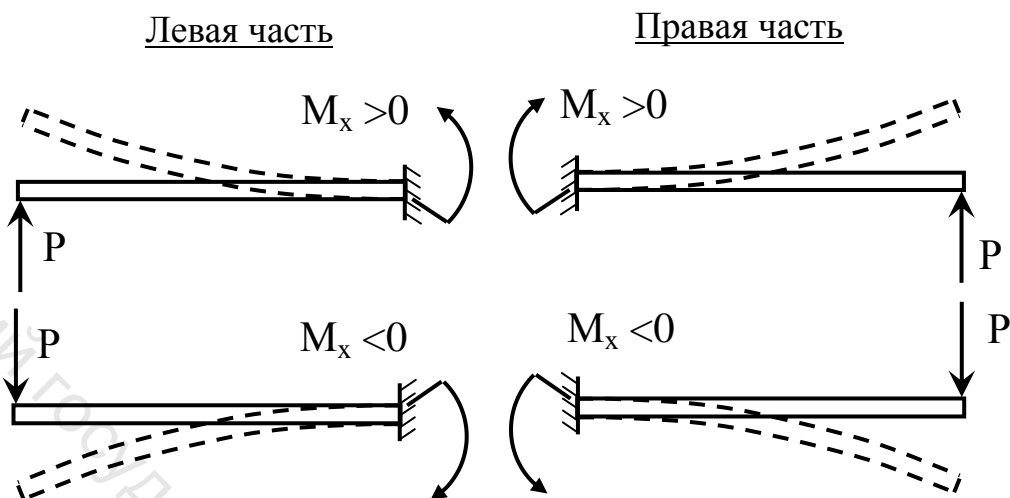


Рис. 6.4. К определению знаков изгибающих моментов

момент отрицательный. Это правило дано на рис. 6.4.

Оказывается, что *любая сила, действующая вверх, создает $M_x > 0$, а сила,*

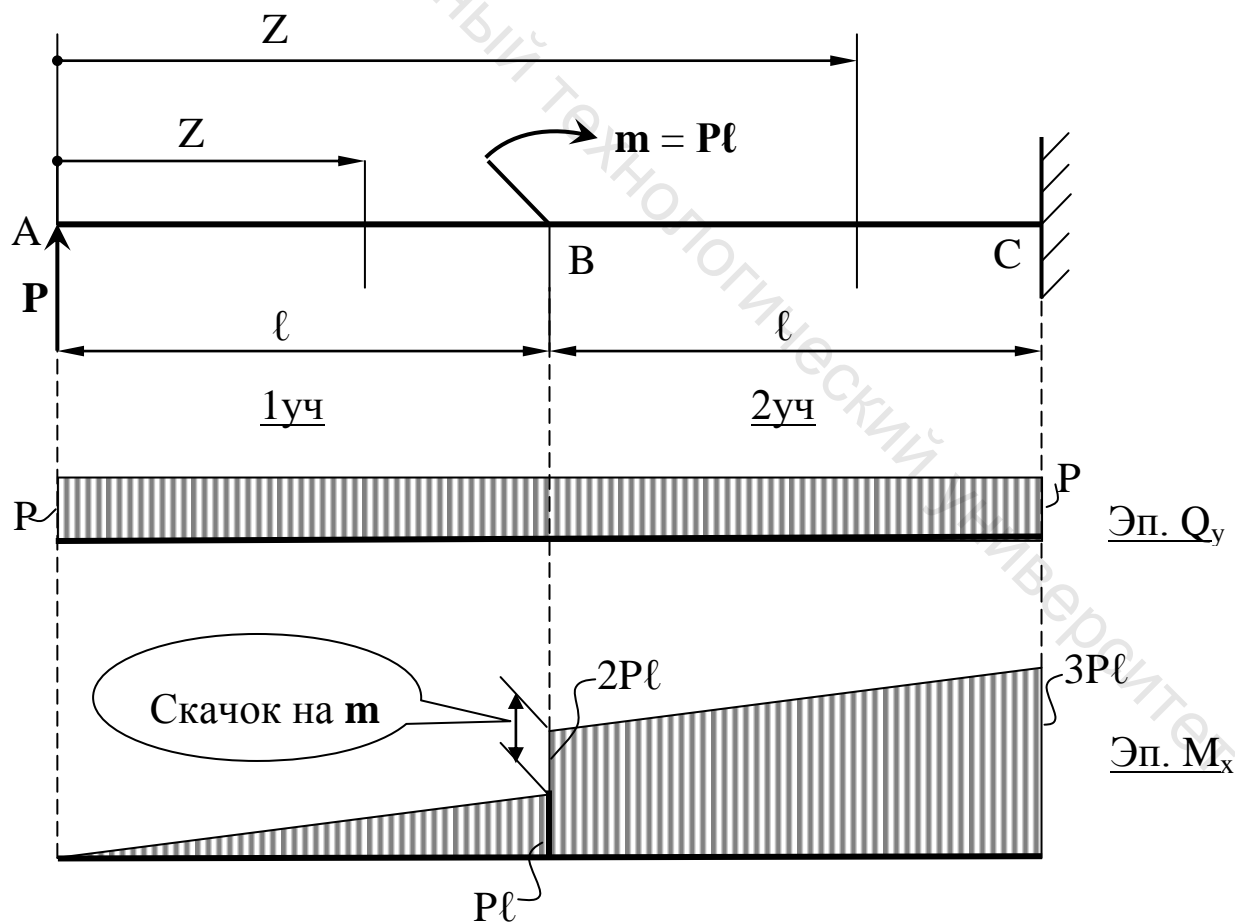


Рис. 6.5. Расчетная схема и эпюры Q_y и M_x в консольной балке

приложенная вниз, дает $M_x < 0$ (независимо от того, какая часть балки рассматривается).

Пример 6.1. Построим эпюры Q_y и M_x в консольной балке, нагруженной силой и парой сил (рис. 6.5).

Решение. С целью составления аналитических выражений для силовых факторов примем начало отсчета координаты z на левом конце балки, разбив ее на два участка, как показано на рис. 6.5.

Участок 1. ($0 \leq z \leq \ell$). $Q_y = P(\text{const})$, $M_x = P \cdot z$, $M_x(0) = 0$, $M_x(\ell) = P \cdot \ell$.

Участок 2. ($\ell \leq z \leq 2\ell$). $Q_y = P(\text{const})$, $M_x = P \cdot z + m$, $M_x(\ell) = 2P \cdot \ell$, $M_x(2\ell) = 3P \cdot \ell$.

Заметим, что скачок на эпюре поперечных сил находится в сечении A , в котором приложена сила P , а скачок на эпюре моментов в том сечении (B) , в котором приложен момент m .

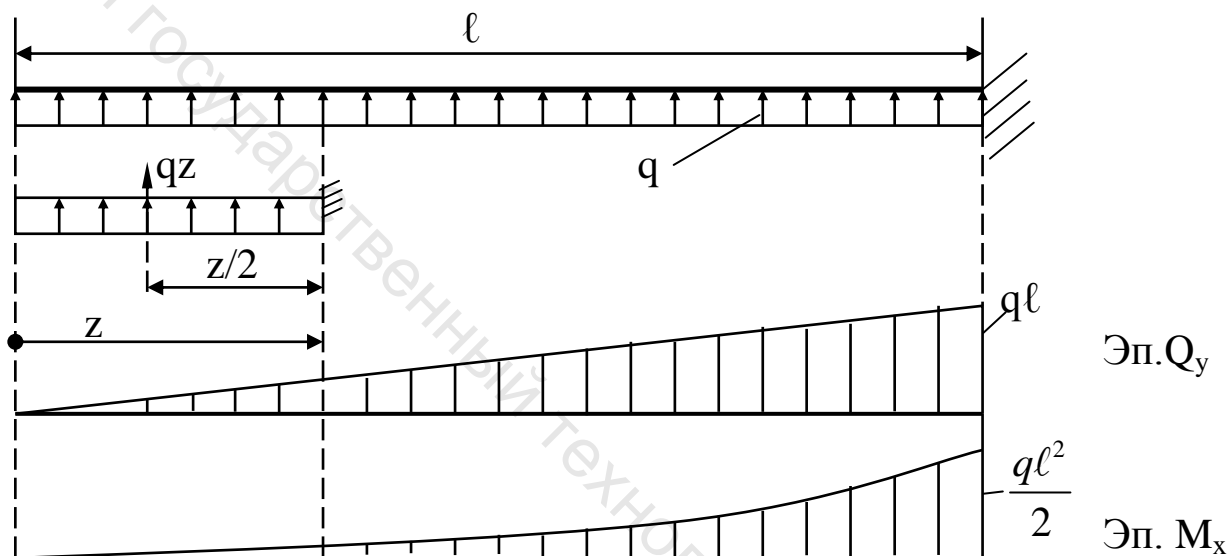


Рис. 6.6. Расчетная схема и эпюры Q_y и M_x в консольной балке

Пример 6.2. Построим эпюры Q_y и M_x в консольной балке (рис. 6.6), нагруженной равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью q (q – это усилие, действующее на единицу длины балки – [кн/м]).

Решение. Под балкой изображена отсеченная часть длиной z с нагрузкой приложенной к ней и равной qz . Мысленно заменяем распределенную нагрузку равнодействующей, приложенной посредине отсеченной части на расстоянии $z/2$ от сечения.

Составим аналитические выражения для поперечной силы и изгибающего момента. Участок $0 \leq z \leq \ell$

$Q_y(z) = qz$ – линейная функция, $M_x(z) = q \cdot z \cdot z/2 = qz^2/2$ – квадратичная парабола. В заделке $Q_y(\ell) = q\ell$, $M_x(\ell) = q\ell^2/2$.

Заметим, что парабола изгибающего момента своей выпуклостью направлена навстречу стрелкам распределенной нагрузки.

6.3. Дифференциальные зависимости между M_x , Q_y и q

Пусть брус нагружен произвольным образом распределенной нагрузкой $q = f(z)$ (рис. 6.7, а).

Выделим из бруса элемент длиной dz и приложим по его краям положительные внутренние усилия (рис. 6.7, б). В пределах малого

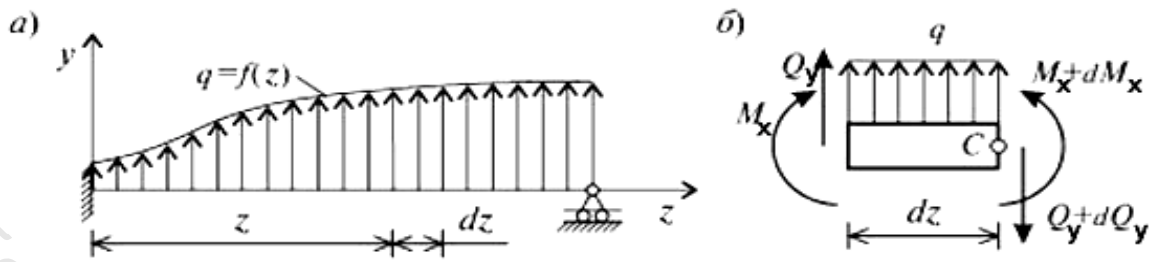


Рис. 6.7. К определению дифференциальных зависимостей: а - схема нагружения; б - внутренние силовые факторы

отрезка dz нагрузку q можно считать распределенной равномерно. Приравняем нулю сумму проекций всех сил на вертикальную ось y и сумму моментов всех сил относительно поперечной оси x , проходящей через точку C (рис. 6.7, б), получим:

$$\sum y = 0, \quad Q_y + qdz - (Q_y + dQ_y) = 0;$$

$$\sum m_k = 0, \quad M_x + Q_y dz + qdz \frac{dz}{2} - (M_x + dM_x) = 0.$$

Производя упрощения и отбрасывая величины высшего порядка малости, получим:

$$\frac{dQ_y}{dz} = q; \tag{6.1}$$

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y, \tag{6.2}$$

откуда

$$\frac{d^2 M_x}{dz^2} = q. \tag{6.3}$$

Итак, производная от поперечной силы по координате z равна интенсивности распределенной нагрузки, а производная от момента – поперечной силе.

Из (6.1) и (6.2) следует, что при $q = \text{const}$ функция Q_y будет линейной, а функция M_x – квадратичной. Если на каких-то участках бруса распределенная нагрузка отсутствует, т.е. $q = 0$, то получим, что $Q_y = \text{const}$, а M_x является линейной функцией от z .

Из дифференциальных зависимостей следуют правила построения эпюр.

6.4. Правила построения эпюр поперечной силы и изгибающего момента

- При движении по балке слева направо имеет место закономерность:
 - при $Q_y > 0$ изгибающий момент возрастает,
 - при $Q_y < 0$ момент убывает,
 - если на участке $Q_y = 0$, то момент имеет постоянное значение.
- На участке балки, свободном от распределенной нагрузки, поперечная сила постоянна, а момент меняется по линейному закону.
- На участке, нагруженном равномерно распределенной нагрузкой, Q_y изменяется по линейному закону, а M_x - по квадратичной параболе.

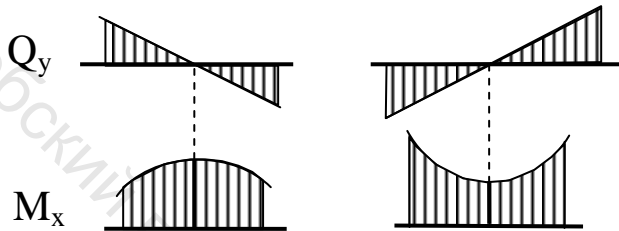


Рис. 6.8

Схема для контроля построения эпюр движения по балке слева направо

4. В том сечении, в котором прямая эпюры Q_y переходит через ноль (рис. 6.8), на эпюре моментов будет экстремум (максимум или минимум).

5. В тех сечениях балки, в которых приложены сосредоточенные силы, на эпюре Q_y будут скачки на величину этих сил (рис. 6.9). При направлении скачка совпадает с направлением силы.

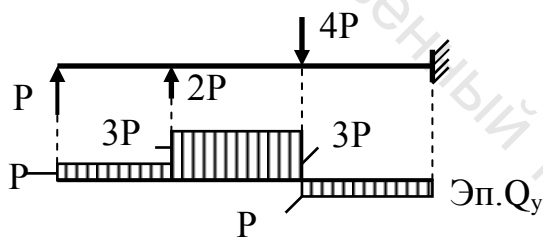


Рис. 6.9. Схема для контроля построения эпюр

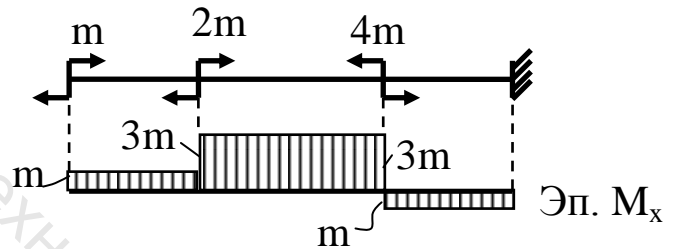


Рис. 6.10. Схема для контроля построения эпюр

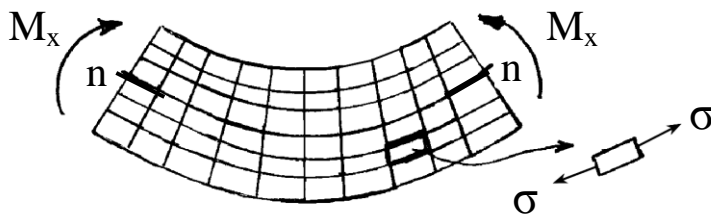
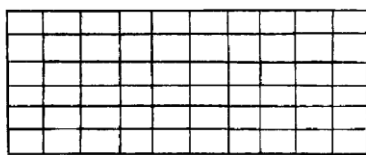


Рис. 6.11. Деформация бруса при изгибе

6. В сечениях, в которых действуют пары сил, на эпюре M_x будут скачки на величину моментов этих пар (рис. 6.10).

6.5. Предпосылки теории изгиба

Нанесем на поверхность бруса продольные и поперечные риски и рассмотрим картину его деформирования (рис. 6.11).

Анализ деформации бруса позволяет принять следующие предпосылки:

- Верхние волокна сжаты, нижние - растянуты и существует некоторый нейтральный слой $n-n$, не меняющей своей длины.

2. Сечения, плоские и перпендикулярные оси до деформации, остаются плоскими и перпендикулярными оси после деформации (выполняется гипотеза плоских сечений).
3. Продольные слои друг на друга не давят (на рис. 6.11 показано напряжение в волокне вдоль оси z , $\sigma_y = 0$).
4. Предполагаем, что материал бруса следует закону Гука - $\sigma = E\varepsilon$.

6.6. Вывод формулы для нормальных напряжений

Рассмотрим наиболее простой случай изгиба, называемый **чистым изгибом**. Под чистым изгибом понимается такой вид сопротивления, при котором в поперечных сечениях бруса возникают только изгибающие моменты, а поперечные силы равны нулю. Для тех участков бруса, где соблюдается данное условие, изгибающий момент, согласно выражению (6.2), вдоль продольной оси z принимает постоянное значение. Так как в любом сечении стержня при чистом изгибе $M_x(z) = \text{const}$, то для однородного бруса постоянного поперечного сечения изменение кривизны постоянно вдоль оси z . Под действием изгибающих моментов ось бруса искривляется. Исходя из этого, ось бруса принимает форму дуги окружности с радиусом кривизны ρ (рис. 6.12). Процесс формирования деформаций при чистом изгибе может рассматриваться как результат поворота плоских поперечных сечений друг относительно друга.

Рассмотрим два смежных сечения, отстоящих один от другого на расстоянии dz (рис. 6.12).

В результате изгиба эти сечения наклонятся, образуя между собой угол $d\theta$, в связи с чем верхние волокна удлиняются, а нижние – укоротятся. Очевидно, что при этом существует слой, длина которого не изменилась. Назовем его **нейтральным слоем** и обозначим отрезком CD . При этом $CD =$

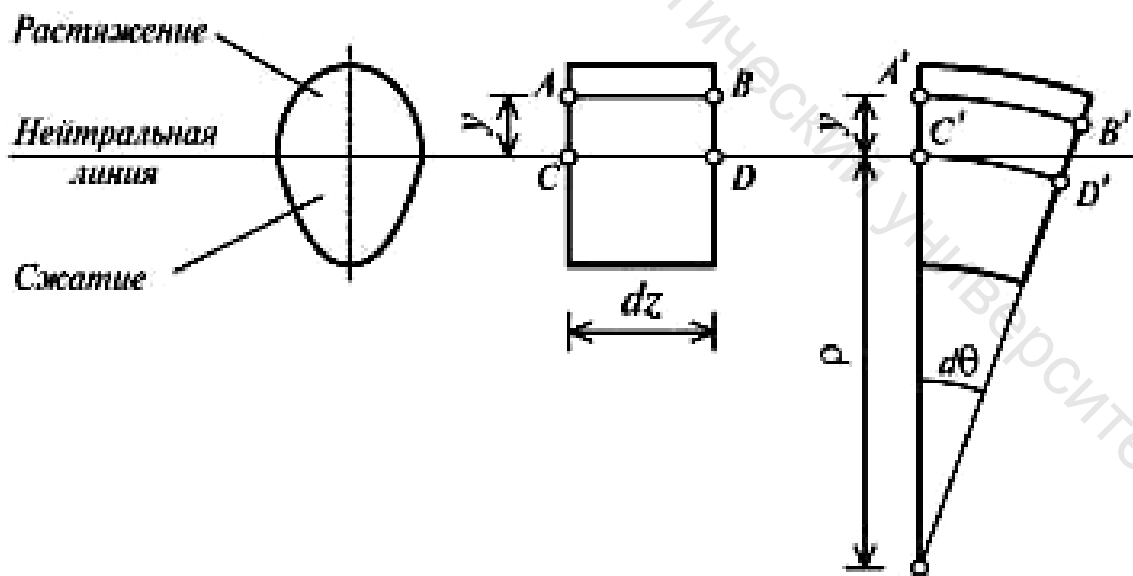


Рис. 6.12. К выводу формул при изгибе

$C'D' = dz = \rho d\theta$. Произвольный отрезок AB , расположенный от CD на расстоянии y , в результате изгиба удлинится на величину $A'B' - AB$. С учетом

построений, изображенных на рис. 6.12, легко определить величину его линейной деформации:

$$\varepsilon = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{A'B' - dZ}{dZ} = \frac{(\rho + y)d\theta - dZ}{dZ} = y \frac{d\theta}{dZ} = \frac{y}{\rho}. \quad (6.4)$$

Если предположить, что продольные волокна не давят друг на друга, то каждое из них будет находиться в условиях простого растяжения – сжатия, как показано на рис. 6.11. Тогда переход от деформаций к нормальным напряжениям σ можно осуществить посредством закона Гука. На основании закона Гука с учетом (6.4) получим выражение для σ :

$$\sigma = E\varepsilon = Ey/\rho. \quad (6.5)$$

В этом выражении неизвестно ρ , а также неясно, откуда отсчитывать y , так как не определено положение нейтрального слоя. Установим положение нейтральной оси x , от которой происходит отсчет координаты y (рис. 6.13). Учитывая, что сумма элементарных сил σdA по площади поперечного сечения A дает нормальную силу N_z . Но при чистом изгибе $N_z = 0$, следовательно:

$$N_z = \int_A \sigma dA = \frac{E}{\rho} \int_A y dA = 0 \rightarrow \int_A y dA = 0. \quad (6.6)$$

Как известно, интеграл (6.6) представляет собой статический момент сечения относительно нейтральной линии (оси x). Статический момент равен нулю, значит, нейтральная линия проходит через центр тяжести сечения.

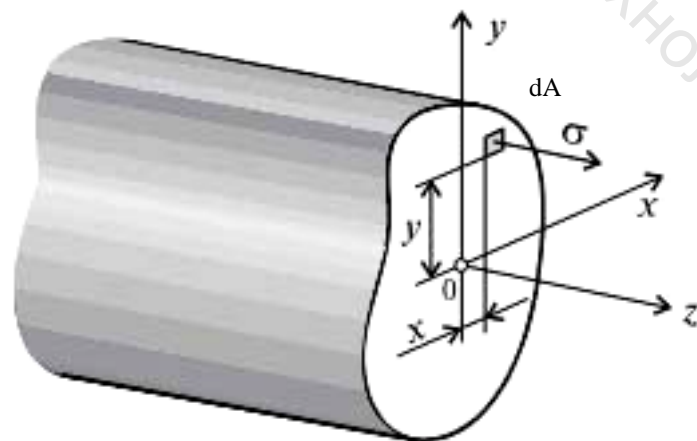


Рисунок 6.13. Схема для определения нормальных напряжений

Выразим момент внутренних сил M_x относительно нейтральной оси через σ . Очевидно, что

$$M_x = \int_A \sigma y dA. \quad (6.7)$$

С учетом выражения (6.5) получим:

$$M_x = \frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = \frac{E}{\rho} I_x. \quad (6.8)$$

Откуда

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x}, \quad (6.9)$$

где $\frac{1}{\rho}$ – кривизна нейтрального волокна. Получена формула для кривизны изогнутой оси балки или ее упругой линии (этот термин ввел Л.Эйлер). Произведение EI_x называется жесткостью поперечного сечения при изгибе. Притом, E – физическая характеристика жесткости, а I_x – геометрическая характеристика.

Из формулы (6.5), исключая $1/\rho$ с помощью выражения (6.9), окончательно получим:

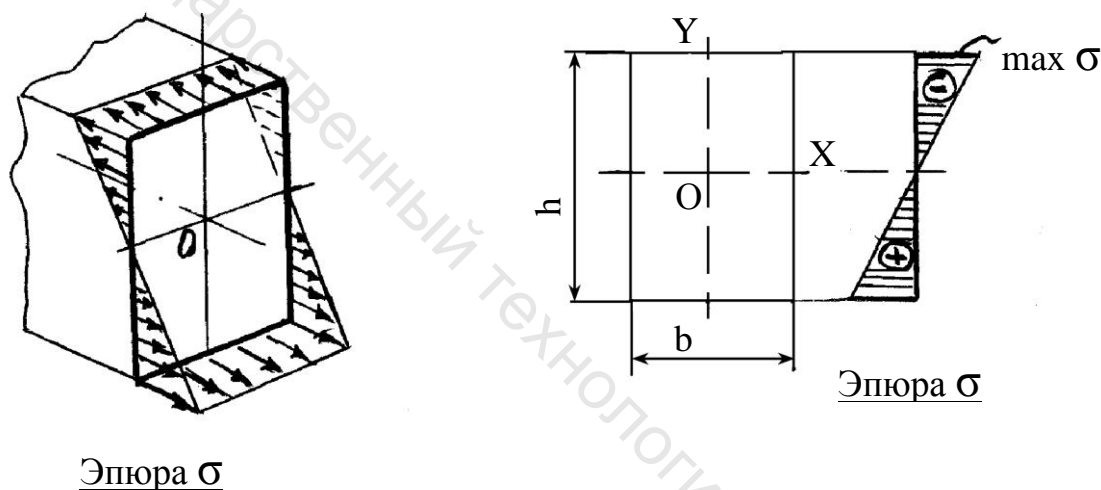


Рис. 6.14. Эпюра нормальных напряжений при изгибе

$$\sigma = \frac{M_x y}{I_x}. \quad (6.10)$$

Откуда следует, что нормальные напряжения σ в поперечном сечении бруса при его изгибе изменяются по линейному закону (рис. 6.14) в зависимости от координаты y и принимают максимальное значение на уровне крайних волокон (при $y = y_{\max}$):

$$\sigma_{\max} = \frac{M_x}{W_x}, \quad (6.11)$$

где $W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}$ – момент сопротивления сечения.

Замечания

1. При положительном изгибающем моменте верхние слои балки сжаты, значит, в точках верхней половины сечения ($y > 0$) напряжения отрицательны. Следовательно, для соответствия в знаках формулу нужно писать со знаком минус: $\sigma = -M_x y / I_x$, (нередко минус опускают).

2. С помощью формулы (6.10) мы могли бы найти нормальные напряжения σ в сечении балки по определенному методом сечений изгибающему моменту M_x . Однако нам пока неизвестно положение нейтральных волокон, от которых отсчитывается расстояние y . Найдем его, учитывая, что при чистом изгибе продольная сила N_z равна нулю.

$$N_z = \int_A \sigma dA = \int_A \frac{M_x}{I_x} y dA = \frac{M_x}{I_x} \int_A y dA = \frac{M_x}{I_x} S_x = 0.$$

Отсюда ясно, что, так как статический момент S_x равен нулю, то ось y является центральной осью сечения. Учтем теперь, что при изгибе в плоскости xu изгибающий момент M_y равен нулю.

$$M_y = \int_A \sigma \cdot x \cdot dA = \int_A \left(\frac{M_x y}{I_x} \right) \cdot x \cdot dA = \left(\frac{M_x}{I_x} \right) \int_A y \cdot x \cdot dA = \left(\frac{M_x}{I_x} \right) I_{xy} = 0.$$

Таким образом, при прямом изгибе в плоскости zu оси x и y должны быть такими, чтобы центробежный момент инерции I_{xy} был равен нулю, т.е. главными осями сечения. Формула (6.10) верна лишь в том случае, если оси x и y – главные центральные оси инерции сечения.

3. В случае **поперечного изгиба** в отличие от **чистого изгиба** в сечении бруса возникает не только изгибающий момент, но и поперечная сила Q_y . Эта сила представляет собой равнодействующую касательных напряжений τ .

Дадим грубую оценку величин напряжений τ и σ на примере консольной балки показанной на рис. 6.5 в предположении, что $m=0$.

Для оценки τ предположим, что сечение представляет собой квадрат со стороной b и напряжения распределены равномерно. Тогда $\tau = P/b^2$.

На самом деле напряжения распределены по сечению неравномерно, да и сечение не обязательно является квадратом, это может быть прямоугольник, круг или иная фигура. Поэтому полученная формула неверна. Однако если определять точно максимальное значение τ , результат будет отличаться от полученного лишь числовым множителем, никаких иных размерных величин в формулу не войдет.

Будем говорить, что касательное напряжение τ имеет порядок P/b^2 :

$$\tau \sim \frac{P}{b^2}. \quad (6.12)$$

Оценим нормальные напряжения σ . Составляя уравнение моментов относительно заделки, найдем, что момент внешней силы есть $2P\ell$. Момент внутренних сил в сечении зависит только от σ и размеров сечения, то есть

величины b . Соображения размерности приводят нас к тому, что порядок величины этого момента есть σb^3 . Поэтому

$$\sigma \sim \frac{P}{b^2} \cdot \frac{2\ell}{b}. \quad (6.13)$$

Сравнивая (6.12) и (6.12) видим, что $\sigma/\tau \sim 2\ell/b$, т. е. если длина балки 2ℓ велика по сравнению с поперечным размером b , то касательные напряжения τ малы по сравнению с нормальными σ .

Это нужно понимать в том смысле, что при увеличении длины балки с сохранением ее поперечного сечения касательные напряжения остаются неизменными, а нормальные возрастают пропорционально длине ℓ . Таким образом, всегда можно подобрать настолько большое отношение ℓ/b , чтобы максимальные касательные напряжения составляли сколь угодно малую долю от наибольших нормальных напряжений. В теории изгиба в курсе сопромата отношение длины к поперечным размерам принимается достаточно большим, и нормальные напряжения считаются наиболее важными.

6.7. Эпюры напряжений. Условие прочности

Показанные на рис. 6.14 эпюры напряжений даны для положительного изгибающего момента, вызывающего сжатие верхних слоев бруса. Запишем условие прочности:

$$\max \sigma = \max M_x y_{\max} / I_x = \max M_x / W_x \leq [\sigma],$$

где $W_x = I_x / y_{\max}$ есть момент сопротивления поперечного сечения при изгибе.

Получим формулы для моментов сопротивления прямоугольника и круга (рис. 6.15).

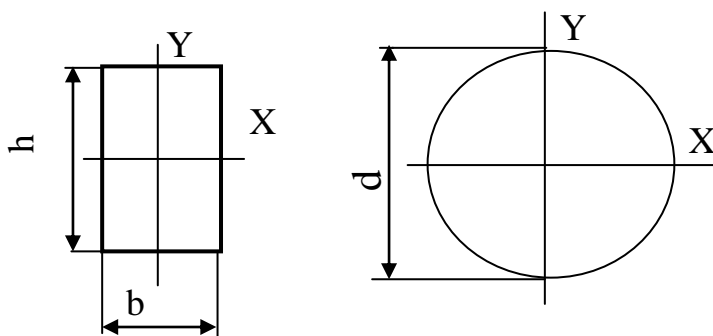


Рис. 6.15. К определению моментов сопротивления

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{bh^3}{12 \cdot \frac{h}{2}} = \frac{bh^2}{6}. \quad (6.14)$$

$$W_x = \frac{\pi d^4}{64 \cdot \frac{d}{2}} = \frac{\pi d^3}{32}. \quad (6.15)$$

6.8. Рациональные сечения балок

Поскольку материал балки, расположенный в области ее нейтрального слоя, нагружен малыми напряжениями, то при его удалении получим более

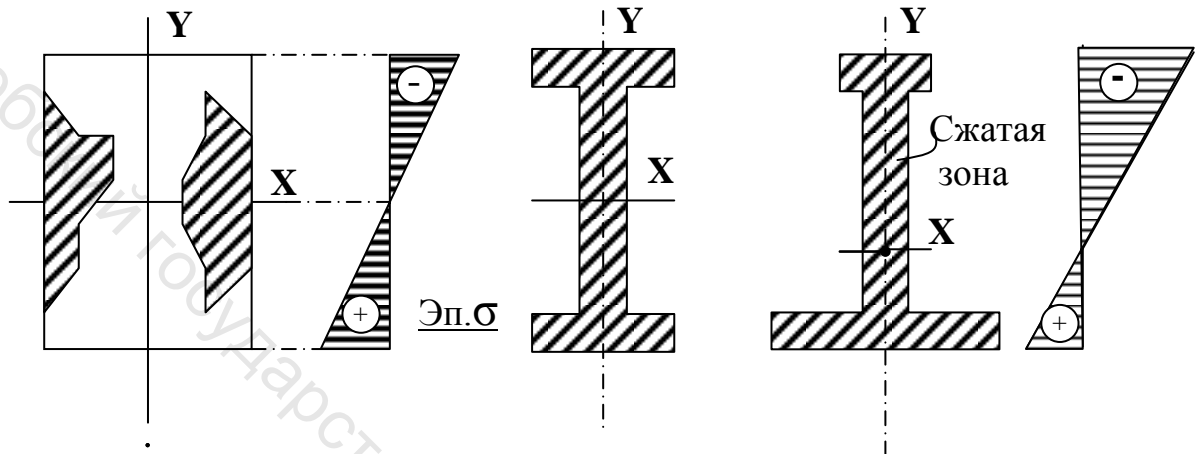


Рис. 6.16. Выбор рационального сечения балок при изгибе

экономичный профиль, называемый двутавром (рис. 6.16,а). Для балки из хрупкого материала рациональным будет несимметричный двутавр (рис. 6.16,б), так как $[\sigma_c] > [\sigma_p]$.

6.9. Перемещения при изгибе. Дифференциальное уравнение упругой линии

Изгиб балки сопровождается искривлением ее оси. При поперечном изгибе

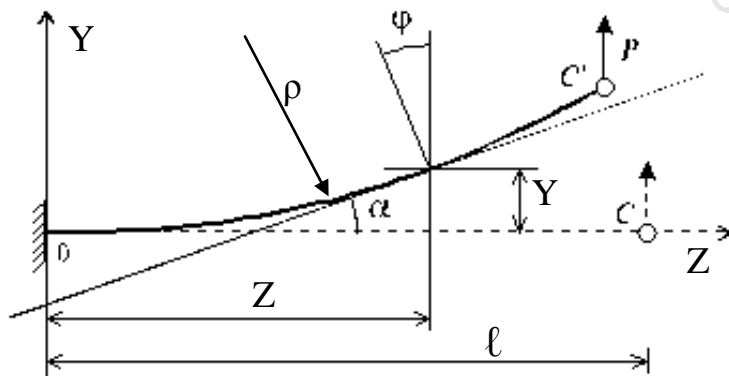


Рис. 6.17. К выводу формул

ось балки принимает вид кривой, расположенной в плоскости действия поперечных нагрузок. При этом точки оси получают поперечные перемещения, а поперечные сечения совершают повороты относительно своих нейтральных осей. Углы поворота поперечных сечений φ принимаются равными углом наклона α ,

касательной к изогнутой оси балки (рис. 6.17). Прогибы и углы поворотов в балках являются функциями координаты z и их определение необходимо для расчета жесткости. Рассмотрим изгиб стержня в одной из главных плоскостей, например, в плоскости yz . Как показывает практика, в составе реальных сооружений стержни испытывают весьма малые искривления ($Y_{\max}/\ell = 10^{-2} - 10^{-3}$, где Y_{\max} — максимальный прогиб; ℓ — пролет балки). В этом случае неизвестными функциями, определяющими положение точек

поперечных сечений балки, являются $y(z)$ и $\varphi(z) = \alpha(z)$ (рис. 6.17). Совокупность значений этих параметров по длине балки образуют две функции от координаты z – функцию перемещений $y(z)$ и функцию углов поворота $\varphi(z)$. Как известно, тангенс угла наклона касательной к графику функции есть первая производная от функции. Из геометрических построений (рис. 6.17) наглядно видно, что угол наклона касательной к оси z и угол поворота поперечных сечений при произвольном z равны между собой. Для малых углов тангенс равен аргументу. Учитывая малость прогибов и углов, получаем соотношение:

$$\varphi(z) \approx \text{tg } \varphi = dy(z)/dz. \quad (6.16)$$

Из курса математического анализа известно, что кривизна $1/\rho$ плоской кривой $y(z)$ выражается следующей формулой:

$$\frac{1}{\rho} = \pm \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}} \quad (6.17)$$

Дифференциальное уравнение упругой линии получим, приравняв выражение для кривизны (6.9) из теории изгиба к математическому выражению кривизны (6.17).

$$\frac{M_x}{EI_x} = \pm \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}} \quad (6.18)$$

В этом уравнении y' имеет порядок 10^{-2} , а $(y')^2$ уже 10^{-4} . Как величину, малую по сравнению с единицей, ее отбросим. Дифференциальное уравнение упругой линии примет следующий вид:

$$\pm y''(z) = \frac{M_x(z)}{EI_x} \quad (6.19)$$

Уравнение (6.19), строго говоря, справедливо для случая чистого изгиба балки, т.е. когда изгибающий момент $M_x(z)$ имеет постоянное значение, а поперечная сила равна нулю. Однако это уравнение используется и в случае поперечного изгиба, что равносильно пренебрежению искривлений поперечных сечений за счет сдвигов, на основании гипотезы плоских сечений.

Выбор знака определяется принятой системой координат. Для системы координат, принятой на рис. 6.18,а, имеем одинаковые знаки для кривизны y'' и для момента M_x .

Следовательно, в этой системе координат следует пользоваться уравнением (6.19) в виде

$$y''(z) = \frac{M_x(z)}{EI_x} \quad (6.20)$$

Для системы координат, принятой на рисунке 6.18,б, имеем разные знаки для y'' и M_x . Следовательно, в этом случае следует пользоваться уравнением (6.19) в виде

$$y''(z) = -\frac{M_x(z)}{EI_x} \quad (6.21)$$

В дальнейшем будем пользоваться системой координат, показанной на

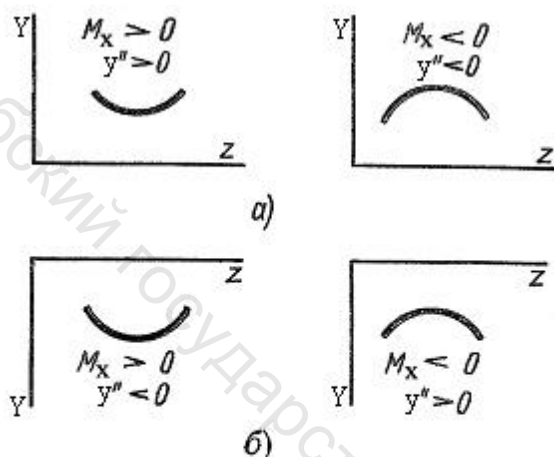


Рисунок 6.18

К определению знаков и системы координат произвольные постоянные. На границах соседних участков прогибы и углы поворота являются непрерывными функциями. Данное обстоятельство позволяет определить необходимое число граничных условий для вычисления произвольных постоянных интегрирования.

Если балка имеет n – конечное число участков, то из $2n$ числа граничных условий получим $2n$ алгебраических уравнений относительно $2n$ постоянных интегрирования. Поэтому при двух или большем числе участков балки применение изложенного метода становится затруднительным.

Ниже рассмотрено определение линейных и угловых перемещений при изгибе балки постоянного сечения методом начальных параметров. Этот метод не требует составления выражений изгибающих моментов и интегрирования дифференциального уравнения изогнутой оси балки. Число постоянных, подлежащих определению, не превышает двух, независимо от числа участков балки.

6.10. Метод начальных параметров

Рассмотрим балку (рис. 6.19) с постоянным поперечным сечением, нагруженную взаимоуравновешенной системой положительных силовых факторов (т.е., вызывающих вертикальные перемещения сечений балки в положительном направлении оси Y). Начало системы координат поместим на левом конце балки так, чтобы ось z проходила вдоль оси балки, а ось Y была бы направлена вверх. На балку действуют: момент M , сосредоточенная сила P и равномерно распределенная на участке бруса нагрузка интенсивностью q (рис. 6.19).

Задача заключается в том, чтобы выявить особенности, вносимые в уравнение упругой линии, различными типами внешних силовых факторов.

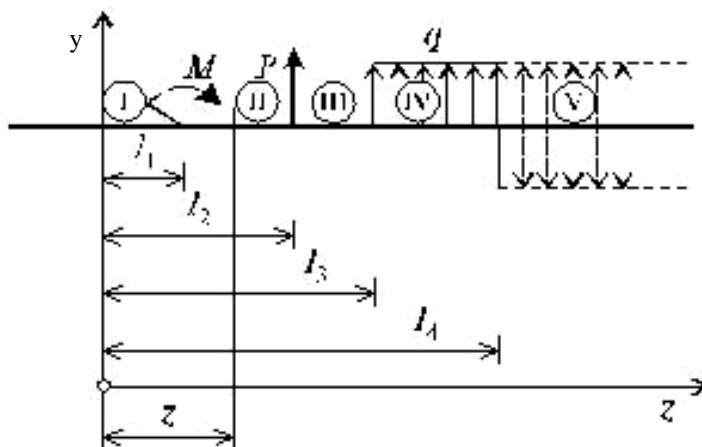


Рис. 6.19. К расчету метода нормальных параметров

Для этого составим выражение изгибающих моментов для каждого из пяти участков заданной системы.

Участок I ($0 \leq z \leq l_1$) $M_x(z) = 0$.

Участок II ($l_1 \leq z \leq l_2$) $M_x(z) = M$.

Участок III ($l_2 \leq z \leq l_3$) $M_x(z) = M + P(z - l_2)$.

Участок IV ($l_3 \leq z \leq l_4$) $M_x(z) = M + P(z - l_2) + \frac{q(z - l_3)^2}{2}$.

Участок V ($l_4 \leq z \leq l_5$) $M_x(z) = M + P(z - l_2) + \frac{q(z - l_3)^2}{2} - \frac{q(z - l_4)^2}{2}$.

На участке V, где распределенная нагрузка отсутствует, при выводе выражения для изгибающего момента, с целью сохранения рекуррентности формул для разных участков, была приложена взаимоуравновешенная распределенная нагрузка.

Для вывода **обобщенного** выражения изгибающего момента введем следующий оператор $\left|_{z > l_i}$, означающий, что члены выражения, стоящие

перед ним следует учитывать при $z > l_i$ и игнорировать при $z \leq l_i$. На основании этого, обобщенное выражение момента $M_x(z)$ для произвольного сечения z может быть записано единой формулой:

$$M_x(z) = M \left|_{z > l_1} + P(z - l_2) \left|_{z > l_2} + \frac{q(z - l_3)^2}{2} \left|_{z > l_3} - \frac{q(z - l_4)^2}{2} \right|_{z > l_4} \right. \quad (6.22)$$

Подставляя (6.22) в (6.20) и дважды интегрируя, получим выражение для прогибов:

$$EI_x y(z) = C_0 + C_1 z + \frac{M}{2} (z - l_1)^2 \Big|_{z > l_1} + \frac{P}{6} (z - l_2)^3 \Big|_{z > l_2} + \frac{q(z - l_3)^4}{24} \Big|_{z > l_3} - \frac{q(z - l_4)^4}{24} \Big|_{z > l_4} . \quad (6.23)$$

Постоянные интегрирования C_0 и C_1 по своей сути означают:

$$C_0 = EI_x y(0) , C_1 = EI_x y'(0) = EI_x \varphi(0) \quad (6.24)$$

и определяются из граничных условий на левом конце балки. Тогда формула для прогибов примет следующий окончательный вид:

$$EI_x y(z) = EI_x y_0 + EI_x \varphi_0 z + \frac{M}{2} (z - l_1)^2 \Big|_{z > l_1} + \frac{P}{6} (z - l_2)^3 \Big|_{z > l_2} + \frac{q(z - l_3)^4}{24} \Big|_{z > l_3} - \frac{q(z - l_4)^4}{24} \Big|_{z > l_4} . \quad (6.25)$$

Соответственно, формула для углов поворотов сечений балки определяется из (6.25) простым дифференцированием:

$$EI_x \varphi(z) = EI_x \varphi_0 + M (z - l_1) \Big|_{z > l_1} + \frac{P}{2} (z - l_2)^2 \Big|_{z > l_2} + \frac{q(z - l_3)^3}{6} \Big|_{z > l_3} - \frac{q(z - l_4)^3}{6} \Big|_{z > l_4} . \quad (6.26)$$

Как видно, для определения прогибов и углов поворота балок данным методом начальных параметров достаточно знание лишь значений прогиба y_0 , угла поворота φ_0 в начале системы координат, т.е. так называемых **начальных параметров**. Поэтому данный метод и называется методом начальных параметров.

Пример.6.3. Для схем стальных балок I и II, изображенных на рис. 6.20 и 6.21, определить методом начальных параметров углы поворота сечения и прогиб в точке D . Модуль упругости $E = 2 \cdot 10^8$ кН/м². Поперечные сечения балок: схема I – круглое диаметром $d = 0,24$ м, схема II – квадратное со стороной $a = 0,2$ м.

Решение

Схема I.

1. *Определение опорных реакций балки (рисунок 6.20)*

$$\Sigma y = 0, R_0 + q \cdot c - P = 0, R_0 = -q \cdot c + P = -10 \cdot 1,4 + 12 = -2 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_0 = 0, M_0 - q c (b + 0,5 c) + M + P (b + c + e) = 0 ,$$

$$M_0 = q c (b + 0,5 c) - M - P (b + c + e) = 10 \cdot 1,4 \cdot (1,8 + 0,5 \cdot 1,4) -$$

$$-20 - 12 \cdot (1,8 + 1,4 + 1,2) = -37,8 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

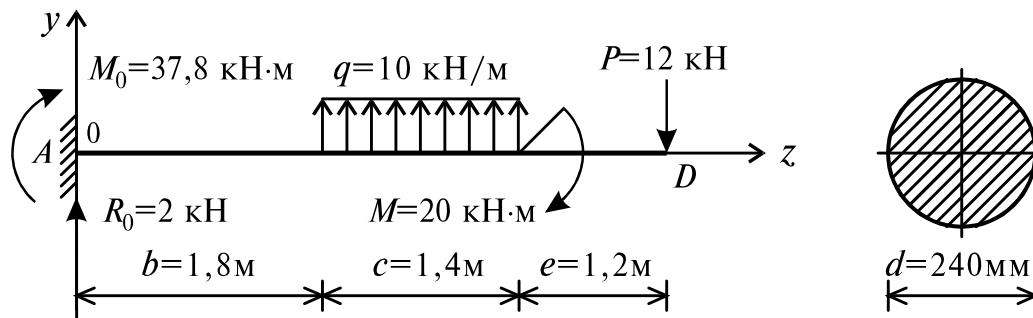


Рис. 6.20. Схема к расчету

Для проверки правильности определения опорных реакций составим уравнения равновесия:

$$\sum M_D = 0, M_0 + R_0 \cdot 4,4 + q \cdot c \cdot (0,5 \cdot c + e) + M = -37,8 - 2 \cdot 4,4 + 10 \cdot 1,44 \cdot (0,5 \cdot 1,4 + 1,2) + 20 = 46,6 - 46,6 = 0.$$

Реакции найдены верно.

2. Применение метода начальных параметров. Используя уравнение (6.24), для нашего случая запишем:

$$EI_x y(z) = EI_x y_0 + EI_x \varphi_0 z + \frac{M_0 z^2}{2!} + \frac{R_0 z^3}{3!} + \frac{q(z-b)^4}{4!} \Big|_{z>b} - \frac{q(z-b-c)^4}{4!} \Big|_{z>b+c} + \frac{M(z-b-c)^2}{2!} \Big|_{z>b+c}.$$

Здесь M_0 и R_0 – момент и реакция в заделке (т.е. в начале координат). Знак $\Big|_{z>a}$ означает, что слагаемое, после которого он стоит, нужно учитывать при $z > a$ и не надо – при $z \leq a$. Начальные параметры имеют значения: $y_0 = 0$; $\varphi_0 = 0$; $M_0 = -37,8 \text{ кН}\cdot\text{м}$, $R_0 = -2 \text{ кН}$ (знак реакций определяется по знаку перемещения вызванного этими усилиями). Тогда выражение для определения прогибов будет иметь вид:

$$EI y(z) = -\frac{37,8 z^2}{2} - \frac{2 z^3}{6} + \frac{10(z-1,8)^4}{24} \Big|_{z>1,8} - \frac{10(z-3,2)^4}{24} \Big|_{z>3,2} + \frac{20(z-3,2)^2}{2} \Big|_{z>3,2}.$$

Соответственно выражение для определения углов поворота будет:

$$EI \varphi(z) = -37,8 \cdot z - z^2 + \frac{10(z-1,8)^3}{6} \Big|_{z>1,8} - \frac{10(z-3,2)^3}{6} \Big|_{z>3,2} + 20 \cdot (z-3,2) \Big|_{z>3,2}.$$

С помощью этих выражений определяем y_D и φ_D :

$$EI y_D = -\frac{37,8 \cdot 4,4^2}{2} - \frac{2 \cdot 4,4^3}{6} + \frac{10 \cdot (4,4-1,8)^4}{24} - \frac{10 \cdot (4,4-3,2)^4}{24} + \frac{20 \cdot (4,4-3,2)^2}{2} = -361,7 \text{ кН}\cdot\text{м}^3.$$

$$EI\varphi_D = -37,8 \cdot 4,4 - 4,4^2 + \frac{10 \cdot 2,6^3}{6} - \frac{10 \cdot 1,2^3}{6} + 20 \cdot 1,2 = -135,27 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Жесткость сечения при $E = 2 \cdot 10^8 \text{ кН/м}^2$ равна:

$$EI = E \frac{\pi d^4}{64} = 2 \cdot 10^8 \cdot \frac{3,14 \cdot 2,4^4 \cdot 10^{-4}}{64} = 326 \cdot 10^2 \text{ кН} \cdot \text{м}^2.$$

Тогда, окончательно:

$$y_D = -\frac{361,7}{326 \cdot 10^2} = -0,011 \text{ м}, \quad \varphi_D = -\frac{135,27}{326 \cdot 10^2} = -0,004 \text{ рад}.$$

Прогиб точки D происходит вниз, а сечение поворачивается по часовой стрелке.

Схема II.

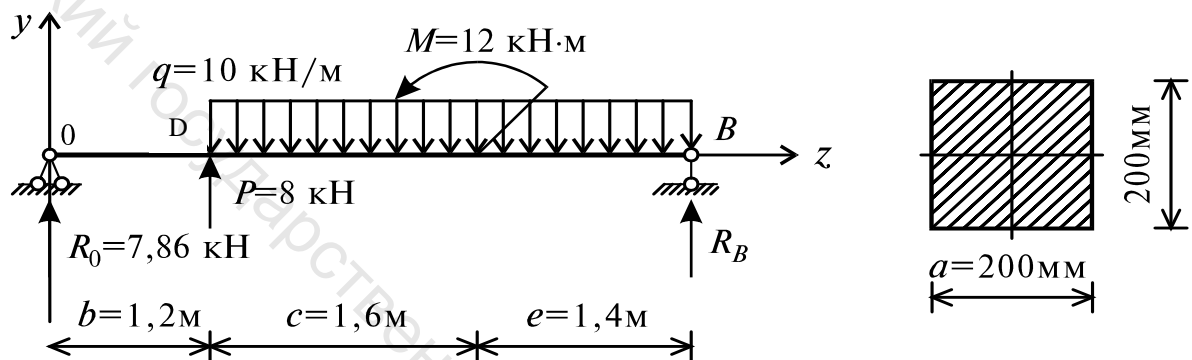


Рис. 6.21. Схема к расчету

1. Определение опорных реакций балки (рис. 6.21).

$$\Sigma M_0 = 0, \quad R_B (b + c + e) - q \cdot (c + e) \cdot [b + 0,5 \cdot (c + e)] + M + P b = 0,$$

$$R_B = \frac{q \cdot (c + e) [b + 0,5 \cdot (c + e)] - M - P \cdot b}{b + c + e} = \frac{10 \cdot 3 \cdot (1,2 + 1,5) - 12 - 8 \cdot 1,2}{4,2} = 14,14 \text{ кН};$$

$$\Sigma M_B = 0, \quad R_0 (b + c + e) - 0,5 \cdot q \cdot (c + e)^2 - M + P \cdot (c + e) = 0,$$

$$R_0 = \frac{0,5 \cdot q \cdot (c + e) (c + e) + M - P \cdot (c + e)}{b + c + e} = \frac{10 \cdot 4,5 + 12 - 8 \cdot 3}{4,2} = 7,86 \text{ кН}.$$

Для проверки правильности определения опорных реакций составим уравнение равновесия сил по оси y:

$$\Sigma y = 0; \quad R_0 + R_B + P - q(c + e) = 7,86 + 14,14 + 8 - 10 \cdot 3 = 30 - 30 = 0.$$

Реакции найдены верно.

2. Применение метода начальных параметров. Используя метод начальных параметров, для рассматриваемой балки запишем:

$$EIy(z) = EIy_0 + EI\varphi_0 z + \frac{M_0 z^2}{2!} + \frac{R_0 z^3}{3!} + \frac{P(z-b)^3}{3!} \Big|_{z>b} - \frac{q(z-b)^4}{4!} \Big|_{z>b} - \frac{M(z-b-c)^2}{2!} \Big|_{z>b+c}$$

Из условий закрепления балки при $z = 0$ имеем: $y_0 = 0; M_0 = 0$.

Подставляя числовые значения, получим:

$$EIy(z) = EI\varphi_0 z + \frac{7,86 \cdot z^3}{6} + \frac{8 \cdot (z - 1,2)^3}{3} \Big|_{z>1,2} - \frac{10 \cdot (z - 1,2)^4}{24} \Big|_{z>1,2} - \frac{1,2 \cdot (z - 2,8)^2}{2} \Big|_{z>2,8}.$$

В данном выражении неизвестно φ_0 . Из условия закрепления балки при $z = b + c + e$ имеем, что $y = 0$. Вычисляя прогиб на правом конце балки, и приравнявая его к нулю, получим уравнение для определения φ_0 :

$$0 = EI\varphi_0 \cdot 4,2 + \frac{7,86 \cdot 4,2^3}{6} + \frac{8 \cdot (4,2 - 1,2)^3}{3} - \frac{10 \cdot (4,2 - 1,2)^4}{24} - \frac{1,2 \cdot (4,2 - 2,8)^2}{2}.$$

Отсюда $EI\varphi_0 = -20,84 \text{ кН}\cdot\text{м}^2$. Теперь выражение для определения прогибов будет иметь вид:

$$EIy(z) = -20,84z + \frac{7,86 \cdot z^3}{6} + \frac{8 \cdot (z - 1,2)^3}{3} \Big|_{z>1,2} - \frac{10 \cdot (z - 1,2)^4}{24} \Big|_{z>1,2} - \frac{1,2 \cdot (z - 2,8)^2}{2} \Big|_{z>2,8}.$$

Соответственно, выражение для определения углов поворота будет:

$$EI\varphi(z) = -20,84 + \frac{7,86 \cdot z^2}{3} + \frac{8 \cdot (z - 1,2)^2}{2} \Big|_{z>1,2} - \frac{10 \cdot (z - 1,2)^3}{6} \Big|_{z>1,2} - 1,2 \cdot (z - 2,8) \Big|_{z>2,8}.$$

С помощью этих выражений определяем y_D и φ_D :

$$EIy_D = -20,84 \cdot 1,2 + \frac{7,86 \cdot 1,2^3}{6} = -22,74 \text{ кН}\cdot\text{м}^3.$$

$$EI\varphi_D = -20,84 + \frac{7,86 \cdot 1,2^2}{2} = -15,18 \text{ кН}\cdot\text{м}^2.$$

Вычисляем жесткость сечения ($E = 2 \cdot 10^8 \text{ кН}/\text{м}^2$):

$$EI = 2 \cdot 10^8 \cdot \frac{0,2 \cdot (0,2)^3}{12} = 2,67 \cdot 10^4 \text{ кН}\cdot\text{м}^2.$$

Тогда, окончательно,

$$y_D = -\frac{22,7}{2,67 \cdot 10^4} = -0,0085 \text{ м}, \quad \varphi_D = -\frac{15,18}{2,67 \cdot 10^4} = -0,00569 \text{ рад}.$$

Перемещение точки D происходит вниз, а сечение поворачивается по часовой стрелке.

Контрольные вопросы

6.1. Дайте определения чистого и поперечного изгиба соответственно.

6.2. Поясните правило принятия знаков для изгибающего момента и поперечной силы.

- 6.3. Поясните суть основных дифференциальных соотношений теории изгиба.
- 6.4. Запишите формулу по определению нормальных напряжений, возникающих в поперечных сечениях при чистом изгибе.
- 6.5. Поясните суть и предназначение метода начальных параметров.
- 6.6. Дайте определение нейтральной линии. Что делается с продольными волокнами материала при изгибе?
- 6.7. Как определяется знак изгибающего момента и поперечной силы?
- 6.8. Какая существует связь между изгибающим моментом и поперечной силой?
- 6.9. Для чего строятся эпюры изгибающих моментов и поперечных сил?
- 6.10. Какими статическими дифференциальными соотношениями связаны между собой интенсивность распределенной нагрузки, перерезывающая сила и изгибающий момент?
- 6.11. В каких точках на своих эпюрах перерезывающая сила и изгибающий момент претерпевают скачки? Какова величина каждого такого скачка?
- 6.12. Как связано направление выпуклости эпюры изгибающих моментов с направлением распределенной нагрузки? Откуда эта связь следует?
- 6.13. Почему при построении эпюр в консольной балке нет необходимости определять опорные реакции?
- 6.14. Как определить равнодействующую распределенной нагрузки? Как вычислить ее равнодействующий момент?
- 6.15. Какой вид имеет математическое выражение гипотезы плоских сечений при прямом изгибе балки?
- 6.16. На чем основывается предположение о том, что деформация продольных волокон балки подчиняется закону Гука для одноосного растяжения-сжатия?
- 6.17. Как меняются нормальные напряжения по поперечному сечению балки?
- 6.18. Как при прямом изгибе связаны между собой кривизна деформированной оси балки и изгибающий момент в данном поперечном сечении?
- 6.19. Что такое момент сопротивления изгибу? Почему двутавровое сечение выгодно по сравнению с другими сечениями балок, работающих на изгиб? Как выгоднее положить балку прямоугольного сечения при работе на изгиб: на ребро или плашмя? Какое сечение имеет больший момент сопротивления при одинаковой площади: круглое или квадратное?
- 6.20. По каким сечениям балки (балка постоянного сечения) необходимо вести расчет на прочность, если: а) материал балки одинаково работает на растяжение и сжатие; б) материал балки неодинаково работает на растяжение и сжатие и сечение симметрично относительно нейтральной оси z ; в) материал балки неодинаково работает на растяжение и сжатие, но сечение несимметрично относительно оси z ?
- 6.21. Какие величины связываются дифференциальным уравнением упругой линии балки? Как выбирается знак в этом уравнении?
- 6.22. Из каких условий определяются произвольные постоянные в общем решении дифференциального уравнения упругой линии балки?

- 6.23. Как изменяются по поперечному сечению балки нормальные напряжения при изгибе?
- 6.24. Что называется моментом сопротивления? Чему равен момент сопротивления прямоугольника и круга?
- 6.25. Каково уравнение упругой линии в дифференциальной форме?
- 6.26. Привести обобщенное уравнение упругой линии.

Витебский государственный технологический университет

ГЛАВА 7

СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

До сих пор были рассмотрены простые виды деформаций: растяжение (сжатие), кручение, изгиб. Сложные виды деформаций, или короче, сложное сопротивление представляет собой сочетание нескольких простых нагрузений.

Исследование сложного сопротивления основано на принципе независимости действия сил: напряжения или деформации, вызванные группой сил, равны сумме напряжений или деформаций, вычисленных от каждой силы в отдельности.

Этот принцип основан на законе Гука. Он применим лишь в том случае, если напряжения не превышают предела пропорциональности, а также, если деформации достаточно малы. В данной главе будут рассмотрены следующие виды сложного сопротивления: кривой изгиб, сочетание изгиба с растяжением и сжатием (в том числе внецентренное растяжение, сжатие), кручение с изгибом.

7.1. Кривой изгиб

Под *кривой изгибом* понимается такой случай изгиба, при котором плоскость изгибающего момента не совпадает ни с одной из главных осей

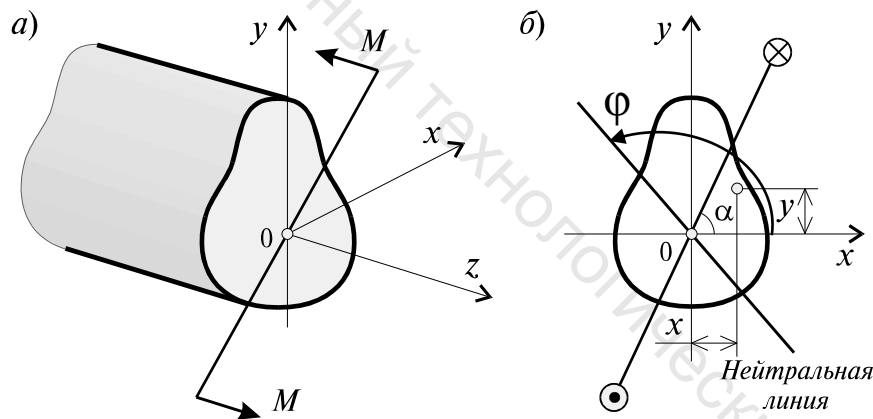


Рис. 7.1. Кривой изгиб. Плоскость изгибающего момента не совпадает ни с одной из главных осей поперечного сечения

поперечного сечения (рис. 7.1, а). Напомним, что плоскости $хоz$ и $уoz$ - главные плоскости инерции балки. Кривой изгиб удобнее всего рассмотреть как одновременный изгиб бруса относительно главных осей x и y поперечного сечения бруса. Для этого общий вектор изгибающего момента M , действующего в поперечном сечении бруса, раскладывается на составляющие момента относительно этих осей (рис. 7.1, б):

$$M_x = M \cdot \sin \alpha; \quad M_y = M \cdot \cos \alpha. \quad (7.1)$$

Введем следующее правило знаков для моментов M_x и M_y : момент считается положительным, если в первой четверти координатной плоскости (там, где обе координаты x и y положительны) он вызывает сжимающие напряжения. На основании принципа независимости действия сил

нормальное напряжение в произвольной точке, принадлежащей поперечному сечению бруса и имеющей координаты x, y , определяется суммой напряжений, обусловленных моментами M_x и M_y , т.е.

$$\sigma(x, y) = - \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x.$$

(7.2)

В формуле поставлены минусы для соответствия знаков входящих величин.

Подставляя выражения M_x и M_y из (7.1) в (7.2), получим:

$$\sigma(x, y) = - M \left(\frac{y}{I_x} \sin \alpha + \frac{x}{I_y} \cos \alpha \right). \quad (7.3)$$

Из курса аналитической геометрии известно, что выражение (7.3) представляет собой уравнение плоскости. Следовательно, если в каждой точке сечения отложить по нормали вектор напряжения σ , то концы векторов образуют геометрическое место точек, принадлежащих одной плоскости, как и при поперечном изгибе.

Уравнение *нейтральной линии*, т.е. геометрического места точек, где нормальное напряжение принимает нулевые значения, найдем, полагая в (7.2) $\sigma = 0$:

$$\frac{M_x}{I_x} y + \frac{M_y}{I_y} x = 0. \quad (7.4)$$

Откуда определяется уравнение нейтральной линии:

$$y = - \frac{M_y I_x}{M_x I_y} x = - \operatorname{ctg} \alpha \frac{I_x}{I_y} x. \quad (7.5)$$

Поскольку свободный член в (7.5) равен нулю, то нейтральная линия всегда проходит через начало координат. Как видно из выражения (7.2), эпюра напряжений в поперечных сечениях бруса линейна, следовательно, максимальные напряжения в сечении возникают в точках наиболее удаленных от нейтральной линии. В том случае, когда сечение имеет простую форму (прямоугольник, круг), положение наиболее опасных точек легко определяется визуально. Для угловых точек сечения в виде прямоугольника формулу (7.2) запишем в следующем виде:

$$\sigma = \pm M_x / W_x \pm M_y / W_y. \quad (7.6)$$

Здесь $W_x = I_x / y_{\max}$ и $W_y = I_y / x_{\max}$ - моменты сопротивления сечения относительно осей x и y .

Наибольшие напряжения будут возникать в тех угловых точках, в которых они складываются одного знака. Условие прочности примет вид:

$$\max \sigma = M_x / W_x + M_y / W_y \leq [\sigma]. \quad (7.7)$$

Для сечений, имеющих сложную форму, необходимо применить графический подход.

Далее покажем, что при косом изгибе нейтральная линия не перпендикулярна к плоскости действия изгибающего момента, как это всегда выполнялось при поперечном изгибе. Действительно угловой коэффициент K_1 следа момента (рис. 7.1, б) равен:

$$K_1 = \operatorname{tg} \alpha. \quad (7.8)$$

Угловой же коэффициент нейтральной линии, как это следует из (7.5), определяется выражением:

$$\operatorname{tg} \varphi = K_2 = -\frac{I_x M_y}{I_y M_x} = -\frac{I_x}{I_y} \operatorname{ctg} \alpha. \quad (7.9)$$

Так как в общем случае $I_x \neq I_y$, то условие перпендикулярности прямых, известное из аналитической геометрии, не соблюдается, поскольку $K_1 \cdot K_2 \neq -1$. Брус, образно выражаясь, предпочитает изгибаться не в плоскости

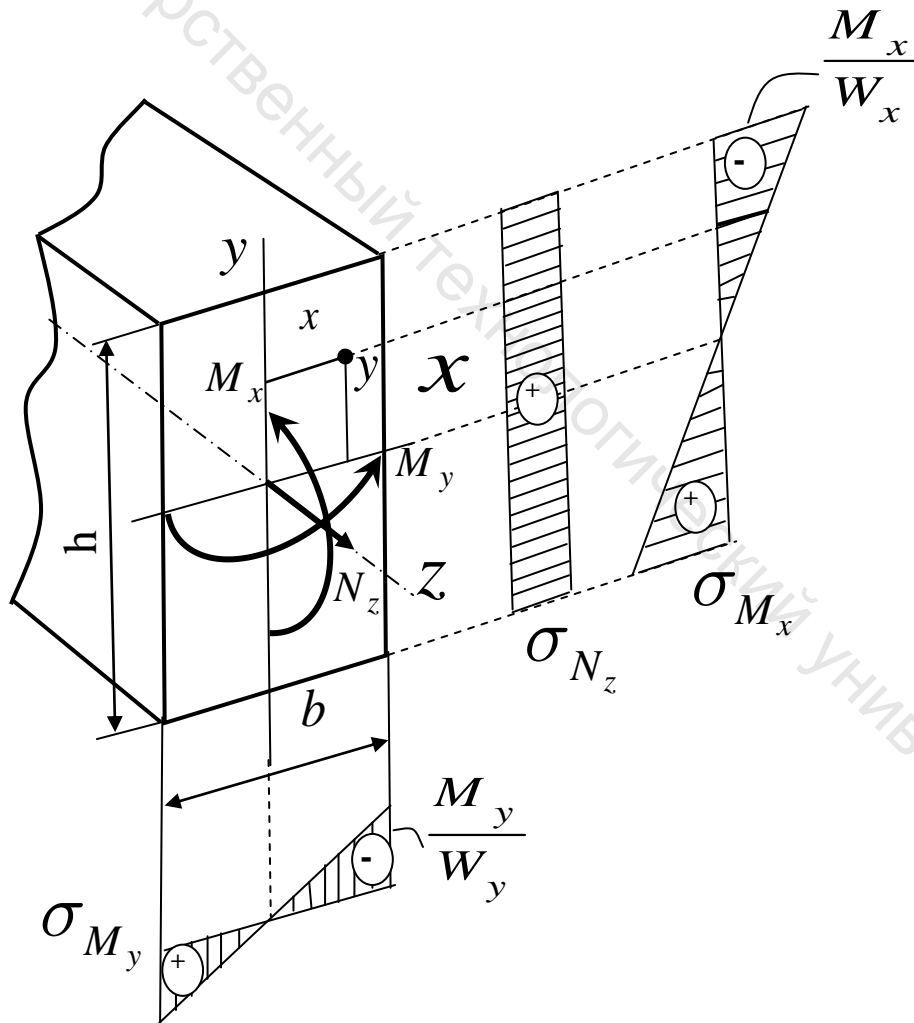


Рис. 7.2. Общий случай нагружения сечения изгибающего момента, а в некоторой другой плоскости, где жесткость на

изгиб будет минимальной. Как видно, нейтральная линия не перпендикулярна силовой линии, а отклоняется от этого перпендикуляра в сторону оси меньшей жесткости.

Случаи, когда косоуго изгиба не будет:

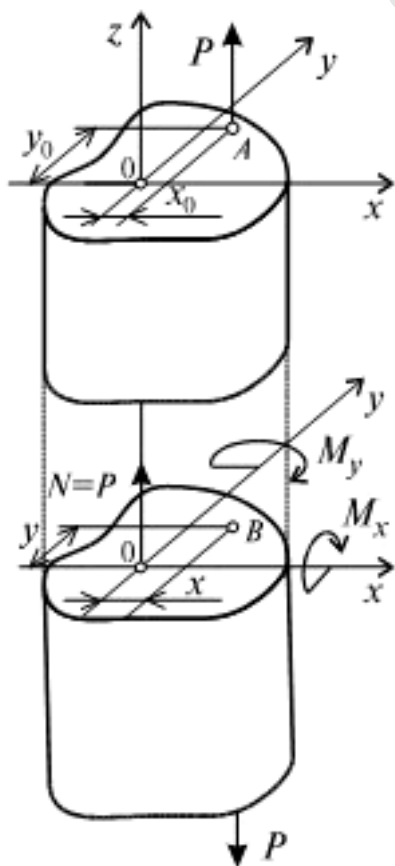
1. При $\alpha = 0$ или $\alpha = 90^\circ$ силы лежат в одной главной плоскости инерции балки, и такое нагружение будет прямым изгибом.

2. Если в поперечном сечении главные моменты инерции равны, то они равны относительно всех центральных осей. В этом случае все оси – главные. К таким сечениям относятся круг, квадрат и любая фигура, у которой $I_1=I_2$.

7.2. Сочетание изгиба с растяжением, сжатием

На рис. 7.2 показано поперечное сечение, в котором действуют изгибающие моменты M_x , M_y и продольная сила N_z . Все три силовых фактора положительны. На эпюрах напряжений видно, что при положительных моментах напряжения в точках первого квадранта сжимающие, то есть отрицательны.

Прибавляя к напряжениям косоуго изгиба напряжение от продольной силы, получим так называемую **трехчленную формулу напряжений в сложном сопротивлении**.



$$\sigma = \frac{N_z}{A} - \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x \quad (7.10)$$

Для сечений с двумя осями симметрии и выступающими углами формулу напряжений в угловых точках записываем через моменты сопротивления.

$$\sigma = \frac{N_z}{A} \pm \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y}. \quad (7.11)$$

Опасной будет та угловая точка, в которой складываются напряжения одного знака. Условие прочности имеет следующий вид:

$$\max \sigma = \frac{N_z}{A} + \frac{M_x}{W_x} + \frac{M_y}{W_y} \leq [\sigma]. \quad (7.12)$$

7.3. Внецентренное растяжение, сжатие

При внецентренном растяжении (сжатии) равнодействующая внешних сил не совпадает с осью бруса, как при простом растяжении, а смещена относительно оси z и параллельна ей

Рис. 7.3. Внецентренное растяжение. Внутренние усилия в поперечном сечении (рис. 7.3).

Пусть в точке $A(x_A, y_A)$ приложена равнодействующая внешних сил P . Тогда относительно главных осей x и y равнодействующая сила P вызывает моменты:

$$M_x = -P \cdot y_A; \quad M_y = -P \cdot x_A. \quad (7.13)$$

Знак минус поставлен в выражениях для моментов потому, что при положительных силе и координатах моменты отрицательны. Как видно, внецентренное растяжение (сжатие) есть частный случай сочетания изгиба с растяжением (сжатием) и, таким образом, в поперечном сечении бруса возникает нормальная сила $N_z=P$ и изгибающие моменты M_x и M_y . Следовательно, на основании принципа независимости действия сил в произвольной точке B с координатами x, y нормальное напряжение σ определяется следующим выражением:

$$\sigma = \frac{P}{A} - \frac{M_x}{I_x} y - \frac{M_y}{I_y} x = \frac{P}{A} + \frac{P y_A}{I_x} y + \frac{P x_A}{I_y} x. \quad (7.14)$$

Используя выражения для квадратов радиусов инерции сечения:

$$i_x^2 = \frac{I_x}{A}; \quad i_y^2 = \frac{I_y}{A}, \quad \text{можно (7.14) преобразовать к следующему виду:}$$

$$\sigma = \frac{P}{A} \left(1 + \frac{y_A \cdot y}{i_x^2} + \frac{x_A \cdot x}{i_y^2} \right). \quad (7.15)$$

Уравнение нейтральной линии получим, приравняв нулю выражение для нормальных напряжений σ :

$$\frac{P}{A} \left(1 + \frac{y_A \cdot y}{i_x^2} + \frac{x_A \cdot x}{i_y^2} \right) = 0. \quad (7.16)$$

Из (7.16) можно легко определить отрезки, которые отсекает нейтральная линия на координатных осях. Если приравнять $x=0$, то

получим: $1 + \frac{y_A \cdot a_y}{i_x^2} = 0$, где a_y – координата точки пересечения нейтральной линии и оси y .

Решая это уравнение, получим:

$$a_y = -\frac{i_x^2}{y_A} \quad (7.17)$$

Аналогичным образом можно определить координату пересечения нейтральной линии и оси x :

$$a_x = -\frac{i_y^2}{x_A}. \quad (7.18)$$

Нейтральная линия всегда проходит через квадрант, противоположный силовому.

Можно решить и обратную задачу – определить координаты приложения силы P при заданных отрезках a_x и a_y . Опуская простейшие выкладки, приведем окончательные выражения:

$$x_A = -\frac{I_y^2}{a_x}; \quad y_A = -\frac{I_x^2}{a_y}. \quad (7.19)$$

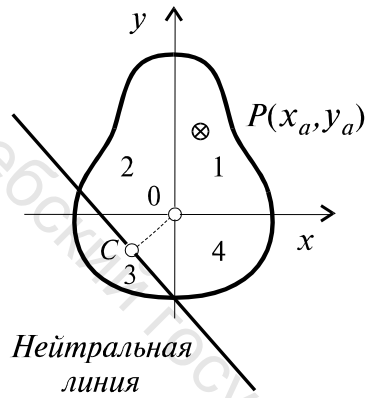


Рис. 7.4. Положение нейтральной линии

Наибольшее напряжения, как и при косом изгибе, имеют место в точке наиболее удаленной от нейтральной линии. При внецентренном растяжении (сжатии) в отличие от косоугольного изгиба нейтральная линия не проходит через центр тяжести сечения. Расстояние от начала координат xOy до прямой $ay + bx + c = 0$, как известно из курса аналитической геометрии, определяется по формуле:

$$OC = \frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Следовательно, в данном случае (рис. 7.4):

$$OC = \frac{1}{F \sqrt{\left(\frac{y_A}{I_x}\right)^2 + \left(\frac{x_A}{I_y}\right)^2}}. \quad (7.20)$$

Тогда, как это следует из (7.20), по мере того, как точка приложения силы приближается к центру тяжести сечения, нейтральная линия удаляется от него.

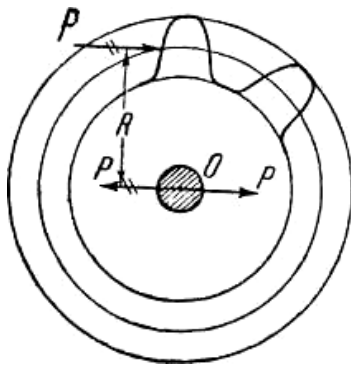


Рис. 7.5
Схема сил, действующих на вал

При $x_A \rightarrow 0, y_A \rightarrow 0$, получаем $OC \rightarrow \infty$. Сила в данном случае становится центральной, а напряжения в этом случае распределены по сечению равномерно. В тех случаях, когда нейтральная линия пересекает сечение, в нем возникают напряжения разного знака. В противном случае в сечении во всех точках возникают напряжения одного знака.

7.4 Изгиб с кручением круглого бруса

На практике кручение довольно часто сопровождается изгибом. С таким сложным видом деформации приходится встречаться, например, при расчете валов, когда силы, передающиеся валу, не проходят через его ось. Пусть, например, на вал (рис. 7.5) насажено зубчатое колесо, передающее окружное усилие P от другого ведущего зубчатого колеса.

Перенесем силу P в центр вала O . Для этого приложим в точке O по прямой, параллельной силе P , две равные силы P , но направленные в противоположные стороны. Тогда получим пару с моментом PR (силы, составляющие эту пару, на чертеже перечеркнуты двумя черточками), скручивающую вал, и силу P , приложенную в центре вала и вызывающую изгиб вала.

Рассмотрим по этапам проекторочный расчет вала с целью

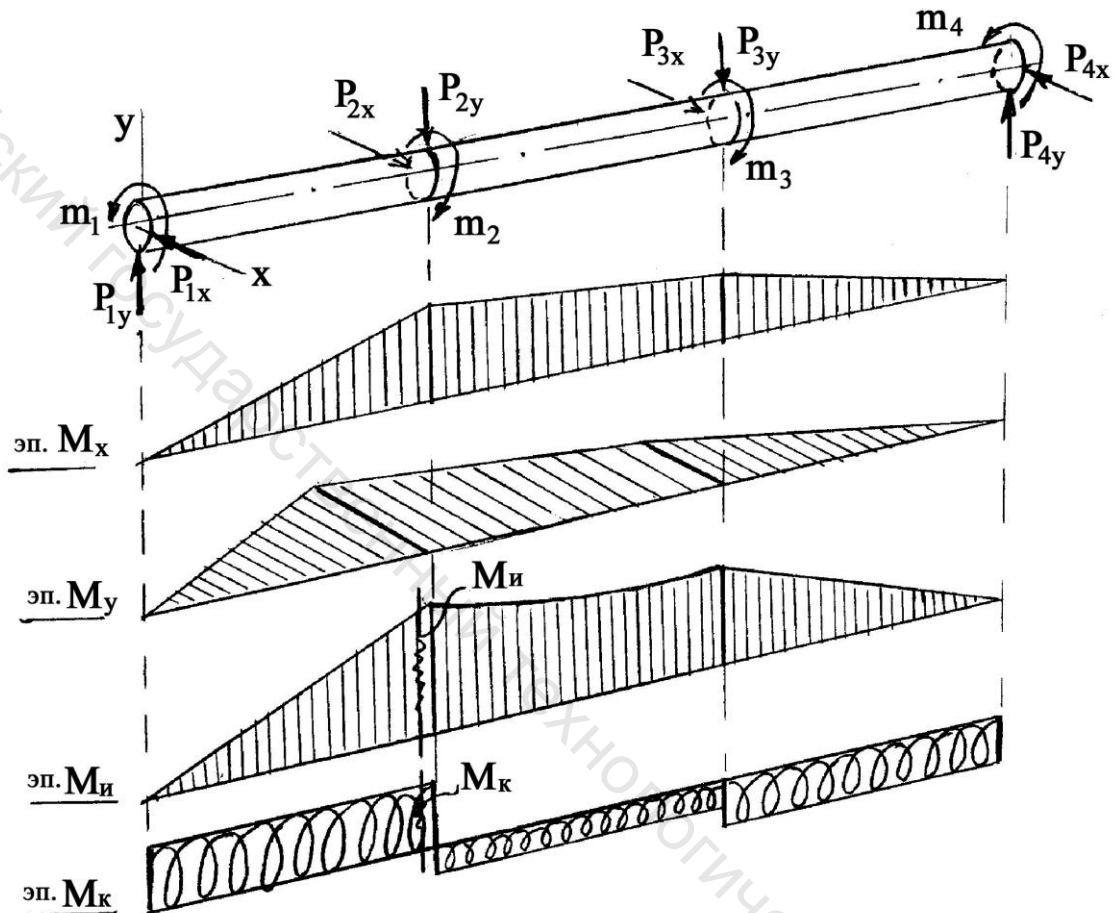


Рис. 7.6. Схема расчета

определения его диаметра. На рис. 7.6 круглый вал нагружен вертикальными и горизонтальными силами, а также крутящими моментами.

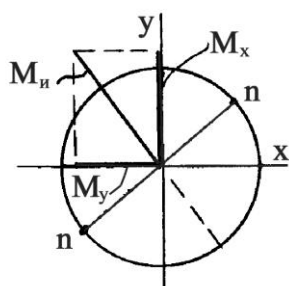


Рис. 7.7. Определение суммарного изгибающего момента путем геометрического сложения

1. Строится эююра изгибающего момента M_x от вертикальных сил.
2. От горизонтальных сил строится эююра M_y .
3. Так как в круглом бруске косою изгиба быть не может, то для каждого сечения можно определить суммарный изгибающий момент путем геометрического сложения (рис. 7.7).

Численное значение момента определяется по формуле:

$$M_u = \sqrt{M_x^2 + M_y^2}. \quad (7.21)$$

- Эпюра изгибающего момента строится условно в вертикальной плоскости.
- Далее строится эпюра крутящего момента M_k .
 - Затем определяется опасное сечение и находится положение опасных

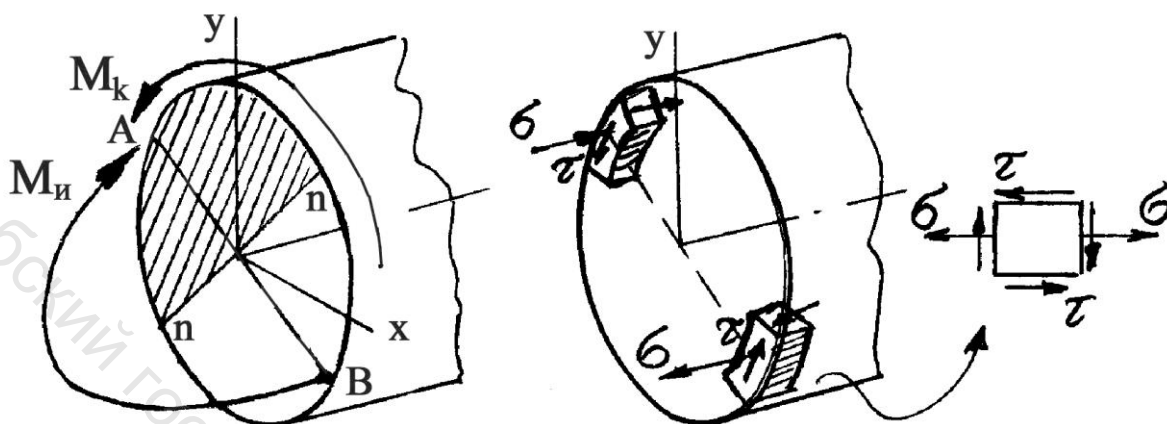


Рис. 7.8. Схема для определения положения опасных точек при совместном действии изгиба с кручением на круглый брус

точек.

В нашем примере опасным оказалось второе сечение, в котором сочетаются наибольший изгибающий и крутящий моменты. На рис. 7.8 показана силовая линия АВ и перпендикулярная ей нейтральная линия n-n, которая делит сечение на растянутую и сжатую зоны. Сжатая зона выделена штриховкой. Опасными точками являются точки А и В, наиболее удаленные от нейтральной линии. Как видно, в этих точках имеет место упрощенное плоское напряженное состояние.

6. Находим нормальные и касательные напряжения в опасных точках и записываем условие прочности (4.23) по гипотезе прочности наибольших касательных напряжений.

$$\sigma = \frac{M_{и}}{W_{и}}, \text{ где } W_{и} = \frac{\pi d^3}{32}. \quad \tau = \frac{M_{к}}{W_p}, \text{ где } W_p = \frac{\pi d^3}{16}. \quad W_p = 2 \cdot W_{и}.$$

$$\sigma_{\text{экр}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{\left(\frac{M_{и}}{W_{и}}\right)^2 + 4\left(\frac{M_{к}}{2W_{и}}\right)^2} = \frac{\sqrt{M_{и}^2 + M_{к}^2}}{W_{и}} \leq [\sigma].$$

Обозначим числитель полученного выражения как некоторый эквивалентный момент $M_{\text{экр}} = \sqrt{M_{и}^2 + M_{к}^2}$. Этот момент физического смысла не имеет, но благодаря его введению мы свели кручение с изгибом к простому изгибу.

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \frac{M_{\text{ЭКВ}}}{W_{\text{И}}} \leq [\sigma] \quad (7.22)$$

Из равенства напряжений $\sigma_{\text{ЭКВ}} = [\sigma]$ найдем диаметр вала d .

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \frac{M_{\text{ЭКВ}}}{\frac{\pi d^3}{32}} = [\sigma], \quad d = \sqrt[3]{\frac{32M_{\text{ЭКВ}}}{\pi[\sigma]}}. \quad (7.23)$$

Контрольные вопросы

- 7.1. В каком случае изгиб называется косым изгибом?
- 7.2. Возможен ли косой изгиб при чистом изгибе? Каким образом построена расчетная формула?
- 7.3. Дайте определение нейтральной линии.
- 7.4. Проходит ли нейтральная линия при косом изгибе через центр тяжести поперечного сечения?
- 7.5. Совпадает ли нейтральная линия при косом изгибе с одной из главных осей поперечного сечения?
- 7.6. Что называется внецентренным сжатием?
- 7.7. Как проходит нейтральная линия сечения в случае внецентренного растяжения-сжатия?
- 7.8. Как определяется наибольшее напряжение в сечении в общем случае внецентренного сжатия или растяжения?
- 7.9. Как выражается условие прочности при совместном действии изгиба и кручения?

ГЛАВА 8

ОБЩИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

В данной главе рассматривается метод, используемый для определения линейных и угловых перемещений различных стержневых систем, таких как балки, рамы, фермы. Метод основан на законе сохранения энергии.

При статическом, весьма медленном нагружении, работа внешних сил полностью переходит в потенциальную энергию деформации стержневой системы.

Возможным рассеянием энергии (тепло, перематничивание и т. п.) пренебрегают.

Итак, метод определения перемещений основан на равенстве

$$A = U. \quad (8.1)$$

Здесь A - работа внешних сил, U – потенциальная энергия деформации.

Принимаемые при этом допущения:

1. Деформации малы.
2. Материал системы подчиняется закону Гука.
3. Имеет место статическое нагружение.
4. Рассматриваемые упругие системы являются линейно-деформируемыми, то есть перемещения линейно зависят от нагрузки.

8.1. Работа внешних сил

При статическом нагружении упругой системы перемещение (прогиб, угол поворота) прямо пропорциональны соответствующей нагрузке (силе, моменту). Диаграмма нагрузка – перемещение имеет вид треугольника, площадь которого есть работа, совершаемая нагрузкой (рис. 8.1).

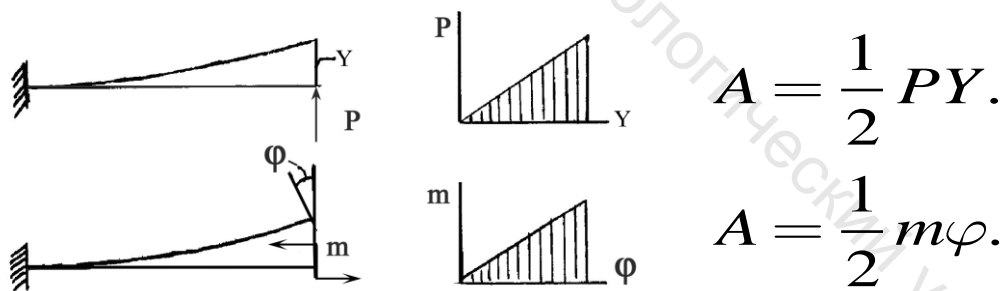


Рис. 8.1. Определение работы внешних сил

Работа i -ой силы равна (рис.8.2):

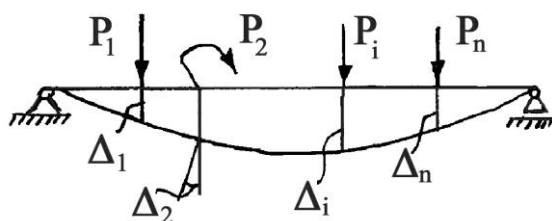


Рис. 8.2. К определению обобщенных сил и перемещений

$$A_i = \frac{1}{2} P_i \Delta_i. \quad (8.2)$$

Таким образом, появляется возможность решать задачу в общем виде, не конкретизируя ни силовые факторы P_i , ни перемещения Δ_i . При этом вводят понятия обобщенной силы (P_i) и обобщен-

ного перемещения (Δ_i).

Обобщенная сила – это сила или группа сил, которую удобно выделить при подсчете потенциальной энергии деформации. Обобщенной силой может быть сосредоточенная сила, момент, распределенная нагрузка или их сочетание (рис. 8.3).

Обобщенное перемещение – это тот вид перемещения (линейное, угловое, объемное и т. д.), на котором рассматриваемая обобщенная сила производит работу (рис. 8.3).

Заметим, что выбрать обобщенное перемещение необходимо таким образом, чтобы произведение обобщенного перемещения на обобщенную силу представляло собой работу (размерность работы – Н·м). Таким образом, для сосредоточенной силы, принятой за обобщенную, обобщенным перемещением будет являться линейное перемещение точки приложения силы. Если в качестве обобщенной силы выбран момент, то обобщенным перемещением будет являться угол поворота сечения в точке приложения момента.

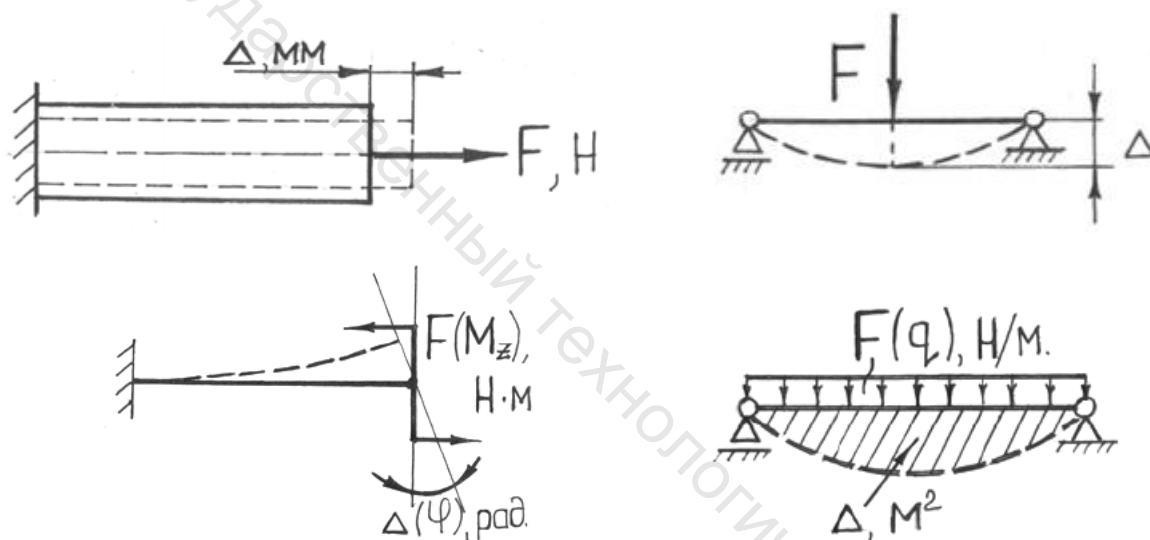


Рис. 8.3. К определению обобщенных сил и перемещений при различных видах нагрузки и деформирования

Тогда получим единую форму записи для работы всей нагрузки.

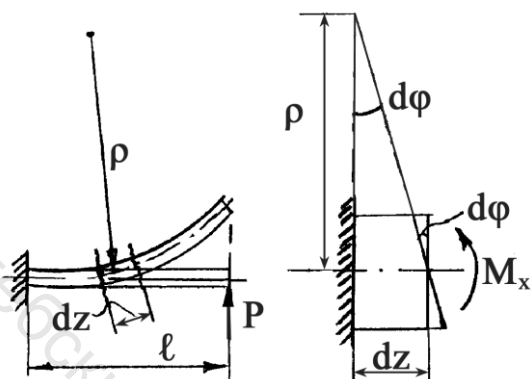
$$A = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} P_i \Delta_i \quad (8.3)$$

Работа внешних сил при статическом нагружении системы равна полусумме произведений конечных величин сил на конечные значения соответствующих им перемещений (независимо от последовательности приложения нагрузок).

8.2. Потенциальная энергия деформации стержня

В общем случае нагружения стержня в его поперечных сечениях действуют шесть внутренних силовых факторов и возникают соответствующие деформации. Мы упростим задачу и рассмотрим лишь прямой изгиб стержня.

На рис. 8.4 показан изгиб консоли. Вырежем двумя бесконечно близкими сечениями часть балки длиной dz и найдем потенциальную энергию деформации, которая здесь накапливается. Поскольку нас интересует деформация элемента балки, а не его перемещение, то в левом его торце поместим заделку. Работа, которую совершает момент на угловом перемещении $d\varphi$, равна потенциальной энергии деформации dU .



$$dA = dU = \frac{1}{2} M_x d\varphi. \quad (8.4)$$

Рис. 8.4. Определение потенциальной энергии при прямом изгибе стержня

С учетом (6.9) найдем

$$d\varphi = \frac{dz}{\rho} = \frac{M_x dz}{EI_x}.$$

Подставляя полученное выражение в (8.4) окончательно найдем выражение для потенциальной энергии при прямом изгибе стержня:

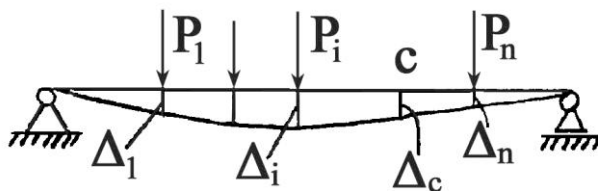
$$dU = \frac{1}{2} \frac{M_x^2 dz}{EI_x}, \quad U = \int_0^l \frac{1}{2} \frac{M_x^2 dz}{EI_x} \quad (8.5)$$

Замечание: на рис. 8.4 не показана поперечная сила, вызывающая сдвиг элемента. Потенциальная энергия деформации сдвига, как показывают вычисления, значительно меньше энергии изгиба и ей пренебрегаем.

Запишем полученную формулу (8.5) для случая n участков:

$$U = \sum_{j=1}^n \int_0^{\ell_j} \frac{M_x^2 dz}{2EI_x} \quad (8.6)$$

8.3. Формула Мора



К выводу формулы Мора. Первый вариант нагружения Рис. 8.5

Рассмотрим три варианта нагружения одной и той же балки.

Первый вариант – это нагружение заданной нагрузкой, при которой требуется найти перемещение Δ_c некоторого сечения C (рис. 8.5). К балке приложены заданные силы P_i . Запишем выражения для работы внешних сил и потенциальной энергии деформации.

$$A_1 = U_1, \quad A_1 = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} P_i \Delta_i, \quad U_1 = \sum_j \int_0^{\ell_j} \frac{M_x^2 dz}{2EI_x} \quad (8.7)$$

Во втором нагружении прикладывается в заданном сечении С произвольная сила P_c . Соответствующий прогиб обозначен Δ_{cc} (рис. 8.6). Записываем выражения для A_2 и U_2 .

$$A_2 = U_2, \quad A_2 = \frac{1}{2} P_c \Delta_{cc}, \quad U_2 = \sum_j \int_0^{\ell_j} \frac{M_{xc}^2 dz}{2EI_x}. \quad (8.8)$$

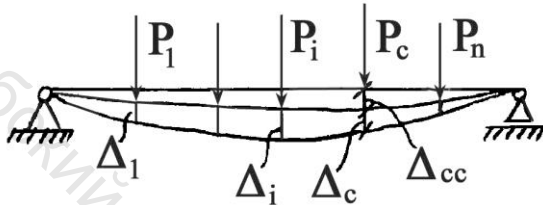


Рис. 8.6. К выводу формулы Мора. Второй вариант нагружения

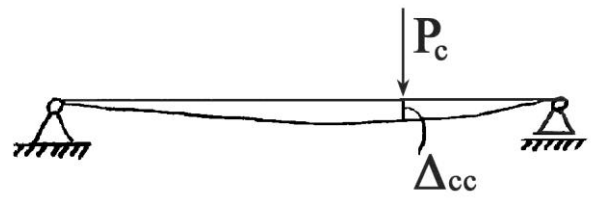


Рис. 8.7. К выводу формулы Мора. Третий вариант нагружения

Третье нагружение (рис. 8.7) состоит из двух этапов: сначала прикладывается сила P_c , затем к деформированной балке прикладывается заданная нагрузка. При сложении работ нужно учесть на втором этапе работу уже приложенной силы P_c на перемещении Δ_c .

$$\begin{aligned} A_3 &= \frac{1}{2} P_c \Delta_{cc} + \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} P_i \Delta_i + P_c \Delta_c, \quad U_3 = \sum_j \int_0^{\ell_j} \frac{(M_x + M_{xc})^2 dz}{2EI_x} = \\ &= \sum_j \int_0^{\ell_j} \frac{M_x^2 dz}{2EI_x} + \sum_j \int_0^{\ell_j} \frac{2M_x M_{xc} dz}{2EI_x} + \sum_j \int_0^{\ell_j} \frac{M_{xc}^2 dz}{2EI_x}. \end{aligned} \quad (8.9)$$

Здесь изгибающий момент равен сумме моментов от нагрузки и от силы P_c . Приравняв A_3 и U_3 из (8.9) с учетом выражений (8.7), (8.8) после удаления равных слагаемых получим следующее равенство:

$$P_c \Delta_c = \sum_j \int_0^{\ell_j} \frac{M_x M_{xc} dz}{EI_x}. \quad (8.10)$$

Разделим левую и правую части равенства (8.10) на P_c , причем, в правой части будем делить момент M_{xc} .

$$\Delta_c = \sum_j \int_0^{\ell_j} \frac{M_x \frac{M_{xc}}{P_c} dz}{EI_x} = \sum_j \int_0^{\ell_j} \frac{M_x \overline{M}_c}{EI_x} dz, \quad (8.11)$$

где $M_{xc}/P_c = \overline{M}_c$.

Выражение (8.11) и есть формула Мора. В результате деления момента M_{xc} на силу P_c размерность силы в моменте исчезает, и мы получаем так называемый единичный изгибающий момент, вызванный действием единичной безразмерной силы. Этот момент обычно выделяют для отличия

чертой сверху. Поскольку Δ_c есть обобщенное перемещение, то по формуле Мора (8.11) определяют как прогибы, так и углы поворота. Для нахождения прогиба балки надо прикладывать к ней в соответствующем сечении единичную безразмерную силу, а для определения угла поворота – единичную безразмерную пару сил.

Пример 8.1. Найдем прогиб и угол поворота конца консольной балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой. Жесткость поперечного сечения EI_x принята постоянной (рис. 8.8). **Решение.** Изгибающий момент

от нагрузки q определяется выражением $M_x = -\frac{qz^2}{2}$. Для определения

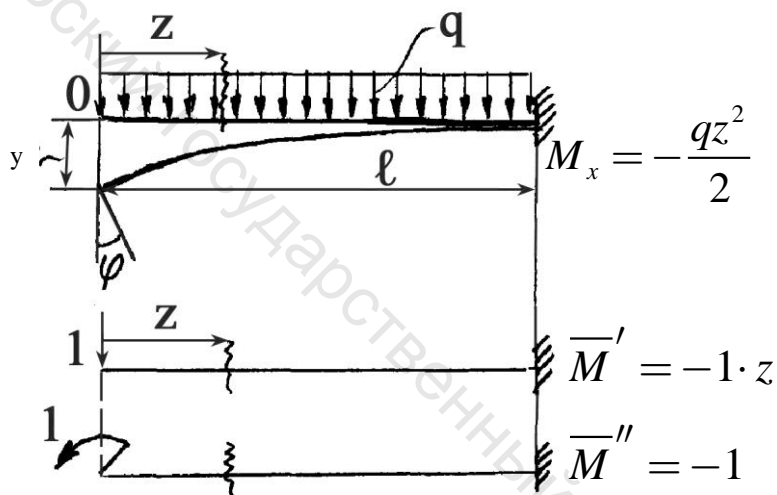


Рис. 8.8. Схема к расчету

прогиба y и угла поворота φ заданного сечения консольной балки в направлениях искомым перемещений прикладываем единичную силу и единичный момент в том сечении балки, перемещения которого ищем (рис. 8.8). В данном случае конца консольной балки. Момент от единичной силы, приложенной к концу консольной балки,

определяется выражением $\bar{M}' = -1 \cdot z$, а от единичного момента $\bar{M}'' = -1$. По формуле (8.11) найдем прогиб y и угол поворота φ конца консольной балки.

$$y = \int_0^l \frac{M_x \bar{M}'}{EI_x} dz = \frac{1}{EI_x} \int_0^l \left(-\frac{qz^2}{2} \right) (-z) dz = \frac{qz^4}{8EI_x} \Big|_0^l = \frac{qz^4}{8EI_x}.$$

$$\varphi = \frac{1}{EI_x} \int_0^l \left(-\frac{qz^2}{2} \right) (-1) dz = \frac{qz^3}{6EI_x} \Big|_0^l = \frac{qz^3}{6EI_x}.$$

8.4. Правило Верещагина

Основным недостатком определения перемещений при помощи интеграла Мора является необходимость составления аналитического выражения подинтегральных функций. Это особенно неудобно при определении перемещений в брус, имеющем большое количество участков. Определение перемещений по формуле Мора можно упростить, используя правило Верещагина, по которому интеграл вычисляется графоаналитическим способом. Пусть грузовой момент M_x задан функцией $f(z)$, а единичный -

линейной функцией $(a+bz)$. Соответствующие эпюры даны на рис. 8.9. Выполним вычисление интеграла (8.11), приняв $EI_x = \text{const}$.

$$\int_0^{\ell} \frac{M_x \bar{M}}{EI_x} dz = \frac{1}{EI_x} \int_0^{\ell} f(z)(a+bz) dz = \frac{1}{EI_x} \left(a \int_0^{\ell} f(z) dz + b \int_0^{\ell} f(z) z dz \right) =$$

$$= \frac{1}{EI_x} (a\omega + bS_y) = \frac{1}{EI_x} (a\omega + b\omega z_c) = \frac{\omega}{EI_x} (a + bz_c) = \frac{\omega \bar{y}}{EI_x}.$$

Первый из написанных интегралов представляет собой площадь ω , ограниченную кривой $f(z)$ (рис. 8.9), т. е. площадь грузовой эпюры $f(z)$. Второй интеграл представляет собой статический момент S_y площади ω относительно оси y , равный произведению этой площади на расстояние z_c от

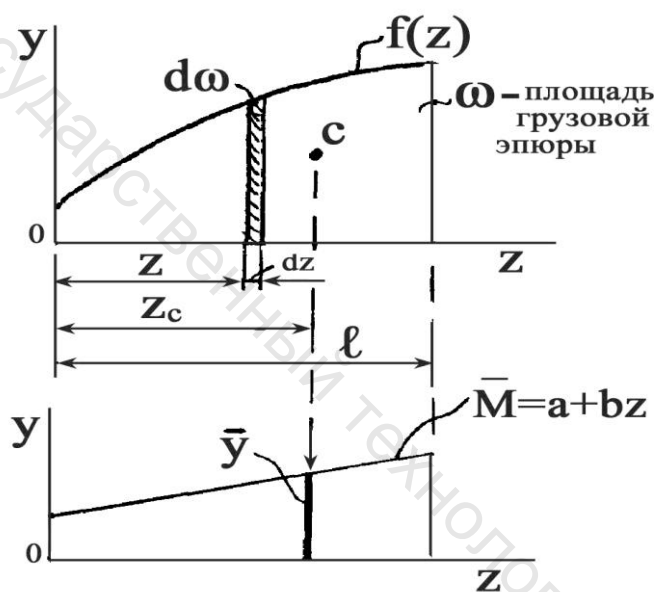


Рис. 8.9. Схема к выводу формулы Верещагина

центра тяжести до оси y , но $(a + bz_c) = \bar{y}$.

Таким образом, процедуру вычисления интеграла Мора *по правилу Верещагина заменяют перемножением площади первой эпюры на ординату второй (линейной) эпюры под центром тяжести первой*. Если обе эпюры линейные, то в этом случае безразлично, умножается ли площадь первой эпюры на ординату второй или площадь второй эпюры на ординату первой. В случае интегрирования n участков результаты перемножения складываются по участкам.

$$\Delta = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\omega \bar{y}}{EI_x} \right)_i \quad (8.12)$$

Итак, порядок определения перемещений по правилу Верещагина:

1. Строится эпюра изгибающего момента от заданной нагрузки (грузовая эпюра).

2. В сечении, перемещение которого определяется, прикладывается единичная безразмерная сила для вычисления прогиба или прикладывается единичный момент для нахождения угла поворота. Строится эпюра единичного изгибающего момента.

3. Производится перемножение эпюр. На каждом участке площадь грузовой эпюры умножается на ординату единичной, расположенную под центром тяжести грузовой. Произведение положительно, если эпюры расположены с одной стороны оси, и отрицательно, если с разных сторон.

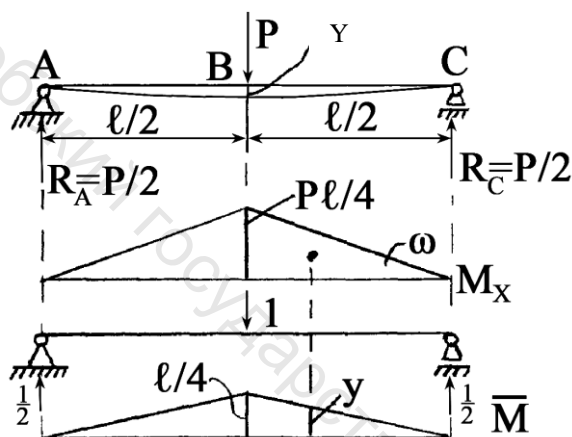


Рис. 8.10. Схема к расчету для примера 8.2

Пример 8.2. Найдем наибольший прогиб шарнирно опертой балки, нагруженной силой посередине пролета (рис. 8.10).

Решение. Поскольку здесь два одинаковых участка перемножения, то умножение выполняем на участке BC и результат удваиваем. Как известно, центр тяжести треугольника лежит на пересечении медиан и делит их в пропорции 1:2. В такой же пропорции и его проекция на ось эпюры делит длину участка. Здесь

$$\omega = \frac{1}{2} \cdot \frac{l}{2} \cdot \frac{Pl}{4} = \frac{1}{16} Pl^2. \quad \bar{y} = \frac{2}{3} \cdot \frac{l}{4} = \frac{1}{6} l.$$

Используя формулу (8.12) найдем наибольший прогиб шарнирно опертой балки.

$$Y = \frac{1}{EI_x} 2\omega \bar{y} = \frac{1}{EI_x} 2 \cdot \frac{1}{16} Pl^2 \cdot \frac{1}{6} l = \frac{Pl^3}{48EI_x}.$$

8.5. Общий случай перемножения эпюр

Рассмотрим такой вариант перемножения, когда грузовая эпюра представлена на каком либо участке балки квадратичной параболой, а единичная имеет вид трапеции (рис. 8.11). Такой участок мысленно можно представить в виде вставки шарнирно опертого стержня с моментами на концах и с распределенной нагрузкой в пролете. На рис. 8.11 показано, что грузовая эпюра представляет собой наложение трех эпюр от каждой нагрузки в отдельности. Единичную трапецию делим на два треугольника и выполняем перемножение.

$$\sum_{i=1}^3 (\omega \bar{y})_i = \frac{ql^3}{12} \left(\frac{1}{2} h_1 + \frac{1}{2} h_2 \right) + \frac{1}{2} m_1 l \left(\frac{2}{3} h_1 + \frac{1}{3} h_2 \right) + \frac{1}{2} m_2 l \left(\frac{1}{3} h_1 + \frac{2}{3} h_2 \right).$$

Используя способ Верещагина, приведем результаты вычисления интегралов Мора для двух наиболее часто встречающихся случаев:

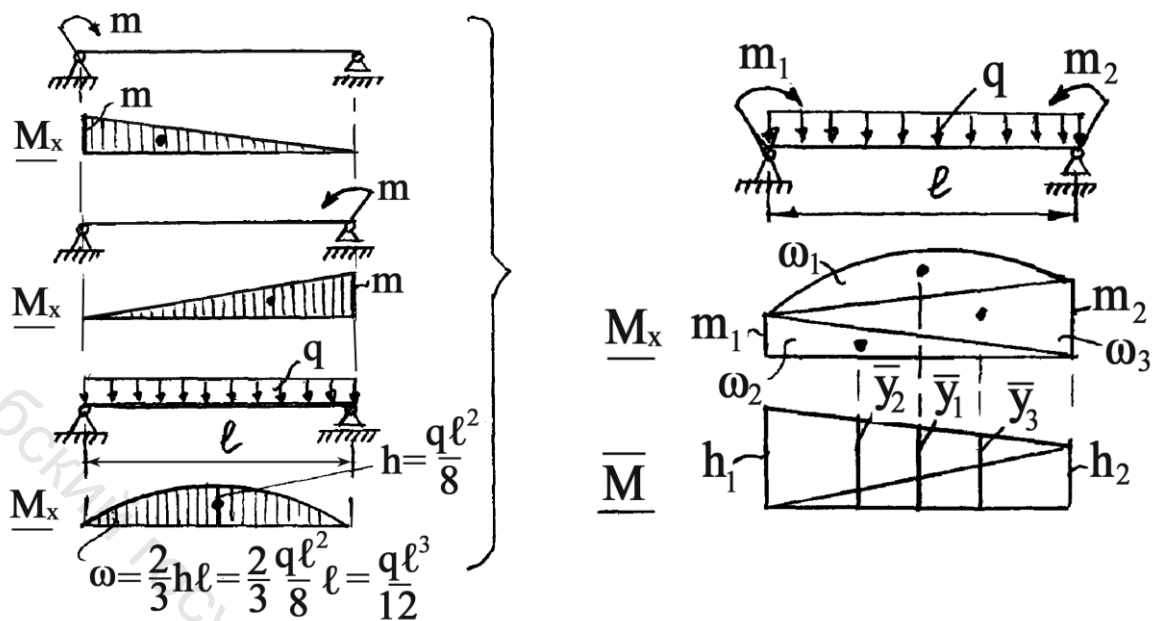


Рис. 8.11. Схема к расчету, когда грузовая эпюра квадратичная парабола

1. Обе функции f_1 и f_2 – линейные (рис. 8.12,а), тогда

$$I = \frac{l}{6}(2ab + 2cd + ad + bc); \quad (8.13)$$

В круглых скобках этой формулы произведение ab левых ординат обеих эпюр и произведение cd правых ординат берутся с коэффициентом, равным двум, а произведение ad и bc ординат, расположенных с разных сторон, - с коэффициентом, равным единице. При перемножении учитываются знаки ординат.

2. Функция

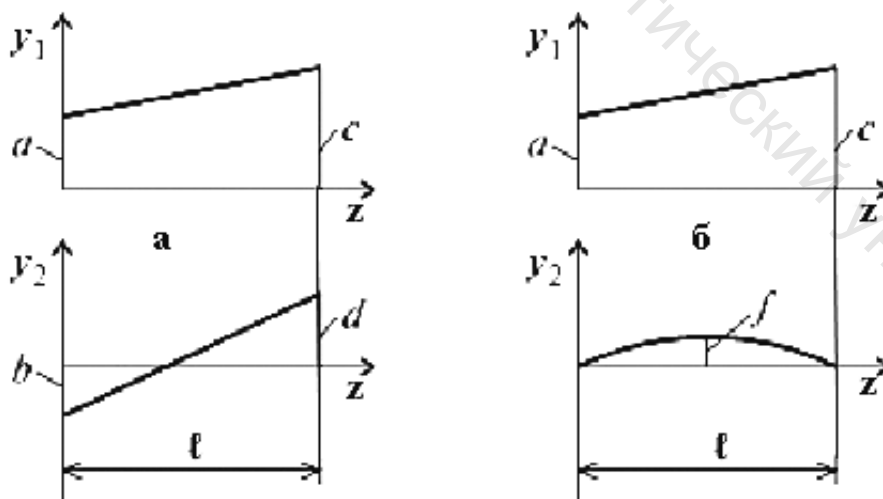


Рисунок 8.12

Схема к расчету интегралов Мора

f_1 квадратная парабола, f_2 линейная функция (рис. 8.12,б). Такая ситуация встречается, когда на участке длиной l приложена равномерно распределенная нагрузка q , тогда

$$I = \frac{2}{3} \cdot f \cdot \ell \cdot \frac{a+c}{2}, \quad (8.14)$$

где f – “стрелка” квадратной параболы (рис. 8.12,б), $f = \frac{q\ell^2}{8}$.

8.6. Теорема взаимности работ. Принцип взаимности перемещений

Рассмотрим два варианта нагружения балки (рис. 8.13). В первом варианте (рис. 8.13,а) сначала прикладывается сила P_1 , затем к деформированной балке прикладывается сила P_2 . Во втором варианте (рис. 8.13,б) нагружение идет в обратном порядке. Вычисляются работы внешних

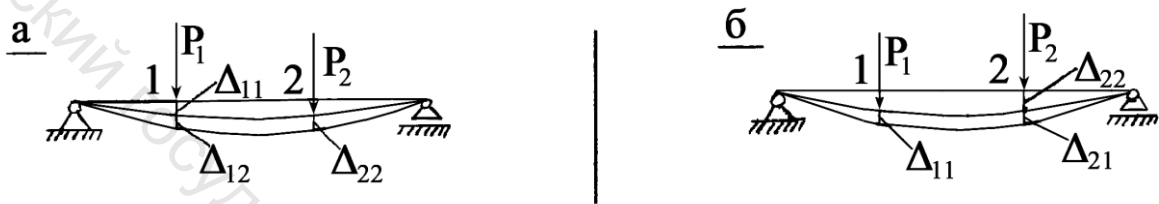


Рис. 8.13. К выводу теоремы Бетти

сил A_1 и A_2 .

$$A_1 = \frac{1}{2} P_1 \Delta_{11} + \frac{1}{2} P_2 \Delta_{22} + P_1 \Delta_{12} \quad (8.15)$$

$$A_2 = \frac{1}{2} P_2 \Delta_{22} + \frac{1}{2} P_1 \Delta_{11} + P_2 \Delta_{21}. \quad (8.16)$$

Поскольку работа сил не зависит от порядка их приложения, то работы приравняем, то есть $A_1 = A_2$ или с учетом (8.15) и (8.16) получим

$$\frac{1}{2} P_1 \Delta_{11} + \frac{1}{2} P_2 \Delta_{22} + P_1 \Delta_{12} = \frac{1}{2} P_2 \Delta_{22} + \frac{1}{2} P_1 \Delta_{11} + P_2 \Delta_{21}. \quad (8.17)$$

Сокращая в левой и правой частях уравнения (8.17) равные члены, получим следующий результат:

$$P_1 \Delta_{12} = P_2 \Delta_{21}, \quad (8.18)$$

который гласит: работа первой силы P_1 на перемещении точки ее приложения Δ_{12} , вызванном действием второй силы P_2 , равна работе второй силы P_2 на перемещении ее точки приложения Δ_{21} под действием первой силы P_1 .

Это утверждение и составляет содержание *теоремы взаимности работ*. Для случая двух сил эта теорема была доказана в 1864 г. Д. Максвеллом. Но, как следует из самого понятия обобщенных сил и обобщенных перемещений, соотношение (8.18) не изменится, если под P_1 и P_2 понимать обобщенные силы, а под Δ_{12} и Δ_{21} – соответствующие им обобщенные перемещения. Это было впервые понято итальянским ученым Е. Бетти в 1872 г. Работа Д.

Максвелла осталась незамеченной, и Е. Бетти сформулировал теорему взаимности работ независимо. Поэтому ее часто называют *теоремой Бетти*.

Если силы в выражении (8.18) уравнивать, то придем к равенству перемещений $\Delta_{12} = \Delta_{21}$.

При силах, равных единице, данное выражение примет вид: $\delta_{ik} = \delta_{ki}$.

Принцип взаимности перемещений формулируется: *перемещение i -го сечения под действием k -ой силы равно перемещению k -го сечения под действием i -ой силы.*

Напомним, что речь идет о перемещениях точек приложения сил по направлению этих сил.

Контрольные вопросы

- 8.1. Как определяются работа внешних сил при статическом нагружении?
- 8.2. Из каких слагаемых складывается потенциальная энергия деформации балки? Какое из них является преобладающим для длинных балок?
- 8.3. Какова цель двухэтапного нагружения балки при выводе интеграла Мора?
- 8.4. Приведите формулу Мора для обобщенного перемещения.
- 8.5. К чему сводится задача вычисления интеграла Мора по способу Верещагина?
- 8.6. Сформулируйте принцип взаимности перемещений.

ГЛАВА 9

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ

Стержневые системы, в которых усилия не могут быть найдены из одних уравнений равновесия, называются статически неопределимыми.

Связи, наложенные на систему, делят на необходимые и дополнительные или лишние. *Необходимые связи – это те, которые обеспечивают геометрическую неизменяемость системы и ее равновесное состояние при любой нагрузке.* Связи, наложенные сверх необходимых, называют лишними. *Усилия, возникающие в лишних связях, называют лишними неизвестными.*

Степень статической неопределимости системы равна разности между числом неизвестных усилий и числом уравнений равновесия, то есть равна числу лишних связей.

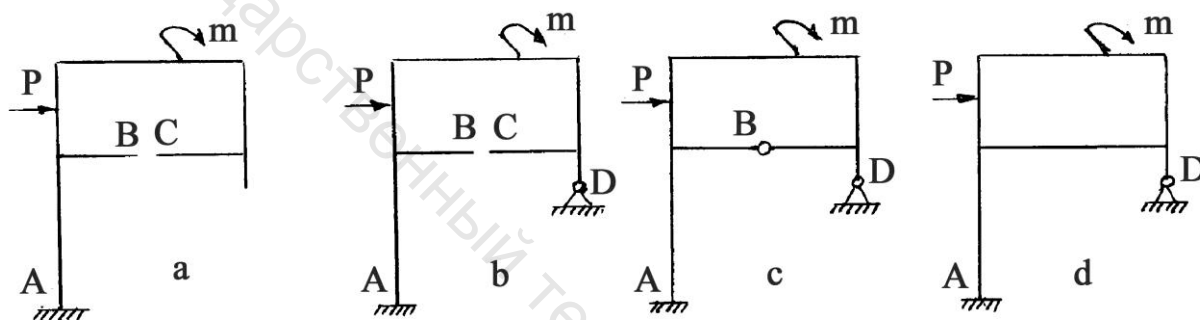


Рис. 9.1. К определению степени статической неопределимости

На рис. 9.1а рама статически определима, так как жесткая заделка обеспечивает геометрическую неизменяемость рамы и ее равновесное состояние при любой нагрузке. Заметим, что заделка плоской рамы представляет собой три внешние связи. Следовательно, из трех уравнений равновесия три неизвестных усилия определяются.

В раме, показанной на рис. 9.1b, в сечении D поставлена шарнирно-неподвижная опора, то есть, добавлены две лишние связи и рама стала дважды статически неопределимой.

На рис. 9.1с концы двух стержней В и С соединены шарниром, что означает добавление двух внутренних связей, препятствующих взаимному перемещению состыкованных концов по вертикали и горизонтали. Однако возможен поворот этих сечений относительно друг друга. Теперь рама стала четырежды статически неопределимой.

В раме, показанной на рис. 9.1d, выполнено жесткое соединение концов В и С, что означает наличие здесь трех взаимных связей, как и в любом другом сечении рамы. Соответственно связям в этом сечении возникают три лишних неизвестных: продольная и поперечная силы и изгибающий момент.

Таким образом, рама на рис. 9.1d стала пять раз статически неопределимой: два раза внешне и три раза внутренне.

Итак, следует помнить, что замкнутый контур плоской рамы есть трижды статически неопределимая ее часть.

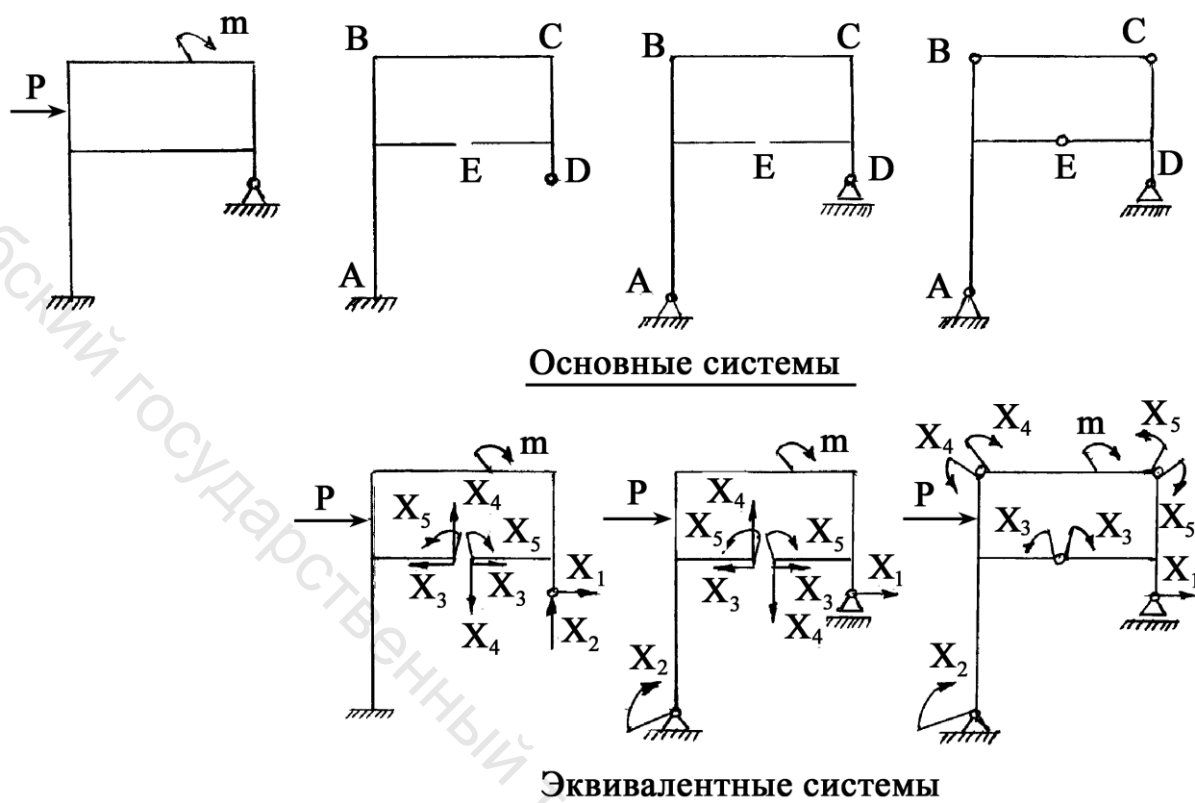


Рис. 9.2. К выбору основной и эквивалентной системы

Расчет статически неопределимой системы методом сил начинается с того, что в заданной системе отбрасывают лишние связи. **Полученная статически определимая система называется основной.** На рис. 9.2 показана пять раз статически неопределимая рама. Здесь же даны три варианта основных систем.

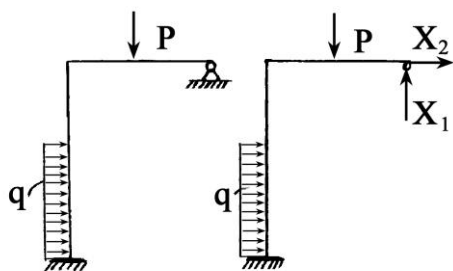


Рис. 9.3. Схема к расчету

Поскольку выбор лишних связей произволен, то можно составить много вариантов основных систем. Для последующего решения задачи выбирают наиболее рациональный вариант. Затем к **основной системе прикладывают лишние неизвестные и заданную нагрузку. Эту систему называют эквивалентной** и требуют от нее, чтобы она деформировалась так же, как заданная.

Рассмотрим более простой пример дважды статически неопределимой рамы, показанной на рис. 9.3 вместе с эквивалентной системой. Уравнения деформаций получим из условия равенства нулю перемещений в направлении отброшенных связей: $\Delta_1 = 0$ и $\Delta_2 = 0$.

$$\begin{aligned} \Delta_{1X_1} + \Delta_{1X_2} + \Delta_{1P} &= 0, \\ \Delta_{2X_1} + \Delta_{2X_2} + \Delta_{2P} &= 0. \end{aligned} \quad (9.1)$$

На основании принципа независимости действия сил перемещения записываем в виде суммы перемещений от силы X_1 , X_2 и всей заданной нагрузки. Поскольку рассматриваются линейно-деформируемые системы, то деформации прямо пропорциональны силам.

$$\Delta_{1X_1} = \delta_{11}X_1, \quad \Delta_{1X_2} = \delta_{12}X_2, \quad \Delta_{2X_1} = \delta_{21}X_1, \quad \Delta_{2X_2} = \delta_{22}X_2. \quad (9.2)$$

Сделав соответствующие подстановки (9.2) в (9.1), получим так называемые **канонические уравнения метода сил**.

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \Delta_{1P} &= 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \Delta_{2P} &= 0. \end{aligned} \quad (9.3)$$

Коэффициенты и грузовые члены канонических уравнений (9.3) есть перемещения в основной системе. Первый индекс указывает, в направлении какой лишней связи рассматривается перемещение, а второй – от какого

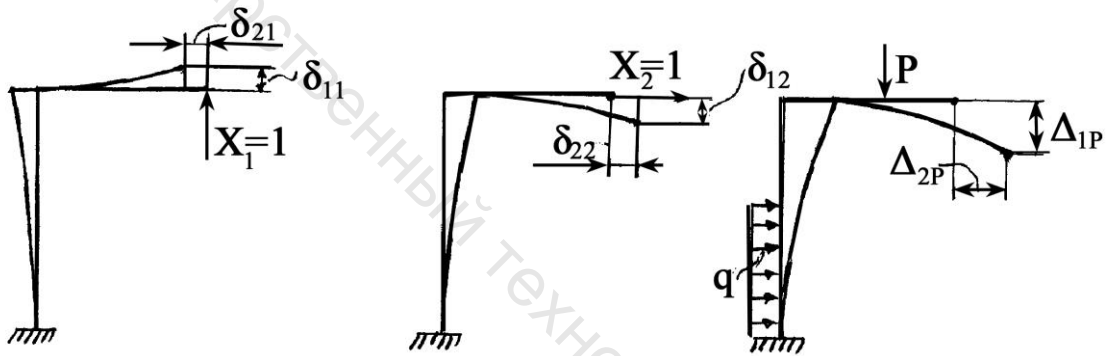


Рис. 9.4. Перемещение в основной системе

воздействия. Рис. 9.4 иллюстрируют сказанное.

Канонические уравнения для n раз статически неопределимой системы имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \dots + \delta_{1k}X_k + \dots + \delta_{1n}X_n + \Delta_{1P} &= 0 \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \dots + \delta_{2k}X_k + \dots + \delta_{2n}X_n + \Delta_{2P} &= 0 \\ \dots & \\ \delta_{i1}X_1 + \delta_{i2}X_2 + \dots + \delta_{ik}X_k + \dots + \delta_{in}X_n + \Delta_{iP} &= 0 \\ \dots & \\ \delta_{n1}X_1 + \delta_{n2}X_2 + \dots + \delta_{nk}X_k + \dots + \delta_{nn}X_n + \Delta_{nP} &= 0 \end{aligned} \quad (9.4)$$

Коэффициент δ_{ik} есть перемещение в направлении X_i основной системы, вызванное действием $X_k = 1$, а Δ_{iP} – перемещение в том же направлении от

всей заданной нагрузки. На основании принципа взаимности перемещений $\delta_{ik} = \delta_{ki}$. Коэффициенты и грузовые члены вычисляются по формуле Мора:

$$\delta_{ik} = \sum \int \frac{\overline{M}_k \overline{M}_i}{EI_x} dz, \quad \Delta_{ip} = \sum \int \frac{M_p \overline{M}_i}{EI_x} dz.$$

В случае постоянной жесткости поперечного сечения ($EI_x = \text{const}$) коэффициенты и грузовые члены определяются путем перемножения эпюр, причем индексы коэффициентов указывают на те эпюры, которые нужно перемножить.

Проследим порядок раскрытия статической неопределенности на примере балки с заделкой на одном конце и с шарнирно – подвижной опорой на другом (рис. 9.5).

Пример.9.1. Требуется:

1. Определить степень статической неопределенности системы и составить уравнение совместности деформаций;

2. Определить коэффициенты и решить каноническое уравнение метода сил;

3. Построить эпюры моментов M и поперечных сил Q .

Решение. Балка один раз статически неопределима. Основную систему образуем путем отбрасывания угловой связи в заделке, как показано на рис. 9.5. Этой связи соответствует момент X_1 . Каноническое уравнение метода сил в данном случае запишется в следующем виде:

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

Перемножением эпюр \overline{M}_1 на \overline{M}_1 и M_p на \overline{M}_1 получаем коэффициент δ_{11} и грузовой член Δ_{1P} .

В строке перемножения эпюр группу множителей, определяющих площадь ω , для большей ясности обычно заключают в скобки.

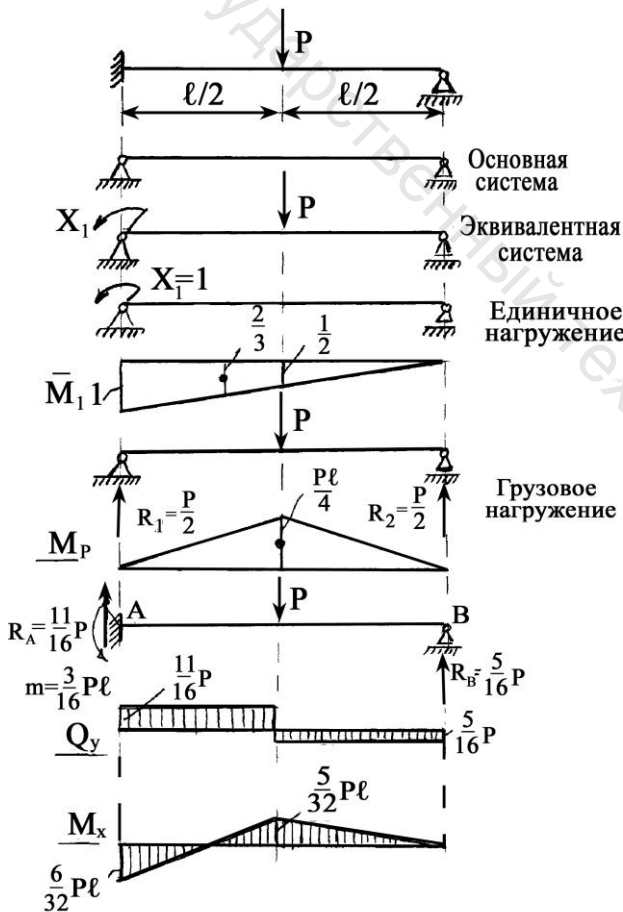


Рис. 9.5. Схема к расчету примера 9.1

$$\overline{M}_1 \times \overline{M}_1 \rightarrow \delta_{11} = \frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} 1l \right) \frac{2}{3} = \frac{l}{3EI_x}, \quad M_p \times \overline{M}_1 \rightarrow \Delta_{1P} = -\frac{1}{EI_x} \left(\frac{1}{2} l \frac{P l}{4} \right) \frac{1}{2} = -\frac{P l^2}{16EI_x}.$$

Каноническое уравнение примет вид

$$\frac{1}{3EI_x} X_1 - \frac{Pl^2}{16EI_x} = 0,$$

откуда найдем $X_1 = 3/16 Pl$. Далее, определяя остальные опорные реакции R_A и R_B и по методу сечений составляя аналитические выражения изменения поперечных сил и моментов на каждом участке, по ним определив ординаты в характерных сечениях, строятся эпюры Q_y и M_x (рис. 9.5).

Оставшиеся две реакции опор найдем из уравнений статики

$$\sum m_A = 0, \quad \frac{3}{16}Pl - P \frac{\ell}{2} + R_B \ell = 0. \text{ Откуда } R_B = \frac{1}{16}P.$$

$$\sum Y = 0, \quad R - P + \frac{5}{16}P. \text{ Откуда } R_A = \frac{11}{16}P.$$

9.1. Перемещения в статически неопределимых системах

При приложении единичной силы к системе нужно было бы снова раскрывать статическую неопределимость. Однако это делать не нужно.

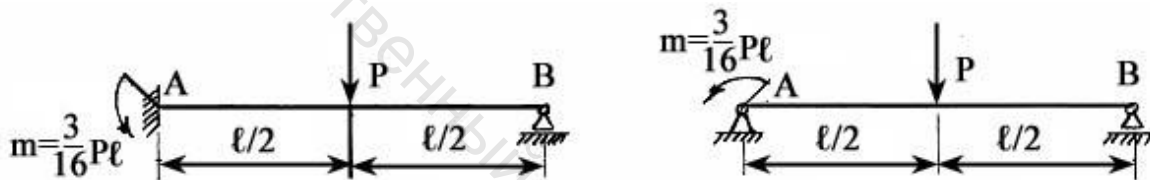


Рис. 9.6. К иллюстрации деформационной проверки

Сравним две балки, показанные на рис. 9.6. Правая балка является основной системой для левой. Поскольку деформации этих балок равны, то отсюда следует **правило: для определения перемещений в статически неопределимых системах единичные воздействия (силу или пару сил) нужно прикладывать не к исходной системе, а к основной.** Исходя из сказанного, выполняется **деформационная проверка** расчета системы: **умножение эпюры M_x на любую из единичных эпюр от лишних неизвестных должно давать ноль.**

Итак, порядок расчета статически неопределимых систем методом сил:

1. определяется степень статической неопределимости путем подсчета числа лишних связей,
2. выбирается основная система посредством удаления лишних связей и формируется эквивалентная система постановкой лишних неизвестных вместо отброшенных связей,
3. составляются канонические уравнения,
4. в основной системе строится от заданной нагрузки эпюра M_p и единичные эпюры от лишних неизвестных,
5. вычисляются коэффициенты и грузовые члены канонических уравнений путем перемножения соответствующих эпюр,

6. решается система уравнений и определяются лишние неизвестные,
7. строятся эпюры внутренних силовых факторов,
8. выполняется деформационная проверка.

Пример 9.2. Требуется для неразрезной балки (рис. 9.7,а) построим эпюры Q и M и определим прогиб в сечении D .

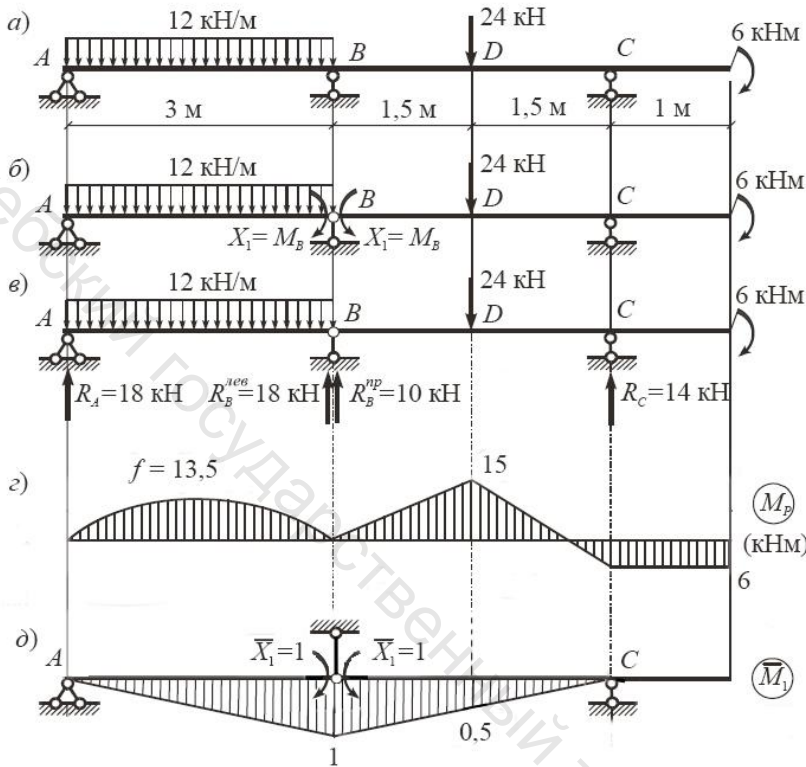


Рис. 9.7. Схема к расчету примера 9.2

Решение. Данная балка является один раз статически неопределимой. Образует основную систему путем введения шарнира в сечении B . Неизвестным является изгибающий момент $X_1 = M_B$, приложенный слева и справа от шарнира B (рис. 9.7,б). При расчете основной системы можно рассматривать балки AB и BC отдельно. Определим опорные реакции балки BC (рисунок 9.7,в) от действия заданных нагрузок.

$$\begin{aligned} \sum M_B^{np} = 0, & \quad -24 \cdot 1,5 - 6 + 3R_C = 0, & \quad R_C = 14 \text{ кН}; \\ \sum M_C = 0, & \quad 24 \cdot 1,5 - 6 - 3R_B^{np} = 0, & \quad R_B^{np} = 10 \text{ кН}; \\ \sum Y = 0 \text{ (проверка)}, & \quad 24 - 10 - 14 = 24 - 24 = 0. \end{aligned}$$

Грузовая и единичная эпюры изгибающих моментов приведены на рис.

9.7,г,д. Составим каноническое уравнение метода сил.

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1P} = 0.$$

Это уравнение отражает условие равенства нулю взаимного угла поворота сечений на опоре B ($\Delta\varphi_B = 0$).

Определяем коэффициенты канонического уравнения путем «перемножения» эпюр \bar{M}_1 и M_P , с учетом формул (8.13) и (8.14).

$$\delta_{11} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1 \cdot \bar{M}_1}{EI} dx = 2 \cdot \frac{1}{EI} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 = \frac{2}{EI};$$

$$\Delta_{1P} = \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M_P}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[-\frac{12 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 - \frac{1,5}{6} (2 \cdot 15 \cdot 0,5 + 15 \cdot 1) + \frac{1,5}{6} (-2 \cdot 15 \cdot 0,5 + 6 \cdot 0,5) \right] = -\frac{24}{EI}.$$

Решив каноническое уравнение, получим: $\frac{1}{EI} (2X_1 - 24) = 0$, $X_1 = M_B = 12 \text{ кНм}$.

Произведем расчет балок AB и BC в основной системе на совместное действие заданных нагрузок и момента $M_B = 12$ кНм, растягивающего верхние волокна (рис. 9.8,а).

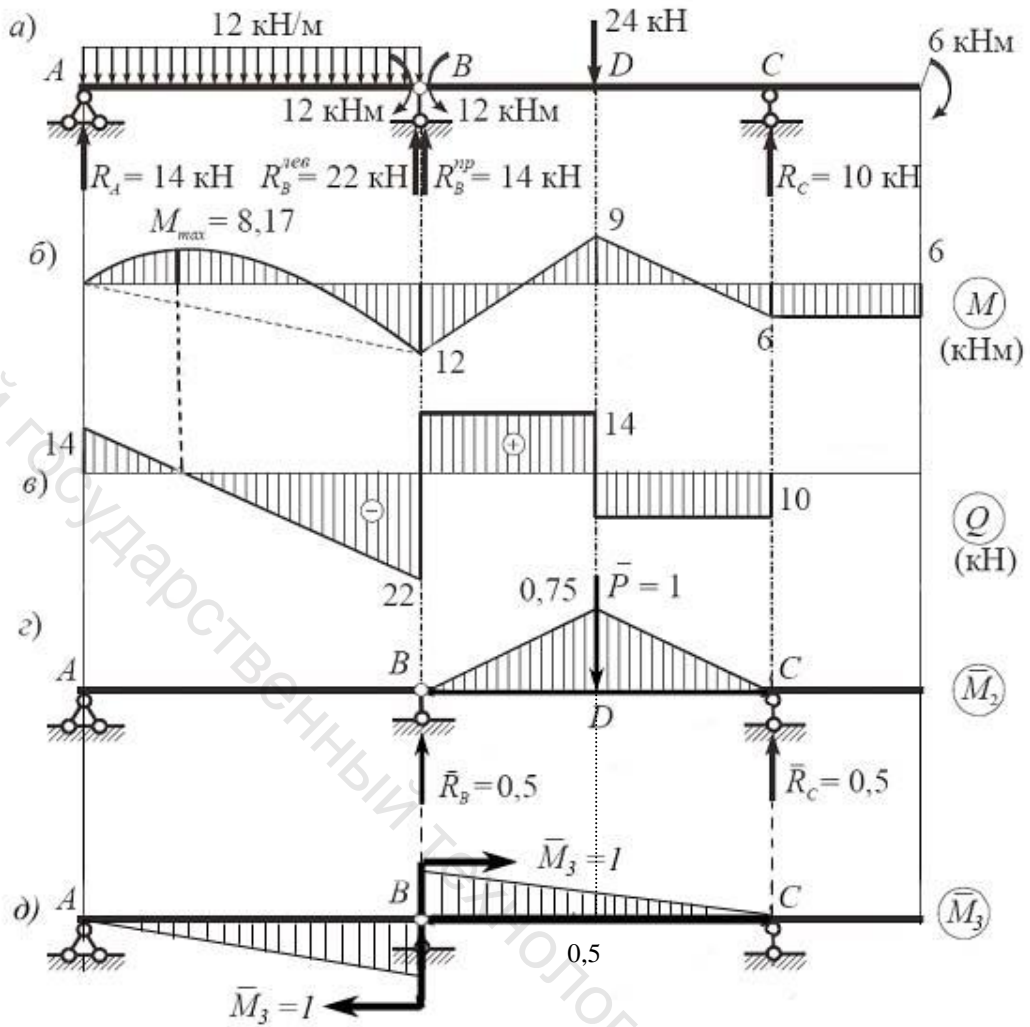


Рис. 9.8. Схема к расчету

Эпюры M и Q приведены на рис. 9.8,б,в. Определим значения M_{\max} в пролете AB .

$Q = R_A - qz$. $Q = 0$ при $z = R_A/q = 14/12 = 1,17$ м. $M = R_A \cdot z - qz^2/2$. При $z = 1,17$ м $M_{\max} = 14 \cdot 1,17 - 12 \cdot 1,17^2/2 = 8,17$ кНм

Выполним деформационную проверку. Для этого «перемножим» окончательную эпюру M с единичной эпюрой \bar{M}_1 . При «перемножении» эпюр на участке AB учтем, что окончательная эпюра – это сумма двух эпюр: параболы и треугольника. На участке BC при «перемножении» воспользуемся формулой (8.14).

$$\Delta_1 = \Delta\varphi_B = \int_0^l \frac{\bar{M}_1 M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{12 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \right) + \right. \\ \left. + \frac{1,5}{6} (2 \cdot 12 \cdot 1 - 2 \cdot 9 \cdot 0,5 - 9 \cdot 1 + 12 \cdot 0,5) + \right. \\ \left. + \frac{1,5}{6} (-2 \cdot 9 \cdot 0,5 + 6 \cdot 0,5) \right] = \frac{1}{EI} (-1,5 + 3 - 1,5) = 0.$$

Задача решена правильно.

Суть деформационной проверки правильности решения, состоит в вычислении заранее известных перемещений, например, условие равенства нулю относительного угла поворота сечений на опоре В. Здесь важно относительный угол поворота и не путать с поворотом всего сечения.

Найдем угол поворота сечения В. Для определения угол поворота сечения В балки в сечении В приложим $M_3=1$ и построим в основной системе единичную эпюру \bar{M}_3 (рис. 9.8, д) и «перемножим» ее с окончательной эпюрой М.

$$\Delta\varphi_B = \int_0^l \frac{\bar{M}_3 M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[\left(\frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 3 \cdot \frac{2}{3} \cdot 1 - \frac{12 \cdot 3^3}{12} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \right) + \right. \\ \left. + \frac{1,5}{6} (-2 \cdot 12 \cdot 1 + 2 \cdot 9 \cdot 0,5 + 9 \cdot 1 - 12 \cdot 0,5) + \right. \\ \left. + \frac{1,5}{6} (2 \cdot 9 \cdot 0,5 - 6 \cdot 0,5) \right] = \frac{1}{EI} (-1,5 - 3 + 1,5) = -\frac{3}{EI}.$$

Следует отметить, что при вычислениях возникают вычислительные погрешности, связанные с округлением при вычислениях значений неизвестных X_1, X_2, \dots, X_n , поэтому возможна погрешность при вычислениях перемещений Δ_i , связанных с деформационной проверкой. Допускается погрешность определения перемещения $\Delta\% < 1\%$.

Опорная реакция на промежуточной опоре В равна

$$R_B = R_B^{лев} + R_B^{пр} = 22 + 14 = 36 \text{ кН}.$$

Для определения прогиба балки в сечении D построим в основной системе единичную эпюру \bar{M}_2 (рис. 9.8, г) и «перемножим» ее с окончательной эпюрой М.

$$v_D = \int_0^l \frac{\bar{M}_2 M}{EI} dx = \frac{1}{EI} \left[\frac{1,5}{6} (2 \cdot 0,75 \cdot 9 - 12 \cdot 0,75) + \frac{1,5}{6} (2 \cdot 9 \cdot 0,75 - 6 \cdot 0,75) \right] = \frac{3,375}{EI}.$$

Контрольные вопросы

9.1. Чем определяется число степеней свободы системы? Зависит ли это число от выбора системы координат?

9.2. Сколько степеней свободы имеет стержень на плоскости и в пространстве?

9.3. Что такое связь? Как изменяется степень свободы системы при наложении на нее одной связи?

- 9.4. Сколько связей накладывают на стержень катковая опора, шарнирная опора, заделка?
- 9.5. Что такое реакции связей? Как они направлены?
- 9.6. Что такое кинематически неизменяемые и изменяемые системы?
- 9.7. Какой (кинематически изменяемой или неизменяемой) является система, на которую наложены только необходимые связи? Что такое лишние связи? Можно ли произвольно делить связи на необходимые и лишние?
- 9.8. Как определяется степень статической неопределимости системы?
- 9.9. Обязательно ли отбрасывать все лишние связи при определении степени статической неопределимости системы?
- 9.10. Сколько разрезов нужно сделать в плоском замкнутом контуре, чтобы он стал статически определимым?
- 9.11. Как получить из статически неопределимой системы основную? Однозначен ли выбор основной системы?
- 9.12. Почему основная система статически определима?
- 9.13. Что такое эквивалентная система? В чем принципиальное отличие ее от исходной?
- 9.14. При каком условии эквивалентная система будет деформироваться так же, как и исходная?
- 9.15. Каков смысл коэффициентов δ_{ij} канонических уравнений метода сил? Что необходимо знать для их вычисления?
- 9.16. Сколько канонических уравнений нужно записать для n раз статически неопределимой системы и почему?

ГЛАВА 10

УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ

10.1. Понятие об устойчивых и неустойчивых формах равновесия

Понятие устойчивости в механике многогранно и может быть детально определено только в зависимости от объекта, к которому оно применяется, и от методов исследования этого объекта. Но все же в его основе лежит наша практическая деятельность. Например, чтобы на практике убедиться в том, что положение равновесия какого-то предмета устойчиво, мы испытаем его. Для этого мы можем слегка потолкать предмет в разные стороны или как-то по-другому вызовем отклонение его из положения равновесия. Как говорят, дадим возмущение. И если предмет не отклонится сильно, мы придем к выводу, что его равновесие устойчиво. А если предмет в результате сильно отклонится от положения равновесия, например, упадет, то мы скажем, что оно неустойчиво.

Таким образом, устойчивость положения равновесия системы определяется реакцией системы на возмущение. Подчеркнем, что нельзя исследовать устойчивость какой-либо системы, не возмущив ее!

Остановимся подробнее на возмущениях. Положение стоящего на полу стула, с нашей точки зрения, безусловно, устойчиво. Но ведь стул можно толкнуть (возмутить) так, что он упадет. Этот простой пример показывает, что всегда можно найти настолько сильное (большое) возмущение, что система перейдет совсем в другое положение равновесия или станет

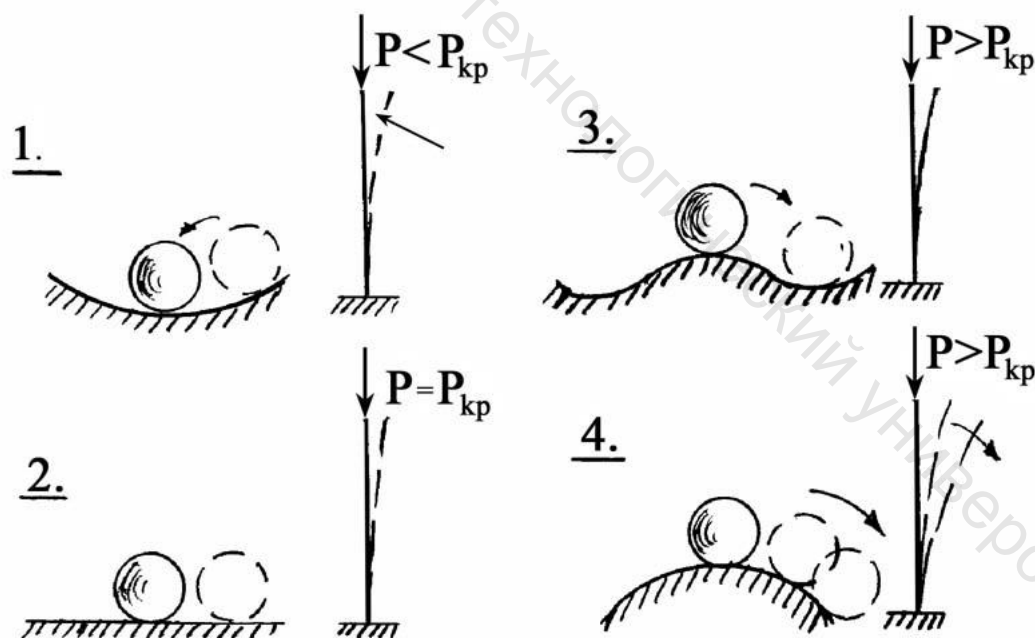


Рис. 10.1. Поведение сжатой стойки в зависимости от величины силы и в качестве соответствующей модели даны положения равновесия шаров

качественно другой, например, сломается. Поэтому при исследовании устойчивости возмущения должны быть малыми, такими, чтобы они вызывали малые отклонения от положения равновесия.

На приведенном рис. 10.1 показано поведение сжатой стойки в зависимости от величины силы и в качестве соответствующей модели даны рисунки с шаром.

На рис. 10.1,1 прямолинейная форма стержня устойчива, как устойчиво положение шара. **Равновесие называется устойчивым, если система, будучи выведенной из него каким-либо воздействием, вновь возвращается в исходное положение после удаления воздействия. Равновесие называется неустойчивым, если после удаления воздействия система в исходное положение не возвращается.**

На рис. 10.1,3 видно, что начальное положение шара неустойчиво, и он скатывается к новому равновесному состоянию. Так же ведет себя сжатый стержень, если сила превысила некоторое критическое значение. Прямолинейная форма стержня стала неустойчивой, и он переходит к близкой криволинейной форме равновесия. Интерес представляет промежуточное состояние, когда происходит раздвоение форм равновесия (бифуркация), стержень может находиться как в прямолинейной, так и в криволинейной равновесных формах. Это состояние, показанное на рис. 10.1,2, называют **безразличным равновесием**. Ему соответствует критическое значение сжимающей силы. **Критической силой $P_{кр}$ называется то наименьшее значение продольной силы, при котором прямолинейная форма стержня перестает быть устойчивой.**

Критическое значение силы является опасным, так как небольшое ее превышение приводит к значительным деформациям и стержень наряду со сжатием подвергается продольному изгибу. Поэтому расчет на устойчивость сжатого стержня называют также расчетом на **продольный изгиб**. Возможен также еще более опасный вариант потери устойчивости, при котором стержень вообще теряет равновесие и разрушается, как показано на рис. 10.1,4.

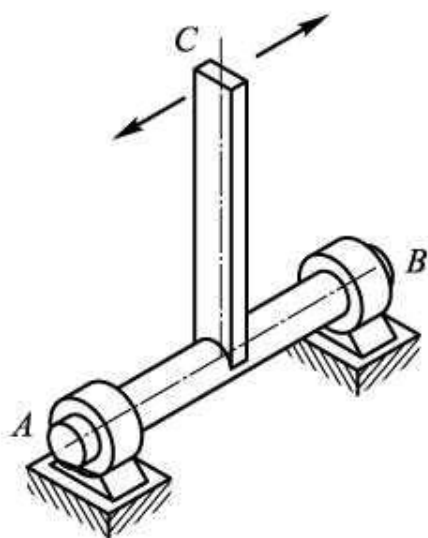


Рис. 10.2
Реакция системы на всевозможные
возмущения

равновесия. Если же возмущение происходит в плоскости ABC , то оно не приведет к значительным отклонениям в этой плоскости. Поэтому, если при исследовании устойчивости положения равновесия стержня мы

Отметим, что обязательно нужно исследовать реакцию системы на всевозможные возмущения, так как при одних возмущениях отклонения могут оказаться незначительными, а по отношению к другим система окажется неустойчивой. Это видно на примере стержня, закрепленного на оси вращения AB (рис. 10.2). Его положение равновесия неустойчиво, так как любое малое отклонение стержня в направлении его возможного вращения приведет к тому, что он повернется вокруг оси AB и в итоге займет нижнее положение

ограничимся только последними возмущениями, то придем к неверному выводу об устойчивости этого положения.

Сделаем здесь небольшое отступление. Тема устойчивости механических систем позволяет глубже осмыслить поведение систем самой разной природы. Даже в литературе по математической теории катастроф приводятся в качестве иллюстрации рисунки, данные выше. Потеря устойчивости стержневых систем есть наглядная механическая модель закона диалектики о переходе количества в качество. Количественный рост одного или нескольких параметров системы приводит ее к новому качественному состоянию. И здесь интересен в первую очередь момент бифуркации. Поэтому при анализе какой-либо системы не следует забывать о ее возможной бифуркации в рассматриваемый момент процесса. И вообще, похоже, многие спорные проблемы и ситуации связаны именно с этим состоянием качественного раздвоения.

Первые исследования продольного изгиба принадлежат великому математику Л.Эйлеру (1707-1783). Однако современники не смогли оценить значимость этой его работы. В те времена основными строительными материалами были камень и дерево. Сжатые элементы конструкций были массивными, и вопрос об их устойчивости не стоял. Но уже в XIX веке интенсивное строительство железных дорог и связанное с ним сооружение мостовых ферм потребовали дальнейших исследований продольного изгиба.

10.2. Формула Л.Эйлера

Найдем значение критической силы для шарнирно опертого стержня,

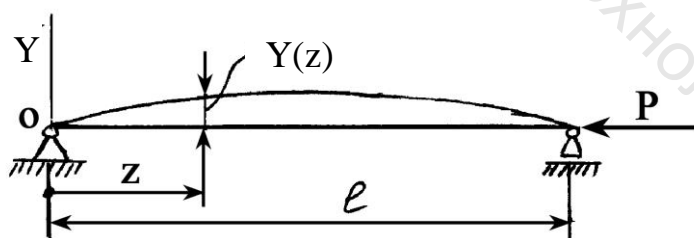


Рис. 10.3. Продольный изгиб сжатого стержня, шарнирно закрепленного по концам

показанного на рис. 10.3. Поскольку в момент потери устойчивости он будет слегка изогнут, составим дифференциальное уравнение упругой кривой.

$$y'' = \frac{M_x}{EI_x}, \quad M_x = -Py \quad (10.1)$$

Знак минус следует из того, что при $y > 0$ изгибающий момент отрицательный. После подстановки момента получим следующее дифференциальное уравнение:

$$y'' + \frac{P}{EI_x} y = 0. \quad \text{Обозначив}$$

$$\frac{P}{EI_x} = k^2, \quad (10.2)$$

окончательно получим :

$$y'' + k^2 y = 0. \quad (10.3)$$

Это дифференциальное уравнение второго порядка с постоянным коэффициентом (полагается $EI_x = \text{const}$). Решение уравнения (10.3) будет

$$y(z) = A \cos kz + B \sin kz. \quad (10.4)$$

Здесь A и B – постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий:

$$y(0) = 0, \quad (10.5)$$

$$y(\ell) = 0. \quad (10.6)$$

Из условия (10.5) следует $A = 0$. Условие (10.6) приводит к уравнению

$$B \sin k\ell = 0. \quad (10.7)$$

Имеются две возможности удовлетворить этому уравнению. Первая – коэффициент $B=0$, но это означает отсутствие прогиба стержня, то есть он остался прямолинейным. Вторая –

$$\sin k\ell = 0. \quad (10.8)$$

Из (10.7) следует, что $k\ell = \pi n$, где n – произвольное целое число. Учитывая (10.2), получаем:

$$P_n = \frac{\pi^2 n^2 EI_x}{\ell^2}. \quad (10.9)$$

Это означает, что для того, чтобы центрально сжатый стержень принял криволинейную форму, необходимо, чтобы сжимающая сила была равна какому-либо значению из множества P_n по (10.9). Наименьшее из этих значений называется критической силой $P_{кр}$ и будет иметь место при $n = 1$:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI_x}{\ell^2}. \quad (10.10)$$

Эта сила носит название первой критической эйлеровой силы.

Следовательно, согласно (10.3) при $P = P_{кр}$ выражение прогибов можно записать в следующем виде:

$$y = B \sin \frac{\pi n z}{\ell}. \quad (10.11)$$

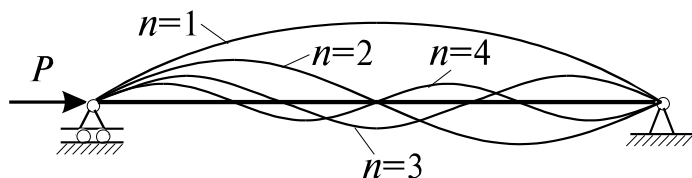


Рис.10.4. Формы потери устойчивости стержня, отвечающие различным значениям n

Из (10.11) видно, что прогибаться стержень будет по синусоиде. Графики функций прогибов $y(z)$ при различных n изображены на рис. 10.4.

Из (10.10) видно, что критическая с точки зрения устойчивости сила зависит от жесткости стержня и его длины, но никак не зависит от прочностных свойств материала стержня, т.е. два стержня одинаковой длины с идентичными граничными условиями их закрепления, изготовленных из различных

материалов, но имеющих одинаковую изгибную жесткость, теряют устойчивость при одном и том же значении сжимающей силы. В этом заключается значительная разница между проверкой прочности стержня на сжатие и растяжение и проверкой на устойчивость.

Вместо I_x в формулу Эйлера следует подставлять минимальный момент инерции сечения I_{\min} , поскольку стержень будет терять устойчивость в плоскости наименьшей жесткости.

10.3. Другие случаи опорного закрепления

Случай стержня, шарнирно опертого по концам, называют *основным*. К нему приводят другие случаи крепления стоек. Для этого вводится приведенная длина $l_0 = \mu l$. Он показывает, во сколько раз следует изменить длину шарнирно опертого стержня, чтобы критическая сила для него равнялась бы критической силе стержня длиной l в рассматриваемых условиях закрепления. Коэффициент μ называется коэффициентом приведения длины. Окончательный вид формулы Эйлера следующий:

$$P_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2} \quad (10.12)$$

На рис. 10.5 показано несколько видов закрепления стержня и указаны соответствующие значения коэффициента μ .

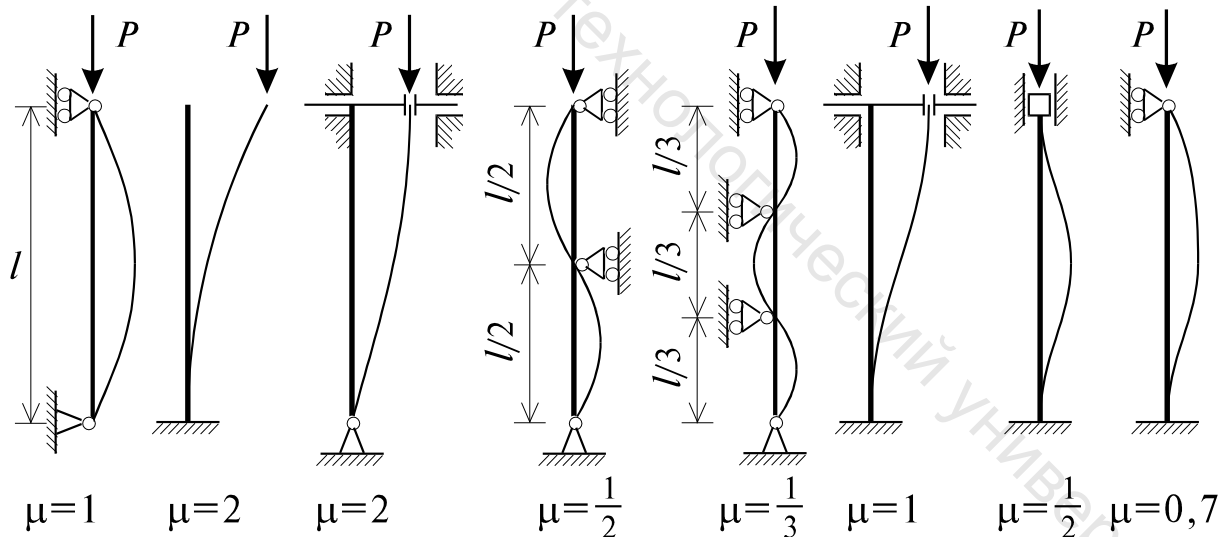


Рис. 10.5. Значения коэффициента приведенной длины для сжатых стержней при различных способах закрепления концов

Как видно из формулы (10.12), чем меньше μ , тем больше критическая, а следовательно, и допускаемая нагрузка стержня. Например, нагрузка стержня, заделанного двумя концами ($\mu=0,5$), может быть в 16 раз больше нагрузки стержня, заделанного одним концом ($\mu=2$). Поэтому там, где возможно, следует осуществлять жесткую заделку обоих концов стержня.

10.4. Границы применимости формулы Эйлера

Вывод формулы Эйлера основан на дифференциальном уравнении упругой линии. Поэтому формулой Эйлера можно пользоваться до тех пор, пока выполняется закон Гука, то есть пока критическое напряжение, соответствующее критической силе, не превышает предела пропорциональности.

$$\sigma_{кр} = \frac{P_{кр}}{A} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu\ell)^2 A} = \frac{\pi^2 E}{\left(\frac{\mu\ell}{i}\right)^2}, \quad (10.13)$$

где $i = \sqrt{I_{\min}/A}$ – радиус инерции сечения. Если стержень имеет одинаковые опорные закрепления в двух взаимно перпендикулярных плоскостях инерции, то при определении значения критической силы и критического напряжения, необходимо брать наименьшее значение момента инерции I , соответственно, радиуса инерции поперечного сечения.

Введем понятие *гибкости стержня*:

$$\lambda = \frac{\mu\ell}{i_{\min}}. \quad (10.14)$$

Тогда (10.13) принимает вид:

$$\sigma_{кр} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2}. \quad (10.15)$$

Из (10.15) следует, что напряжение $\sigma_{кр}$ возрастает по мере уменьшения гибкости стержня. Заметим, что стержень, имеющий неодинаковые опорные закрепления в главных плоскостях I , следовательно, неодинаковые приведенные длины, теряет устойчивость в той главной плоскости, в которой гибкость стержня имеет наибольшее значение.

Формула Эйлера неприемлема, если напряжения $\sigma_{кр} > \sigma_{П}$, где $\sigma_{ПЦ}$ – предел пропорциональности. Приравнявая (10.15) к пределу пропорциональности, получим предельное значение гибкости:

$$\lambda_{пред} = \sqrt{\frac{\pi^2 E}{\sigma_{ПЦ}}} \quad (10.16)$$

Из условия применимости формулы Эйлера $\sigma_{кр} = \pi^2 E / \lambda^2 \leq \sigma_{ПЦ}$, находим, что формулу Эйлера нельзя применять, если гибкость стержня меньше некоторого предельного значения $\lambda_{пред}$.

Предельная гибкость зависит только от свойств материала. Например, для стали марки Ст. 3 $\sigma_{ПЦ} = 20 \text{ кН/см}^2$, $E = 20000 \text{ кН/см}^2$, получаем $\lambda_{пред} = 100$. Следовательно, для стержней из этой стали формула Эйлера непригодна, если $\lambda < 100$.

Короткие стержни ($\lambda < 40$) разрушаются от пластических деформаций. Проблема устойчивости здесь не стоит. Гибкие стержни ($\lambda \geq 100$) теряют

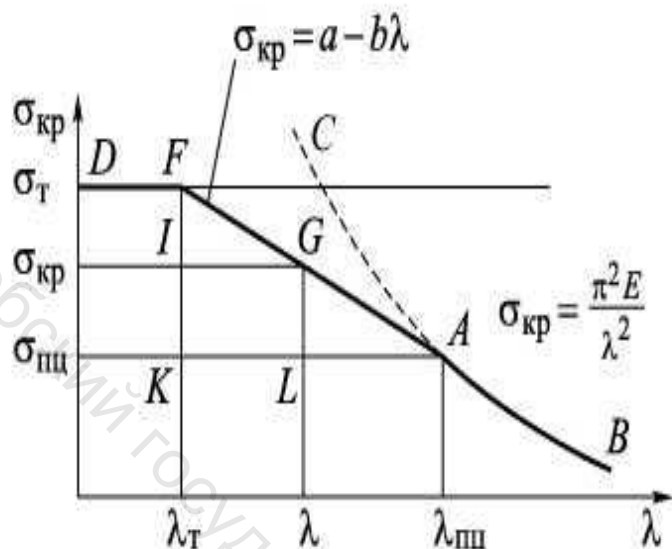


Рис. 10.6. Зависимость между критическими напряжениями и гибкостью стержня

пределом пропорциональности, пользуются эмпирическими формулами. Русский ученый Ф. Ясинский, обработав опыты Тетмайера и Баушингера, предложил следующую зависимость

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda. \quad (10.17)$$

Здесь a и b – эмпирические коэффициенты, зависящие от материала стержня. Например, для стали Ст. 3 $a = 31 \text{ кН/см}^2$, $b = 0.114 \text{ кН/см}^2$.

Зависимость критического напряжения от гибкости представлена на рис. 10.6. Для большой гибкости, т.е. при $\lambda \geq \lambda_{кр} = \lambda_{пц}$, формула Эйлера удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными. На рисунке 10.6 это участок AB квадратичной гиперболы Эйлера, показанный сплошной линией. Пунктиром показан тот участок AC гиперболы Эйлера, который не согласуется с экспериментом. При гибкости $\lambda = 0 \div \lambda_T$ напряжение $\sigma_{кр}$ считается примерно постоянным и равным пределу текучести. На рисунке 10.6 это участок DF . Участок FA соответствует средним гибкостям и $\sigma_{кр}$ определяется по формуле Ясинского (10.17). Таким образом

$$\sigma_{кр} = \begin{cases} \sigma_T & \text{при } \lambda \leq \lambda_T, \\ a - b\lambda & \text{при } \lambda_T < \lambda < \lambda_{пц}, \\ \frac{\pi^2 E}{\lambda^2} & \text{при } \lambda \geq \lambda_{пц}. \end{cases}$$

Умножая величину критического напряжения на площадь поперечного сечения стержня $A_{брутто}$, можно определить критическую силу. Здесь $A_{брутто}$ – площадь брутто поперечного сечения стержня, то есть без учета его ослаблений.

устойчивость в упругой стадии, и критическая сила для них определяется по формуле Эйлера (10.12). Стержни средней гибкости ($40 \leq \lambda \leq 100$) теряют устойчивость за пределом пропорциональности, то есть в пластической стадии. Использование формулы Эйлера для таких стержней опасно, так как она дает завышенный результат по сравнению с экспериментом.

Поскольку нет точного теоретического решения задачи об устойчивости за

10.5. Практический расчет на устойчивость

Так как потеря устойчивости означает выход конструкции из строя, то за опасное напряжение принимается критическое напряжение. Условие устойчивости записывается в виде

$$\sigma = P/A \leq [\sigma]_{уст}, \quad (10.18)$$

где $[\sigma]_{уст}$ – допускаемое напряжение при расчете на устойчивость

$$[\sigma]_{уст} = \sigma_{кр} / n_{уст}. \quad (10.19)$$

Это напряжение всегда меньше основного допускаемого напряжения $[\sigma]$ ($[\sigma] = \sigma_T / n$), так как критическое напряжение меньше предела текучести, а $n_{уст} > n$ ($n_{уст}$ должно учесть дополнительно такие факторы как начальные искривления стержней, эксцентриситеты нагрузки и др.).

Выразим допускаемое напряжение при расчете на устойчивость через $[\sigma]$.

$$[\sigma]_{уст} = \varphi [\sigma]. \quad (10.20)$$

Здесь φ – коэффициент снижения основного допускаемого напряжения при расчете на устойчивость. Этот коэффициент для данного материала зависит только от гибкости λ , причем $\varphi \leq 1$.

Значения коэффициента φ для разных материалов сведены в таблицу 10.1. Из таблицы видно, что для стали марки Ст. 3 при гибкости $\lambda = 100$ основное допускаемое напряжение уже снижается на 40%. Заметим, что элементы стальных ферм обычно имеют гибкость порядка $\lambda = 80-120$.

Рассмотрим последовательность подбора сечения сжатого стержня.

Таблица 10.1 Коэффициенты φ для различных материалов

λ	Ст 2-4	Ст 5	Чугун	Дерево	λ	Ст 2-4	Ст 5	Чугун	Дерево
0	1.00	1.00	1.00	1.00	110	0.52	0.43	–	0.25
10	0.99	0.98	0.97	0.99	120	0.45	0.36	–	0.22
20	0.96	0.95	0.91	0.97	130	0.40	0.33	–	0.18
30	0.94	0.92	0.81	0.93	140	0.36	0.29	–	0.16
40	0.92	0.89	0.69	0.87	150	0.32	0.26	–	0.14
50	0.89	0.86	0.57	0.80	160	0.29	0.24	–	0.12
60	0.86	0.82	0.44	0.71	170	0.26	0.21	–	0.11
70	0.81	0.76	0.34	0.60	180	0.23	0.19	–	0.10
80	0.75	0.70	0.26	0.48	190	0.21	0.17	–	0.09
90	0.69	0.62	0.20	0.38	200	0.19	0.16	–	0.08
100	0.60	0.51	0.16	0.31					

Поскольку коэффициент φ зависит от гибкости λ , а последняя от радиуса инерции сечения, то есть от искомого его размера, то подбор сечения приходится вести последовательными приближениями. Задавшись каким-либо средним значением φ_1 , например $\varphi_1=0.6$, определяют требуемую площадь $A=P/\varphi_1[\sigma]$, а затем размеры сечения. По найденным размерам вычисляются минимальный радиус инерции и гибкость λ , соответственно которой находят табличное значение φ_{1T} . Если коэффициент φ_{1T} совпадает с исходным значением, то сечение подобрано верно. В противном случае принимают $\varphi_2=(\varphi_1+\varphi_{1T})/2$ и повторяют всю последовательность вычислений.

Проще решается задача по определению допускаемого значения силы, сжимающей стержень заданных размеров. Определив гибкость и по таблице соответствующее значение φ , находят $[P]=\varphi[\sigma]A$.

Пример 10.1. Заданную стойку двутаврового (№30) поперечного сечения центрально сжатую силой P (рис. 10.7, слева), рассчитать на устойчивость, а также указать положительные и отрицательные стороны конструкции этой стойки. В целях минимизации расходов материальных ресурсов можно заменить двутавровое сечение стойки более рациональным сечением из двух швеллеров, соединенных планками на сварке (рисунок 10.7, справа). Подобрать сечения из двух швеллеров и сравнить результаты по площади с сечением из двутавра. Материал стоек - сталь Ст.3, допускаемое напряжение $[\sigma]=1,9 \cdot 10^5$ кПа, $\sigma_T=240$ МПа. Найти критическую силу и коэффициент запаса устойчивости.

Решение. 1. Расчет на устойчивость стойки из двутавра. Проверка устойчивости сжатых стержней производится по формуле (10.20). Из сортамента ГОСТ 8239-72 выписываем необходимые данные для двутавра №30: $A=46,5 \cdot 10^{-4}$ м²; $i_x=0,123$ м; $i_y=0,0269$ м.

Тогда из формулы (10.20) имеем:

$$P = \varphi[\sigma]A. \quad (10.21)$$

Для нахождения величины φ нужно знать максимальную гибкость стойки, которая определится из формулы (10.14)

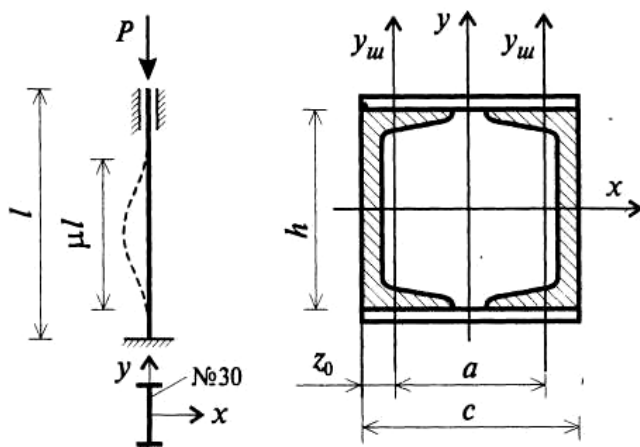


Рис. 10.7. Схема к расчету

$$\lambda_{\max} = \frac{\mu \ell}{i_{\min}}$$

где ℓ - длина стойки, μ - коэффициент приведенной длины, зависящий от способа закрепления концов стойки (для нашего примера $\mu = 0,5$), i_{\min} - минимальный радиус инерции сечения стойки (в данном случае - радиус инерции относительно оси y). Таким образом,

$$\lambda_{\max} = \frac{0,5 \cdot 3}{0,0269} = 55,76$$

По таблице 10.1 находим φ_T при $\lambda = 55,76$, интерполируя до третьего знака после запятой:

$$\text{при } \lambda = 50 \quad \varphi = 0,89;$$

$$\text{при } \lambda = 60 \quad \varphi = 0,86.$$

Поэтому при $\lambda = 55,76$

$$\varphi = 0,89 - \frac{0,89 - 0,86}{10} 5,76 = 0,873.$$

Подставляя значения A , φ и $[\sigma]$ в формулу (10.21), получим допустимое значение сжимающей силы с точки зрения устойчивости рассматриваемой стойки:

$$P = 0,873 \cdot 46,5 \cdot 10^{-4} \cdot 1,9 \cdot 10^5 = 771 \text{ кН.}$$

Преимуществом стойки из двутавра является простота конструкции и малая трудоемкость изготовления и монтажа, недостатком - неравная устойчивость в разных плоскостях.

2. Подбор сечения стойки из двух швеллеров. При рассмотрении этого вопроса составное сечение стойки следует рассматривать как цельное, и поэтому расчет приведенной гибкости можно не выполнять. Подбор составного сечения стойки будем производить путем последовательного приближения. Для этого задаемся произвольным значением φ , подбираем сечение и сопоставляем возникающие в нем напряжения с расчетным сопротивлением. Эта операция производится до тех пор, пока напряжение, возникающее в стойке, будет достаточно близким к расчетному сопротивлению (отклонение не должно превышать $\pm 5\%$).

Примем $\varphi = 0,6$. Из (10.20) определим требуемую площадь A сечения двух швеллеров: $A \geq 2A_{шв} = \frac{P}{\varphi[\sigma]} = \frac{771}{0,6 \cdot 1,9 \cdot 10^5} = 67,63 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$; $A_{шв} = 3,38 \cdot 10^{-3} \text{ м}^2$. По

ГОСТ 8240-72 принимаем швеллер №24а, для которого $A_{шв} = 0,00329 \text{ м}^2$, $i_x^{шв} = 0,0984 \text{ м}$, $i_y^{шв} = 0,0267 \text{ м}$

Для обеспечения равноустойчивости стойки из двух швеллеров нужно, чтобы гибкость ее была примерно одинаковой в обеих плоскостях. Для принятого сечения из двух швеллеров определим максимальную гибкость:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_{\min}} = \frac{\mu l}{i_x^{шв}} = \frac{0,5 \cdot 3}{0,0984} = 15,24.$$

По таблице 10.1 находим значение φ для полученной гибкости:

$$\text{при } \lambda = 10 \quad \varphi = 0,99;$$

$$\text{при } \lambda = 20 \quad \varphi = 0,97.$$

Для $\lambda = 15,24$:

$$\varphi = 0,99 - \frac{0,99 - 0,97}{10} 5,24 = 0,979; \quad A = 2A_{шв} = 0,00658 \text{ м}^2.$$

Определяем напряжение в стойке:

$$\sigma = \frac{P}{\varphi A} = \frac{771}{0,979 \cdot 65,8 \cdot 10^{-4}} = 119700 \text{ кПа} \leq [\sigma].$$

Недонапряжение составляет

$$\frac{(190 - 119,7)}{190} \cdot 100\% = 37\% > 5\%.$$

Необходимо уменьшить сечение стойки. Принимаем стойку из швеллеров № 20 ($A_{шв} = 0,00234 \text{ м}^2$; $i_x = 0,0807 \text{ м}$). Определим гибкость:

$$\lambda = \frac{0,5 \cdot 3}{0,0807} = 18,59.$$

По таблице 10.1 для $\lambda = 18,59$ находим: $\varphi = 0,973$, и учитывая, что $A = 2A_{шв} = 0,00468 \text{ м}^2$, получим:

$$\sigma = \frac{771}{0,973 \cdot 46,8 \cdot 10^{-4}} = 169300 \text{ кПа} \leq [\sigma].$$

Недонапряжение составляет

$$\frac{(190 - 169,3)}{190} \cdot 100\% = 10,9\% > 5\%.$$

Принимаем стойку из швеллеров №18 ($A = 0,00207 \text{ м}^2$; $i_x = 0,0724 \text{ м}$), гибкость которой принимает значение:

$$\lambda = \frac{0,5 \cdot 3}{0,0724} = 20,72.$$

По таблице 10.1 для $\lambda = 20,72$ находим: $\varphi = 0,973$; $A = 0,0414 \text{ м}^2$,

$$\sigma = \frac{771}{0,969 \cdot 41,4 \cdot 10^{-4}} = 192200 \text{ кПа}.$$

Перенапряжение составляет

$$\frac{(192,2 - 190)}{190} \cdot 100\% = 1,2\% < 5\%, \text{ что допустимо.}$$

Окончательно принимаем стойку из двух швеллеров №18. Из сортамента ГОСТ 8240-72 выписываем необходимые данные:

$$I_x = 1090 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4, \quad I_y = 86 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4, \quad z_0 = 0,0194 \text{ м}, \quad h = 0,18 \text{ м}, \quad b = 0,07 \text{ м}.$$

Момент инерции поперечного сечения из двух швеллеров относительно оси x : $I_x = 2 I_x$. Момент инерции составного сечения относительно оси y можно изменять, сближая или удаляя швеллеры один относительно другого. Определим расстояние между швеллерами из условия, что $I_y = 1,2 \cdot I_x$. Из рис. 10.7 имеем $c = a + 2 \cdot z_0$, где a - расстояние между собственными осями у каждого из швеллеров. Тогда: $2(I_y^{шв} + A_{шв} \cdot 0,25 \cdot a^2) = 1,2 \cdot 2 \cdot I_x^{шв}$, отсюда

$$a = \sqrt{\frac{1,2 \cdot I_x^{шв} - I_y^{шв}}{0,25 \cdot A_{шв}}} = \sqrt{\frac{1,2 \cdot 1090 - 86}{0,25 \cdot 20,7}} \cdot 10^{-4} = 0,1537 \text{ м.}$$

Монтажное расстояние между швеллерами будет $c = a + 2 \cdot Z_0 = 0,1537 + 2 \cdot 0,0194 = 0,1925 \text{ м}$, принимаем $c = 0,192 \text{ м}$. Сравнивая сечение из двух швеллеров с заданным двутавровым, видим, что площадь заданного сечения составляет $46,5 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$, а полученного из двух швеллеров - $41,4 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$. Таким образом, расход металла на стойку из двух швеллеров (без учета металла на соединительные планки) будет меньше в $46,5 / 41,4 = 1,12$ раза, или на 12%, чем на стойку из одного двутавра.

Однако конструкция стойки из двух швеллеров трудоемка в изготовлении по сравнению со стойкой из двутавра. Экономическое преимущество подобранного сечения стойки, состоящего из двух швеллеров, по сравнению с двутавром, объясняется более рациональным распределением ее изгибных жесткостей в различных направлениях. Это приводит к выравниванию значений моментов инерции относительно главных центральных осей инерции сечения и тем самым, к равноустойчивости стойки в указанных направлениях.

Это положение является важным обстоятельством для разработки оптимальных конструктивных решений с позиции устойчивости.

Определяем критическую силу. Так как гибкость $\lambda = 20,72 < 40$ (для Ст. 3), то напряжение $\sigma_{кр}$ считается примерно постоянным и равным пределу текучести σ_T . Коэффициент запаса устойчивости

$$n = P_{кр} / P = \sigma_T \cdot A / P = 240 \cdot 10^6 \cdot 41,4 \cdot 10^{-4} / 771 \cdot 10^3 = 1,3$$

10.6. Рациональные типы сечений сжатых стержней

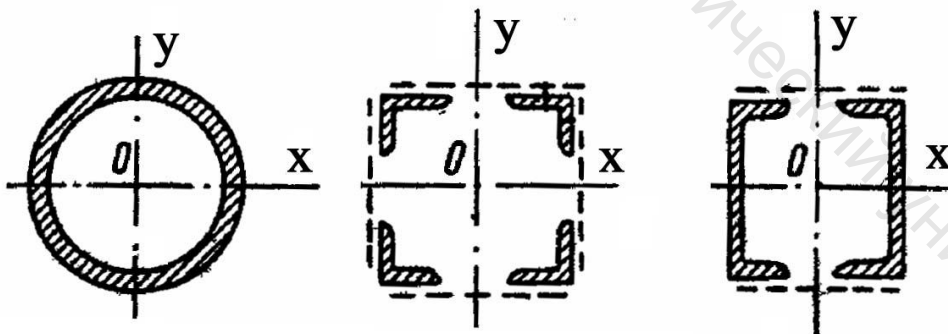


Рис. 10.8. Рациональные типы сечений сжатых стержней

Рациональным является такое сечение, которое обладает наибольшими моментами инерции при заданной площади и при этом равноустойчиво относительно обеих главных осей ($\lambda_x = \lambda_y$). Если опорные крепления стержня одинаковы в плоскостях xz и yz , то условие равноустойчивости требует равенства главных моментов инерции сечения ($I_x = I_y$). В этом случае наиболее рациональным будет кольцевое сечение (трубы, вышки, колонны). К рациональному типу приближаются также коробчатые сечения,

составленные из прокатных профилей, соединенных планками (показаны на рис. 10.8 штриховыми линиями).

10.7. Понятие о продольно- поперечном изгибе

Реальные стержни всегда имеют некоторую начальную кривизну. К тому же осуществить нагружение стержня строго по его оси весьма затруднительно, обычно имеется больший или меньший эксцентриситет. Поэтому эти факторы нужно учитывать при расчете сжатых стержней.

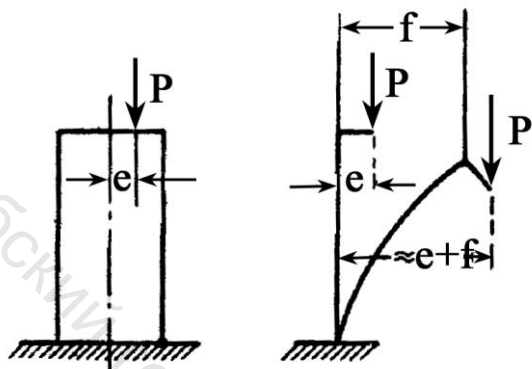


Рис. 10.9. Стойка, сжатая эксцентрично приложенной силой

Сравним два случая: внецентренное сжатие массивного стержня и внецентренное сжатие гибкой стойки (рис. 10.9).

В первом случае максимальные напряжения равны $\max \sigma = P/A + P \cdot e/W$.

Во втором случае нужно учитывать дополнительный момент, вызванный отклонением стойки на величину f .

$\max \sigma = P/A + P \cdot e/W + P \cdot f/W$.

Расчетом на продольно-поперечный изгиб называется расчет на совместное действие сжатия с изгибом с учетом дополнительных моментов, вызванных отклонением оси от начального положения.

Решение этой задачи представляет некоторые трудности, так как дополнительный момент $P \cdot f$ зависит от деформаций стержня, которые, в свою очередь, зависят от изгибающего момента. Также следует иметь в виду, что при совместном действии продольных и поперечных нагрузок принцип независимости действия сил перестает быть справедливым.

Контрольные вопросы

- 10.1. Дайте определение понятия критическое состояние системы.
- 10.2. Дайте определение понятия потери устойчивости системы.
- 10.3. Какие величины внешних сил называются критическими?
- 10.4. Зависит ли величина критических значений внешних сил от характера закрепления стержня?
- 10.5. От каких факторов зависит гибкость стержней?
- 10.6. Какая сила называется критической силой?
- 10.7. Что называется запасом устойчивости?
- 10.8. Как в общем виде пишется формула Эйлера?
- 10.9. Что называется коэффициентом приведения длины и чему он равен для четырех случаев закрепления концов стержня?
- 10.10. Какой момент инерции подставляется в формулу Эйлера? Почему?
- 10.11. В каком случае вероятность выпучивания стержня во всех направлениях одинакова?
- 10.12. Что называется гибкостью стержня? Какова ее формула?

10.13. Как рассчитывается стержень на продольный изгиб, если гибкость стержня такова, что формула Эйлера не применима?

10.14. В какой плоскости изогнется стойка при потере устойчивости?

10.15. Какими должны быть возмущения при исследовании устойчивости системы: малыми или большими? Достаточно ли при этом ограничиваться всего одним возмущением? Что является критерием устойчивости состояния равновесия системы?

10.16. Какое влияние на поведение сжатой стойки оказывает эксцентриситет сжимающей силы и начальное ее искривление?

Витебский государственный технологический университет

ГЛАВА 11

ДИНАМИЧЕСКОЕ НАГРУЖЕНИЕ

До сих пор изучалось действие статических нагрузок, которые изменяют свою величину настолько медленно, что ускорения элементов конструкций пренебрежимо малы. Однако часто нагрузки имеют динамический характер, так как изменяются во времени с большой скоростью.

Общий метод расчета на динамическую нагрузку основан на известном из теоретической механики *принципе Даламбера: всякое движущееся тело может рассматриваться как находящееся в состоянии мгновенного равновесия, если к действующим на него внешним силам добавить силу инерции, равную произведению массы тела на его ускорение и направленную в противоположную от ускорения сторону.*

Поэтому в тех случаях, когда силы инерции можно определить, применяется метод сечений и из уравнений равновесия находятся внутренние усилия и напряжения. В тех же случаях, когда определение сил инерции затруднительно, как, например, при ударе, для нахождения динамических напряжений и деформаций используется закон сохранения энергии.

Динамические нагрузки можно разделить на три вида:

1. Постоянные силы инерции.
2. Периодические или вибрационные силы.
3. Ударные силы.

11.1. Постоянные силы инерции

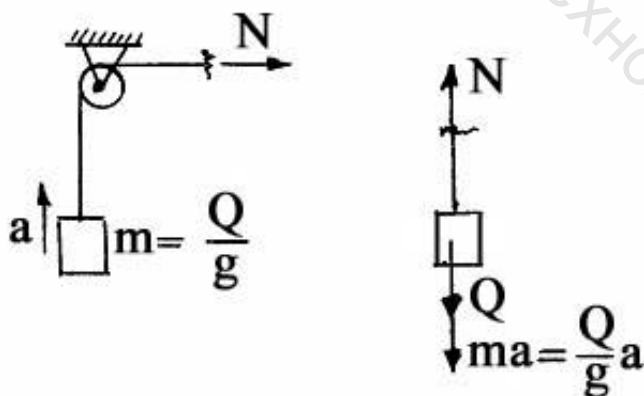


Рисунок 11.1 Подъем груза с ускорением

Рассмотрим пример движения груза массой m с постоянным ускорением a (рис. 11.1). Выполнив сечение троса, рассматриваем мгновенное равновесие груза под действием натяжения троса N , веса груза Q и добавленной силы инерции ma .

$$N = Q + Qa/g = Q \cdot (1 + a/g).$$

$$\sigma = N/A = Q(1 + a/g)/A = k_d \sigma_{ст}.$$

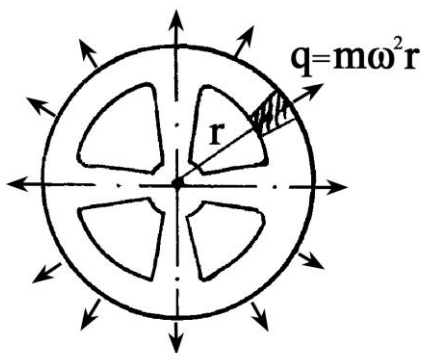


Рис. 11.2. Вращение маховика с постоянной угловой скоростью

Здесь $\sigma_{ст} = Q/A$ - статическое напряжение в тросе под действием силы Q , а $k_d = 1 + a/g$ - динамический коэффициент, учитывающий динамическое действие нагрузки. Итак,

$$\sigma_d = k_d \sigma_{ст}. \quad (11.1)$$

На рис. 11.2 показано действие центробежных сил инерции на обод маховика, вращающегося с угловой скоростью ω .

Интенсивность центробежных сил $q = m\omega^2 r$, где m - масса единицы длины обода маховика.

Центробежные силы, действующие на маховик, вызывают в нем растягивающие нормальные напряжения. С увеличением угловой скорости эти напряжения могут достигнуть предела прочности и привести к разрушению маховика.

11.2. Вибрационные силы. Колебания упругих систем

При работе машин и механизмов обычно возникают периодически изменяющиеся силы, которые вызывают их колебания (вибрацию).

Колебанием называется периодическое движение, то есть такое движение, которое повторяется по истечении некоторого промежутка времени, называемого периодом колебания.

В колеблющейся упругой системе всегда есть тело, обладающее инертностью, и упругие связи, которые будем считать линейно-упругими. Колебания можно классифицировать по-разному. Мы рассмотрим колебания собственные (или свободные) и вынужденные.

Собственными колебаниями называются такие колебательные движения, которые совершает система, освобожденная от внешнего силового воздействия и предоставленная сама себе.

Под вынужденными колебаниями понимается движение упругой системы, происходящее под действием изменяющихся внешних сил, называемых возмущающими.

Одним из основных понятий теории колебаний является число степеней свободы упругой системы.

Под числом степеней свободы понимается число независимых координат, определяющих положение системы.

На рис. 11.3 показаны стержневые системы с разным числом степеней свободы. Как видно, балка с распределенной массой является системой с

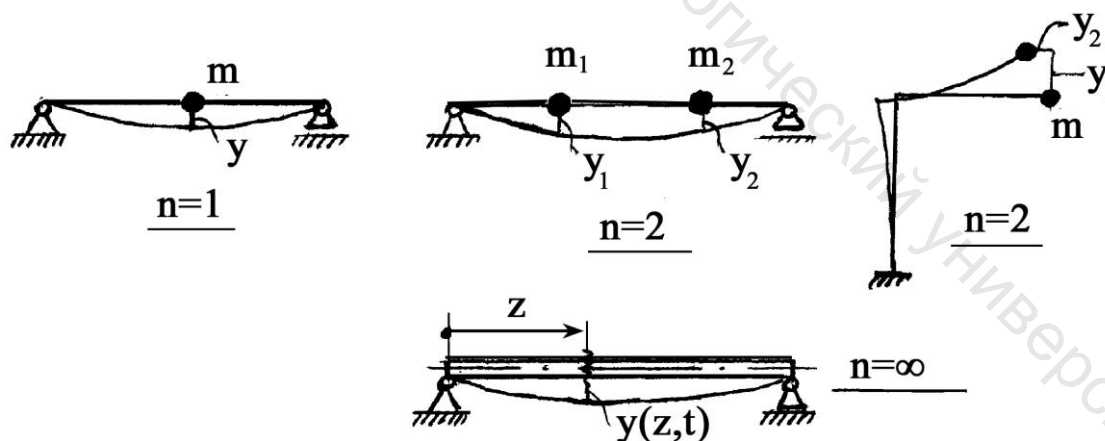


Рис. 11.3. Модели стержневых систем с разным числом степеней свободы

бесконечным числом степеней свободы.

Однако само определение числа степеней свободы зависит от идеализации стержневой системы, то есть от выбора расчетной схемы. В последующем изложении мы остановимся лишь на системах с одной степенью свободы.

11.3. Собственные колебания системы с одной степенью свободы

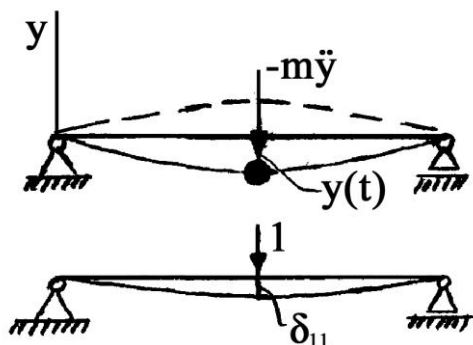


Рис. 11.4. Схема к расчету

Рассмотрим балку с сосредоточенной массой m (рис.11.4). Предположим, что масса балки по сравнению с массой m мала, и ею можно пренебречь. Если массу m отклонить от положения равновесия и отпустить, то балка начнет колебаться. Ось изогнутой балки определяется величиной отклонения массы $y(t)$, то есть всего лишь одним параметром. Договоримся y отсчитывать от положения статического равновесия

балки, вызванного действием веса mg . Поэтому в дальнейшем вес mg учитывать не будем. Также не будем учитывать силы сопротивления. Для получения дифференциального уравнения колебаний выразим перемещение $y(t)$, умножив силу инерции на податливость балки δ_{11} , то есть перемещение, вызванное действием единичной силы.

$$y = \delta_{11}(-m\ddot{y}), \text{ или } m\delta_{11}\ddot{y} + y = 0.$$

Обозначив $k^2 = \frac{1}{m\delta_{11}}$, получим окончательно следующее уравнение

$$\ddot{y} + k^2 y = 0. \quad (11.2)$$

Интеграл уравнения (11.2) имеет вид $y(t) = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt$.

Постоянные интегрирования найдем из начальных условий:

$$\begin{aligned} 1. y|_{t=0} = y_0, &\Rightarrow C_1 = y_0. \\ 2. \dot{y}|_{t=0} = V_0, \dot{y}(t) = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt, \dot{y}(0) = C_2 k = V_0. \end{aligned} \quad (11.3)$$

Решение уравнения (11.2) с учетом (11.3) имеет вид:

$$y(t) = y_0 \cos kt + \frac{V_0}{k} \sin kt. \quad (11.4)$$

Сделаем подстановку: $C_1 = A \cdot \sin \varphi$, $C_2 = A \cdot \cos \varphi$. После ряда преобразований и

переобозначений $A^2 = C_1^2 + C_2^2 = y_0^2 + \left(\frac{V_0}{k}\right)^2$, $\operatorname{tg} \varphi = \frac{C_1}{C_2}$, $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{ky_0}{V_0}$

получим уравнение колебаний в виде $y(t) = A \sin(kt + \varphi)$, где $k = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}}$.

$$(11.5)$$

Итак, колебания идут по синусоиде, A – амплитуда колебаний, $(kt + \varphi)$ – фаза, φ – начальная фаза.

Как видно из графика на рис. 11.5, по истечении времени T (периода колебаний) движение повторяется. Это значит, что $\sin[k(t+T)+\varphi] = \sin(kt+\varphi)$. Отсюда следует, что $T=2\pi/k$ и $k=2\pi/T$. Следовательно k – число колебаний за 2π секунд. Это число называют **круговой (или циклической) частотой**

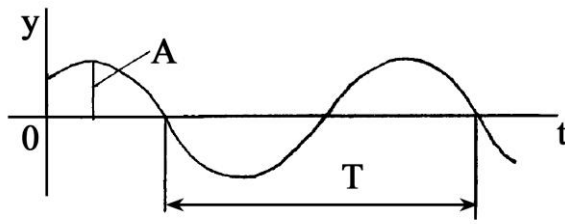


Рис. 11.5. К выводу частоты колебаний

$$k = \sqrt{\frac{1}{m\delta_{11}}} = \sqrt{\frac{mg}{m\delta}} = \sqrt{\frac{g}{\delta}} = \sqrt{\frac{C}{m}} \quad (11.6)$$

Здесь $C=1/\delta_{11}$ есть жесткость упругой системы – величина, обратная податливости. Из формулы (11.6) видно, что чем больше жесткость упругой системы, тем выше частота ее колебаний.

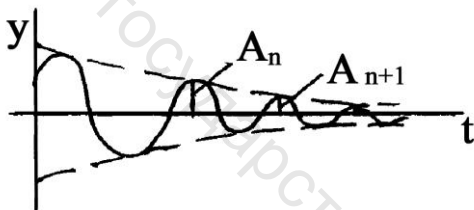


Рис. 11.6. иллюстрация затухающих колебаний

Замечание: в действительности собственные колебания системы идут с затуханием вследствие действия сил

сопротивления рис. 11.6. Затухание колебаний характеризуется так называемым логарифмическим декрементом затухания $d = \ln(A_n/A_{n+1})$.

11.4. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы

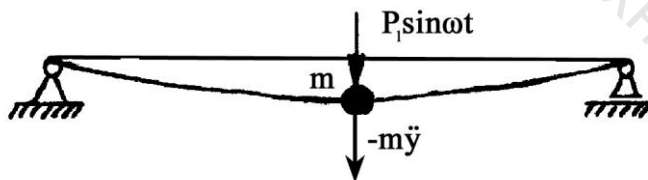


Рис. 11.7. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы

Рассмотрим колебания балки в том случае, когда на массу действует внешняя возмущающая сила, изменяющаяся по гармоническому закону, как показано на рис. 11.7. Умножая податливость δ_{11} на сумму двух сил $y = \delta_{11}(-m\ddot{y} + P_1 \sin \omega t)$,

после преобразования получим дифференциальное уравнение вынужденных колебаний (без учета сил сопротивления) $m\delta_{11}\ddot{y} + y = P_1 \sin \omega t$. Обозначив

$$y_1 = P_1 \cdot \delta_{11}, \quad \frac{1}{m\delta_{11}} = k^2, \text{ окончательно получим:}$$

$$\ddot{y} + k^2 y = k^2 y_1 \sin \omega t. \quad (11.7)$$

В полученном уравнении y_1 – это прогиб балки под действием статически приложенной силы P_1 (максимальное значение возмущающей силы).

Как известно, решение неоднородного дифференциального уравнения состоит из суммы решений однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения:

$$y = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt + y^*. \quad (11.8)$$

Будем искать частное решение в виде:

$$y^* = y_D \sin \omega t, \quad \ddot{y}^* = -\omega^2 y_D \sin \omega t. \quad (11.9)$$

Подставляя решение (11.9) в дифференциальное уравнение (11.7) получим $-\omega^2 \cdot y_D \cdot \sin \omega t + k^2 \cdot y_D \cdot \sin \omega t = k^2 y_1 \sin \omega t$. (11.10)

Разделим все члены равенства (11.10) на $\sin \omega t$ и найдем динамический прогиб y_D .

$$y_D = \frac{k^2}{k^2 - \omega^2} y_1 = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{k^2}} y_1 = \beta y_1. \quad \text{Таким образом}$$

$$y_D = \beta y_1, \quad (11.11)$$

где

$$\beta = \left| \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{k^2}} \right| \quad (11.12)$$

Коэффициент β называют **коэффициентом динамичности**. Он

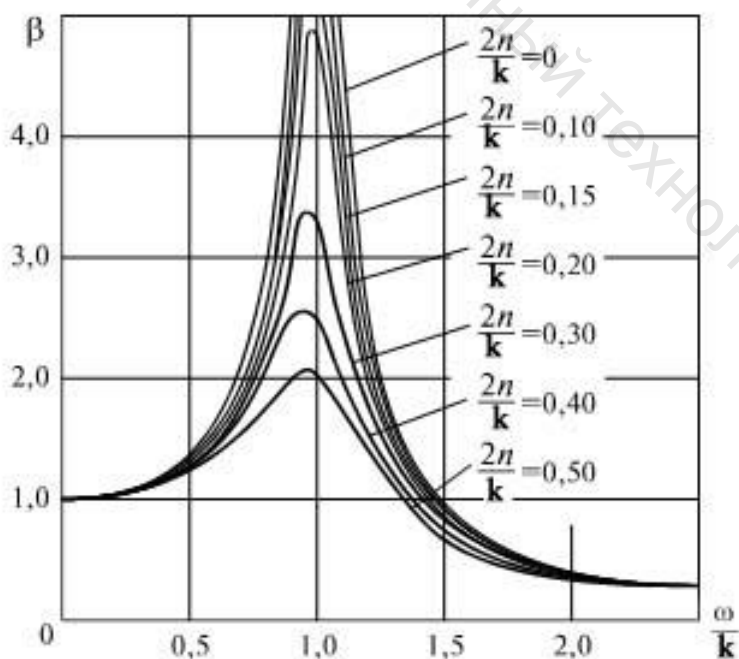


Рис. 11.8. Зависимости коэффициента динамичности от отношения частот ω/k

показывает, насколько амплитуда вынужденных колебаний отличается от статического перемещения y_1 , вызванного максимальным значением возмущающей силы. Построим график (рис. 11.8) зависимости коэффициента динамичности от отношения частот ω/k . n – коэффициент затухания.

Как видно из рис. 11.8, при совпадении частот коэффициент динамичности стремится к бесконечности. Это состояние резонанса.

Резонансом называется совпадение частоты возмущающей силы с

собственной частотой системы.

Заметим, что при учете сил сопротивления коэффициент β принимает при резонансе конечные значения, но достигает больших величин. Поэтому состояние резонанса всегда опасно для системы. В инженерной практике всегда стремятся “отстроиться” от резонанса. Если же это затруднительно, то

применяют демпфирование, то есть включение в конструкцию устройств, гасящих энергию колебаний.

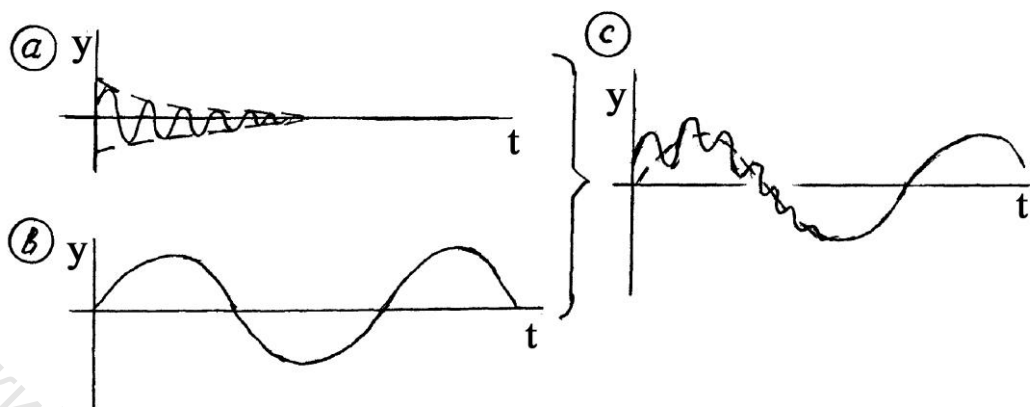


Рис. 11.9. Вынужденные колебания системы (с) представляют собой сложение двух колебательных движений: собственных колебаний (а) и вынужденных (в)

На рис. 11.9 показано, что вынужденные колебания системы (с) представляют собой сложение двух колебательных движений: собственных колебаний (а) и вынужденных (в).

Собственные колебания по истечении некоторого времени затухают, и система продолжает колебаться с частотой возмущающей силы.

11.5. Динамические напряжения

Максимальные динамические напряжения определяются амплитудой вынужденных колебаний. На примере (рис. 11.10) видно, что максимальный прогиб есть сумма постоянного и динамического прогибов.

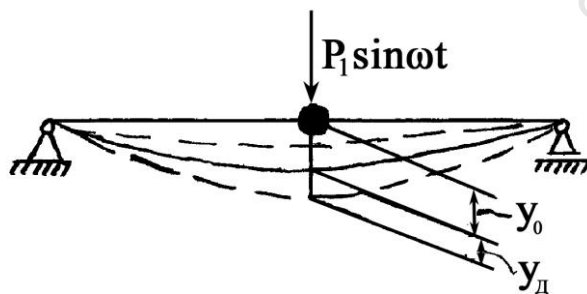


Рис. 11.10

К вычислению максимального прогиба

$$\sigma_{\max} = \sigma_0 + \sigma_D = \sigma_0 + \beta\sigma_1 \quad (11.14)$$

$$y_{\max} = y_0 + y_d = y_0 + \beta y_1, \quad (11.13)$$

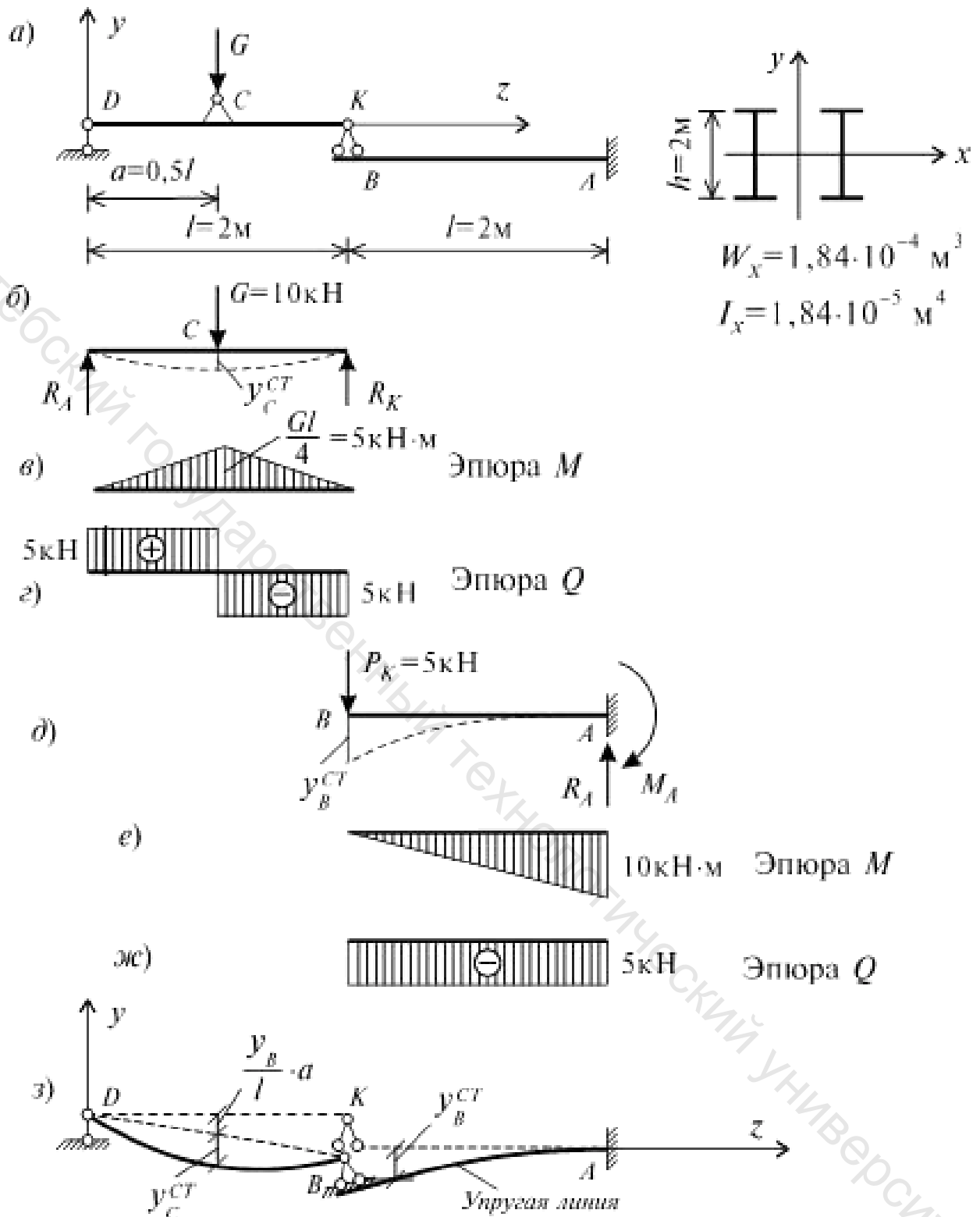
где $y_0 = mg\delta_{11}$, $y_d = P_1\delta_{11}$.

Подобным образом находим наибольшие напряжения, складывая напряжения от постоянной нагрузки с динамическими напряжениями.

Пример 11.1. Определить динамический прогиб и напряжения в опасных сечениях балок КД и АВ, возникающих под действием работающего электромотора весом $G = 10$ кН (рис. 11.11, а). Вес неуравновешанных частей ротора $P = 1$ кН. Эксцентриситет вращающихся масс $e = 0,02$ м. Число оборотов ротора $n = 600$ об/мин. Массой балок в расчетах пренебречь. Поперечное сечение балок КД и АВ состоит из двух двутавров №20 ($I_x = 1840 \cdot 10^{-8} \text{ м}^4$; $W_x = 184 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3$). Модуль упругости стали $E = 2 \cdot 10^8 \text{ кН/м}^2$.

Решение. 1. Определение статического прогиба в сечении С балки КД и статического напряжения в сечении у заделки А.

Из уравнений равновесия статики $\Sigma m_D = 0$ и $\Sigma m_K = 0$ найдем опорные



реакции в балке KD (рис. 11.11,б)

Рис.11.11. Схема к расчету

$$R_D = R_K = \frac{G}{2} = \frac{10}{2} = 5 \text{ кН}$$

На балку AB в точке B (K) опоры на консоль передается нагрузка $P = 5 \text{ кН}$, равная по величине опорной реакции R_K , но обратная по направлению. Из уравнений $\Sigma m_A = 0$ и $\Sigma y = 0$ определяем реактивные усилия

в заделке А балки АВ: $M_A = 10 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $R_A = 5 \text{ кН}$. Определив опорные реакции в балках, строим эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M для балок КД и АВ (рис. 11.11, в, г, е, ж). Зная величины изгибающих моментов, возникающих в опасных сечениях балок, определяем статические напряжения в сечениях С и А:

$$\sigma_A^{CT} = \pm \frac{M_A}{2W_x} = \pm \frac{10}{2 \cdot 184 \cdot 10^{-6}} = \pm 2,717 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^2;$$

$$\sigma_C^{CT} = \pm \frac{M_C}{2W_x} = \pm \frac{5}{2 \cdot 184 \cdot 10^{-6}} = \pm 1,359 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^2.$$

Для определения статического прогиба в точке С балки КД вначале предполагаем, что эта балка опирается на абсолютно жесткое основание. Используя метод начальных параметров (выражение 6.24), составляем уравнение прогибов, приняв начало координат в сечении D.

$$EI_x y_c^{CT} = EI_x y_0 + EI_x \varphi_0 z + \frac{M_0 z^2}{2!} + \frac{Q_0 z^3}{3!} - \frac{G(z-a)^3}{3!} \Bigg|_{z>a},$$

$$\text{где } y_0 = 0, M_0 = 0, \varphi_0 \neq 0, Q_0 = R_D = \frac{G(\ell - a)}{\ell}.$$

Для нахождения φ_0 составим уравнение прогиба для сечения К в котором прогиб равен нулю из условий закрепления:

$$EI_x y_c^{CT} = EI_x \varphi_0 \ell + \frac{Q_0 \ell^3}{6} - \frac{G(\ell - a)^3}{6} = 0.$$

Так как $y_c^{CT} = 0$, то, решая это уравнение, получим:

$$\varphi_0 = \frac{G(\ell - a)^3}{6EI_x \ell} - \frac{G(\ell - a)\ell}{6EI_x}.$$

Подставив найденное значение φ_0 в уравнение прогиба для сечения С, получим формулу для определения y_c^{CT} :

$$y_c^{CT} = -\frac{G a^2 (\ell - a)^2}{3 \cdot \ell \cdot EI_x} = -\frac{10 \cdot 1^2 \cdot 1^2}{3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 1980 \cdot 10^{-8}} = -0,00021 \text{ м}.$$

Для вычисления полного перемещения сечения С с учетом характера опирания балки КД на консольную балку необходимо найти прогиб консольной балки АВ от действия на нее силы $P_K = -R_K = 5 \text{ кН}$. Для этого, приняв начало координат в сечении В балки АВ, составим уравнение метода начальных параметров для определения прогиба на конце консоли. При начале координат в точке В консоли известными параметрами будут: $M_0 = M_B = 0$; $Q_0 = Q_B = -P_K = -5 \text{ кН}$, а неизвестными $y_0 = y_B \neq 0$; $\varphi_0 = \varphi_B \neq 0$. Неизвестные начальные параметры y_0 и φ_0 определим из уравнений прогиба и угла поворота для сечения А. Из условия закрепления балки АВ имеем при $z = \ell = 2 \text{ м}$ $y_A = \varphi_A = 0$.

Составим уравнения метода начальных параметров:

$$EI_x \varphi = EJ_x \varphi_0 - \frac{P_K z^2}{2}; \quad (a)$$

$$EI_x y = EJ_x y_0 + EJ_x \varphi_0 z - \frac{P_K z^3}{3!}. \quad (б)$$

Приравняв к нулю уравнение (а) при $z = \ell$ м, определяем φ_0 :

$$\varphi_B = \varphi_0 = \frac{P_K \ell^2}{2EI_x}.$$

Подставив найденное значение φ_0 в уравнение (б) и принимая $y = 0$ при $z = \ell$, получим выражение второго неизвестного начального параметра y_0 , определяющего прогиб сечения В консольной балки АВ:

$$EI_x y_A = EI_x y_0 + \frac{P_K \ell^3}{2} - \frac{P_K \ell^3}{6} = 0;$$

$$EI_x y_0 = \frac{P_K \ell^3}{6} - \frac{P_K \ell^3}{2} = -\frac{P_K \ell^3}{3};$$

$$y_0 = y_B^{CT} = -\frac{P_K \ell^3}{3EI_x} = -\frac{5 \cdot 2^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 2 \cdot 1840 \cdot 10^{-8}} = -0,00181 \text{ м.}$$

Знак “минус” говорит о том, что конец консольной балки переместится вниз.

Определив прогиб y_B^{CT} и изобразив эпюру перемещений системы (рис. 11.11, з), вычислим величину полного перемещения сечения С по формуле:

$$y_C^{CT-полн} = y_C^{CT} + \frac{y_B^{CT}}{\ell} a = -0,00021 - \frac{0,00181 \cdot 1}{2} = -0,001115 \text{ м.}$$

2. Определение динамического коэффициента и коэффициента эквивалентности.

Максимальное значение системы внешних сил принимает значение $G + \beta \cdot P_0$. Далее определяем коэффициент эквивалентности:

$$K_d = \frac{G + P_0 \cdot \beta}{G} = 1 + \frac{P_0}{G} \cdot \beta,$$

где $P_0 = \frac{P}{g} \omega^2 e$ – амплитудное значение инерционной силы; $\beta = \frac{1}{1 - (\omega/K)^2}$

– коэффициент динамичности. Здесь согласно (11.6) $K = \sqrt{\frac{g}{y_C^{CT-полн}}}$ –

частота собственных колебаний; $\omega = \frac{\pi n}{30}$ – частота возмущающей силы.

В рассматриваемом примере:

$$K = \sqrt{\frac{9,81}{0,001115}} = 93,8 \text{ 1/с}; \omega = \frac{3,14 \cdot 600}{30} = 62,8 \text{ 1/с};$$

$$\beta = \frac{1}{1 - \left(\frac{62,8}{93,8}\right)^2} = 1,81; P_0 = \frac{1,0}{9,81} (62,8)^2 \cdot 0,002 = 0,804 \text{ кН};$$

$$K_D = 1 + \frac{0,804}{10} \cdot 1,81 = 1,145.$$

3. *Определение прогиба и напряжений.*

Максимальное значение напряжения и прогиб, возникающие от совместного действия статических и динамических нагрузок, определяем по формулам:

$$\sigma_C^{\text{дин}} = \sigma_C^{\text{ст}} \cdot K_D = \pm 1,358 \cdot 10^4 \cdot 1,145 \approx \pm 1,5549 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^2,$$

$$y_C^{\text{дин полн}} = y_C^{\text{ст.полн}} K_D = -0,001115 \cdot 1,145 = -0,00127 \text{ м.}$$

При коэффициенте $K_D = 1,145$ найдем также напряжение в сечении А балки АВ:

$$\sigma_A^{\text{дин}} = \pm 2,717 \cdot 10^4 \cdot 1,145 = \pm 3,11 \cdot 10^4 \text{ кН/м}^2.$$

Следовательно, полученное значение напряжения больше, чем напряжение в сечении С, где установлен электромотор. Итак, сечение в заделке в данном примере является наиболее опасным ($\sigma_A^{\text{дин}} > \sigma_C^{\text{дин}}$), и, следовательно, это обстоятельство необходимо учитывать при проверке прочности составных конструкций.

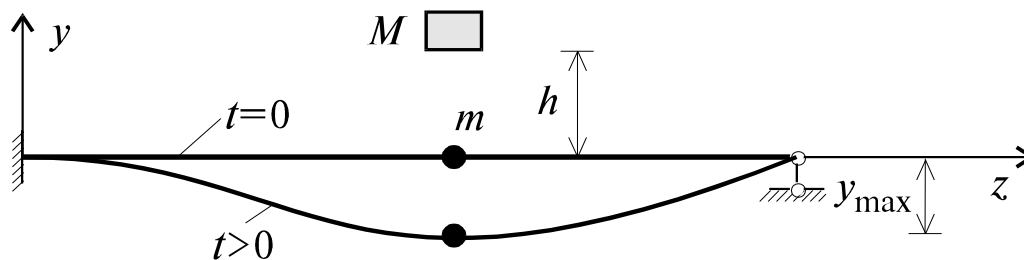
С увеличением числа оборотов двигателя возрастают динамические напряжения и прогибы балок. Поэтому при проектировании конструкций не следует допускать наступления резонанса ($\omega = \kappa$), при котором может наступить разрушение конструкции.

11.6. Ударная нагрузка

Ударом называется такое кратковременное взаимодействие тел, при котором нет смысла рассматривать изменения сил во времени, а целесообразно использовать энергетические соотношения.

С применением энергетического подхода рассмотрим соударение падающего груза массой M с высоты h на систему с одной степенью свободы (рис. 11.12). Считаем, что масса балки m сосредоточена в месте соударения. Энергетический подход является наиболее предпочтительным в тех случаях, когда требуется определить только максимальные значения напряжений, динамических прогибов и не ставится задача определения законов движения заданной системы. В элементарной теории удара

Рисунок 11.12.



принимаются следующие предпосылки.

Рис.11.12. Схема к расчету при ударе

1. Масса упругой системы m , по которой ударяет груз, не учитывается.
2. Предполагается, что груз движется вместе с балкой, не отскакивая от нее, вплоть до крайнего нижнего положения.
3. Потерями энергии пренебрегаем. Считаем, что в крайнем нижнем положении вся кинетическая энергия груза перешла в потенциальную энергию деформации системы.
4. Предполагается, что динамические прогибы и напряжения могут быть получены путем умножения статических прогибов и напряжений на некоторый динамический коэффициент $u_d = k_d u_{ст}$ и $\sigma_d = k_d \sigma_{ст}$.
5. Материал подчиняется закону Гука $y = P \delta_{11}$ ($P = y / \delta_{11}$). Потенциальная энергия деформации $U = Py / 2 = y^2 / 2\delta_{11}$.

Для вывода динамического коэффициента приравняем работу силы тяжести груза потенциальной энергии деформации балки - $A = U$, где $A = Mg \cdot (h + y_{max})$, $U = y_{max}^2 / 2\delta_{11}$.

Здесь δ_{11} есть перемещение того сечения балки, по которому ударяет груз, при действии единичной силы. После преобразований получим:

$$Mg \cdot (h + y_{max}) = y_{max}^2 / 2\delta_{11}.$$

Обозначив прогиб $y_{cm} = Mg \delta_{11}$ балки при статическом действии груза Mg , получим квадратное уравнение относительно $y_d = y_{max}$:

$$y_d^2 - 2y_{cm}y_d - 2hy_{cm} = 0. \quad (11.14)$$

Решение уравнения (11.14) дает два корня.

$$y_d = y_{cm} \pm \sqrt{y_{cm}^2 + 2hy_{cm}} = y_{cm} \left(1 \pm \sqrt{1 + \frac{2h}{y_{cm}}} \right).$$

Положительному значению радикала соответствует прогиб в самом нижнем положении балки, а отрицательному — прогиб в самом верхнем положении, которого балка с массой достигает при возвратном движении из нижнего положения. Наибольшие напряжения возникают, конечно, в нижнем положении, так как в нем деформация больше.

Приняв знак плюс перед радикалом получаем выражение для динамического коэффициента.

$$K_D = \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{y_{cm}}} \right) \quad (11.15)$$

Как видно из формулы (11.15), динамический коэффициент зависит не только от высоты падения груза, но и от статического прогиба (податливости балки). Чем меньше податливость балки, или иначе, чем больше ее жесткость, тем больше и динамический коэффициент. Заметим также, что при $h = 0$ $k_d = 2$. Это так называемое мгновенное нагружение в отличие от медленно нарастающего статического.

Приведем другие выражения для динамического коэффициента, приняв во внимание, что $V^2 = 2gh$ и $T = MV^2/2$ (V и T – скорость и кинетическая энергия груза в момент удара).

$$K_D = 1 + \sqrt{1 + \frac{V^2}{2y_{cm}}} \quad (11.16)$$

Динамические напряжения определяются через статические $\sigma_d = k_d \sigma_{ст}$.

Пример.11.2. Груз $G = 1,2$ кН падает с высоты $h = 0,12$ м в точку C двутавровой балки KD , опирающейся на упругое сооружение, состоящее из двух балок AK и DM (рис. 11.13, а). Сечение балки KD – двутавр №18 ($I_x = 1290 \cdot 10^{-8}$ м⁴; $W_x = 143 \cdot 10^{-6}$ м³). Сечение балок AK и DM – двутавр №30 ($I_x = 7080 \cdot 10^{-8}$ м⁴; $W_x = 472 \cdot 10^{-6}$ м³). Длина балок $l = 1,2$ м. Модуль упругости $E = 2 \cdot 10^8$ кН/м².

Определить динамические напряжения в опасных сечениях балок. Сравнить полученные напряжения с теми, которые появятся в балках, если балка KD будет опираться на абсолютно жесткое основание.

Решение. Из уравнений равновесия балки $\Sigma m_K = 0$ и $\Sigma m_D = 0$ находим опорные реакции R_K, R_D :

$$R_K = \frac{P(\ell - a)}{\ell} = \frac{1,2 \cdot (1,2 - 0,4)}{1,2} = 0,8 \text{ кН}, \quad R_D = \frac{Pa}{\ell} = \frac{1,2 \cdot 0,4}{1,2} = 0,4 \text{ кН}$$

Для проверки правильности найденных опорных реакций составляем уравнение равновесия $\Sigma y = 0$: $0,8 + 0,4 - 1,2 = 0$; $0 = 0$.

Затем строим эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для рассматриваемой балки KD и двух консольных балок AK и DM (рис. 11.13, б, в, г, д, е).

1. Определение полного статического прогиба сечения C балки KD .

С начала определим статический прогиб сечения C балки KD при опирании ее на абсолютно жесткое основание. Составим уравнение прогиба методом начальных параметров, приняв начало координат в сечении K :

$$EI_x y_C^{cm} = EI_x y_0 + EI_x \varphi_0 z + \frac{M_0 z^2}{2!} + \frac{Q_0 z^3}{3!}. \quad (a)$$

При этом $y_0 = 0$; $M_0 = 0$; $\varphi_0 \neq 0$; $Q_0 = R_K$. Для нахождения φ_0 используем условие отсутствия прогиба в сечении D $y_D = 0$. При $z = 1,2$ м имеем:

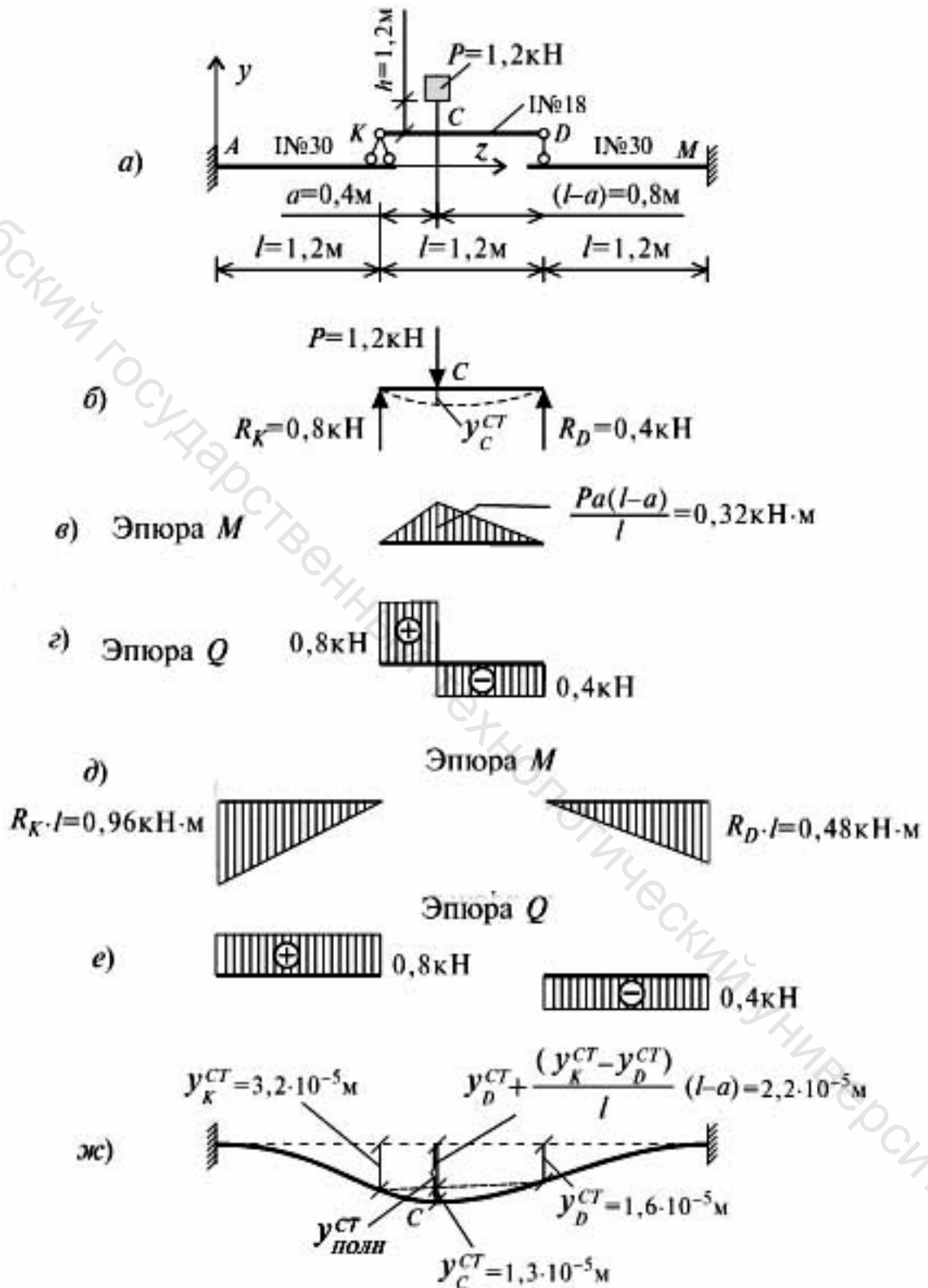


Рис. 11.13. Схема к расчету примера 11.2

$$EI_x \varphi_0 \ell + \frac{R_k \cdot \ell^3}{6} - \frac{P(\ell - a)^3}{6} = 0; \quad \varphi_0 = \frac{P(\ell - a)^3}{6EI_x \ell} - \frac{P(\ell - a)\ell^3}{6EI_x \ell^2}.$$

Теперь, подставив найденное значение φ_0 в уравнение (а), получим формулу для определения прогиба сечения С:

$$y_C^{CT} = -\frac{Pa^2(\ell - a)^2}{3 \cdot \ell \cdot EI_x} = -\frac{1,2 \cdot 0,4^2 \cdot (1,2 - 0,4)^2}{3 \cdot 1,2 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 1290 \cdot 10^{-7}} = -1,32 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

Для определения полного прогиба сечения С с учетом упругого характера опирания балки КD (рис. 11.13, ж) необходимо предварительно найти прогибы концов консольных балок АК и ДМ. Для этого воспользуемся формулой, полученной в предыдущей задаче:

$$y_K^{CT} = -\frac{R_K \ell^3}{3EI_x} = -\frac{0,8 \cdot 1,2^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 7080 \cdot 10^{-7}} = -3,25 \cdot 10^{-5} \text{ м;}$$

$$y_D^{CT} = -\frac{R_D \ell^3}{3EI_x} = -\frac{0,4 \cdot 1,2^3}{3 \cdot 2 \cdot 10^8 \cdot 7080 \cdot 10^{-7}} = -1,63 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

Эюра перемещений для составной конструкции из балок изображена на рис. 11.13, ж. Величину полного перемещения сечения С балки с учетом перемещения его в результате смещения опор балки КD, опирающейся на консольные балки, определяем по формуле:

$$y_C^{CT.полн} = y_D^{CT} + \frac{(y_K^{CT} - y_D^{CT})}{\ell} (\ell - a) + y_C^{CT} =$$

$$= \left(-1,63 + \frac{(-3,25 - 1,63)}{1,2} \cdot 0,8 - 1,32 \right) \cdot 10^{-5} = -4,03 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

2. Определение динамических коэффициентов и напряжений. Динамический коэффициент при падении груза G на балку КD, опирающуюся на консольные балки АК и ДМ, определяем по формуле:

$$\beta = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{y_C^{CT.полн}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,12}{4,03 \cdot 10^{-5}}} = 78,1,$$

а при опирании балки КD на абсолютно жесткое основание –

$$\beta = 1 + \sqrt{1 + \frac{2h}{y_C^{CT}}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2 \cdot 0,12}{1,32 \cdot 10^{-5}}} = 136,0.$$

Для вычисления динамических напряжений необходимо вначале определить статические напряжения, возникающие в сечении С:

$$\sigma_C^{CT} = \pm \frac{M_C}{W_x} = \pm \frac{0,32}{143 \cdot 10^{-6}} = \pm 2,24 \cdot 10^3 \text{ кН / м}^2,$$

а затем динамические напряжения:

$$\sigma_C^{Дин} = \beta \sigma_C^{СТ}, \quad \sigma_C'^{Дин} = \beta \sigma_C'^{СТ}.$$

Динамические напряжения, возникающие в сечении С балки КD, опирающейся на консольные балки,

$$\sigma_C^{Дин} = \pm 2,24 \cdot 10^3 \cdot 78,1 = \pm 174,8 \cdot 10^3 \text{ кН} / \text{м}^2,$$

и динамические напряжения, возникающие в сечении С балки КD, опирающейся на абсолютно жесткое основание:

$$\sigma_C'^{Дин} = \pm 2,24 \cdot 10^3 \cdot 136 = \pm 304,4 \cdot 10^3 \text{ кН} / \text{м}^2.$$

Таким образом, если опоры лежат на абсолютно жестком основании, то в сечении С возникают динамические напряжения в $\frac{304,4}{174,8} \approx 1,7$ раза

большие по величине. Статические напряжения, возникающие в сечении А:

$$\sigma_A^{СТ} = \pm \frac{M_A}{W_x} = \pm \frac{0,96}{472 \cdot 10^{-6}} = \pm 2,0338 \cdot 10^3 \text{ кН} / \text{м}^2.$$

При динамическом коэффициенте $K_D = 78,1$, полученном в предположении упругого опирания балки КD в точках К и D, находим динамические напряжения в сечении А:

$$\sigma_A^{Дин} = \pm 2,03 \cdot 10^3 \cdot 78,1 = \pm 158,9 \text{ кН} / \text{м}^2.$$

Статическое и динамическое напряжения в сечении М балки DM:

$$\sigma_M^{СТ} = \frac{M_M}{W_x} = \pm \frac{0,48}{472 \cdot 10^{-6}} = \pm 1,02 \cdot 10^3 \text{ кН} / \text{м}^2.$$

$$\sigma_M^{Дин} = \pm 1,02 \cdot 10^3 \cdot 78,1 = \pm 79,4 \cdot 10^3 \text{ кН} / \text{м}^2.$$

Следовательно, вне зависимости от того, на какое основание опирается балка КD, опасное сечение находится в точке удара.

Контрольные вопросы

- 11.1. Дайте определения предмета статической и динамической теории механических систем. Перечислите примеры динамических нагрузок.
- 11.2. Дайте определение понятия числа степеней свободы заданной системы. Дайте определение свободного колебания системы.
- 11.3. Дайте определения вынужденного колебания системы. Дайте определение периода собственных и вынужденных колебаний системы. Поясните физическую суть фазовой и круговой частоты системы.
- 11.4. Поясните физический смысл коэффициента динамичности.
- 11.5. Какие системы называются системами с дискретными параметрами.
- 11.6. Дайте определение системы с одной степенью свободы.
- 11.7. Какие явления называются резонансом?
- 11.8. Какое явление называется ударом?
- 11.9. Что такое коэффициент динамичности? Как он определяется? Чему он равен при падении массы с нулевой высоты?
- 11.10. Как выражаются напряжения при динамическом нагружении через статические напряжения?

ГЛАВА 12 ПРОЧНОСТЬ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ НАПРЯЖЕНИЯХ

12.1. Основные понятия

Многие детали машин и механизмов, а также конструкции сооружений в процессе эксплуатации подвергаются циклически изменяющимся во времени воздействиям. Если уровень напряжений, вызванный этими воздействиями, превышает определенный предел, то в материале формируются необратимые процессы накопления повреждений, которые в конечном итоге приводят к разрушению системы.

Процесс постепенного накопления повреждений в материале под действием переменных напряжений, приводящих к разрушению, называется усталостью. Свойство материала противостоять усталости называется

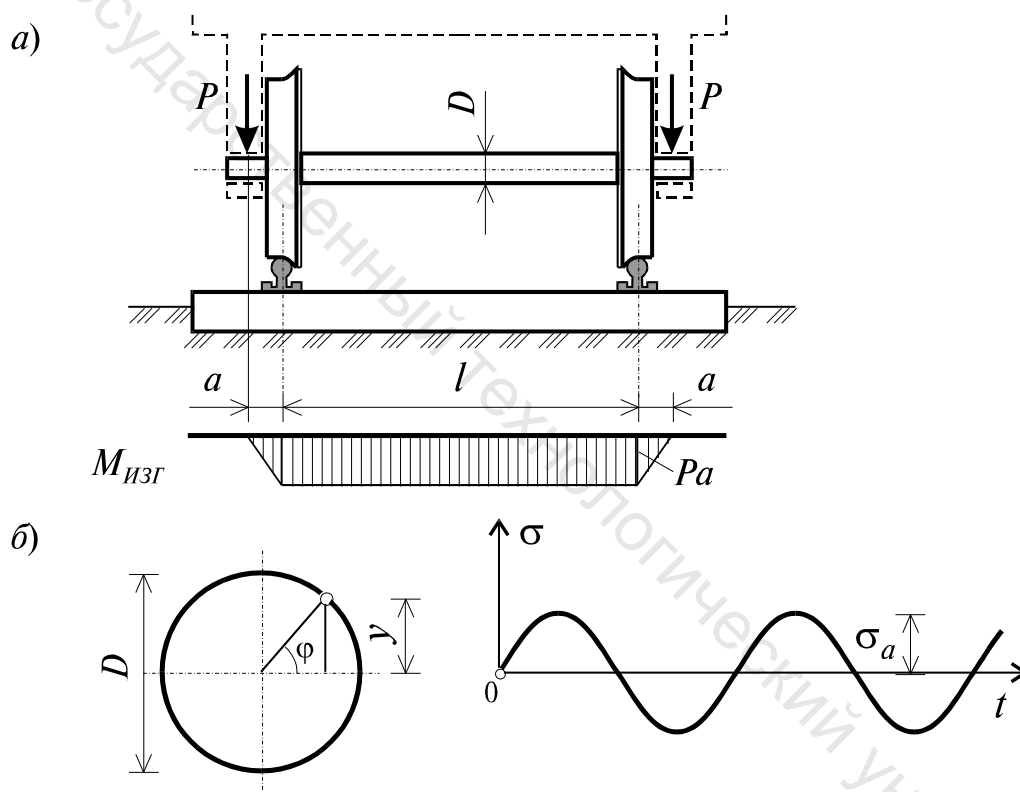


Рис. 12.1. Ось вагона вращается вместе с колесами и испытывает циклически изменяющиеся напряжения

выносливостью.

Для раскрытия физической природы процесса усталостного разрушения в качестве примера рассмотрим ось вагона, вращающуюся вместе с колесами (рис. 12.1, а), испытывающую циклически изменяющиеся напряжения, хотя внешние силы и являются постоянными величинами. Происходит это в результате того, что части вращающейся оси оказываются попеременно то в растянутой, то в сжатой зонах.

Эксплуатация машин и опытные данные показывают, что детали разрушаются при переменных напряжениях более низких, чем статические

разрушающие напряжения. Вначале исследования этой проблемы возникло предположение, что происходит какое-то перерождение материала, его “усталость”. Однако последующие рентгенографические исследования показали, что никаких изменений материала не происходит, в то же время термины “усталость”, “усталостная прочность” сохранились до сих пор.

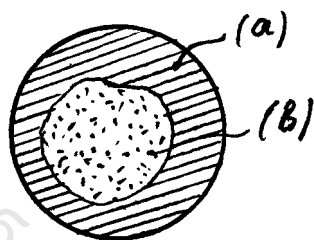


Рис. 12.2. Усталостное разрушение детали

Усталостное разрушение детали (рис. 12.2) имеет характерный вид. Одна часть сечения – обозначена (а) – имеет гладкую поверхность, другая – шероховатую (в). Объясняется это тем, что в процессе работы детали в некотором сечении возникает микротрещина. При вращении детали поверхности трещины притираются, шлифуются и становятся гладкими. Постепенно трещина увеличивается и, ослабив сечение, приводит к внезапному разрушению.

Разрушение под действием переменных напряжений, вызванное постепенным развитием трещины, называется разрушением от усталости.

Способность материалов сопротивляться разрушению под действием переменных напряжений, называется выносливостью материалов.

12.2. Характеристики цикла напряжений. Классификация циклов

Совокупность всех значений напряжений за время одного периода называется циклом. На рис. 12.3 показан произвольный цикл напряжений, в котором σ_{\max} – максимальное напряжение цикла, σ_{\min} – минимальное, σ_m – среднее напряжение и σ_a – амплитуда цикла. Среднее напряжение цикла определяется по формуле

$$\sigma_m = (\sigma_{\max} + \sigma_{\min}) / 2. \quad (12.1)$$

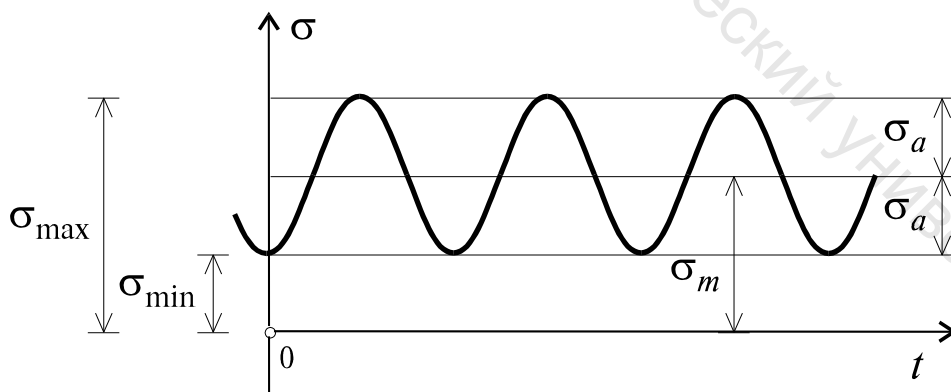


Рис. 12.3. Цикл напряжений

Формула для амплитуды –

$$\sigma_a = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min}) / 2. \quad (12.2)$$

Очевидны соотношения: $\sigma_{\max} = \sigma_m + \sigma_a$, $\sigma_{\min} = \sigma_m - \sigma_a$.

Также для характеристики циклов вводится **коэффициент асимметрии R** , который определяется соотношением

$$R = \sigma_{\min} / \sigma_{\max} \quad (12.3)$$

Если одновременно увеличивать все компоненты цикла, например, в n раз, то коэффициент асимметрии остается постоянным. Получаемые при этом циклы называются подобными.

Все выше сказанное относится и к переменным касательным напряжениям.

Среди множества разных циклов выделяют, прежде всего, два характерных цикла: симметричный и пульсационный (см. рис. 12.4). Очевидно, что любой произвольный цикл (σ_m, σ_a) можно представить как сложение постоянного напряжения величиной σ_m с симметричным циклом, амплитуда которого σ_a .

Опытным путем было установлено, что усталостная прочность опре-

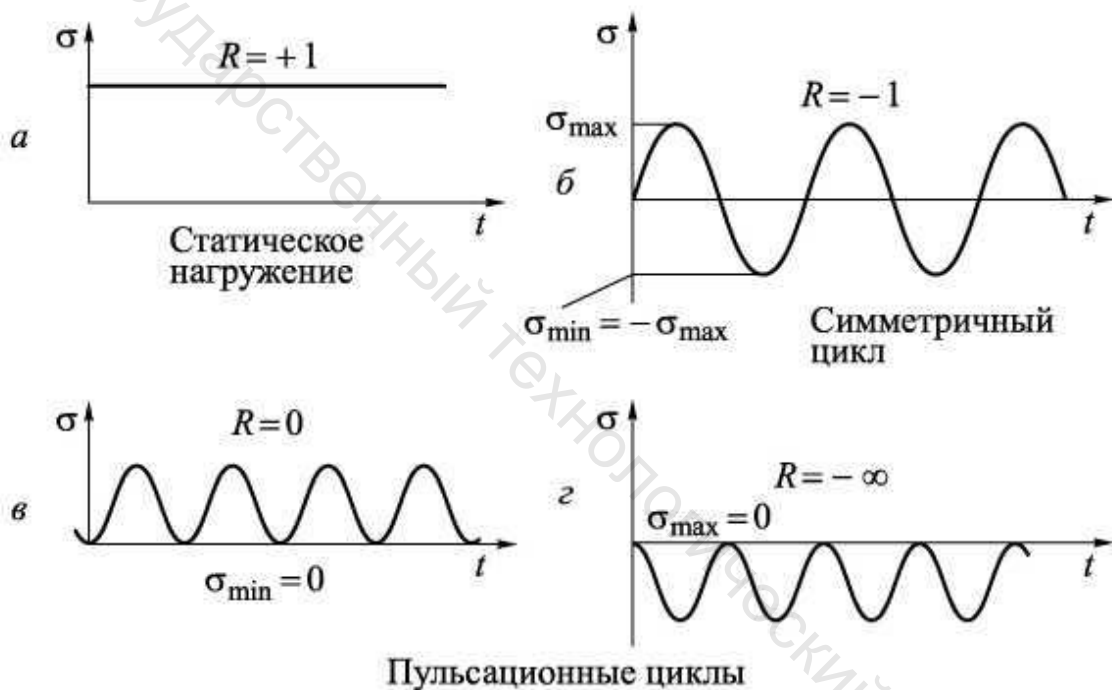


Рис. 12.4. Виды циклов и их характеристика

деляется только наибольшим и наименьшим напряжениями цикла и не зависит от закона изменения напряжений внутри интервала $\sigma_{\max} - \sigma_{\min}$. Поэтому циклы, показанные на рис. 12.5, будут равноопасны.

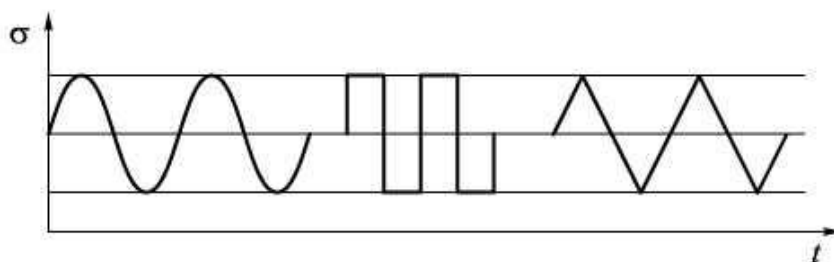


Рис. 12.5. Равноопасные циклы

12.3 Понятие о пределе выносливости

Для расчетов на прочность при повторно-переменных напряжениях необходимо знать помимо основных

механических характеристик материала новую характеристику, называемую пределом выносливости. Для определения предела выносливости материала проводят испытания серии образцов на специальных машинах. На рис. 12.6

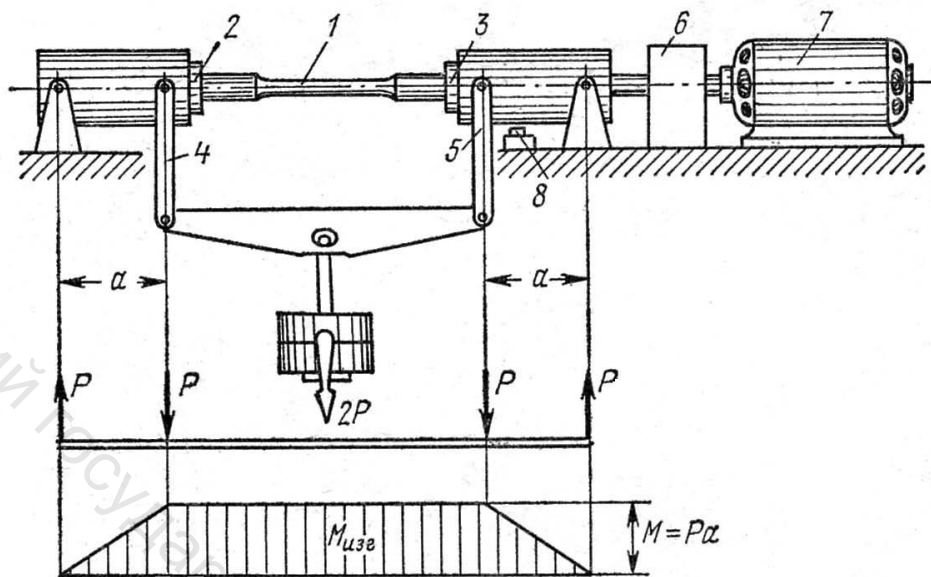


Рис. 12.6. Схема испытательной машины

показана схема такой испытательной машины.

Образец 1 зажат во вращающихся цапгах 2 и 3. Усилие передается от груза, подвешенного на серьгах 4 и 5. Счетчик 6 фиксирует число оборотов образца. Когда образец ломается, происходит автоматическое отключение двигателя 7 от контакта 8. Образец испытывает действие чистого изгиба (поперечная сила отсутствует), нормальные напряжения в нем изменяются по симметричному циклу. Как правило, испытывают не меньше 10 одинаковых образцов при разной нагрузке, то есть при разных значениях максимального напряжения цикла σ_{\max} . После разрушения образца испытательная машина останавливается, и считываются показания счетчика числа оборотов N . По результатам испытаний серии образцов строится кривая выносливости

(кривая Вёлера) $\sigma_{\max} = f(N)$ (рис. 12.7).

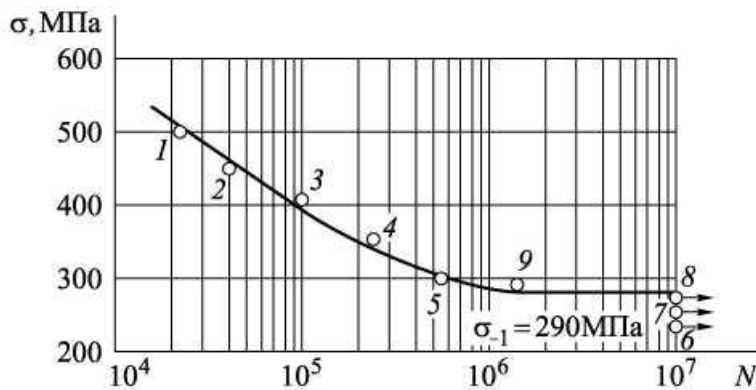


Рис. 12.7. Кривая выносливости (кривая Вёлера)

Из рис. 12.7 видно, что кривая асимптотически приближается к прямой. Ордината горизонтальной асимптоты равна пределу выносливости при симметричном цикле σ_{-1} .

Итак, **пределом**

выносливости σ_R
называется **наибольшая**

величина периодически меняющегося напряжения, которому материал сопротивляется без разрушения неограниченно долго.

Предел выносливости обозначается σ_R и представляет собой максимальное напряжение (σ_{\max}) предельного цикла.

Подчеркнем, что у материала не один предел выносливости, а совокупность σ_R — в зависимости от коэффициента асимметрии цикла R . Наиболее часто испытания проводят при симметричном цикле. При симметричном цикле $R=-1$. Поэтому соответствующий предел выносливости обозначается через σ_{-1} .

Как показали опыты, стальной образец не разрушается после 10^7 циклов. Это число называют **базовым числом циклов**. Однако для цветных металлов и для закаленных сталей не удается установить такое число циклов, выдержав которое, образец не разрушился бы в дальнейшем. Для этих материалов принимают условно за базовое число 10^8 циклов. В случае расчета деталей, имеющих ограниченный срок службы, вводится понятие **ограниченного предела выносливости** σ_{RN} , где N — заданное число циклов. Соответственно этому числу и находят σ_{RN} по кривой выносливости.

Для того чтобы сделать сравнительную оценку базового числа циклов, заметим, что ось железнодорожного вагона испытывает 10^7 циклов, если вагон прошел 12 раз путь от Москвы до Бреста и обратно.

Предел выносливости оказался заметно ниже предела прочности материала. Так, например, для сталей $\sigma_{-1} = (0.4 \dots 0.5) \sigma_{\text{вр}}$, а для цветных металлов $\sigma_{-1} = (0.25 \dots 0.5) \sigma_{\text{вр}}$. Испытание на кручение в условиях циклически изменяющихся напряжений позволяет найти предел выносливости для касательных напряжений. При симметричном цикле имеет место примерное соотношение $\tau_{-1} = 0.6 \sigma_{-1}$.

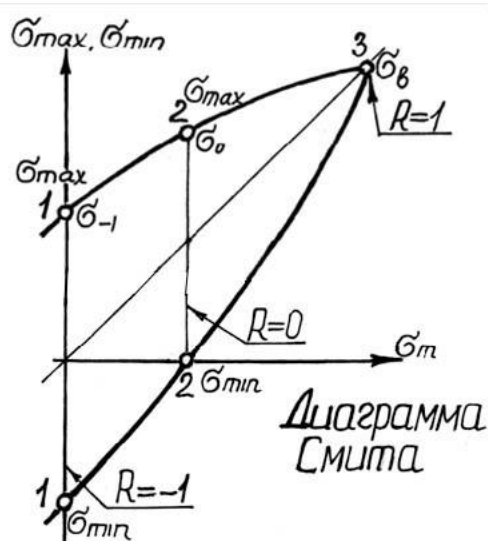


Рис. 12.8. Диаграмма Смита

Экспериментально установлено также, что при частотах до 5000 циклов в минуту никакого сколько-нибудь заметного влияния частоты на предел выносливости не наблюдается. Но при очень высоких частотах (свыше 10^6 циклов в минуту) отмечено повышение пределов более чем на 30 процентов.

12.4. Предел выносливости при асимметричном цикле

Испытания при симметричном цикле (при $R = -1$) оказываются наиболее простыми с точки зрения их реализации. Однако в реальных конструкциях подавляющее число деталей работает при асимметричном нагружении. Поэтому, чтобы обеспечить корректность расчета, необходимы сведения

о пределах выносливости для любой асимметрии цикла.

В расчетной практике обычно пользуются двумя типами диаграмм: диаграммой предельных напряжений и диаграммой предельных амплитуд.

12.4.1. Диаграмма предельных напряжений (диаграмма Смита)

Диаграмма Смита (рис. 12.8) строится, как минимум, по трем режимам нагружения (по трем точкам), для каждого из которых определяют предел выносливости σ_R :

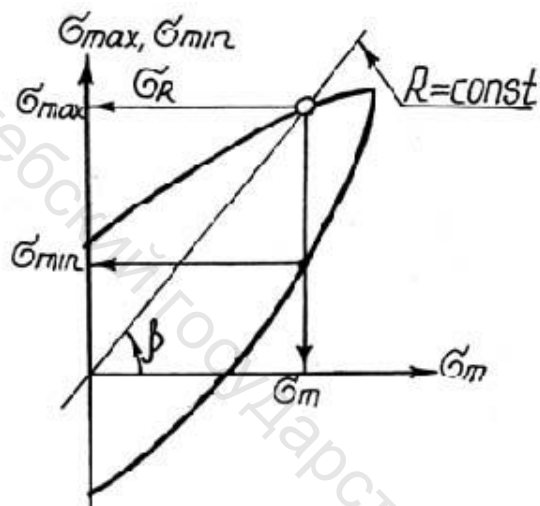


Рис. 12.9. К определению циклов с одинаковым коэффициентом асимметрии R по диаграмме Смита

диаграммы предельных напряжений (рис. 12.9), характеризует циклы с одинаковым коэффициентом асимметрии R :

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_m} = \frac{2\sigma_{\max}}{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}} = \frac{2}{1 + R}. \quad (12.4)$$

Тогда, для определения предела выносливости при заданной асимметрии цикла R нужно по приведенной формуле вычислить величину угла β и провести луч под этим углом до пересечения с линией 1–2–3, ордината точки пересечения и даст нам искомый предел выносливости σ_R (рис. 12.9).

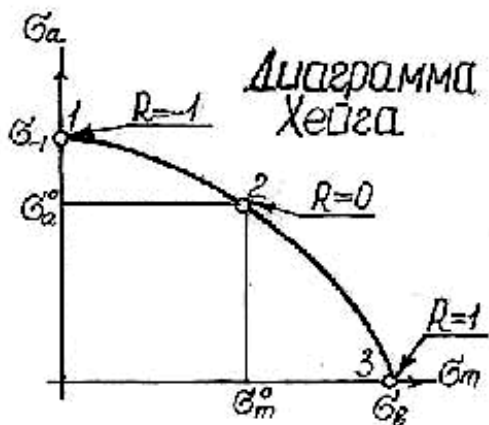


Рис. 12.10. Диаграмма Хейга

первый режим (точка 1) – обычный симметричный цикл нагружения ($R = -1$, $\sigma_m = 0$, $\sigma_{\max} = \sigma_{-1}$, $\sigma_{\min} = -\sigma_{-1}$);

второй режим (точка 2) – асимметричный цикл, как правило, отнулевой ($R = 0$, $\sigma_m = \sigma_0/2$, $\sigma_{\max} = \sigma_0$, $\sigma_{\min} = 0$); третий режим (точка 3) – простое статическое растяжение ($R = 1$, $\sigma_{\max} = \sigma_{\min} = \sigma_m = \sigma_B$).

Полученные точки соединяем плавной линией (1–2–3), ординаты точек которой соответствуют пределам выносливости материала при различных значениях коэффициента асимметрии цикла.

Легко показать, что луч, проходящий под углом β через начало координат под углом β через начало координат

под углом β через начало координат

под углом β через начало координат

под углом β через начало координат

под углом β через начало координат

под углом β через начало координат

под углом β через начало координат

под углом β через начало координат

под углом β через начало координат

под углом β через начало координат

под углом β через начало координат

под углом β через начало координат

под углом β через начало координат

Опуская перпендикуляр на ось абсцисс, найдем среднее напряжение цикла σ_m , а на пересечении перпендикуляра со второй ветвью диаграммы – минимальное напряжение σ_{\min} .

Опуская перпендикуляр на ось абсцисс, найдем среднее напряжение цикла σ_m , а на пересечении перпендикуляра со второй ветвью диаграммы – минимальное напряжение σ_{\min} .

Опуская перпендикуляр на ось абсцисс, найдем среднее напряжение цикла σ_m , а на пересечении перпендикуляра со второй ветвью диаграммы – минимальное напряжение σ_{\min} .

Опуская перпендикуляр на ось абсцисс, найдем среднее напряжение цикла σ_m , а на пересечении перпендикуляра со второй ветвью диаграммы – минимальное напряжение σ_{\min} .

Опуская перпендикуляр на ось абсцисс, найдем среднее напряжение цикла σ_m , а на пересечении перпендикуляра со второй ветвью диаграммы – минимальное напряжение σ_{\min} .

Опуская перпендикуляр на ось абсцисс, найдем среднее напряжение цикла σ_m , а на пересечении перпендикуляра со второй ветвью диаграммы – минимальное напряжение σ_{\min} .

Опуская перпендикуляр на ось абсцисс, найдем среднее напряжение цикла σ_m , а на пересечении перпендикуляра со второй ветвью диаграммы – минимальное напряжение σ_{\min} .

Опуская перпендикуляр на ось абсцисс, найдем среднее напряжение цикла σ_m , а на пересечении перпендикуляра со второй ветвью диаграммы – минимальное напряжение σ_{\min} .

Опуская перпендикуляр на ось абсцисс, найдем среднее напряжение цикла σ_m , а на пересечении перпендикуляра со второй ветвью диаграммы – минимальное напряжение σ_{\min} .

Опуская перпендикуляр на ось абсцисс, найдем среднее напряжение цикла σ_m , а на пересечении перпендикуляра со второй ветвью диаграммы – минимальное напряжение σ_{\min} .

Опуская перпендикуляр на ось абсцисс, найдем среднее напряжение цикла σ_m , а на пересечении перпендикуляра со второй ветвью диаграммы – минимальное напряжение σ_{\min} .

Опуская перпендикуляр на ось абсцисс, найдем среднее напряжение цикла σ_m , а на пересечении перпендикуляра со второй ветвью диаграммы – минимальное напряжение σ_{\min} .

Опуская перпендикуляр на ось абсцисс, найдем среднее напряжение цикла σ_m , а на пересечении перпендикуляра со второй ветвью диаграммы – минимальное напряжение σ_{\min} .

Опуская перпендикуляр на ось абсцисс, найдем среднее напряжение цикла σ_m , а на пересечении перпендикуляра со второй ветвью диаграммы – минимальное напряжение σ_{\min} .

Опуская перпендикуляр на ось абсцисс, найдем среднее напряжение цикла σ_m , а на пересечении перпендикуляра со второй ветвью диаграммы – минимальное напряжение σ_{\min} .

Опуская перпендикуляр на ось абсцисс, найдем среднее напряжение цикла σ_m , а на пересечении перпендикуляра со второй ветвью диаграммы – минимальное напряжение σ_{\min} .

растяжение ($R=1, \sigma_a=0, \sigma_m = \sigma_b$). Соединяя экспериментальные точки (1, 2, 3) плавной кривой, получим график, характеризующий зависимость между значениями предельных амплитуд и значениями предельных средних напряжений в цикле.

Здесь также можем провести луч, характеризующий циклы с одинаковой асимметрией (рис. 12.11):

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}} = \frac{1 - R}{1 + R}. \quad (12.5)$$

Тогда, для определения предела выносливости при заданной асимметрии цикла R нужно по приведенной формуле вычислить величину угла β и провести луч ODE под этим углом до пересечения с линией 1-2-3, ордината точки пересечения даст нам величину предельной амплитуды σ_a и значение предельного среднего напряжения σ_m в цикле. Предел выносливости σ_R найдем в виде

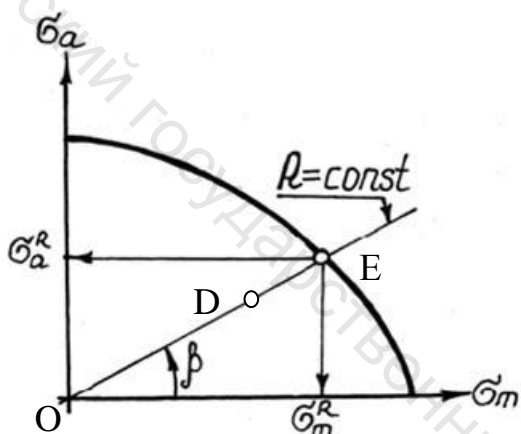


Рис. 12.11. К определению циклов с одинаковым коэффициентом асимметрии R по диаграмме Хейга

$$\sigma_R = \sigma_m + \sigma_a. \quad (12.6)$$

На диаграмме на рис. 12.11 точкой D обозначен некоторый расчетный цикл. С увеличением нагрузки параметры цикла напряжений растут пропорционально, а коэффициент асимметрии R остается

постоянным. Такие циклы называются подобными и отображаются точками, лежащими на луче ODE.

В практике при определении запаса прочности рассчитываемой детали только в редких случаях в нашем распоряжении имеется диаграмма усталости детали. Это связано с тем, что усталостные испытания требуют значительных затрат времени. Чтобы нагрузить стальной образец базовым числом циклов — 10^7 даже при высокой скорости (3000 циклов в минуту) придется затратить более 55 часов. А для построения диаграммы предельных амплитуд по 5-ти экспериментальным точкам необходимо испытать 50 образцов. Поэтому в практике при расчетах часто пользуются приближенными диаграммами усталости.

Для построения приближенных диаграмм и определения по ним запасов прочности Серенсенем С. В. и Кинасошвили Р.С. была предложена зависимость для определения предельной амплитуды от среднего напряжения, включающая (σ_1) и вторую усталостную характеристику материала, а именно предел усталости при пульсирующем цикле σ_0 .

Диаграммы, построенные на основании этой зависимости, получаются довольно близкими к экспериментальным диаграммам. Недостатком является то обстоятельство, что для их построения необходимо знать вторую экспериментальную усталостную характеристику (σ_0). Однако, несмотря на это, предложенный способ построения приближенной

диаграммы и способ определения по ней запасов прочности получили большое распространение, поэтому мы их здесь и приводим.

Будем считать, что для данного материала нам известны следующие характеристики прочности: предел усталости при симметричном цикле σ_{-1} , предел усталости при пульсирующем цикле σ_0 и предел текучести σ_T . Рассмотрим два случая, когда $\sigma_0 < \sigma_T$ и когда $\sigma_0 > \sigma_T$.

1. Построение приближенной диаграммы при $\sigma_0 < \sigma_T$ (рис. 12.12).

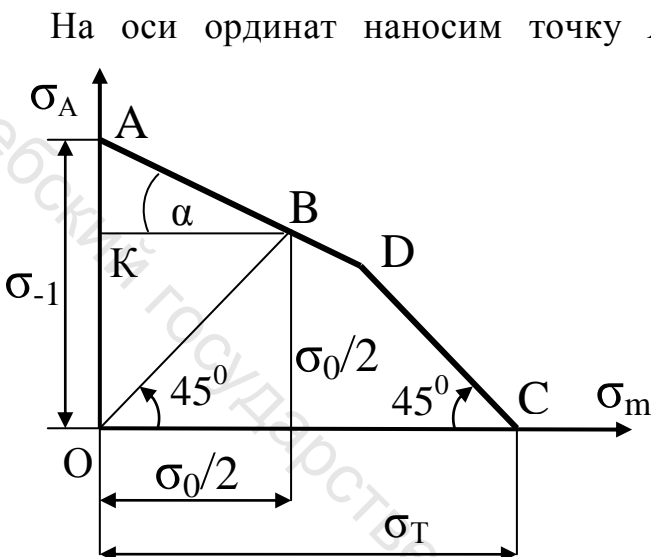


Рис. 12.12. Приближенная диаграмма усталости $\sigma_0 < \sigma_T$

На оси ординат наносим точку A с координатами $\sigma_m=0$, $\sigma_a=\sigma_{-1}$, представляющую симметричный цикл. Наносим точку B , представляющую пульсирующий цикл. При пульсирующем цикле $\sigma_{max}=\sigma_0$, $\sigma_{min}=0$; следовательно, координаты точки B будут: $\sigma_a=\sigma_m=\sigma_0/2$. Наносим точку C с координатами $\sigma_a=0$, $\sigma_m=\sigma_T$, представляющую постоянное напряжение, равное пределу текучести. Через точки A и B проводим прямую до пересечения в точке D с прямой, проведенной из точки C под углом 45° к оси абсцисс. Точки, лежащие на прямой CD , представляют циклы с максимальными напряжениями, равными пределу текучести. Это следует из того, что сумма ординат этих точек равна σ_T . Таким образом, ординаты ломаной линии ADC представляют предельные амплитуды напряжений. Так как максимальные напряжения не должны быть выше предела текучести, то усталостная диаграмма ограничивается

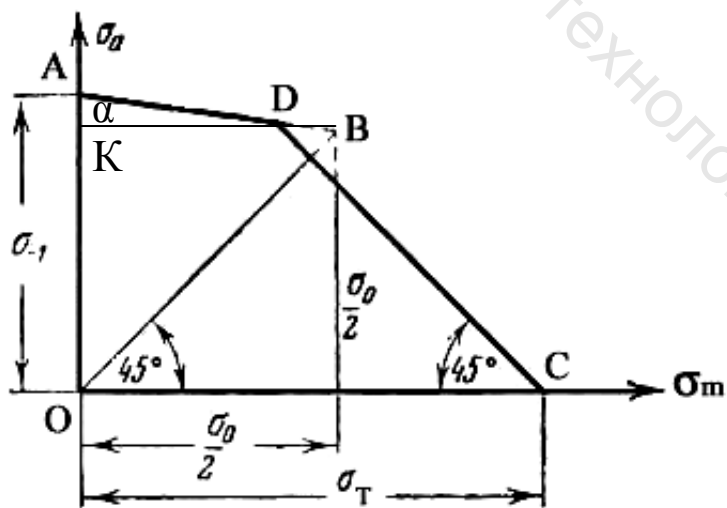


Рис. 12.13. Приближенная диаграмма усталости $\sigma_0 > \sigma_T$

2. Построение приближенной диаграммы при $\sigma_0 > \sigma_T$ (рис. 12.13).

Так же как и в первом случае, наносим точки A , B и C . Через точки A и B проводим прямую до пересечения в точке D с прямой, проведенной из точки C под углом 45° к оси абсцисс. Ординаты ломаной линии ADC

представляют предельные амплитуды напряжений. В этом случае точка *B* выходит за пределы, ограниченные диаграммой.

Наклон отрезка АВ на рис. 12.12 и 12.13 определяется углом α , тангенс которого нетрудно найти.

$$\operatorname{tg}\alpha = AK/KB = (\sigma_{-1} - 0.5\sigma_0)/0.5\sigma_0. \quad (12.7)$$

Уравнение линии АВ можно представить в виде линейной зависимости $\sigma_a = a \sigma_m + b$. Зная угол наклона ($\operatorname{tg}\alpha$) и координаты точки $A(0, \sigma_{-1})$, принадлежащей линии АВ найдем неизвестные коэффициенты: $a = -\operatorname{tg}\alpha$ и $b = \sigma_{-1}$. Окончательно получим следующее уравнение:

$$\sigma_{-1} = \sigma_a + \sigma_m \operatorname{tg}\alpha \quad (12.8)$$

Отсюда видно, что коэффициент $\operatorname{tg}\alpha$ можно рассматривать как коэффициент приведения несимметричного цикла к равноопасному симметричному циклу.

Принято обозначение $\operatorname{tg}\alpha = \psi_\sigma$, для касательных напряжений - ψ_τ . Характеристика ψ_s называется коэффициентом чувствительности к асимметрии цикла. В таблице 12.1 приведены ориентировочные значения ψ_σ и ψ_τ для некоторых материалов:

Таблица 12.1 Ориентировочные значения ψ_σ и ψ_τ для некоторых материалов

Материал	ψ_σ	ψ_τ
Стали низкой прочности	0,05-0,15	0÷0,05
Стали средней прочности	0,15-0,25	0,05÷0,1
Стали высокой прочности	0,25-0,35	0,1÷0,15
Алюминиевые сплавы	0,25-0,35	0,1÷0,15
Титановые сплавы	0,4-0,5	0,15÷0,25

Аналогичные коэффициенты при кручении имеют меньшие значения, а именно $\psi_\tau \approx 0,5 \psi_\sigma$.

12.5. Факторы, влияющие на величину предела выносливости

На величину предела выносливости образцов и деталей, изготовленных из одного и того же материала, кроме характеристик цикла нагружения влияет целый ряд различных факторов. Многочисленные эксперименты, проведенные с образцами различных форм и размеров, а также практика эксплуатации деталей машин показывают, что предел выносливости конкретной детали в значительной степени зависит от ее формы и размеров, от состояния поверхности и других обстоятельств.

Стандартные испытания на выносливость проводят на специальных лабораторных образцах диаметром 5...10 мм, имеющих строго цилиндрическую форму рабочей части и высокую чистоту поверхности. Очевидно, что предел выносливости реальной детали, изготовленной из того же материала, будет заметно отличаться от предела выносливости лабораторного образца.

Падение предела выносливости конкретной детали ($\sigma_{-1д}$) по сравнению с пределом выносливости лабораторного образца (σ_{-1}) учитывается в расчетах при помощи коэффициента K , который называется коэффициентом снижения предела выносливости и отражает влияние основных факторов на сопротивление усталости:

$$\sigma_{-1д} = \frac{\sigma_{-1}}{K}. \quad (12.9)$$

Существуют различные подходы по определению коэффициента снижения предела выносливости K . Мы будем придерживаться: «ГОСТ 25.504–82 – Расчеты и испытания на прочность. Методика расчета характеристик сопротивления усталости». В котором для оценки пределов выносливости деталей с концентрацией напряжений и различным качеством обработки поверхности использована формула для эффективного коэффициента концентрации напряжений K , соответствующего комбинированному надрезу (глубокому с наложенным на него мелким надрезом), полученная на основе поляризационно-оптических измерений напряжений для усталостных испытаний.

ГОСТ 25.504–82 рекомендует коэффициент K определять по следующей формуле:

$$K = \left(\frac{K_\sigma}{K_{d\sigma}} + \frac{1}{K_{F\sigma}} - 1 \right) \frac{1}{K_V K_A}. \quad (12.10)$$

Коэффициенты, входящие в выражение для K , учитывают влияние на усталостную прочность следующих факторов:

- концентрация напряжений (K_σ);
- масштабный фактор, то есть влияние абсолютных размеров детали ($K_{d\sigma}$);
- качество обработки поверхности ($K_{F\sigma}$);
- эксплуатационные факторы (температура, коррозия, частота нагружения, радиационное облучение и т. д.);
- наличие поверхностного слоя, упрочненного различными технологическими методами (K_V);
- анизотропия (неоднородность) прочностных свойств материала (K_A).

Далее коротко рассмотрим влияние данных факторов на предел выносливости и способы определения соответствующих коэффициентов.

12.5.1. Влияние концентрации напряжений

Концентрация напряжений, вызванная резким изменением сечения детали, как показано на рис. 12.14, представляется наиболее важным фактором, снижающим предел выносливости. Для деталей из хрупких материалов концентрация напряжений обычно существенно уменьшает прочность и при статических нагрузках. Этим пользуются, например, стекольщики, когда наносят алмазом на лист стекла царапину, которая как раз и является концентратором напряжений. Но из этого правила имеются исключения. Так, эксперименты показывают, что наличие кольцевой выточки мало сказывается на прочности образца из чугуна. Это

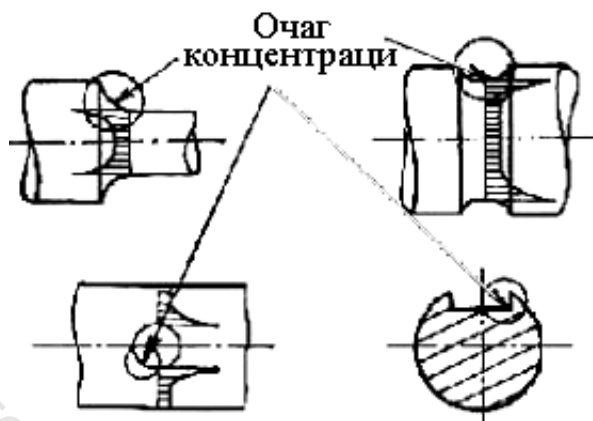


Рисунок 12.14

Концентрация напряжений, вызванная резким изменением сечения детали канавки, отверстия в детали, выточки, нарезки на поверхности, резьбы, малые радиусы закругления в местах резкого изменения размеров детали и т. д. Концентрация напряжений при циклическом нагружении вызывает в зоне очага концентрации зарождение и рост усталостной трещины, и последующее усталостное разрушение материала.

Влияние концентраторов напряжений на предел выносливости учитывается, эффективным (действительным) коэффициентом концентрации напряжений, который представляет собой отношение предела выносливости образца без концентрации напряжений к пределу выносливости образца тех же размеров, но с концентратором напряжений:

$$K_{\sigma} = \sigma_{-1} / \sigma_{-1к} \quad (12.11)$$

Эффективные коэффициенты концентрации обычно устанавливаются экспериментальным путем (таблица 12.2), однако, при отсутствии опытных данных для их вычисления можно пользоваться следующими формулами:


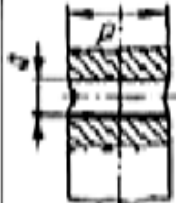


$$K_{\sigma} = 1 + q \cdot (a_{\sigma} - 1), \quad (12.12)$$

где q – коэффициент чувствительности материала к концентрации напряжений, который зависит от свойств материала: чем хрупче материал, тем чувствительнее он к концентрации напряжений, тем больше величина q (для высокопрочных сталей $q \approx 1$; для углеродистых сталей $q = 0,6 \dots 0,8$; для чугуна $q \approx 0$ – из-за наличия внутренних концентраторов в виде включений графита); a_{σ} – теоретический коэффициент концентрации напряжений, который зависит только от формы концентратора, определяется либо расчетным путем (методами теории упругости), либо экспериментально (тензометрией, оптическими методами и т. д.) и приводится в справочных таблицах. Как показывает опыт, коэффициент чувствительности зависит также от размеров детали и ее формы. Поэтому в практических расчетах целесообразнее пользоваться эффективными коэффициентами, найденными экспериментальным путем. В справочной литературе имеются графики коэффициентов концентрации напряжений для многих видов концентраторов напряжений.

объясняется тем, что чугун является неоднородным материалом. Он представляет собой смесь кристаллов железа и зерен графита. Каждое зерно графита — своеобразный концентратор напряжений, поэтому такой внешний концентратор, как выточка, практически не меняет характера распределения напряжений, который уже определен внутренними концентраторами.

На практике концентраторами напряжений являются шпоночные

Таблица 12.2 Эффективные коэффициенты концентрации

Концентратор	K_σ		K_τ		Элемент	Момент сопротивления		Примечание
	$\sigma_B, \text{МПа}$					7	8	
	2	3	4	5				
1					6	$W, \text{мм}^3$	$W_p, \text{мм}^3$	9
Гаттель $D/d=1,25 \dots 2$ при r/d 0,02 0,06 0,1	2,5	3,5	1,8	2,1		$\frac{\pi d^3}{32}$	$\frac{\pi d^3}{16}$	Если в расчетном сечении вала несколько концентраторов напряжений, то в расчет принимается тот, для которого больше k_σ / k_d или k_τ / k_d
	1,85	2,0	1,4	1,53		$\frac{\pi d^3}{32} (1,1 - 1,54 \frac{d_0}{d})$	$\frac{\pi d^3}{16} (1 - \frac{d_0}{d})$	
	1,6	1,64	1,25	1,35				
	1,9	2,0	1,75	2,0				
Выточка (v-r) при r/d 0,02 0,06 0,1	1,9	2,35	1,4	1,7		$\frac{\pi d^3}{32}$	$\frac{\pi d^3}{16}$	
	1,8	2,0	1,35	1,65				
	1,7	1,85	1,25	1,5				
	1,75	2,0	1,5	1,9		$\frac{\pi d^3}{32} - \frac{b r (d-r)^2}{2d}$	$\frac{\pi d^3}{16} - \frac{b r (d-r)^2}{2d}$	

Необходимо отметить, что концентрация напряжений может быть обусловлена не только очертанием деталей, но и наличием внутренней неоднородности и трещин. Например, чешуйки графита в чугуне являются источниками весьма высокой концентрации напряжений, которая перекрывает эффект внешних концентраторов напряжений.

В последнее время применяется более современная методика расчета коэффициента K_σ (ГОСТ 25.504–82), согласно которой

$$K_\sigma = a_\sigma / n, \quad n = 1 + \sqrt{G} \cdot 10^{-(0,33 + \sigma_T / 712)}, \quad (12.13)$$

где G – относительный градиент (перепад) напряжений (мм^{-1}), который (как и a_σ) определяется расчетным или опытным путем и приводится в справочниках; σ_T – предел текучести материала (МПа).

12.5.2. Влияние масштабного фактора

Опытные данные показывают, что с увеличением диаметра образца предел выносливости его снижается и может быть в 2—6 раз меньше предела выносливости гладких лабораторных образцов из того же материала. Так, например, для стали, которая идет на изготовление вагонных осей, получены следующие данные: образец диаметра $d=7.5\text{мм}$ имеет предел выносливости 230МПа, а предел выносливости вагонной оси с диаметром $d=170\text{мм}$

составляет 120 МПа.

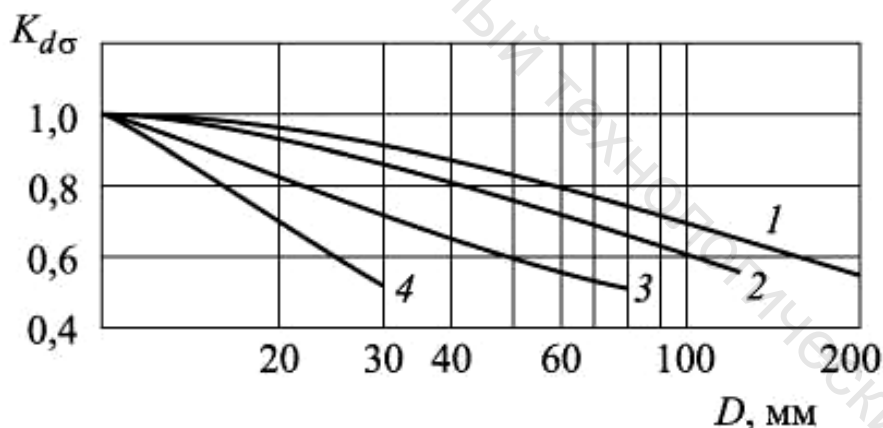


Рис. 12.15. Графики изменения масштабного коэффициента $K_{d\sigma}$

При этом в качестве причин проявления масштабного фактора можно указать следующие: 1) статистический фактор – большая вероятность появления дефектов в структуре образцов больших размеров;

2) технологический фактор – ухудшение структуры и свойств поверхностного слоя при механической обработке крупногабаритных деталей; 3) металлургический фактор – ухудшение качества заготовки с увеличением ее размеров (литейные дефекты, дефектыковки и т. д.).

Влияние абсолютных размеров детали на предел выносливости материала учитывается масштабным коэффициентом, который представляет собой соотношение между пределом выносливости σ_{-1} лабораторных образцов (диаметром 6...10 мм) и пределом выносливости геометрически подобных образцов (или деталей) больших размеров σ_{-1d} , то есть

$$K_{d\sigma} = \sigma_{-1d} / \sigma_{-1}. \quad (12.14)$$

Коэффициент зависит не только от диаметра, но и от предела прочности материала. Для касательных напряжений принимают те же значения, что и для нормальных напряжений. Масштабные коэффициенты устанавливаются экспериментальным путем, при отсутствии опытных данных для их вычисления рекомендуется пользоваться следующими формулами:

$$K_{d\sigma} = 1 - (1 - \sigma_{-1}^P / \sigma_{-1}) \cdot 0,77 \cdot \lg(d / d_0), \text{ при } d \leq 150 \text{ мм}; \quad (12.15)$$

$$K_{d\sigma} = \sigma_{-1}^P / \sigma_{-1}, \text{ при } d > 150 \text{ мм},$$

где σ_{-1} – предел выносливости лабораторного образца диаметром $d_0=7,5$ мм при циклическом изгибе с вращением;

σ_{-1}^P – предел выносливости лабораторного образца диаметром $d_0=7,5$ мм при циклическом растяжении-сжатии;

d – диаметр рассчитываемой детали (образца).

На рис. 12.15 приведены данные по $K_{d\sigma}$: для углеродистой стали без концентратора (кривая 1); для легированной стали при отсутствии концентратора и для углеродистой стали при наличии концентратора (кривая 2); для легированной стали с концентратором (кривая 3); для любой стали при большой концентрации напряжений (кривая 4).

12.5.3. Влияние качества обработки поверхности

Усталостные трещины, как правило, начинаются от поверхности детали.



Рис. 12.16. Микронеровности от механической обработки

Поэтому состояние поверхностного слоя оказывает существенное влияние на прочность при переменных напряжениях. Микронеровности (риски, шероховатость рис. 12.16) от механической обработки,

повреждения поверхности (царапины, прижоги) и т. п. являются источниками концентрации напряжений и могут вызвать весьма значительное снижение предела выносливости. Влияние качества поверхности на предел выносливости материала учитывается коэффициентом качества поверхности, который представляет собой отношение между пределом выносливости σ_{-1} лабораторных образцов с полированной поверхностью ($R_a=0,32-0,16$) и пределом выносливости геометрически подобных образцов с заданной шероховатостью $\sigma_{-1(R_z)}$, то есть

$$K_{F\sigma} = \sigma_{-1(R_z)} / \sigma_{-1}. \quad (12.16)$$

Шероховатость поверхности измеряется в микрометрах ГОСТ 2789-73. Тонкой обработке образца резцом на токарном станке соответствует шероховатость 12 мкм.

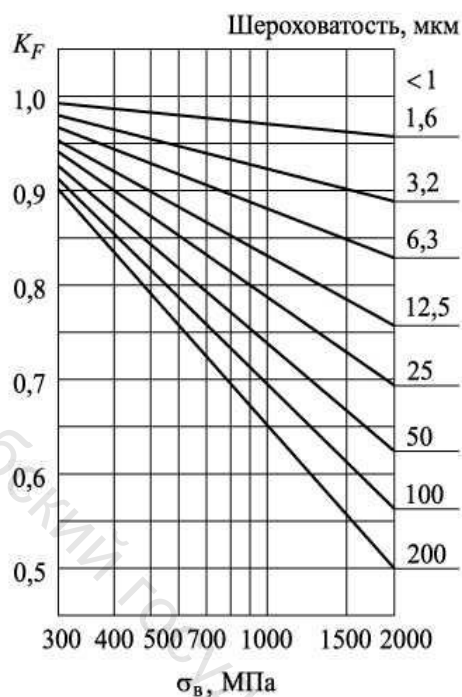


Рис. 12.17. Графики изменения коэффициента кач-ва поверхности $K_{d\sigma}$

Грубой обработке резцом соответствуют шероховатости поверхности в пределах 25 ÷ 50 мкм.

На рис. 12.17 даны кривые, характеризующие изменение $K_{F\sigma}$ в зависимости от предела прочности и шероховатости поверхности, а в таблице 12.3 приведены ориентировочные соотношения между высотой неровностей R_z и окончательной обработкой поверхности.

При отсутствии опытных данных для вычисления $K_{F\sigma}$ рекомендуется пользоваться следующими формулами:

$$K_{F\sigma} = 1 - 0,22 \cdot (\lg(\sigma_B / 20) - 1) \cdot \lg R_z, \text{ при } R_z > 1 \text{ мкм}; \quad (12.17)$$

$$K_{F\sigma} = 1, \text{ при } R_z \leq 1 \text{ мкм},$$

$1(R_z)$ – предел выносливости образца с шероховатостью R_z .

Таблица 12.3 Соотношения между высотой неровностей R_z и окончательной обработкой поверхности

Окончательная обработка	Высота неровностей R_z , мкм
Полирование	0,5 – 1
Шлифование	1,5 – 2
Чистовое точение	4 – 10
Точение	10 – 15
Грубое точение	20 – 30
Очень грубое точение	50 - 100

Значение коэффициента $K_{F\tau}$ вычисляют по формуле

$$K_{F\tau} = 0,575 \cdot K_{F\sigma} + 0,425. \quad (12.18)$$

12.5.4. Влияние методов поверхностного упрочнения

Необходимо отметить, что применение некоторых технологических методов упрочнения поверхности детали при правильном их выполнении приводит к значительному повышению ее сопротивления усталости (в 2–3 раза и более). К таким методам относятся:

- наклеп поверхностного слоя путем обдувки дробью, накатки роликом и т. п.;
- цементация, азотирование и цианирование поверхностного слоя;
- закалка токами высокой частоты.

Влияние технологических факторов на усталостную прочность оценивается коэффициентом поверхностного упрочнения K_v .

$$K_V = \sigma_{-1(\text{yup})} / \sigma_{-1}, \quad (12.19)$$

$\sigma_{-1(\text{yup})}$ – предел выносливости упрочненного образца.

Положительное влияние технологической обработки поверхностного слоя детали связано, в первую очередь, с созданием в этом слое остаточных сжимающих напряжений, наличие которых затрудняет развитие усталостных трещин. В результате сопротивление усталости детали повышается.

Остаточные напряжения сжатия при таком широко распространенном в настоящее время способе повышения сопротивления усталости детали, как наклеп ее поверхности, вызывается большим пластическим деформированием поверхностного слоя при обдувке стальной дробью или прокатке роликами. Толщина поверхностного слоя при этом уменьшается, а его продольные размеры увеличиваются, вызывая упругое растяжение материала внутренней части детали. Внутренние волокна после окончания процесса наклепа стремятся уменьшить свои размеры до исходных и вызывают сжатие пластически деформированных волокон поверхностного слоя. Кроме того, пластическое деформирование вызывает повышение упругих свойств материала и, что очень существенно, сглаживает различного рода царапины, задиры на поверхности детали, являющиеся концентраторами напряжений. Все эти факторы и являются главной причиной повышения сопротивления усталости при наклепе поверхностного слоя детали. Однако надо иметь в виду, что слишком интенсивный наклеп способствует появлению в поверхностных слоях детали микротрещин, которые могут снизить ее усталостную прочность.

При закалке токами высокой частоты и азотировании также создаются значительные сжимающие напряжения в поверхностном слое детали.

В то же время такие часто применяемые покрытия стальных деталей, как никелирование и хромирование, заметно снижают предел выносливости детали, хотя и не влияют на их статическую прочность, причем снижение сопротивления усталости тем больше, чем толще слой хрома или никеля. Объясняется это значительными остаточными растягивающими напряжениями в поверхностном слое при хромировании и никелировании. Аналогичное явление имеет место и при покрытии поверхности стальной детали слоем меди.

Существенно понижает сопротивление усталости коррозия.

12.6. Определение коэффициента запаса при циклическом нагружении

В большинстве случаев расчеты на прочность деталей, работающих при переменных напряжениях, выполняют как поверочные, то есть проверяется запас циклической прочности готовой детали. При этом проектировочный расчет детали, служащий для определения ее размеров, выполняется приближенно без учета переменности напряжений, но по пониженным допускаемым напряжениям.

Это объясняется тем, что для определения размеров детали по допускаемым напряжениям (среднего напряжения и амплитуды

напряжений) надо знать величины допускаемых напряжений, которые сами зависят от асимметрии цикла напряжений, т. е. от R .

Следовательно, в этом случае приходится задаваться асимметрией цикла, что не всегда легко сделать.

При поверочном расчете определяют коэффициенты запаса прочности n для одного или нескольких предположительно опасных сечений готовой детали, а затем сравнивают эти коэффициенты с допускаемыми коэффициентами $[n]$. В этом случае условие прочности при поверочном расчете выглядит следующим образом:

$$n \geq [n]. \quad (12.20)$$

Величина допускаемого коэффициента запаса прочности $[n]$ зависит от целого ряда факторов, основными из которых являются: 1) достоверная точность определения усилий и напряжений; 2) однородность структуры материала; 3) технология и культура изготовления детали; 4) условия работы детали и степень ее ответственности.

С увеличением габаритов и ответственности конструкции, с возрастанием убытков от аварии, особенно при опасности для жизни людей, связанной с возможным разрушением детали, величины $[n]$ должны повышаться.

В зависимости от этих условий можно выделить три группы значений допускаемого коэффициента запаса прочности при расчетах на выносливость:

1-я группа $[n]=1,3...1,5$ – назначается при повышенной точности теоретического и экспериментального определения усилий и напряжений для деталей, изготовленных из однородного материала при качественной технологии и высокой культуре производства;

2-я группа $[n]=1,5...2$ – назначается при недостаточно полном объеме экспериментальной информации о нагрузках и прочности детали, при среднем уровне технологии изготовления, но в условиях систематического дефектоскопического контроля;

3-я группа $[n]=2...3$ – назначается при малом объеме или отсутствии

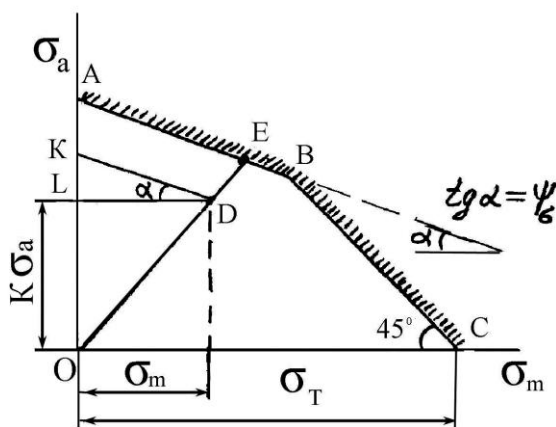


Рис. 12.18. Диаграмма предельных амплитуд

экспериментальной информации и низком уровне производства.

Рассмотрим процедуру определения коэффициентов запаса прочности с использованием диаграммы предельных амплитуд (рис. 12.18).

В этом случае согласно (12.8) предельная амплитуда напряжений (точка E на рис. 12.18) для лабораторных образцов может быть определена так:

$$\sigma_a = \sigma_{-1} - \psi_\sigma \sigma_m \quad (12.21)$$

Предельная амплитуда цикла для реальной детали $\sigma_{ад}$, очевидно, отличается от предельной амплитуды σ_a для лабораторного образца в K раз (для одного и того же среднего напряжения цикла, то есть при $\sigma_m = \sigma_{мд}$):

$$\sigma_{ад} = \frac{\sigma_a}{K} = \frac{\sigma_{-1} - \psi_\sigma \sigma_{мд}}{K}, \quad (12.22)$$

где K определяется выражением (12.10).

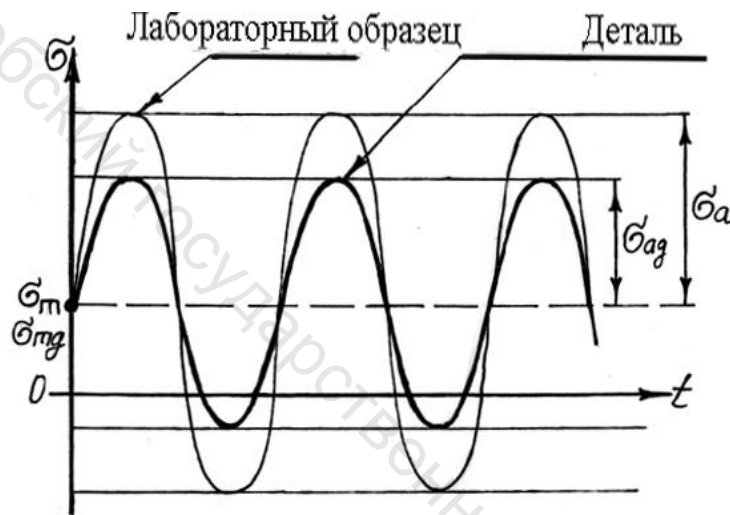


Рис. 12.19. Схема к расчету

Опыты показывают, что концентрация напряжений, масштабный эффект и состояние поверхности отражаются только на величинах предельных амплитуд σ_a и практически не влияют на величины предельных средних напряжений σ_m (рис.12.19). Поэтому в расчетной практике принято коэффициент снижения предела выносливости относить только к

амплитудному напряжению цикла.

Под коэффициентом запаса прочности будем понимать отношение предельных значений напряжений для данной детали к рабочим (действующим в реальных условиях эксплуатации), а именно

$$n_\sigma = \sigma_{ад} / \sigma_a^{раб} = \sigma_{мд} / \sigma_m^{раб} = \sigma_{max Д} / \sigma_{max}^{раб}. \quad (12.23)$$

То есть n_σ показывает во сколько раз рабочие напряжения, возникающие в детали в ходе ее эксплуатации, меньше предельно допустимых для данной детали величин циклических напряжений. В этом случае можем записать

$$(12.22) \text{ с учетом (12.23) в следующем виде: } n_\sigma \sigma_a^{раб} = \frac{\sigma_{-1} - \psi_\sigma (n_\sigma \sigma_m^{раб})}{K_\sigma},$$

отсюда

$$n_\sigma = \frac{\sigma_{-1}}{K_\sigma \sigma_a^{раб} + \psi_\sigma \sigma_m^{раб}} \quad (12.24)$$

Нанесем рабочий цикл, притом, поправки на концентрацию напряжений, качество поверхности и размер детали, учтенные коэффициентом K , внесем в переменную составляющую цикла, то есть в его амплитуду. Следовательно, рабочая точка D на рис. 12.18 имеет координаты $\sigma_m^{раб}$ и $K \cdot \sigma_a^{раб}$. Как было

сказано выше, с увеличением нагрузки циклы остаются подобными и отображаются точками на отрезке ODE и точка E характеризует предельный цикл.

Заметим, что полученная формула (12.24) относится к одноосному напряженному состоянию.

При циклических касательных напряжениях коэффициент запаса n_τ определяется аналогично.

$$n_\tau = \frac{\tau_{-1}}{K_\tau \tau_a^{раб} + \psi_\tau \tau_m^{раб}} \quad (12.25)$$

В случае плоского напряженного состояния используют эмпирическую формулу Гафа и Полларда:

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n_\sigma^2} + \frac{1}{n_\tau^2}$$

Из этого выражения получаем формулу для коэффициента запаса n:

$$n = \frac{n_\sigma \cdot n_\tau}{\sqrt{n_\sigma^2 + n_\tau^2}} \quad (12.26)$$

При выполнении проекторочного расчета вала сначала определяют его диаметр из статического расчета, а затем находят коэффициент запаса по переменным напряжениям и проверяют условие прочности $n \geq [n]$.

Пример 12.1. Определить коэффициент запаса усталостной прочности для вала с галтелью (рис. 12.20), подверженного действию переменного изгиба с кручением. Поверхность стержня чисто обработана резцом (шероховатость 12 мкм).

Дано: $\sigma_{-1}=400$ МПа, $\tau_{-1}=220$ МПа, $\sigma_B=800$ МПа, $\sigma_T=550$ МПа, $M_{изг}=\pm 5 \cdot 10^3$ Нм, $M_{кр}=2 \cdot 10^3 \pm 4 \cdot 10^3$ Нм, $D=100$ мм, $d=95$ мм, $r=5$ мм.

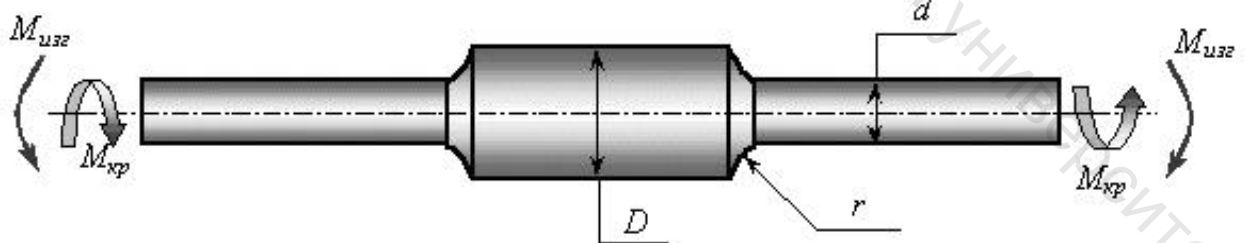


Рис. 12.20. Схема к расчету

Решение.1). Амплитуды и средние значения рабочих циклов нормальных и касательных напряжений определяются по следующим формулам:

$$\sigma_a^{раб} = \frac{M_{изг}}{W} = \frac{5 \cdot 10^3}{\pi d^3 / 32} = \frac{5 \cdot 10^3 \cdot 32}{3,14 \cdot 95^3 \cdot 10^{-9}} = 60 \text{ МПа}, \quad \tau_m^{раб} = 0;$$

$$\tau_a^{раб} = \frac{M_{кра}}{W_p} = \frac{4 \cdot 10^3}{\pi \cdot d^3 / 16} = \frac{4 \cdot 10^3 \cdot 16}{3,14 \cdot 95^3 \cdot 10^{-9}} = 24 \text{ МПа};$$

$$\tau_m^{раб} = \frac{M_{крт}}{W_p} = \frac{2 \cdot 10^3}{\pi \cdot d^3 / 16} = \frac{2 \cdot 10^3 \cdot 16}{3,14 \cdot 95^3 \cdot 10^{-9}} = 12 \text{ МПа}.$$

2). Для определения коэффициентов запаса по формулам (12.24) – (12.26) необходимо найти значения $K_{\sigma Д}$, $K_{\tau Д}$, ψ_{σ} , ψ_{τ} . Из таблицы 12.1 найдем - $\psi_{\sigma} \approx 0,2$, $\psi_{\tau} \approx 0,1$.

3). Коэффициент концентрации напряжений K_{σ} найдем по формуле (12.12) с учетом данных для q и α_{σ} , взятых из ГОСТ 25.504 -82 - П ($q=0,98$) и чертеж 27 обязательного приложения 3 (смотрите приложение 7 и 9 в конце данного пособия).

$$\alpha_{\sigma} = 1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{0,62}{t/r} + 5,80 \frac{(1+d/r)^2}{(d/r)^3} + \frac{0,2}{(t/r)^3} \cdot \frac{d/r}{(d/r+t/r)}}} = 1,6, \quad \text{где}$$

$$t = (D - d) / 2 = (100 - 95) / 2 = 2,5 \text{ мм}, \quad t/r = 0,5, \quad d/r = 19.$$

По формуле (12.12) находим $K_{\sigma} = 1 + q \cdot (\alpha_{\sigma} - 1) = 1 + 0,98 \cdot (1,6 - 1) = 1,59$.

Масштабный коэффициент $K_{d\sigma} = 0,5$ найдем по рис. 12.15. Формулой (12.15)

воспользоваться не можем, так как нет данных по величине σ_{-1}^P - пределе выносливости лабораторного образца диаметром $d_0 = 7,5$ мм при циклическом растяжении-сжатии.

Коэффициент качества поверхности найдем по формуле (12.17)

$$K_{F\sigma} = 1 - 0,22 \cdot (\lg(\sigma_B / 20) - 1) \cdot \lg Rz = 1 - 0,22(\lg(800 / 20) - 1) \lg 6 = 0,9.$$

По рис. 12.17 величина коэффициент качества поверхности имеет такое же значение.

Определяем значение $K_{\sigma Д}$ по формуле (12.10)

$$K_{\sigma Д} = \left(\frac{K_{\sigma}}{K_{d\sigma}} + \frac{1}{K_{F\sigma}} - 1 \right) \frac{1}{K_V K_A} = \left(\frac{1,59}{0,5} + \frac{1}{0,9} - 1 \right) \cdot \frac{1}{1 \cdot 1} = 3,29.$$

Коэффициенты $K_V = 1$; $K_A = 1$.

По формуле (12.24) находим коэффициент запаса прочности по нормальным напряжениям n_{σ}

$$n_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma Д} \sigma_a^{раб} + \psi_{\sigma} \sigma_m^{раб}} = \frac{400}{3,29 \cdot 60 + 0,2 \cdot 0} = 2,03$$

4). Находим необходимые величины для определения запаса прочности по касательным напряжениям n_{τ}

Находим значение α_{τ} по чертежу 28 обязательного приложения 3 (смотрите приложение 10 в конце данного пособия).

$$\alpha_{\tau} = 1 + \frac{1}{\sqrt{3,4 \frac{t/r}{t/r} + 19,0 \frac{(1+d/r)^2}{(d/r)} + \frac{1,0}{(t/r)^3} \cdot \frac{d/r}{(d/r+t/r)}}} = 1,25$$

Определяем G_{τ} по формуле таблицы 1 ГОСТ 25.504 -82

$$G_{\tau} = \frac{1,15}{r} + \frac{2}{d} = \frac{1,15}{5} + \frac{2}{95} = 0,25 \text{ 1/мм}.$$

Вычисляем значение Θ согласно правилам п.1.5 ГОСТ 25.504 -82: $L = \pi \cdot d = 3,14 \cdot 95 = 298,5 \text{ мм}$ – при изгибе с вращением круглого вала; $L/G = 298,5/0,25 = 1194 \text{ мм}^2$; $\Theta = L/G(1/88,3) = 13,52$.

Согласно п.1.8.2. ГОСТ 25.504 -82 $\nu_{\sigma} = 0,2 - \sigma_B \cdot 10^{-4} = 0,12$, а $\nu_{\tau} = 1,5 \nu_{\sigma} = 0,18$. По таблице 4 или по чертежу 1 (обязательное приложение 4) ГОСТ 25.504 -82 находим при $\Theta = 13,52$, $F(\Theta, \nu_{\tau}) = 1,19$ (смотрите приложение 11 и 8 в конце данного пособия).

Определяем $K_{\tau}/K_{d\tau}$ по формуле (11) ГОСТ 25.504 -82

$$K_{\tau}/K_{d\tau} = \alpha_{\tau} \cdot F(\Theta, \nu_{\tau}) = 1,25 \cdot 1,19 = 1,49.$$

Коэффициент качества поверхности $K_{F\tau}$ найдем по формуле (12.18)

$$K_{F\tau} = 0,575 \cdot K_{F\sigma} + 0,425 = 0,575 \cdot 0,9 + 0,425 = 0,94.$$

Определяем значение $K_{\tau D}$ по формуле (12.10)

$$K_{\tau D} = \left(\frac{K_{\tau}}{K_{d\tau}} + \frac{1}{K_{F\tau}} - 1 \right) \frac{1}{K_V K_A} = \left(1,49 + \frac{1}{0,94} - 1 \right) \cdot \frac{1}{1 \cdot 1} = 1,55.$$

Коэффициенты $K_V = 1$; $K_A = 1$.

По формуле (12.25) находим коэффициент запаса прочности по касательным напряжениям n_{τ}

$$n_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{K_{\tau D} \tau_a^{раб} + \psi \tau_m^{раб}} = \frac{220}{1,55 \cdot 24 + 0,1 \cdot 12} = 5,73.$$

По формуле (12.26) находим коэффициент запаса n

$$n = \frac{n_{\sigma} \cdot n_{\tau}}{\sqrt{n_{\sigma}^2 + n_{\tau}^2}} = \frac{2,03 \cdot 5,73}{\sqrt{2,03^2 + 5,73^2}} = 1,92.$$

Контрольные вопросы

12.1. Какие условия нагружения могут привести к усталостному разрушению?

12.2. Как протекает процесс усталостного разрушения?

12.3. Назовите основные характеристики монотонного цикла и его параметры.

12.4. Что такое коэффициент асимметрии цикла? Чему он равен для статического нагружения? Для симметричного и пульсационных циклов?

12.5. Что такое кривая усталости? Как она строится?

12.6. Что такое базовое число циклов? Что называется пределом выносливости? Что такое предел ограниченной выносливости?

12.7. Влияет ли форма цикла на величину предела выносливости?

12.8. Как зависит предел выносливости от частоты изменения напряжений?

12.9. В каких координатах и как строится диаграмма предельных амплитуд? Что она определяет?

12.10. Что такое запас выносливости (запас циклической прочности)? Как он определяется по диаграмме предельных амплитуд?

12.11. Как строится приближенная диаграмма предельных амплитуд?

12.12. Что такое концентрация напряжений? Как она влияет на прочность при циклически изменяющихся напряжениях?

12.13. Что такое эффективный коэффициент концентрации? Как он связан с теоретическим коэффициентом концентрации?

12.14. Как влияют размеры деталей на предел выносливости? Что такое коэффициент масштабного эффекта?

12.15. Каково влияние чистоты обработки деталей на сопротивление усталости? Как определяется коэффициент качества поверхности?

12.16. Какие процессы обработки деталей используют для повышения сопротивления усталости?

12.17. Каким коэффициентом оценивается совместное влияние концентрации напряжений, масштабного фактора и состояния поверхности?

12.18. Как определить запасы выносливости детали по заданной диаграмме предельных амплитуд?

12.19. Как определяется запас выносливости при совместном действии нормальных и касательных напряжений?

ГЛАВА 13

РАСЧЕТ ГИБКИХ НИТЕЙ

13.1. Основные определения

Ниткой называется продукт, приготовленный из простой пряжи с помощью скручивания нескольких ее концов с целью придать ей особую прочность, а также гладкость, ровноту и красивый круглый вид, необходимые при применении ее для некоторых специальных целей, например, для ручного шитья и машинного вязания, вышивания и т. п.

Прочность простой пряжи можно повысить, при том же материале, двумя путями: усилением крутки или увеличением диаметра нити, но оба эти средства, при желании получить прочность выше средней, оказываются невыгодными. Сильная крутка создает в волокнах пряжи большие внутренние напряжения, притом неравномерно распределенные в сечении нити: наружные волокна напряжены сильнее, а внутренние слабее. Разница напряжений возрастает с увеличением диаметра нити. Поэтому крутка может увеличить прочность пряжи лишь до некоторого предела, за которым начинается уже понижение прочности. Увеличение же диаметра нити усиливает неравномерность волокон, при чем незначительное увеличение прочности достигается ценой значительного расхода материала, который таким образом тратится весьма невыгодно.

Наилучшим средством использовать прочность волокон служит соединение посредством скручивания нескольких тонких простых нитей. При правильном скручивании их напряжение распределится поровну на каждую простую нить, входящую в состав сложной, а так как при незначительном диаметре отдельных нитей волокна каждой из них напряжены довольно равномерно, то и составная нить представляет наибольшую прочность на какую можно рассчитывать при определенных качествах волокна. Впрочем, и при таком соединении есть известные условия, которые должны быть соблюдаемы для того, чтобы достигнуть удовлетворительных результатов. Главнейшее из них то, чтобы все скрученные нити были одинаково напряжены, что имеет место, когда все они представляют спирали (винтовые линии) с совершенно одинаковым углом наклона, а, следовательно, когда их сечения отстоят на равных расстояниях от центральной оси составной нити.

Это требование ведет за собой два практических правила:

- 1) чтобы при скручивании все идущие в крутку нити были одинаково натянуты;
- 2) чтобы за один прием скручивалось небольшое число нитей, так как в противном случае нити не могут расположиться на одинаковом расстоянии от центра, чем нарушается и правильность формы спиралей. Фигуры (а — д) рис. 13.1 показывают сечения сложной нити при соединении 3, 4, 6, 8 и 12 простых нитей.

Из рисунка видно, что чем больше нитей входит в состав, тем больше, при правильном их расположении, становится центральный, ничем не

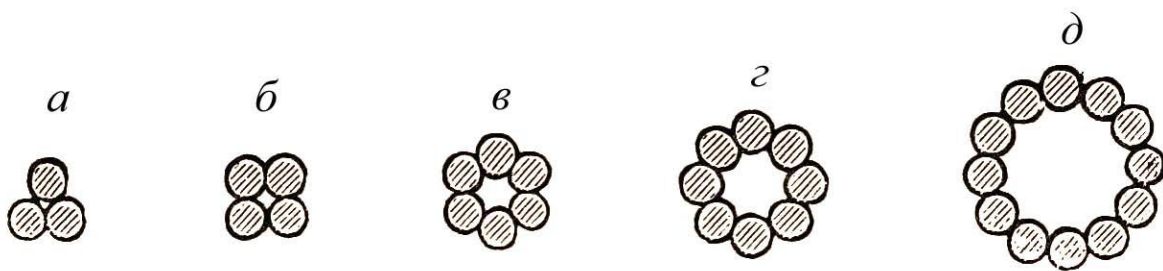


Рис. 13.1. Изображение сечения сложных нитей

заполненный промежуток. На самом же деле он непременно заполнится одной или несколькими нитями, которые таким образом попадут в условия иные, чем остальные, и равномерность напряжений будет нарушена. Во избежание этого недостаток соединения значительного числа нитей производят в два приема: сначала скручивают 2 — 3 простые нити, а затем полученные составные нити скручивают по 3 — 4, смотря по надобности, чтобы получить желаемое число скрученных нитей (для вязальных нитей, от которых требуется мягкость более, чем крепость, скручивание 6 и более нитей производится сразу).

Касательно направления скручивания надо заметить, что, при скручивании нескольких нитей, каждая из них, располагаясь известным числом витков вокруг остальных, испытывает и вокруг собственной оси то же число кручений в ту же сторону. Чтобы отдельные нити не делались от увеличения их крутки слишком жесткими, принято скручивать нити в направлении, *обратном первоначальной крутке*. При этом нити, теряя часть первоначальной крутки, делаются мягче, прилегают плотнее друг к другу, отчего и вся крученая нитка получает круглую форму. Кроме того, применением обратного направления кручения уничтожается стремление отдельных нитей раскручиваться, когда они находятся в свободном состоянии. Это обстоятельство особенно важно, когда нить употребляется отдельными концами, напр. при ручном шитье, вышивании и т. п. При кручении в два приема, вторая крутка производится всегда в сторону, обратную первой.

В механике под нитью понимается материальная система одного измерения, которая под действием приложенных сил может принять форму любой геометрической линии. Нить, не оказывающая сопротивления изгибу и кручению, называется *идеальной* или *абсолютно гибкой нитью*. Идеальная нить может быть *растяжимой* или *нерастяжимой* (крайняя абстракция). В дальнейшем, при отсутствии специального указания, под термином «*гибкая нить*» или просто «*нить*» будем понимать идеальную нерастяжимую или растяжимую нить.

При расчете нити на прочность, вычислении поверхностных сил, действующих на нить, а также в ряде других случаев необходимо учитывать поперечные размеры нити. Поэтому, говоря об одномерности нити, мы, конечно, имеем в виду, что поперечные размеры малы по

сравнению с длиной и что они не нарушают перечисленных выше свойств идеальной нити.

Модель идеальной нити представляет некоторую абстракцию, однако во многих случаях пряжа и нитки (в процессе их изготовления), тросы, цепи и канаты вполне удовлетворительно отвечают этой модели.

Пусть нить AB под действием приложенных к ней сил приняла некоторую равновесную конфигурацию. Положение каждой точки M растянутой или нерастяжимой нити будем определять дуговой координатой s , отсчитываемой от фиксированной точки нити, например точки A (рис. 13.2,а). Выделим на нити какой-нибудь ее отрезок MM' длиной Δs и массой Δm . Плотностью растянутой нити μ в точке M (иногда говорят *линейной плотностью*) называется предел отношения Δm к Δs при условии, что точка M' стремится по нити к точке M :

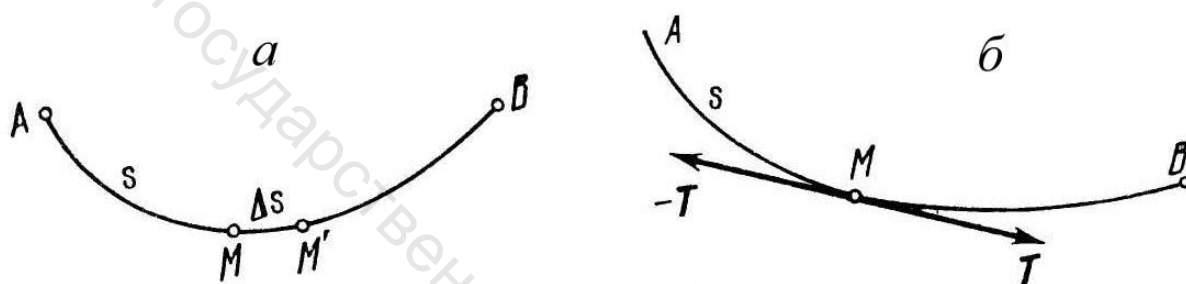


Рис.13.2. Модель идеальной нити

$$\mu = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta s}.$$

Текс - внесистемная единица линейной плотности волокон или нитей, т. е. отношение их массы к длине. $1 \text{ текс} = 1 \text{ г/км} = 1 \text{ мг/м}$. Характеризует толщину материалов. Текс заменил титр, в котором за единицу массы принимали денье (0,05 г), за единицу длины - 450 м. **Денье**, единица измерения линейной плотности нити (волокна); равна массе 9 км нити в 1 г.

В общем случае линейная плотность нити зависит от выбранной точки, т. е. $\mu = \mu(s)$.

Если до растяжения плотность нити μ_0 была одинакова во всех точках, то нить называется *однородной*, в противном случае — *неоднородной*. При данном определении линейной плотности нити ее неоднородность может быть вызвана неоднородностью материала или различной площадью поперечного сечения нити.

Пусть нить AB находится в равновесии под действием распределенных сил. Сделаем в точке M нити мысленный разрез и рассмотрим силу T , с которой часть нити, расположенная в направлении положительного отсчета дуговой координаты s (на рис. 13.2,б правая часть нити) действует на другую (левую) часть нити. Очевидно, что эта сила, называемая

натяжением нити, направлена по общей касательной к нити в точке M . Естественно, что левая часть нити действует на правую часть с такой же по модулю, но направленной в противоположную сторону силой, т. е. силой $-T$.

В каждой точке нити имеется свое натяжение T . Поэтому при равновесии натяжение нити T будет функцией дуговой координаты $T=T(s)$.

Нормальное напряжение нити σ определяется, как обычно, равенством

$$\sigma = \frac{T}{A}. \quad (13.1)$$

Здесь A — площадь поперечного сечения нити.

Пусть до растяжения длина элемента нити была ds_0 , а после растяжения она сделалась равной ds . Так как растяжение нити зависит от нормального напряжения, то отношение ds/ds_0 представляет некоторую функцию σ

$$\frac{ds}{ds_0} = f(\sigma).$$

Для однородной нити можно считать, что это отношение зависит только от натяжения T

$$\frac{ds}{ds_0} = f(T). \quad (13.2)$$

Задавая функцию f , мы получим соответствующий закон растяжения, например упругое, пластическое растяжение и т. п.

Остановимся более подробно на упругом растяжении однородной нити по закону Гука, когда выполняется равенство

$$T = E^* \frac{ds - ds_0}{ds_0} = E^* \left(\frac{ds}{ds_0} - 1 \right), \quad (13.3)$$

где E^* — модуль упругости нити. В сопромате и прикладной теории упругости величину E^* называют «жесткостью на растяжение». Пользуясь равенством (13.2), получим

$$T = E^* (f - 1). \quad (13.4)$$

Отсюда

$$f(T) = 1 + \alpha^* T, \quad (13.5)$$

где $\alpha^* = 1/E^*$ — удельное относительное удлинение нити. Если нить нерастяжима, то $f=1$, $\alpha^* = 0$, $E^* = \infty$.

Заметим, что модуль упругости нити E^* имеет размерность обычной силы. Очевидно, что

$$E^* = EA, \quad (13.6)$$

где E — модуль упругости материала нити ($[E] = \text{н/м}^2$).

Пусть d_0 и d — диаметры нити до и после растяжения. Тогда относительное изменение диаметра нити определится равенством

$$\varepsilon_1 = \frac{d_0 - d}{d_0} = 1 - \frac{d}{d_0}.$$

Считая, что нить изотропна и что растяжение подчинено закону Гука, будем иметь

$$\mu^* = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_1}, \quad \varepsilon = \frac{ds - ds_0}{ds_0},$$

где μ^* — коэффициент Пуассона. Пользуясь равенствами (13.3) и (13.5), найдем значение диаметра нити после растяжения

$$d = (1 - \alpha^* \mu^* T) d_0. \quad (13.7)$$

Как правило, величина $\alpha^* \mu^* T$ ничтожно мала по сравнению с единицей. Поэтому изменением диаметра нити при ее растяжении обычно пренебрегают.

13.2. Дифференциальные уравнения равновесия нити

Рассмотрим гибкую нить, находящуюся в равновесии под действием распределенных сил. Возьмем на нити произвольную точку M и достаточно близкую к ней точку M' . Пусть точке M соответствует дуговая координата s , а точке M' дуговая координата $s + \Delta s$. Мысленно выделим отрезок нити MM' и рассмотрим все силы, действующие на него (рис. 13.3). Прежде всего, на отрезок нити MM' действуют распределенные силы, главный вектор которых равен $\vec{P} \Delta s$. Кроме того, в точке M действует сила — $\vec{T}(s)$, а в точке M' — сила $\vec{T}(s + \Delta s)$. Так как участок нити MM'

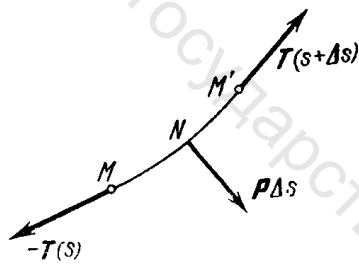


Рис. 13.3. Фрагмент вырезанной части гибкой нити

по условию находится в равновесии, то геометрическая сумма всех приложенных к нему сил должна равняться нулю

$$\vec{T}(s + \Delta s) - \vec{T}(s) + \vec{P} \Delta s = 0$$

или деля на Δs и учитывая, что $\vec{T}(s + \Delta s) - \vec{T}(s) = \Delta \vec{T}$, получим

$$\frac{\Delta \vec{T}}{\Delta s} + \vec{P} = 0.$$

Переходя к пределу в предположении, что точка M стремится по кривой равновесия к точке M' , получим

$$\frac{d\vec{T}}{ds} + \vec{P} = 0 \quad (13.8)$$

Здесь и в дальнейшем под \vec{P} понимается, конечно, равнодействующая всех распределенных сил, отнесенных к единице длины нити и приложенных к точке M .

Векторное дифференциальное уравнение (13.8) равновесия идеальной нити, справедливое как для нерастяжимой, так и для растяжимой нити, является основным, и из него могут быть получены дифференциальные уравнения равновесия нити в других формах.

Пусть нить ориентирована относительно прямоугольной декартовой системы координат $Oxyz$. Возьмем на нити произвольную точку M с координатами x, y, z и проведем в этой точке касательную к нити. Как известно, направляющие косинусы касательной определяются равенствами

$$\cos \alpha = \frac{dx}{ds}, \quad \cos \beta = \frac{dy}{ds}, \quad \cos \gamma = \frac{dz}{ds}, \quad (13.9)$$

где α, β, γ – углы между касательной и осями координат соответственно.

Так как вектор \vec{T} направлен по касательной, то проекции его на координатные оси будут равны

$$T_x = T \frac{dx}{ds}, \quad T_y = T \frac{dy}{ds}, \quad T_z = T \frac{dz}{ds}, \quad (13.10)$$

где T — модуль натяжения в точке M .

Проектируя обе части векторного уравнения (13.8) на координатные оси, получим

$$\frac{d}{ds} \left(T \frac{dx}{ds} \right) + P_x = 0,$$

$$\frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) + P_y = 0,$$

$$\frac{d}{ds} \left(T \frac{dz}{ds} \right) + P_z = 0.$$

(13.11)

Здесь P_x, P_y, P_z — проекции силы \vec{P} на соответствующие координатные оси.

Если нить и все силы, приложенные к ней, находятся в одной плоскости (будем считать, что это плоскость xy), то вместо трех уравнений (13.11) будем иметь только два уравнения:

$$\frac{d}{ds} \left(T \frac{dx}{ds} \right) + P_x = 0, \quad \frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) + P_y = 0, \quad (13.12)$$

Рассмотрим частный случай параллельных сил. Построим систему координат так, чтобы ось y была параллельна силам. Тогда $P_x = P_z = 0$ и два уравнения (13.11) примут вид:

$$\frac{d}{ds} \left(T \frac{dx}{ds} \right) = 0, \quad \frac{d}{ds} \left(T \frac{dz}{ds} \right) = 0. \quad (13.13)$$

Не нарушая общности, можно считать, что плоскость нити совпадает с плоскостью xy ($z = 0$). Тогда третье уравнение (13.11) обращается в тождество, и задача сводится к интегрированию уравнений

$$T \frac{dx}{ds} = H, \quad \frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) + P_y = 0, \quad (13.14)$$

где $H = C_1$. Постоянная H имеет простой физический смысл — она равна проекции натяжения нити на ось x , т. е. на прямую, перпендикулярную силам.

Таким образом, во всех точках нити, находящейся в равновесии под действием параллельных сил, проекция натяжения на направление, перпендикулярное силам, есть величина постоянная. На рис. 13.4

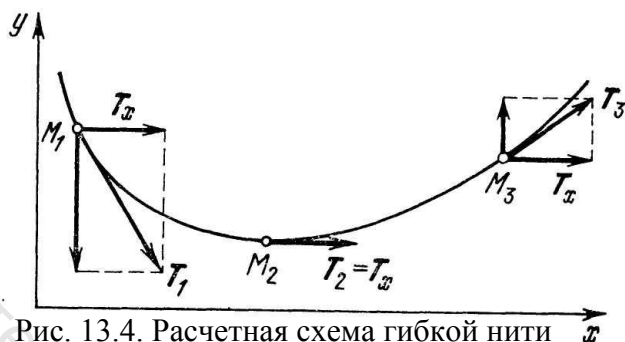


Рис. 13.4. Расчетная схема гибкой нити

показана нить, находящаяся под действием сил, параллельных оси y . Натяжения T_1 , T_2 и T_3 в точках M_1 , M_2 и M_3 имеют различные направления и модули, но их составляющие по оси x равны между собой.

13.3. Цепная линия

Линия равновесия абсолютно гибкой и нерастяжимой однородной нити, находящейся в поле силы тяжести, называется *цепной линией*. В более широком смысле под цепной линией понимается линия равновесия тяжелой неоднородной и растяжимой нити. В этом параграфе мы рассмотрим однородную нерастяжимую цепную линию.

Силы тяжести, действующие на каждый элемент нити, направлены вертикально вниз и, следовательно, параллельны между собой. Поэтому цепная линия является плоской кривой. Для вывода уравнения цепной линии совместим начало координат с ее вершиной O , ось y направим вертикально вверх, а ось x горизонтально так, чтобы координатная плоскость xy являлась плоскостью нити (рис. 13.5).

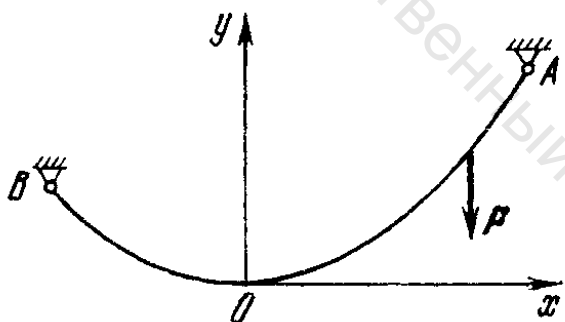


Рис. 13.5. Расчетная схема гибкой нити

Модуль силы P для однородной тяжелой нити равен весу единицы длины нити q , причем $q = \text{const}$. При данном выборе координатных осей будем иметь: $P_x=0$, $P_y=-q$. Подставляя значение P_y во второе уравнение (13.14), получим

равенство, известное из математики

$$T \frac{dx}{ds} = H, \quad \frac{d}{ds} \left(T \frac{dy}{ds} \right) = q, \quad (13.15)$$

где $H = \text{const}$ — проекция натяжения нити на горизонтальную ось x .

Из первого уравнения (13.15) найдем

$$T = H \frac{ds}{dx}. \quad (13.16)$$

Подставим выражение (13.16) для T во второе уравнение (13.15) и учтем равенство, известное из математики

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (13.17)$$

Тогда после деления переменных уравнение (13.15) примет вид

$$\frac{dy'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{dx}{a},$$

где $y' = dy/dx$,

$$a = \frac{H}{q}. \quad (13.18)$$

Интегрируя полученное уравнение, найдем

$$\text{Arcsh } y' = \frac{x - C_1}{a}.$$

Здесь C_1 — постоянная интегрирования. Из последнего равенства будем иметь

$$y' = \frac{dy}{dx} = \text{sh} \frac{x - C_1}{a}. \quad (13.19)$$

Интегрируя еще раз, получим уравнение цепной линии

$$y = a \cdot \text{ch} \frac{x - C_1}{a} + C_2, \quad (13.20)$$

где C_2 — новая постоянная интегрирования.

Так как при выбранной системе координат ось y проходит через вершину цепной линии, касательная к которой параллельна оси x (рисунок 13.5), то $y'=0$ при $x=0$. Внося эти значения для x и y' в равенство (13.19), получим $C_1=0$. Следовательно, уравнение (13.20) примет вид

$$y = a \cdot \text{ch} \frac{x}{a} + C_2.$$

Учтем теперь, что цепная линия проходит через начало координат $x=0, y=0$. Поэтому $C_2 = -a$ и последнее уравнение принимает каноническую форму

$$y = a \left(\text{ch} \frac{x}{a} - 1 \right). \quad (13.21)$$

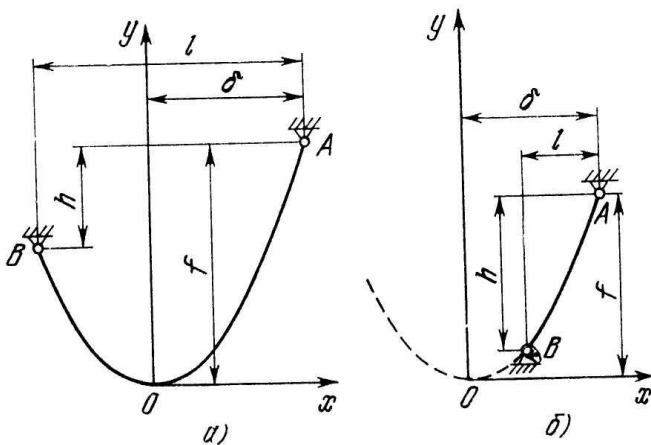


Рис. 13.6. Расчетная схема гибкой нити

Это уравнение получено практически одновременно Лейбницем, Гюйгенсом и Иоганном Бернулли.

В технических приложениях обычно задается взаимное расположение точек закрепления A и B (пролет l и превышение h — рис. 13.6), а также длина L цепной линии (или другой какой-нибудь ее элемент). При этих условиях приходится определять не только параметр a , входящий в уравнение (13.21), но и положение начала

координат относительно точек закрепления (заметим, что начало координат, может и не принадлежать цепной линии — рис. 13.6, б).

Обозначим расстояние по горизонтали и вертикали от вершины O до верхней точки закрепления A через δ и f соответственно, т. е. положим $x_A = \delta$ и $y_A = f$ (при $h=0$ величина f называется *стрелой провисания*: для краткости мы будем употреблять этот термин и в общем случае при $h \neq 0$). Тогда координаты точки B будут: $x_B = -(\ell - \delta)$, $y_B = f - h$. Внесем координаты точки A в уравнение (13.21)

$$f = a \left(ch \frac{\delta}{a} - 1 \right). \quad (13.22)$$

Подставим теперь в уравнение (13.21) координаты точки B и используем при этом полученное значение (13.22) для f . После очевидных упрощений получим

$$h = a \left(ch \frac{\delta}{a} - ch \frac{\ell - \delta}{a} \right). \quad (13.23)$$

Вычислим дифференциал дуги цепной линии, для чего внесем в равенство (13.17) значение производной y' из (13.19), учтя при этом, что при выбранной системе координат постоянная $C_1 = 0$. Имеем

$$ds = \sqrt{1 + sh^2 \frac{x}{a}} dx.$$

На основании хорошо известной формулы для гиперболических функций

$$ch^2 z - sh^2 z = 1 \quad (13.24)$$

получим

$$ds = ch \frac{x}{a} dx. \quad (13.25)$$

Интегрируя равенство (13.25) от $x_B = -(\ell - \delta)$ до $x_A = \delta$, найдем длину цепной линии

$$L = \left(sh \frac{\delta}{a} + sh \frac{\ell - \delta}{a} \right). \quad (13.26)$$

Пользуясь равенствами (13.16), (13.18) и (13.25) найдем натяжение

$$T = a \cdot q \cdot ch \frac{x}{a} \quad (13.27)$$

или, учитывая уравнение (13.21),

$$T = q(a + y). \quad (13.28)$$

Равенство (13.28) позволяет дать простую интерпретацию параметра a . Проведем горизонтальную прямую $N - N$ на расстоянии a от вершины цепной линии O (рис. 13.7, а). Пользуясь рисунком и равенством (13.28), найдем, что натяжение нити в любой ее точке равно весу нити, длина которой равна расстоянию от данной точки до прямой $N - N$. Из этого следует, что тяжелая однородная нить, лежащая на двух бесконечно

малых блоках, будет в равновесии, если свободные концы ее опущены ниже вершины на расстояние a (рис. 13.7, б).

Все элементы цепной линии легко определяются, если известны параметры a и δ . Их вычисление зависит от условий задачи.

Строгое решение задачи о равновесии цепной линии с учетом различных факторов приводит к сравнительно сложному анализу и требует применения

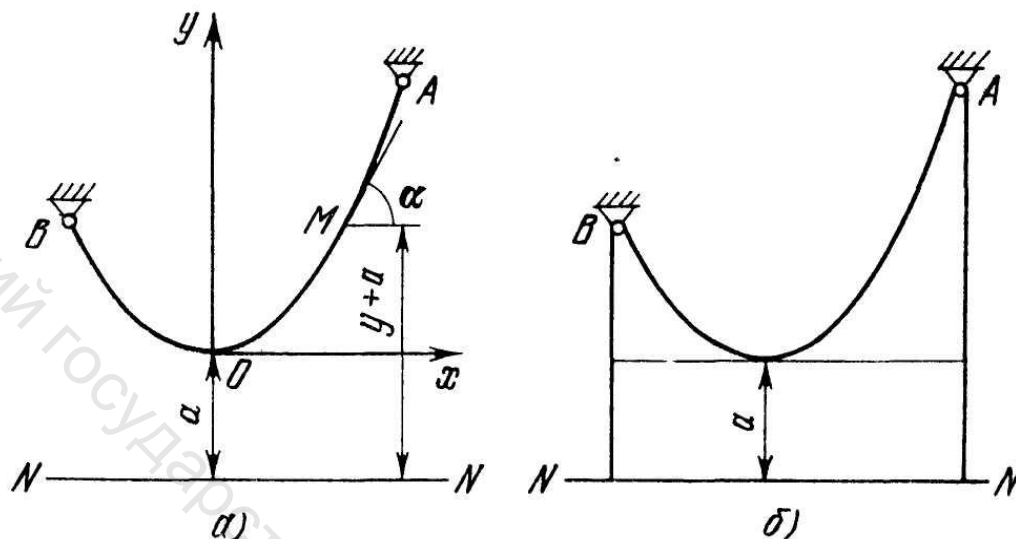


Рис. 13.7. Расчетная схема гибкой нити

ЭВМ. Это связано с решениями в виде гиперболических функций, значения которых можно найти по специально составленным таблицам или численно. Между тем простой прикидочный расчет дает оценку метода и позволяет продемонстрировать основные особенности равновесия гибкой нити. Поэтому остановимся на очень важном для приложений случае малой стрелы провисания ($f < \ell$).

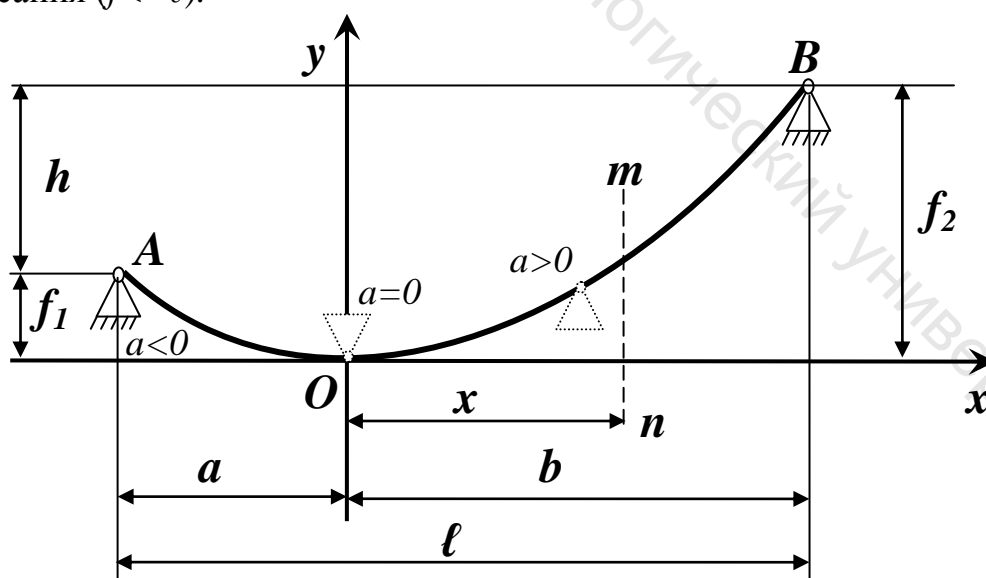


Рис. 13.8. Расчетная схема гибкой нити

13.4. Расчет гибкой нити с малой стрелой провисания

Пусть (рис. 13.8) имеется гибкая нить постоянного сечения, нагруженная собственным весом и подвешенная в двух точках, находящихся на разных

уровнях. Под действием собственного веса нить провисает по некоторой кривой AOB . Горизонтальная проекция расстояния между опорами (точками ее закрепления), обозначаемая ℓ , носит название *пролета*.

Нить имеет постоянное сечение, следовательно, вес ее распределен равномерно по ее длине. Обычно если провисание нити невелико по сравнению с ее пролетом, то длина кривой AOB мало отличается (не более чем на 10%) от длины хорды AB . В этом случае с достаточной степенью точности можно считать, что вес нити равномерно распределен не по ее длине, а по длине ее проекции на горизонтальную ось, т. е. вдоль *пролета* ℓ .

Эту категорию гибких нитей мы и рассмотрим. Примем, что интенсивность нагрузки, равномерно распределенной по пролету нити, равна q . Эта нагрузка, имеющая размерность *сила/длина*, может быть не только собственным весом нити, приходящимся на единицу длины пролета, но и весом льда или любой другой нагрузкой, также равномерно распределенной. Сделанное допущение о законе распределения нагрузки значительно облегчает расчет, но делает его вместе с тем приближенным; если при точном решении (нагрузка распределена вдоль кривой) кривой провисания будет цепная линия, то в приближенном решении кривая провисания оказывается квадратной параболой.

Начало координат выберем в самой низшей точке провисания нити O , положение которой, нам пока неизвестное, очевидно, зависит от величины нагрузки q , от соотношения между длиной нити по кривой и длиной пролета,

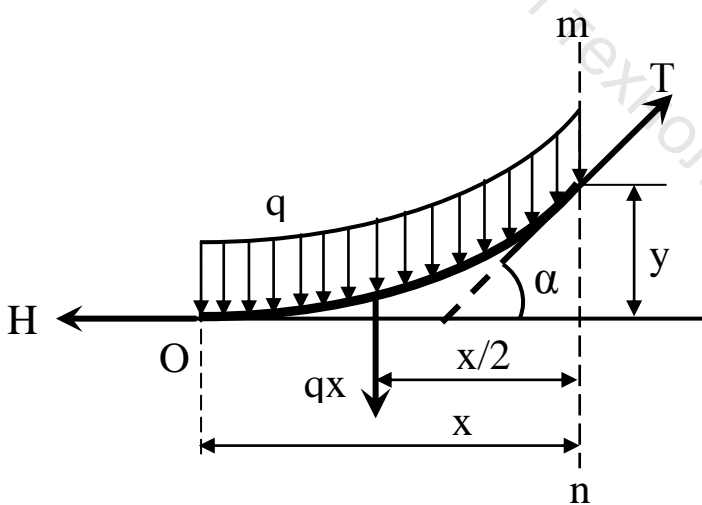


Рис. 13.9. Фрагмент вырезанной части гибкой нити

а также от относительного положения опорных точек. В точке O касательная к кривой провисания нити, очевидно, горизонтальна. По этой касательной направим вправо ось x .

Вырежем двумя сечениями — в начале координат и на расстоянии x от начала координат (сечение m — n) — часть длины нити. Так как нить предположена гибкой, т. е. способной сопротивляться лишь растяжению, то действие отброшенной части на оставшуюся

возможно только в виде силы, направленной по касательной к кривой провисания нити в месте разреза; иное направление этой силы невозможно.

На рис. 13.9 представлена вырезанная часть нити с действующими на нее силами. Равномерно распределенная нагрузка интенсивностью q направлена вертикально вниз. Воздействие левой отброшенной части (горизонтальная сила H) направлено, ввиду того, что нить работает на

растяжение, влево. Действие правой отброшенной части, сила T , направлено вправо по касательной к кривой провисания нити в этой точке.

Составим уравнение равновесия вырезанного участка нити. Возьмем сумму моментов всех сил относительно точки приложения силы T и приравняем ее нулю. При этом учтем, опираясь на приведенное в начале допущение, что равнодействующая распределенной нагрузки интенсивностью q будет qx , и что она приложена посередине отрезка x . Тогда

$$H \cdot y - qx \cdot \frac{x}{2} = 0,$$

откуда

$$y = \frac{qx^2}{2H} \quad (13.29)$$

Отсюда следует, что кривая провисания нити является параболой. Заметим, что вершина параболы может не принадлежать нити. На рис. 13.8 показаны возможные расположения опор. Когда обе точки подвеса нити находятся на одном уровне, то $f_1 = f_2 = f$. Величина f в данном случае будет так называемой стрелой провисания. Ее легко определить. Так как в этом случае, ввиду симметрии, низшая точка нити находится посередине пролета, то $a = b = \ell/2$; подставляя в уравнение (13.29) значения $x = a = b = \ell/2$ и $y = f$ получаем:

$$f = \frac{q\ell^2}{8H} \quad (13.30)$$

Из этой формулы находим величину силы H :

$$H = \frac{q\ell^2}{8f} \quad (13.31)$$

Величина H называется горизонтальным натяжением нити.

Таким образом, если известны нагрузка q и натяжение H , то по формуле (13.30) найдем стрелу провисания f . При заданных q и f натяжение H определяется формулой (13.31).

Для нитей с малой стрелой провисания угол α между касательной к нити и горизонтальной осью x мал. Но тогда величина $|\operatorname{tg}\alpha| = |y'|$ будет мала по сравнению с единицей.

На этом основании выражение для дифференциала дуги (13.17) можно разложить в ряд по степеням y' и ограничиться первыми двумя членами. Имеем

$$ds = \sqrt{1 + y'^2} dx = \left(1 + \frac{1}{2} y'^2\right) dx. \quad (13.32)$$

Внесем в равенство (13.32) значение производной $y' = qx/H$, полученной из выражения (13.29):

$$ds = \left(1 + \frac{1}{2} \left(\frac{q \cdot x}{H}\right)^2\right) dx \quad (13.33)$$

Интегрируя в пределах от $-a$ до b , найдем длину L параболической нити при малой стреле провисания

$$L = (b + a) + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{q}{H} \right)^2 (b^3 + a^3) = \ell + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{q}{H} \right)^2 (b^3 + a^3). \quad (13.34)$$

Если точки закрепления находятся на одном уровне, то $h = 0$, $a = b = \ell/2$ и согласно формулам (13.31) и (13.34) получим

$$L = \ell + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{q}{H} \right)^2 (b^3 + a^3) = \ell + \frac{8}{3} \frac{f^2}{\ell}. \quad (13.35)$$

Составим еще одно условие равновесия вырезанной части нити, а именно, приравняем нулю сумму проекций всех сил на ось x :

$$-H + T \cos \alpha = 0$$

Из этого уравнения найдем силу T — натяжение в произвольной точке

$$T = \frac{H}{\cos \alpha} \quad (13.36)$$

Откуда следует, что сила T увеличивается от низшей точки нити к опорам и будет наибольшей в точках подвеса — там, где касательная к кривой провисания нити составляет наибольший угол с горизонталью. При малом провисании нити этот угол не достигает больших значений, поэтому с достаточной для практики степенью точности можно считать, что усилие в нити постоянно и равно ее натяжению H . На эту величину обычно и ведется расчет прочности нити. Если все же требуется вести расчет на наибольшую силу у точек подвеса, то для симметричной нити ее величину определим следующим путем. Вертикальные составляющие реакций опор равны между собой и равны половине суммарной нагрузки на нить, т. е. $q\ell/2$. Горизонтальные составляющие равны силе H , определяемой по формуле (13.31). Полные реакции опор получатся как геометрические суммы этих составляющих:

$$\begin{aligned} T_{\max} &= \sqrt{\left(\frac{q\ell^2}{8f} \right)^2 + \left(\frac{q\ell}{2} \right)^2} = \frac{q\ell^2}{8f} \sqrt{1 + 16 \frac{f^2}{\ell^2}} = \\ &= H \sqrt{1 + \frac{16f^2}{\ell^2}} \approx H \left(1 + 8 \frac{f^2}{\ell^2} \right). \end{aligned} \quad (13.37)$$

Дадим две оценки для параболических нитей с малыми стрелками, граничные точки которых находятся на одном уровне. Из формул (13.35) и (13.37) найдем

$$\frac{L - \ell}{\ell} = \frac{8}{3} \frac{f^2}{\ell^2}, \quad \frac{T - H}{H} \leq 8 \frac{f^2}{\ell^2}. \quad (13.38)$$

Если $f = 0,1\ell$ (такую стрелку принято считать относительно большой), то длина нити L будет превосходить пролет ℓ на 2,7%, а максимальное натяжение T превышает его горизонтальную составляющую на 8%. Для стрелы $f = 0,02\ell$ эти числа соответственно составляют 0,11% и 0,32%.

Условие прочности для гибкой нити, если через A обозначена площадь сечения, имеет вид:

$$\sigma = \frac{H}{A} \leq [\sigma] \quad (13.39)$$

Заменив натяжение H его значением по формуле (13.31), получим:

$$\frac{q\ell^2}{8fA} \leq [\sigma] \quad (13.40)$$

Из этой формулы при заданных ℓ , q , A и $[\sigma]$ можно определить необходимую стрелу провисания f . Решение при этом упростится, если в q включен лишь собственный вес; тогда $q = \rho \cdot A$, где ρ — вес единицы объема материала нити, и

$$f = \frac{\rho A \ell^2}{8A[\sigma]} = \frac{\rho \ell^2}{8[\sigma]}$$

т. е. величина A не войдет в расчет.

Если точки подвеса нити находятся на разных уровнях, то, подставляя в уравнение (13.29) значения $x = -a$ и $x = b$, находим f_1 и f_2 :

$$f_1 = \frac{qa^2}{2H}; \quad f_2 = \frac{qb^2}{2H}. \quad (13.41)$$

Отсюда из второго выражения (13.41) определяем натяжение

$$H = \frac{qb^2}{2f_2}, \quad (13.42)$$

а деля первое на второе, находим:

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{a^2}{b^2} \quad \text{или} \quad a = \pm b \sqrt{\frac{f_1}{f_2}}.$$

Имея в виду, что $a+b=\ell$, получаем:

$$b \pm b \sqrt{\frac{f_1}{f_2}} = \ell \quad \text{или} \quad b = \frac{\ell}{1 \pm \sqrt{\frac{f_1}{f_2}}}.$$

Подставив это значение b в формулу (13.41) определенного натяжения H , окончательно найдем:

$$H = \frac{q\ell^2}{2(\sqrt{f_2} \pm \sqrt{f_1})^2}. \quad (13.43)$$

Два знака в знаменателе указывают на то, что могут быть две основные формы провисания нити. Первая форма при меньшем значении H (знак плюс перед вторым корнем) дает нам вершину параболы между опорами нити. При большем натяжении H (знак минус перед вторым корнем) вершина параболы расположится левее опоры A (рис. 13.8). Получаем вторую форму кривой. Возможна и третья (промежуточная между двумя основными) форма провисания, соответствующая условию $f_1=0$, тогда начало координат O совмещается с точкой A . Та или иная форма будет получена в зависимости от

соотношений между длиной нити по кривой провисания AOB (рис. 13.8) и длиной хорды AB .

Если при подвеске нити на разных уровнях неизвестны стрелы провисания f_1 и f_2 , но известно натяжение H , то легко получить значения расстояний a и b и стрел провисания f_1 , и f_2 . Разность h уровней подвески равна:

$$h = f_2 - f_1$$

Подставим в это выражение значения f_1 и f_2 , из (13.40) и преобразуем его, имея в виду, что $a+b=l$:

$$h = \frac{qb^2}{2H} - \frac{qa^2}{2H} = \frac{q}{2H} (b^2 - a^2) = \frac{q}{2H} (b+a)(b-a) = \frac{ql}{2H} (b-a).$$

Откуда

$$b-a = \frac{2Hh}{ql},$$

а так как $a+b=l$ то

$$a = \frac{l}{2} - \frac{Hh}{ql} \quad \text{и} \quad b = \frac{l}{2} + \frac{Hh}{ql}. \quad (13.44)$$

Следует иметь в виду, что при $a>0$ будет иметь место первая форма провисания нити, при $a<0$ — вторая форма провисания и при $a=0$ — третья форма.

Подставляя значения a и b из (13.44) в выражения (13.41) для стрел провисания f_1 и f_2 , получаем величины f_1 и f_2 :

$$f_1 = \frac{ql^2}{8H} + \frac{Hh^2}{2ql^2} - \frac{h}{2}$$

$$f_2 = \frac{ql^2}{8H} + \frac{Hh^2}{2ql^2} + \frac{h}{2}$$

13.5. Влияние линейных деформаций нити

Все выводы, полученные до сих пор, сделаны в предположении, что нить нерастяжима. Однако на практике приходится считаться с тем, что под влиянием температуры и упругих свойств материала нить деформируется, изменяя свою длину.

13.5.1. Влияние температуры

Пусть при температуре t длина нити равна L_0 . Тогда при температуре t_1 длина нити будет

$$L = L_0 [1 + \alpha(t_1 - t)],$$

где α — коэффициент линейного расширения.

Отсюда найдем относительное приращение длины нити

$$\eta = \frac{L - L_0}{L_0} = \alpha(t_1 - t). \quad (13.43)$$

Оценим величину η . Считая, что $\alpha = 12 \cdot 10^{-6}$ (для стального троса) и что разность между летней и зимней температурами равна 70°C , получим из (13.43) $\eta = 0,00084$.

Таким образом, при изменении температуры на 70°C длина стального троса изменится на $0,084\%$. Рассмотрим как эта деформация скажется на натяжении троса, предполагая для простоты выкладок, что граничные точки закрепления находятся на одном уровне ($h = 0$). Считая, что деформация нити происходит равномерно по всей длине и, учитывая, что вес нити при этом остается без изменения, будем иметь, $L_0 q_0 = Lq$, где q_0 и q — вес единицы длины нити до и после ее деформации. Пользуясь равенством (13.43), получим

$$L_0 q_0 = L_0 (1 + \eta) q.$$

Отсюда

$$q = \frac{q_0}{1 + \eta}, \text{ или, с точностью до членов высшего порядка относительно малой}$$

величины η ,

$$q = (1 - \eta) q_0. \quad (13.44)$$

Из сделанного предположения о равномерном растяжении нити следует, что деформированная нить принимает форму параболы.

Найдем $(H - H_0)/H_0$ с учетом выражений (13.31), (13.35), (13.43) и (13.44) при $h=0$, разлагая в ряд по степеням η и ограничиваясь членами первого порядка малости:

$$H - H_0 = \frac{q\ell^2}{8f} - \frac{q_0\ell^2}{8f_0} = \frac{q_0\ell^2}{8f_0} \left[\frac{f_0}{f} (1 - \eta) - 1 \right] \approx \frac{q_0\ell^2}{8f_0} \left[\frac{f(1 - \eta)}{\sqrt{\frac{3}{8}\ell(L_0(1 + \eta) - \ell)}} - 1 \right] =$$

$$= H_0 \left[\frac{f_0(1 - \eta)}{\sqrt{f_0^2 + \frac{3}{8}\ell L_0 \eta}} - 1 \right] \approx H_0 (1 - \eta) \left(1 - \frac{3}{16} \frac{\ell L_0}{f_0^2} \eta \right) - 1 \approx$$

$$\approx -H_0 \left(1 + \frac{3}{16} \frac{\ell L_0}{f_0^2} \right) \eta = -H_0 \left(1,5 + \frac{3}{16} \frac{\ell^2}{f_0^2} \right) \eta.$$

Или

$$\frac{H - H_0}{H_0} = - \left(1,5 + \frac{3}{16} \frac{\ell^2}{f_0^2} \right) \eta. \quad (13.45)$$

При малой стреле провисания горизонтальная составляющая натяжения может существенно измениться даже при очень малом значении η . Так, например, если летом стальной трос имел стрелу провисания, равную $0,02\ell$, то зимой при перепаде температуры на 70°C будем иметь: по формуле (13.43) $\eta = -0,00084$, $\ell/f_0 = 50$, и, следовательно, из (13.45) найдем

$\frac{H - H_0}{H_0} = 0,395$, т. е. горизонтальная составляющая натяжения увеличится почти на 40%. Если же стрела провисания f_0 составляет $0,01\ell$, то из выражения (13.45) получим, что горизонтальная составляющая натяжения увеличится на 160%. Зимой это может вызвать обрыв туго натянутых тросов.

13.5.2. Влияние упругих деформаций

Будем считать, что растяжение нити подчиняется закону Гука. Тогда равенство (13.2) на основании (13.5) примет вид

$$\frac{ds}{ds_0} = 1 + \alpha^* T, \quad (13.46)$$

где ds_0 и ds — длины одного и того же элемента нити до и после растяжения, а $\alpha^* = 1/E^*$ — удельное относительное удлинение нити. Для нитей с малой стрелой провисания горизонтальная составляющая натяжения H мало отличается от натяжения T (см. формулу 13.38)). На этом основании в равенстве (13.46) натяжение T заменяют его горизонтальной составляющей H , тогда это равенство принимает вид $ds = (1 + \alpha^* H) ds_0$, или после интегрирования

$$L = (1 + \alpha^* H) L_0, \quad (13.47)$$

где L_0 и L — длины нити до и после растяжения, а H — горизонтальная составляющая после растяжения.

Из условия сохранения веса нити $L_0 q_0 = Lq$ получим с учетом (13.47)

$$q = \frac{q_0}{1 + \alpha^* H}. \quad (13.48)$$

Из сделанного предположения о возможности замены T на H следует, что растянутая по закону Гука нить с малой стрелой провисания с принятой точностью принимает форму параболы.

Дальнейшие вычисления зависят от заданных элементов нити.

Пример 13.1. Предположим, что заданы пролет ℓ , превышение h , вес единицы длины нити до деформации q_0 и стрела провисания f_2 после деформации нити. Найти натяжение растянутой нити.

Решение. Найдем сначала параметр b . Исключив из второго равенства (13.44) параметр H/q с помощью выражения (13.41), получим после очевидных преобразований квадратное уравнение относительно b

$$b^2 - 2f_2 \frac{\ell}{h} b + \frac{f_2 \ell^2}{h} = 0. \quad (13.49)$$

Отсюда $b_{1,2} = \frac{f_2 \ell}{h} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{h}{f_2}} \right)$. Чтобы выбрать знак перед радикалом,

оценим численную величину выражения $bh/f_2 \ell$. Согласно рисунку 13.8 $b < \ell$, $h < f_2$, следовательно, $bh/f_2 \ell < 1$ и перед радикалом нужно брать знак минус. Таким образом

$$b = \frac{f_2 \ell}{h} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{h}{f_2}} \right). \quad (13.50)$$

Запишем (13.48) с учетом (13.41) в следующем виде

$$\frac{b^2}{2f_2} = \frac{H}{q} = \frac{H(1 + \alpha^* H)}{q_0}. \quad (13.51)$$

После преобразований получим квадратное уравнение относительно H

$$\alpha^* H^2 + H - q_0 \frac{b^2}{2f_2} = 0. \quad (13.52)$$

Отсюда находим натяжение растянутой нити

$$H = \frac{-1 + \sqrt{1 + 2q_0 \alpha^* \frac{b^2}{f_2}}}{2\alpha^*}. \text{ Перед радикалом нужно брать знак плюс, так как } H > 0.$$

Пример 13.2. Заданы пролет ℓ , превышение h , вес единицы длины нити q_0 и ее длина L_0 до деформации. Найти натяжение троса с учетом его деформации.

Решение. Пользуясь формулами (13.34), (13.44) получим после очевидных преобразований

$$\begin{aligned} L &= \ell + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{q}{H} \right)^2 (b^3 + a^3) = \ell + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{q}{H} \right)^2 (a+b)(a^2 - ab + b^2) = \\ &= \ell + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{q}{H} \right)^2 \ell (a^2 - ab + b^2) = \\ &= \ell + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{q}{H} \right)^2 \ell (\ell^2 - 3\ell b + 3b^2) = \ell + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{q}{H} \right)^2 \ell \left[\ell^2 - 3\ell \left(\frac{\ell}{2} + \frac{H h}{q \ell} \right) + 3 \left(\frac{\ell}{2} + \frac{H h}{q \ell} \right)^2 \right] = \\ &= \ell + \left(\frac{q}{H} \right)^2 \frac{\ell^3}{24} + \frac{h^2}{2\ell}. \end{aligned}$$

Пользуясь выше полученным выражением для длины нити и формулами (13.51) и (13.47), выведем следующее уравнение

$$24L_0 H^2 (1 + \alpha^* H)^3 - 24 \left(\ell + \frac{h^2}{2\ell} \right) H^2 (1 + \alpha^* H)^2 - \ell^3 q_0^2 = 0. \quad (13.53)$$

Рассмотрим случай, когда модуль упругости нити E^* значительно больше горизонтального натяжения нерастянутой нити H_0 , т. е. $E^* \gg H_0$; отсюда $H_0/E^* = \alpha^* H_0 \ll 1$.

Положим

$$\alpha^* H_0 = \varepsilon \ll 1 \quad (13.54)$$

и будем искать решение уравнения (13.53) в форме ряда, разложенного по степеням ε :

$$H = H_0(1 + \varepsilon H_1 + \dots). \quad (13.55)$$

Подставим выражение (13.55) для H в уравнение (13.53) и сгруппируем члены по степеням ε . Тогда, ограничиваясь членами первого порядка малости, получим

$$24 \left(L_0 - \ell - \frac{h^2}{2\ell} \right) H_0^2 - \ell^3 q_0^2 + 24 H_0^2 \left[3L_0 - 2\ell - \frac{h^2}{\ell} + 2 \left(L_0 - \ell - \frac{h^2}{2\ell} \right) H_1 \right] \varepsilon = 0.$$

Так как это равенство должно выполняться при всех ε , то свободный член и коэффициент при ε должны равняться нулю. Следовательно,

$$H_0^2 = \frac{\ell^3 q_0^2}{24 \left(L_0 - \ell - \frac{h^2}{2\ell} \right)}, \quad H_1 = - \frac{3L_0 - 2\ell - \frac{h^2}{\ell}}{2 \left(L_0 - \ell - \frac{h^2}{2\ell} \right)}. \quad (13.56)$$

Рассмотрим частный случай, когда граничные точки нити находятся на одном уровне ($h = 0$). При этом условии $L_0 = \ell + 8f_0^2/3\ell$ и равенства (13.56) принимают простой вид

$$H_0 = \frac{\ell}{8f_0} q_0, \quad H_1 = - \frac{3}{16} \frac{\ell^2}{f_0^2} \left(1 + 8 \frac{f_0^2}{\ell^2} \right). \quad (13.57)$$

Пользуясь равенствами (13.55), (13.57) и (13.54), найдем

$$\eta_1 = \frac{H - H_0}{H_0} = - \frac{3}{128} \frac{\ell^3}{f_0^3} \left(1 + 8 \frac{f_0^2}{\ell^2} \right) q_0 \ell \alpha^*. \quad (13.58)$$

Для нитей с малой стрелой провисания отношение f_0^2/ℓ^2 очень мало. Поэтому, если пренебречь этим членом по сравнению с единицей, то окончательно получим

$$\eta_1 = \frac{H - H_0}{H_0} = - \frac{3}{128} \frac{\ell^3}{f_0^3} q_0 \ell \alpha^*. \quad (13.59)$$

Пример. Пусть пролет стального троса $\ell = 100$ м, площадь поперечного сечения $A = 1 \text{ см}^2$, стрела провисания нерастянутого троса $f_0 = 0,02\ell$. Для стали примем модуль упругости $E = 2 \cdot 10^7$ Н/см², а удельная масса $\gamma = 7,6$ г/см³. Согласно равенству (13.6) найдем модуль упругости для троса $E^* = EA = 2 \cdot 10^7$ Н; отсюда $\alpha^* = 1/E^* = 0,5 \cdot 10^{-7} \text{ Н}^{-1}$. Вычислим теперь q_0 . Имеем: $q_0 = A\gamma = 7,6 \text{ Н/м}$. Пользуясь формулами (13.57), (13.59) и (13.47) получим

$$H_0 = 4,75 \text{ кН}, \quad \frac{H - H_0}{H_0} = -0,112, \quad \frac{L - L_0}{L_0} = 0,00024.$$

Таким образом, при упругой деформации стального троса с малой стрелой провисания его длина изменяется очень мало, но это вызывает существенное изменение горизонтальной составляющей H натяжения T (в нашем примере на 11,2%).

Контрольные вопросы

13.1. Зачем нити скручивают в направлении, обратном первоначальной крутке?

13.2. Какая нить называется идеальной или абсолютно гибкой нитью?

13.3. Какая нить называется однородной?

13.4. Запишите векторное дифференциальное уравнение равновесия идеальной нити. Справедливо ли оно для растяжимой нити?

13.5. Как изменяется в разных точках в условиях равновесия под действием параллельных сил проекция натяжения нити на направление перпендикулярное силам?

13.6. Что называется цепной линией?

13.7. Как определяется стрела провисания нити и когда она считается малой?

13.8. Как влияет температура на натяжение нити?

Литература

1. Александров А.В., Потапов В.Д., Державин Б.П. Сопротивление материалов. — М.: Высшая школа, 2000. — 560 с.
2. Беляев Н. М. Сопротивление материалов. — М.: Физматгиз, 1976. — 856 с.
3. Горшков А. Г., Трошин В. Н., Шалашилин В. И. Сопротивление материалов: Учеб. пос. 2-е изд., испр. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. - 544 с.
4. ГОСТ 25.504-82. Расчеты и испытания на прочность. Методы расчета характеристик сопротивления усталости. – Введен 1983 – 01 - 07. – Москва: Издательство стандартов, 1982. -81 с.
5. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. — М.: Высшая школа, 1989. — 622 с.
6. Долинский Ф.В., Михайлов М.Н. Краткий курс сопротивления материалов: Учеб. пособ. для машиностроит. вузов. — М.: Вышш. школа, 1988. —432 с.
7. Заславский Б. В. Краткий курс сопротивления материалов: Учебн. для авиац. специальн. вузов. — М.: Машиностроение, 1986. — 328 с.
8. Ицкович Г.М., Минин Л.С, Винокуров А.И. Руководство к решению задач по сопротивлению материалов. — М.: Высшая школа, 1999. — 592 с.
9. Миролюбов И.Н. и др. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов. — М.: Высшая школа, 1985. — 399 с.
10. Рудицын М.Н., Артемов П.Я., Любошиц М.Н. Справочное пособие по сопротивлению материалов. — Минск: Вышш. школа, 1970. — 628 с.
11. Старовойтов Э. И. Сопротивление материалов. — Гомель: БелГУТ, 1999.- 219 с.
12. Степин П. А. Сопротивление материалов. - М.: Вышш. школа, 1987. - 367 с.
13. Феодосьев В. И. Сопротивление материалов. - М.: Изд. МГТУ, 1999.- 591 с.
14. Светлицкий В. А. Механика гибких стержней и нитей.— М.: Машиностроение, 1978. – 222 с.
15. Щедров В. С. Основы механики гибкой нити.— М.: Машгиз, 1961.
16. Основы механики нити/Якубовский Ю. В., Живов В. С, Коритыцкий Я. И., Мигушов И. И.— М.: Легкая индустрия, 1973. – 271 с.
17. Меркин Д. Р. Введение в механику гибкой нити.—М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980.— 240 с.

Витебский государственный технологический университет

ПРИЛОЖЕНИЯ

П.1. Справочные материалы

Таблица П.1
Единицы измерения некоторых геометрических и механических величин (система СИ)

Обозначение	Наименование	Обозначение единицы
l, a	Длина	м
F	Площадь	м ²
$J_z, J_y, J_x, J_p,$ J_{zy}, J_1, J_2	Моменты инерции плоской области	м ⁴
S_z, S_y	Статические моменты плоской области	м ³
W_z, W_y, W_x	Моменты сопротивления деформации	м ³
i_z, i_y	Радиусы инерции плоской области	м
P	Сила	Н
M	Момент силы	Н · м
q	Погонная сила	Н/м
m	Погонный момент	Н
ρ	Плотность	кг/м ³
A	Работа	Дж = Н · м
U	Потенциальная энергия	Дж = Н · м
p	Давление	Па = Н/м ² , МПа
σ, τ	Напряжения	Па = Н/м ² , МПа
E, G	Модули упругости	Па = Н/м ² , МПа
ν	Коэффициент Пуассона	б/р
α	Коэффициент температурного расширения	1/°С

Сортамент прокатной стали

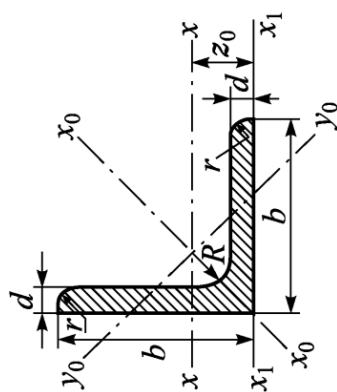


Таблица П.2

Сталь прокатная угловая равнополочная. ГОСТ 8509-72

Номер профиля	мм			Площадь сечения, см ²	Справочные величины для осей								Масса 1 м длины профиля, кг	
	b	d	r		x-x		x ₀ -x ₀		y ₀ -y ₀		x ₁ -x ₁			z ₀ , см
					J _x , см ⁴	i _x , см	J _{x₀ max} , см ⁴	i _{x₀ max} , см	J _{y₀ min} , см ⁴	i _{y₀ min} , см	J _{x₁} , см ⁴	x ₁ , см		
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	20	3	4	5	1,13	0,40	0,59	0,63	0,75	0,17	0,39	0,81	0,60	0,89
		4	3,5	1,2	1,46	0,50	0,58	0,78	0,73	0,22	0,38	1,09	0,64	1,15
2,5	25	3	4	1,2	1,43	0,81	0,75	1,29	0,95	0,34	0,49	1,57	0,73	1,12
		4	3,5	1,2	1,86	1,03	0,74	1,62	0,93	0,44	0,48	2,11	0,76	1,46
2,8	28	3	4	1,3	1,62	1,16	0,85	1,84	1,07	0,48	0,55	2,20	0,80	1,27
		4	4,0	1,3	1,86	1,77	0,97	2,80	1,23	0,74	0,63	3,26	0,89	1,46
3,2	32	3	4	1,5	2,43	2,26	0,96	3,58	1,21	0,94	0,62	4,39	0,94	1,91
		4	4,5	1,5										

Продолжение табл. П. 2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
3,6	36	3	4,5	1,5	2,10 2,75	2,56 3,29	1,10 1,09	4,06 5,21	1,39 1,38	1,06 1,36	0,71 0,70	4,64 6,24	0,99 1,04	1,65 2,16
4	40	3 4 5		1,7	2,35 3,08 3,79	3,55 4,58 5,53	1,23 1,22 1,20	5,63 7,26 8,75	1,55 1,53 1,54	1,47 1,90 2,30	0,79 0,78 0,78	6,35 8,53 10,73	1,09 1,13 1,17	1,85 2,42 2,97
4,5	45	3 4 5	5,0	1,7	2,65 3,48 4,20	5,13 6,63 8,03	1,39 1,38 1,37	8,13 10,50 12,70	1,75 1,74 1,72	2,12 2,74 3,33	0,89 0,89 0,88	9,04 12,10 15,30	1,21 1,26 1,30	2,08 2,73 3,37
5	50	3 4 5	5,5	1,8	2,96 3,89 4,80	7,11 9,21 11,20	1,55 1,54 1,53	11,30 14,60 17,80	1,95 1,94 1,92	2,95 3,80 4,63	1,00 0,99 0,98	12,40 16,60 20,90	1,33 1,38 1,42	2,32 3,05 3,77
5,6	56	4 5	6,0	2,0	4,38 5,41	13,10 16,00	1,73 1,72	20,80 25,40	2,18 2,16	5,41 6,59	1,11 1,10	23,30 29,20	1,52 1,57	3,44 4,25
6,3	63	4 5 6	7,0	2,3	4,96 6,13 7,28	18,90 23,10 27,10	1,95 1,94 1,93	29,90 36,60 42,90	2,45 2,44 2,43	7,81 9,52 11,20	1,25 1,25 1,24	33,10 41,50 50,00	1,69 1,74 1,78	3,90 4,81 5,72
7	70	4,5 5 6 7 8	8	2,7	6,20 6,86 8,15 9,42 10,70	29,0 31,9 37,6 43,0 48,2	2,16 2,16 2,15 2,14 2,13	46,0 50,7 59,6 68,2 76,4	2,72 2,72 2,71 2,69 2,68	12,0 13,2 15,5 17,8 20,0	1,39 1,39 1,38 1,37 1,37	51,0 56,7 68,4 80,1 91,9	1,88 1,90 1,94 1,99 2,02	4,87 5,38 6,39 7,39 8,37

Продолжение табл. П.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7,5		5			7,39	39,5	2,31	62,6	2,91	16,4	1,49	69,6	2,02	5,80
		6			8,78	46,6	2,30	73,9	2,90	19,3	1,48	83,9	2,06	6,89
	75	7	9	3,0	10,10	53,3	2,29	84,6	2,89	22,1	1,48	98,3	2,10	7,96
		8			11,50	59,8	2,28	94,6	2,87	24,8	1,47	113,0	2,15	9,02
		9			12,80	66,1	2,27	105,0	2,86	27,5	1,46	127,0	2,18	10,10
8		5,5			8,63	52,7	2,47	83,6	3,11	21,8	1,59	93,2	2,17	6,78
		6	9	3,0	9,38	57,0	2,47	90,4	3,11	23,5	1,58	102,0	2,19	7,36
	80	7			10,80	65,3	2,45	104,0	3,09	27,0	1,58	119,0	2,23	8,51
		8			12,30	73,4	2,44	116,0	3,08	30,3	1,57	137,0	2,27	9,65
9		6			10,60	82,1	2,78	130,0	3,50	34,0	1,79	145,0	2,43	8,33
		7	10	3,3	12,30	94,3	2,77	150,0	3,49	38,9	1,78	169,0	2,47	9,64
	90	8			13,90	106,0	2,76	168,0	3,48	43,8	1,77	194,0	2,51	10,90
		9			15,60	118,0	2,75	186,0	3,46	48,6	1,77	219,0	2,55	12,20
		6,5			12,80	122,0	3,09	193,0	3,88	50,7	1,99	214,0	2,68	10,10
10		7			13,80	131,0	3,08	207,0	3,88	54,2	1,98	231,0	2,71	10,80
		8			15,60	147,0	3,07	233,0	3,87	60,9	1,98	265,0	2,75	12,20
		10	12	4,0	19,20	179,0	3,05	284,0	3,84	74,1	1,96	333,0	2,83	15,10
	100	12			22,80	209,0	3,03	331,0	3,81	86,9	1,95	402,0	2,91	17,90
		14			26,30	237,0	3,00	375,0	3,78	99,3	1,94	472,0	2,99	20,60
		16			29,70	264,0	2,98	416,0	3,74	112,0	1,94	542,0	3,06	23,30
11		7	12	4,0	15,20	176,0	3,40	279,0	4,29	72,7	2,19	308,0	2,96	11,90
	110	8			17,20	198,0	3,39	315,0	4,28	81,8	2,18	353,0	3,00	13,50

Продолжение табл. П.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
		8			19,7	294,0	3,87	467,0	4,87	122,0	2,49	516,0	3,36	15,5
		9			22,0	327,0	3,86	520,0	4,86	135,0	2,48	582,0	3,40	17,3
12,5	125	10	14	4,6	24,3	360,0	3,85	571,0	4,84	149,0	2,47	649,0	3,45	19,1
		12			28,9	422,0	3,82	670,0	4,82	174,0	2,46	782,0	3,53	22,7
		14			33,4	482,0	3,80	764,0	4,78	200,0	2,45	916,0	3,61	26,2
		16			37,8	539,0	3,78	853,0	4,75	224,0	2,44	1051,0	3,68	29,6
14	140	9	14	4,6	24,7	466,0	4,34	739,0	5,47	192,0	2,79	818,0	3,78	19,4
		10			27,3	512,0	4,33	814,0	5,46	211,0	2,78	911,0	3,82	21,5
		12			32,5	602,0	4,31	957,0	5,43	248,0	2,76	1097,0	3,90	25,5
		10			31,4	774	4,96	1229	6,25	319	3,19	1356	4,30	24,7
		11			34,4	844	4,95	1341	6,24	348	3,18	1494	4,35	27,0
		12			37,4	913	4,94	1450	6,23	376	3,17	1633	4,39	29,4
16	160	14	16	5,3	43,3	1046	4,92	1662	6,20	431	3,16	1911	4,47	34,0
		16			49,1	1175	4,89	1866	6,17	485	3,14	2191	4,55	38,5
		18			54,8	1299	4,87	2061	6,13	537	3,13	2472	4,63	43,0
		20			60,4	1419	4,85	2248	6,10	589	3,12	2756	4,70	47,4
18	180	11	16	5,3	38,8	1216	5,60	1933	7,06	500	3,59	2128	4,85	30,5
		12			42,2	1317	5,59	2093	7,04	540	3,58	2324	4,89	33,1

Продолжение табл. П.2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
		12			47,1	1823	6,22	2896	7,84	749	3,99	3182	5,37	37,0
		13			50,9	1961	6,21	3116	7,83	805	3,98	3452	5,42	39,9
		14			54,6	2097	6,20	3333	7,81	861	3,97	3722	5,46	42,8
20	200	16	18	6,0	62,0	2363	6,17	3755	7,78	970	3,96	4264	5,54	48,7
		20			76,5	2871	6,12	4560	7,72	1182	3,93	5355	5,70	60,1
		25			94,3	3466	6,06	5494	7,63	1438	3,91	6733	5,89	74,0
		30			111,5	4020	6,00	6351	7,55	1688	3,89	8130	6,07	87,6
22	220	14	21	7,0	60,4	2814	6,83	4470	8,60	1159	4,38	4941	5,93	47,4
		16			68,6	3175	6,81	5045	8,58	1306	4,36	5661	6,02	53,8
		16			78,4	4717	7,76	7492	9,78	1942	4,98	8286	6,75	61,5
		18			87,7	5247	7,73	8337	9,75	2158	4,96	9342	6,83	68,9
		20			97,0	5765	7,71	9160	9,72	2370	4,94	10401	6,91	76,1
25	250	22	24	8	106,1	6270	7,69	9961	9,69	2579	4,93	11464	7,00	83,3
		25			119,7	7006	7,65	11125	9,64	2887	4,91	13064	7,11	94,0
		28			133,1	7717	7,61	12244	9,59	3190	4,89	14674	7,23	104,5
		30			142,0	8177	7,59	12965	9,56	3389	4,89	15753	7,31	111,4

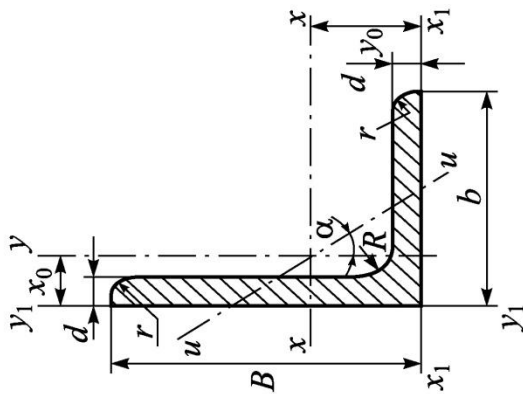


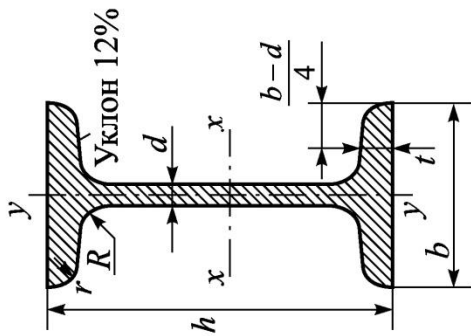
Таблица П.3

Сталь прокатная угловая не равнополочная. ГОСТ 8510-72

Номер профиля	B	b	d	R	r	Площадь сечения, см ²	Справочные величины для осей												Угол наклона оси tg α	Масса 1 м длины профиля, кг
							x-x		y-y		x ₁ -x ₁		y ₁ -y ₁		u-u					
							J _x , см ⁴	i _x , см	J _y , см ⁴	i _y , см	J _{x₁} , см ⁴	y ₀ , см	J _{y₁} , см ⁴	x ₀ , см	J _u , см ⁴	i _u , см				
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19		
2,5/1,6	25	16	3	3,5	1,2	1,16	0,70	0,78	0,22	0,44	1,56	0,86	0,43	0,42	0,13	0,34	0,392	0,91		
3,2/2	32	20	3	3,5	1,2	1,49	1,52	1,01	0,46	0,55	3,26	1,08	0,82	0,49	0,28	0,43	0,382	1,17		
		4	4	4	1,94	1,00	0,57	0,54	4,38	1,12	1,12	0,53	1,12	0,35	0,43	0,374	1,52			
4/2,5	40	25	3	4,0	1,3	1,89	3,06	1,27	0,93	0,70	6,37	1,32	1,58	0,59	0,56	0,54	0,385	1,48		
		4	4	4	2,47	1,26	1,18	0,69	8,53	1,37	2,15	0,63	0,71	0,54	0,381	1,94				

Витебский государственный технологический университет

Сталь горячекатаная. Балки двутавровые. ГОСТ 8239-72



Номер балки	мм							Масса 1 м длины профиля, кг	Справочные величины для осей					
	h	b	d	t	R	r	x-x			y-y				
							J_{x_1} , см^4		W_{x_1} , см^3	i_{x_1} , см	$S_{x_1}^*$, см^3	J_{y_1} , см^4	W_{y_1} , см^3	i_{y_1} , см
1	2	3	4	5	6	7	9	10	11	12	13	14	15	16
10	100	55	4,5	7,2	7,0	2,5	9,46	198	39,7	4,06	23,0	17,9	6,49	1,22
12	120	64	4,8	7,3	7,5	3,0	11,50	350	58,4	4,88	33,7	27,9	8,72	1,38
14	140	73	4,9	7,5	8,0	3,0	13,70	572	81,7	5,73	46,8	41,9	11,50	1,55
16	160	81	5,0	7,8	8,5	3,5	15,90	873	109,0	6,57	62,3	58,6	14,50	1,70
18	180	90	5,1	8,1	9,0	3,5	18,40	1290	143,0	7,42	81,4	82,6	18,40	1,88
18a	180	100	5,1	8,3	9,0	3,5	19,90	1430	159,0	7,51	89,8	114,0	22,80	2,12
20	200	100	5,2	8,4	9,5	4,0	21,00	1840	184,0	8,28	104,0	115,0	23,10	2,07

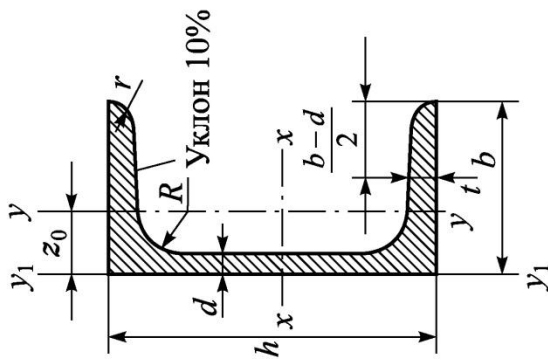
Продолжение табл. П.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
20a	200	110	5,2	8,6	9,5	4,0	28,9	22,70	2030	203,0	8,37	114,0	155,0	28,20	2,32
22	220	110	5,4	8,7	10,0	4,0	30,6	24,00	2550	232,0	9,13	131,0	157,0	28,60	2,27
22a	220	120	5,4	8,9	10,0	4,0	32,8	25,80	2790	254,0	9,22	143,0	206,0	34,30	2,50
24	240	115	5,6	9,5	10,5	4,0	34,8	27,30	3460	289,0	9,97	163,0	198,0	34,50	2,37
24a	240	125	5,6	9,8	10,5	4,0	37,5	29,40	3800	317,0	10,10	178,0	260,0	41,60	2,63
27	270	125	6,0	9,8	11,0	4,5	40,2	31,50	5010	371,0	11,20	210,0	260,0	41,50	2,54
27a	270	135	6,0	10,2	11,0	4,5	43,2	33,90	5500	407,0	11,30	229,0	337,0	50,00	2,80
30	300	135	6,5	10,2	12,0	5,0	46,5	36,50	7080	472,0	12,30	268,0	337,0	49,90	2,69
30a	300	145	6,5	10,7	12,0	5,0	49,9	39,20	7780	518,0	12,50	292,0	436,0	60,10	2,95
33	330	140	7,0	11,2	13,0	5,0	53,8	42,20	9840	597,0	13,50	339,0	419,0	59,90	2,79
36	360	145	7,5	12,3	14,0	6,0	61,9	48,60	13380	743,0	14,70	423,0	516,0	71,10	2,89
40	400	155	8,3	13,0	15,0	6,0	72,6	57,00	19062	953,0	16,20	545,0	667,0	86,10	3,03
45	450	160	9,0	14,2	16,0	7,0	84,7	66,50	27696	1231,0	18,10	708,0	808,0	101,00	3,09
50	500	170	10,0	15,2	17,0	7,0	100,0	78,50	39727	1589,0	19,90	919,0	1043,0	123,0	3,23
55	550	180	11,0	16,5	18,0	7,0	118,0	92,60	55962	2035,0	21,80	1181,0	1356,0	151,0	3,39
60	600	190	12,0	17,8	20,0	8,0	138,0	108,00	76806	2560,0	23,60	1491,0	1725,0	182,00	3,54

Витебский государственный технический университет

Таблица П.5

Сталь горячекатаная. Швеллеры с уклоном внутренних граней полок. ГОСТ 8240-72



Номер швеллера	мм							r	Площадь сечения, см ²	Масса 1 м, кг	Справочные величины для осей					
	h	b	d	t	R	r	x-x				y-y					
							$J_x, \text{см}^4$				$W_x, \text{см}^3$	$i_x, \text{см}$	$S_x^*, \text{см}^3$	$J_y, \text{см}^4$	$W_y, \text{см}^3$	$i_y, \text{см}$
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
5	50	32	4,4	7,0	6,0	2,5	6,16	4,84	22,8	9,1	1,92	5,59	5,61	2,75	0,954	1,16
6,5	65	36	4,4	7,2	6,0	2,5	7,51	5,90	48,6	15,0	2,54	9,00	8,70	3,68	1,080	1,24
8	80	40	4,5	7,4	6,5	2,5	8,98	7,05	89,4	22,4	3,16	13,30	12,80	4,75	1,190	1,31
10	100	46	4,5	7,6	7,0	3,0	10,90	8,59	174,0	34,8	3,99	20,40	20,40	6,46	1,370	1,44
12	120	52	4,8	7,8	7,5	3,0	13,30	10,40	304,0	50,6	4,78	29,60	31,20	8,52	1,530	1,54
14	140	58	4,9	8,1	8,0	3,0	15,60	12,30	491,1	70,2	5,60	40,80	45,40	11,00	1,700	1,67

Продолжение табл. П. 5

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
14a	140	62	4,9	8,7	8,0	3,0	17,00	13,30	545,0	77,8	5,66	45,10	57,50	13,30	1,840	1,87
16	160	64	5,0	8,4	8,5	3,5	18,10	14,20	747,0	93,4	6,42	54,10	63,30	13,80	1,870	1,80
16a	160	68	5,0	9,0	8,5	3,5	19,50	15,30	823,0	103,0	6,49	59,40	78,80	16,40	2,010	2,00
18	180	70	5,1	8,7	9,0	3,5	20,70	16,30	1090,0	121,0	7,24	69,80	86,00	17,00	2,040	1,94
18a	180	74	5,1	9,3	9,0	3,5	22,20	17,40	1190,0	132,0	7,32	76,10	105,00	20,00	2,180	2,13
20	200	76	5,2	9,0	9,5	4,0	23,40	18,40	1520,0	152,0	8,07	87,80	113,00	20,50	2,200	2,07
20a	200	80	5,2	9,7	9,5	4,0	25,20	19,80	1670,0	167,0	8,15	95,90	139,00	24,20	2,350	2,28
22	220	82	5,4	9,5	10,0	4,0	26,70	21,00	2110,0	192,0	8,89	110,00	151,00	25,10	2,370	2,21
22a	220	87	5,4	10,2	10,0	4,0	28,80	22,60	2330,0	212,0	8,99	121,00	187,00	30,00	2,550	2,46
24	240	90	5,6	10,0	10,5	4,0	30,60	24,00	2900,0	242,0	9,73	139,00	208,00	31,60	2,600	2,42
24a	240	95	5,6	10,7	10,5	4,0	32,90	25,80	3180,0	265,0	9,84	151,00	254,00	37,20	2,780	2,67
27	270	95	6,0	10,5	11,0	4,5	35,20	27,70	4160,0	308,0	10,90	178,00	262,00	37,30	2,730	2,47
30	300	100	6,5	11,0	12,0	5,0	40,50	31,80	5810,0	387,0	12,00	224,00	327,00	43,60	2,840	2,52
33	330	105	7,0	11,7	13,0	5,0	46,50	36,50	7980,0	484,0	13,10	281,00	410,00	51,80	2,970	2,59
36	360	110	7,5	12,6	14,0	6,0	53,40	41,90	10820,0	601,0	14,20	350,00	513,00	61,70	3,100	2,68
40	400	115	8,0	13,5	15,0	6,0	61,50	48,30	15220,0	761,0	15,70	444,0	642,00	73,40	3,230	2,75

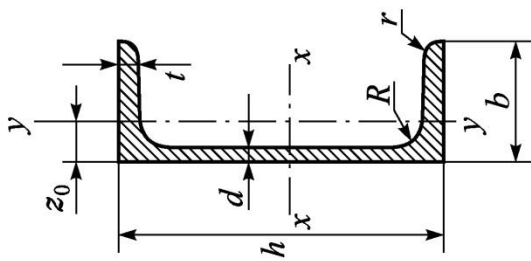


Таблица П.6

Сталь горячекатаная. Швеллеры с параллельными гранями полок. ГОСТ 8240-72

Номер швеллера	мм							r	Площадь сечения, см ²	Масса 1 м, кг	Справочные величины для осей						
	h	b	d	t	R	R	x-x				y-y						
	J_x , см ⁴	W_x , см ³	i_x , см	S_x^* , см ³	J_y , см ⁴	W_y , см ³	i_y , см				J_{x-y} , см ⁴	W_{y-y} , см ³	i_{y-y} , см	z_0 , см			
1	2	3	4	5	6	7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
5	50	32	4,4	7,0	6,0	3,5	3,5	6,16	4,84	22,8	9,14	1,92	5,61	5,95	2,99	0,983	1,21
6,5	65	36	4,4	7,2	6,0	3,5	3,5	7,51	5,90	48,8	15,00	2,55	9,02	9,35	4,06	1,120	1,29
8	80	40	4,5	7,4	6,5	3,5	3,5	8,98	7,05	89,8	22,50	3,16	13,30	13,90	5,31	1,240	1,38
10	100	46	4,5	7,6	7,0	4,0	4,0	10,90	8,59	175,0	34,90	3,99	20,50	22,60	7,37	1,440	1,53
12	120	52	4,8	7,8	7,5	4,5	4,5	13,30	10,40	305,0	50,80	4,79	29,70	34,90	9,84	1,620	1,66
14	140	58	4,9	8,1	8,0	4,5	4,5	15,60	12,30	493,0	70,40	5,61	40,90	51,50	12,90	1,810	1,82

Продолжение табл. П.6

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
14a	140	62	4,9	8,7	8,0	4,5	17,00	13,30	547,0	78,20	5,68	45,20	65,20	15,70	1,960	2,04
16	160	64	5,0	8,4	8,5	5,0	18,10	14,20	750,0	93,80	6,44	54,30	72,80	16,40	2,000	1,97
16a	160	68	5,0	9,0	8,5	5,0	19,50	15,30	827,0	103,00	6,51	59,50	90,50	19,60	2,150	2,19
18	180	70	5,1	8,7	9,0	5,0	20,70	16,30	1090,0	121,00	7,26	70,00	100,00	20,60	2,200	2,14
18a	180	74	5,1	9,3	9,0	5,0	22,20	17,40	1200,0	133,00	7,34	76,30	123,00	24,30	2,350	2,36
20	200	76	5,2	9,0	9,5	5,5	23,40	18,40	1530,0	153,00	8,08	88,00	134,00	25,20	2,390	2,30
20a	200	80	5,2	9,7	9,5	5,5	25,20	19,80	1680,0	168,00	8,17	96,20	162,00	29,70	2,540	2,53
22	220	82	5,4	9,5	10,0	6,0	26,70	21,00	2120,0	193,00	8,90	111,00	178,00	31,00	2,580	2,47
22a	220	87	5,4	10,2	10,0	6,0	28,80	22,60	2340,0	212,00	9,01	121,00	220,00	37,00	2,770	2,75
24	240	90	5,6	10,0	10,5	6,0	30,60	24,00	2910,0	243,00	9,75	139,00	248,00	39,50	2,850	2,72
24a	240	95	5,6	10,7	10,5	6,0	32,90	25,80	3200,0	266,00	9,86	152,00	302,00	46,50	3,030	3,01
27	270	95	6,0	10,5	11,0	6,5	35,20	27,70	4180,0	310,00	10,90	178,00	314,00	46,70	2,990	2,78
30	300	100	6,5	11,0	12,0	7,0	40,50	31,80	5830,0	389,00	12,00	224,00	393,00	54,80	3,120	2,83
33	330	105	7,0	11,7	13,0	7,5	46,50	36,50	8010,0	486,00	13,10	281,00	491,00	64,60	3,250	2,90
36	360	110	7,5	12,6	14,0	8,5	53,40	41,90	10850,0	603,00	14,30	350,00	611,00	76,30	3,380	2,99
40	400	115	8,0	13,5	15,0	9,0	61,50	48,30	15260,0	763,00	15,80	445,0	760,00	89,90	3,510	3,05

П.7 Коэффициенты q

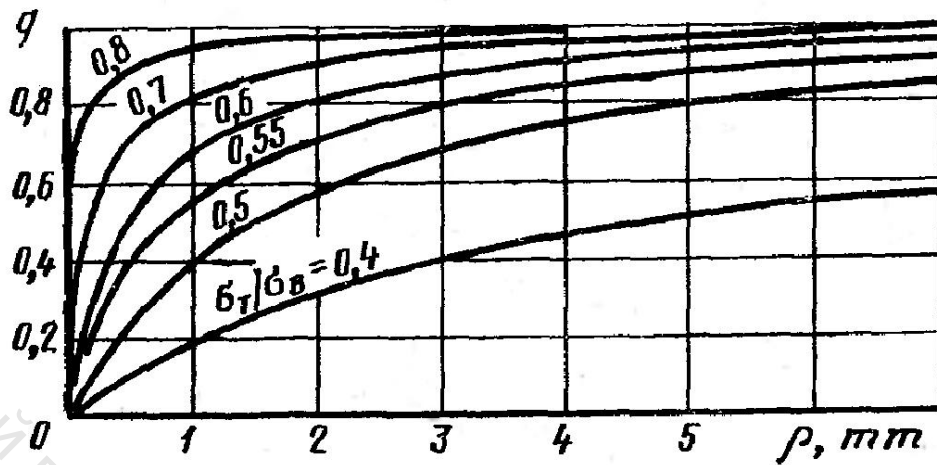


Рисунок П.7

П.8 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЗНАЧЕНИЙ ФУНКЦИИ $F(\theta, \nu)$, ПАРАМЕТРА L , КОЭФФИЦИЕНТА ВЛИЯНИЯ ШЕРОХОВАТОСТИ ПОВЕРХНОСТИ K_F И КОЭФФИЦИЕНТА $K_{кор}$

Значения функции $F(\theta, \nu)$

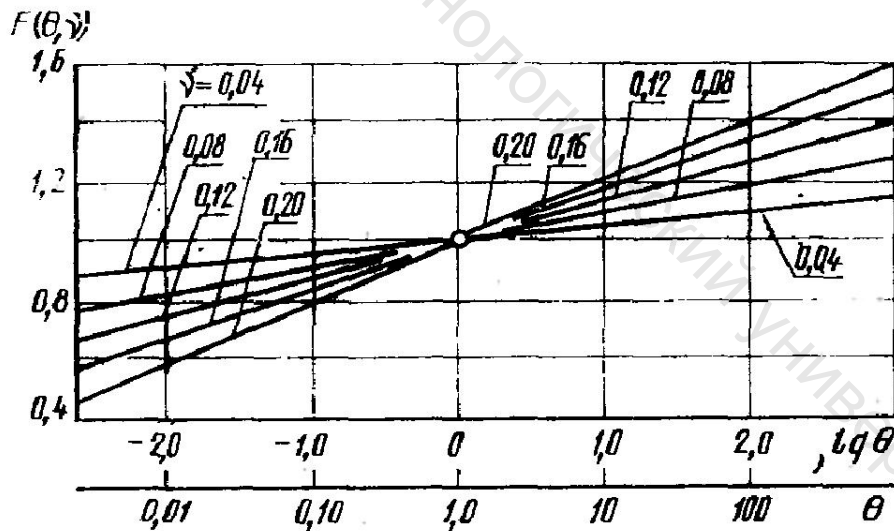
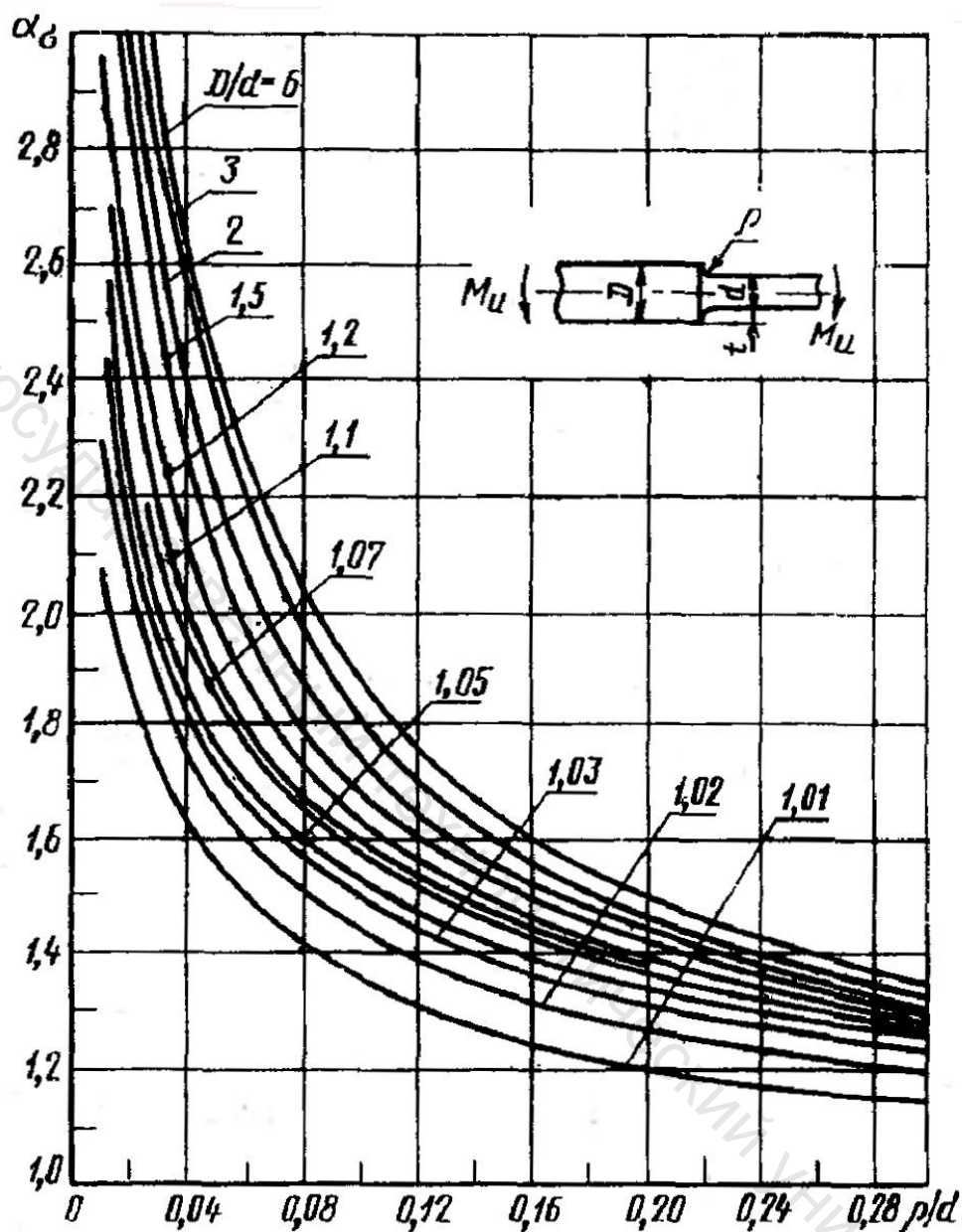


Рисунок П.8

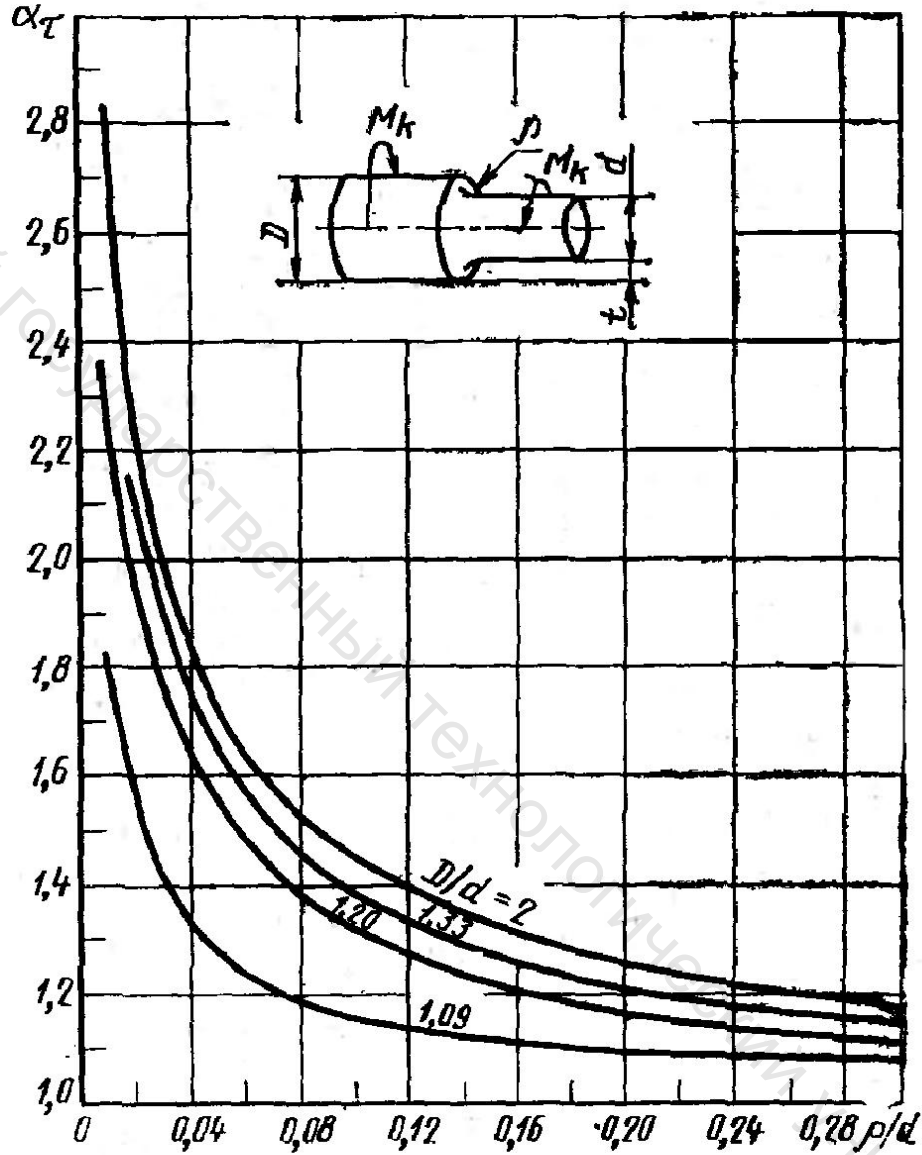
П.9 Ступенчатый вал с галтелью при изгибе



$$\alpha_\sigma = 1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{0,62}{t/\rho} + 5,80 \frac{(1+a/\rho)^2}{(a/\rho)^3} + \frac{0,2}{(t/\rho)^3} \cdot \frac{a/\rho}{(a/\rho+t/\rho)}}}$$

Рисунок П.9

II.10 Ступенчатый вал с галтелью при кручении
(измерения по методу электрических аналогий)



$$\alpha_\tau = 1 + \frac{1}{\sqrt{\frac{3.4}{t/\rho} + 19.0 \frac{(1+a/\rho)^2}{(a/\rho)^3} + \frac{1.0}{(t/\rho)^2} \frac{a/\rho}{(a/\rho+t/\rho)}}}$$

Рисунок II.10

Таблица П.11 Значения функции $F(\theta, \nu)$

θ	$\lg \theta$	$F(\theta, \nu) = \frac{2}{1+\theta^{-\nu}}$ при ν					
		0,01	0,08	0,10	0,12	0,16	0,20
0,0032	-2,5	0,885	0,774	0,720	0,668	0,569	0,480
0,0100	-2,0	0,908	0,813	0,774	0,730	0,647	0,569
0,0316	-1,5	0,931	0,863	0,829	0,796	0,730	0,668
0,1000	-1,0	0,954	0,908	0,836	0,836	0,818	0,774
0,3162	-0,5	0,977	0,954	0,942	0,931	0,908	0,885
1,0000	0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
3,1620	0,5	1,023	1,046	1,058	1,070	1,092	1,115
10,0000	1,0	1,046	1,092	1,115	1,137	1,182	1,226
31,6200	1,5	1,069	1,137	1,171	1,204	1,269	1,332
100,0000	2,0	1,092	1,182	1,226	1,269	1,353	1,430
316,2000	2,5	1,115	1,226	1,280	1,332	1,430	1,519
1000,0000	3,0	1,137	1,269	1,332	1,392	1,502	1,596
3162,0000	3,5	1,160	1,312	1,382	1,449	1,508	1,667
10000,0000	4,0	1,182	1,352	1,431	1,502	1,627	1,726

В формуле для определения $F(\theta, \nu)$ параметр ν принимает значения ν_σ при изгибе и растяжении — сжатии и ν_τ при кручении.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	3
ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ	5
1.1. Метод сечений	7
1.2. Понятие о напряжениях	8
1.3. Выражение внутренних силовых факторов через внешние силы	8
1.4. Выражение внутренних силовых факторов через напряжения	9
1.5. Перемещения и деформации	10
1.6. Виды опорных закреплений	11
1.7. Закон Гука и принцип независимости действия сил	12
Контрольные вопросы.....	13
ГЛАВА 2. РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ.....	15
2.1. Определение продольной силы – построение эпюры N_z	20
2.2. Расчет статически неопределимых стержневых систем	21
2.3. Свойство статически неопределимых систем.	26
Контрольные вопросы.	27
ГЛАВА 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ	29
3.1. Статические моменты сечения. Центр тяжести.	29
3.2. Моменты инерции сечения.	31
3.3. Определение моментов инерции сечения относительно осей, параллельных центральным осям	32
3.4. Моменты инерции простых сечений	33
3.5. Моменты инерции сложных фигур	35
3.6. Определение моментов инерции сечения при повороте осей координат	37
3.7. Главные оси инерции и главные моменты инерции	38
Контрольные вопросы	45
ГЛАВА 4. ПЛОСКОЕ НАПРЯЖЕННОЕ СОСТОЯНИЕ. ГИПОТЕЗЫ ПРОЧНОСТИ	47
4.1. Закон парности касательных напряжений	48
4.2. Нормальные и касательные напряжения, действующие по наклонным площадкам плоского напряженного состояния.....	49
4.3. Главные площадки и главные напряжения	50
4.4. Графическое представление формул плоского напряженного состояния - круг Мора	51
4.5. Вывод формулы для главных напряжений	52
4.6. Понятие о круге Мора для объемного напряженного состояния	53
4.7. Частный случай плоского напряженного состояния	54
4.8.Обобщенный закон Гука	55
4.9. О прочности в сложном напряженном состоянии. Гипотезы прочности	55
Контрольные вопросы	59
ГЛАВА 5. КРУЧЕНИЕ	61
5.1. Определение крутящего момента. Построение эпюры M_z	61
5.2. Предпосылки к теории кручения круглого бруса	62
5.3. Вывод формул для касательных напряжений и угла закручивания	63

5.4. Кручение бруса с некруглым поперечным сечением.	67
5.5. Кручение статически неопределимого бруса.....	72
5.6. Расчет цилиндрических пружин с малым шагом витка.	74
Контрольные вопросы.	74
ГЛАВА 6. ПРЯМОЙ ИЗГИБ	76
6.1. Основные понятия.	76
6.2. Поперечная сила и изгибающий момент. Построение эпюр	76
6.3. Дифференциальные зависимости между M_x , Q_y и q	78
6.4. Правила построения эпюр поперечной силы и изгибающего момента.	79
6.5. Предпосылки теории изгиба.	80
6.6. Вывод формулы для нормальных напряжений.....	81
6.7. Эпюра напряжений. Условие прочности	85
6.8. Рациональные сечения балок	86
6.9. Перемещения при изгибе. Дифференциальное уравнение упругой линии.	86
6.10. Метод начальных параметров.....	88
Контрольные вопросы.	93
ГЛАВА 7. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ	96
7.1. Косой изгиб.	96
7.2. Сочетание изгиба с растяжением, сжатием	99
7.3. Внецентренное растяжение, сжатие	99
7.4. Изгиб с кручением круглого бруса	101
Контрольные вопросы.	104
ГЛАВА 8. ОБЩИЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ	105
8.1. Работа внешних сил	105
8.2. Потенциальная энергия деформации стержня	106
8.3. Формула Мора	107
8.4. Правило Верещагина	109
8.5. Общий случай перемножения эпюр	111
8.6. Теорема взаимности работ. Принцип взаимности перемещений	113
Контрольные вопросы	114
ГЛАВА 9. РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ НЕОПРЕДЕЛИМЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ СИЛ ..	115
9.1. Перемещения в статически неопределимых системах.....	119
Контрольные вопросы	122
ГЛАВА 10. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ СТЕРЖНЕЙ	124
10.1. Понятие об устойчивых и неустойчивых формах равновесия	124
10.2. Формула Л.Эйлера	126
10.3. Другие случаи опорного закрепления	128

10.4. Границы применимости формулы Эйлера	128
10.5. Практический расчет на устойчивость	131
10.6. Рациональные типы сечений сжатых стержней	135
10.7. Понятие о продольно-поперечном изгибе.	136
Контрольные вопросы.	136
ГЛАВА 11. ДИНАМИЧЕСКОЕ НАГРУЖЕНИЕ	138
11.1. Постоянные силы инерции	138
11.2. Вибрационные силы. Колебания упругих систем	139
11.3. Собственные колебания системы с одной степенью свободы	140
11.4. Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы	141
11.5. Динамические напряжения.	143
11.6. Ударная нагрузка.	147
Контрольные вопросы	152
ГЛАВА 12. ПРОЧНОСТЬ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКИ ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ НАПРЯЖЕНИЯХ	153
12.1. Основные понятия	153
12.2. Характеристики цикла напряжений. Классификация циклов	154
12.3. Понятие о пределе выносливости	155
12.4. Предел выносливости при асимметричном цикле	157
12.4.1. Диаграмма предельных напряжений (диаграмма Смита)	158
12.4.2. Диаграмма предельных амплитуд (диаграмма Хейга)	158
12.5. Факторы, влияющие на величину предела выносливости	161
12.5.1. Влияние концентрации напряжений	162
12.5.2. Влияние масштабного фактора	165
12.5.3. Влияние качества обработки поверхности	166
12.5.4. Влияние методов поверхностного упрочнения	167
12.6. Определение коэффициента запаса при циклическом нагружении.....	168
Контрольные вопросы	173
ГЛАВА 13. РАСЧЕТ ГИБКИХ НИТЕЙ	175
13.1. Основные определения	175
13.2. Дифференциальные уравнения равновесия нити	179
13.3. Цепная линия	181
13.4. Расчет гибкой нити с малой стрелой провисания	184
13.5. Влияние линейных деформаций нити	189
13.5.1. Влияние температуры	189
13.5.2. Влияние упругих деформаций.....	191
Контрольные вопросы	194

Литература	195
Приложение 1. Справочные материалы.....	197
Приложение 2. Сортамент прокатной стали.....	198
Приложение 3. Сортамент прокатной стали.....	203
Приложение 4. Сортамент прокатной стали.....	206
Приложение 5. Сортамент прокатной стали.....	208
Приложение 6. Сортамент прокатной стали.....	210
Приложение 7. Коэффициенты q	212
Приложение 8. Определение значений функции $F(\Theta \nu)$	212
Приложение 9. Ступенчатый вал с галтелью при изгибе.....	213
Приложение 10. Ступенчатый вал с галтелью при кручении (измерения по методу электрических аналогий).....	214
Приложение 11. Таблица значений функции $F(\Theta \nu)$	215