

Теорема. Однородное Ф-пространство  $SU(9)/T$  с метрикой  $g$ , индуцированной формой Киллинга, является  $GG_1$ -многообразием. Кроме того, существует каноническая  $f$ -структура, относительно которой  $SU(9)/T$  не является обобщенным эрмитовым многообразием.

Литература.

1. Кириченко В.Ф. Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных структур // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. 1986. Т.18. ВИНТИ АН СССР. С.25-71.
2. Вылегжанин Д.В. Естественная конструкция обобщенной почти эрмитовой структуры // Вестник Витебского Гос. Училища. — 2001. — №2. — 114-119.
3. Балащенко В.В., Степанов Н.А. Канонические аффинорные структуры классического типа на регулярных Ф-пространствах // Математический сборник. 1995. Т.166 N 11 С.3-34.
4. Степанов Н.А. Основные факты теории Ф-пространств // Изв. вузов. Математика. - 1967. - №3 - С 88-95.
5. Balashchenko V.V. Riemannian geometry of canonical structures on regular Ф-spaces // Fakultat fur Mathematik der Ruhr-Universitat Bochum. - Preprint N174/1994

## МНОГОФАКТОРНАЯ АФФИННАЯ МОДЕЛЬ ДОХОДНОСТИ

*О.Г. Казанцева*

*Научный руководитель – Г.А. Медведев  
Белорусский государственный университет*

Введение

В статье рассмотрена многофакторная модель временной структуры процентных ставок из класса экспоненциально-аффинных моделей. Факторами модели являются доходности  $X=(X_1, X_2, \dots, X_n)$  бескупонных облигаций  $n$  различных фиксированных сроков погашения  $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$ . Доходность любой бескупонной облигации берется в виде зависящей от даты погашения аффинной комбинации избранного «базового» набора доходностей. Полагая, что факторы следуют многомерному марковскому процессу, описываемому многомерным аналогом однофакторной модели МС [2, стр 59-67], мы получили аналитическое представление цен дисконтируемых облигаций с глобым сроком погашения.

Аффинная факторная модель.

Пусть задано полное вероятностное пространство  $(\Omega, F, P)$ , пополняемое фильтрацией  $\{F_t; t \geq 0\}$ , порождаемой стандартным Броуновским движением  $W$  в  $R^n$ . И пусть имеется однородный во времени марковский процесс  $X$ , принимающий значения в некотором открытом подмножестве  $D$  из  $R^n$ , такой, что для любых моментов времени  $t$  и  $\tau$  рыночная стоимость в момент  $t$  бескупонной облигации, погашаемой в момент  $T=t+\tau$ , дается в виде  $p(X(t), z)$ , где  $p \in C^{2,1}(D \times ]0, \infty[)$ . Процесс краткосрочной ставки  $r$  определяется через непрерывность с использованием измеримой функции  $R: D \rightarrow R^1$ , определяемой как предел доходности, когда срок погашения стремится к нулю:

$$R(x) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{-\ln p(x, \tau)}{\tau}, \quad x \in D$$

Предполагаем, что  $X$  образует марковский процесс, заданный многомерной версией модели МС, и удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению вида:

$$dX(t) = \mu(X(t)) dt + \sigma(X(t)) dW(t), \quad \text{где } \mu(X(t)) = aX(t) + b; \quad a, \sigma \in R^{n \times n}, \quad b \in R^n.$$

$$a = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad \sigma(X) = \begin{bmatrix} \sigma_1 \sqrt{X_1 + z_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 \sqrt{X_2 + z_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n \sqrt{X_n + z_n} \end{bmatrix}$$

Будем рассматривать экспоненциально-аффинный класс моделей, в котором рыночная стоимость  $p(X(t), \tau)$ , в момент  $t$  бескупонной облигации, погашаемой в момент  $T=t+\tau$ , представима в виде  $p(X(t), \tau) = \exp(A(\tau) + B(\tau)X(t))$ ,  $p(X(t), 0) = 1$ . В силу установленного предположения, что  $p \in C^{2,1}(D \times [0, \infty))$ ,  $A(\tau)$  и  $B(\tau)$  являются  $C^1$  функциями на  $[0, \infty)$  с граничными условиями  $A(0) = 0$  и  $B(0) = 0$ .

В работе [1] доказана теорема, о том, что необходимым и достаточным условием того, чтобы  $p(X(t), \tau)$  была экспоненциально-аффинной, является условие аффинности  $\mu(X(t))$  и  $\sigma(X(t))$ . Поэтому полагаем  $R(X(t)) = \alpha + \beta X(t)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}^1$ ,  $\beta \in \mathbb{R}^n$ ,  $\beta = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$ . И считаем, что коэффициенты  $\alpha, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$  являются неотрицательными (из экономических соображений).

Для фиксированной даты погашения  $T$  рассмотрим процесс цены бескупонной облигации  $P(X(t), t) = p(X(t), T-t)$ ,  $t \leq T$ . По лемме Ито

$$dP = DP(X(t), t) dt + P_X(X(t), t) \sigma(X(t)) dW_t, \text{ где}$$

$$DP(X(t), t) = P(X(t), t) + P_{XX}(X(t), t) \mu(X(t)) + 0,5 \operatorname{tr} [P_{XX}(X(t), t) \sigma(X(t)) \sigma(X(t))^T]$$

Учитывая то, что  $DP(X(t), t) = R(X(t)) P(X(t), t)$ , и то, что  $P$  – строго положительная функция, имеем

$$-R(x) - A'(\tau) - B'(\tau)x + B(\tau)\mu(x) + 0,5 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \sigma_i(x) \sigma_j(x)^T B_i(\tau) B_j(\tau) = 0, \quad (x, \tau) \in D \times [0, \infty).$$

Это уравнение применимо для всех  $\tau < \infty$ , поскольку  $T$  является произвольным.

Так как  $\mu(x)$ ,  $\sigma(x)$ ,  $R(x)$  – аффинные функции, то можно сгруппировать слагаемые, содержащие  $x_i$ . И, учитывая то, что в нашей модели  $\sigma$  – диагональная матрица, получаем:

$$-\alpha - A'(\tau) + \sum_{i=1}^n x_i [-\beta - B'(\tau) + B(\tau) a_i + 0,5 B_i^2(\tau) \sigma_i^2] + \sum_{j=1}^n [B_j(\tau) b_j + 0,5 B_j^2(\tau) \sigma_j^2 z_j] = 0$$

Это равенство имеет место для любого  $x$  из открытого множества  $D$ , и по принципу согласования приравняем нулю коэффициенты при соответствующих координатах  $x$  и свободном члене. Таким образом, приходим к системе дифференциальных уравнений:

$$B_i(\tau) = 0,5 B_i^2(\tau) \sigma_i^2 + B_i(\tau) a_i - \beta_i, \quad B_i(0) = 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

$$A'(\tau) = \sum_{i=1}^n [0,5 B_i^2(\tau) \sigma_i^2 z_i + B_i(\tau) b_i] - \alpha, \quad A(0) = 0.$$

Решение дифференциального уравнения Риккати для функции  $B_i(\tau)$  было найдено при помощи замены переменных [2, стр. 235]  $B_i(\tau) = -\frac{1}{0,5 q(\tau)} \frac{dq}{d\tau}$ . В результате уравнение Риккати свелось к линейному дифференциальному уравнению второго порядка относительно  $q(\tau)$

Таким образом, для нашей модели получены аналитические выражения функции  $A(\tau)$  и  $B(\tau)$  и они имеют вид:

$$B_i(\tau) = \beta_i \frac{1 - \exp(\varepsilon_i \tau)}{\lambda_{1i} - \lambda_{2i} \exp(\varepsilon_i \tau)}, \text{ где } \lambda_{1i} = \frac{a_i + \varepsilon_i}{2}, \lambda_{2i} = \frac{a_i - \varepsilon_i}{2}, \varepsilon_i = \sqrt{a_i^2 + 2\sigma_i^2 \beta_i}, \quad i = \overline{1, n}$$

$$A(\tau) = \tau \sum_{i=1}^n \left( \frac{\beta_i^2 \sigma_i^2 z_i}{2\lambda_{1i}^2} + \frac{\beta_i b_i}{\lambda_{1i}} \right) - \sum_{i=1}^n \frac{a_i z_i + b_i}{\sigma_i^2} \ln \left( \frac{\lambda_{1i} - \lambda_{2i} \exp(\varepsilon_i \tau)}{\varepsilon_i} \right)^2 + \sum_{i=1}^n z_i B_i(\tau) - \alpha.$$

И, следовательно, получена аналитическая формула для вычисления в момент  $t$  рыночной стоимости бескупонной облигации с любым сроком погашения  $\tau$ , вычисляемую на основе избранного «базового» набора доходностей:

$$p(X(t), \tau) = \exp \left( A(\tau) + \sum_{i=1}^n X_i(t) B_i(\tau) \right).$$

#### Литература.

1. Duffie D., Kan R. A yield-factor model of interest rate // Mathematical Finance. 1996. V.6. № 4 P/ 379-406.
2. Медведев Г.А. Математические модели финансовых рисков ч.1 Риски из-за неопределенности процентных ставок Мн. БГУ 1989.