

предлагается аппроксимировать плотность распределения путем приближенного вычисления

интеграла $\frac{1}{2 \cdot \pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i \cdot t \cdot x) \cdot E \exp(i \cdot t \cdot X) \cdot dt$ на ограниченном промежутке $[-A, A]$ по

формуле трапеций. На практике, ввиду отсутствия достаточного количества экстремальных значений, значение параметра регрессии a изменяется в зависимости от значения p . Для расчетов использовались данные индекса NYSE Finance за период с 1966 по 1969 год. В этом случае зависимость \bar{a} от p близка к линейной. Оценка параметра регрессии, полученная по указанным данным, такова

$$\bar{a} = 0.348 \pm 0.008$$

Литература

1. Chambers J. M., Mallows C. L., Stuck B. W. A method for simulating stable random variables. Journal of the American Statistical Association, Vol. 71, 1976.
2. Fama E. F., Roll R. Some properties of symmetric stable distributions. Journal of the American Statistical Association, Vol. 63, 1968.
3. Fama E. F., Roll R. Parameter estimates for symmetric stable distributions. Journal of the American Statistical Association, Vol. 66, 1971.
4. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 2. Мир, 1971.
5. Гамровский Б., Рачев С. Финансовые модели, использующие устойчивые законы. Обзорные прикладной и промышленной математики, том 2, выпуск 4. 1995.
6. Leitch R. A., Paulson A. S. Estimation of Stable law parameters: stock price behavior application. Journal of the American Statistical Association, Vol. 70, 1975.
7. Officer R. R. The distribution of stock returns. Journal of the American Statistical Association, Vol. 67, 1972.
8. Press S. J. Estimation in Univariate and Multivariate Stable Distributions. Journal of the American Statistical Association, Vol. 67, 1972.
9. Samorodnitsky G., Taqqu M. Stable non-Gaussian random processes. Models with infinite variance. Chapman & Hall CRC, 1994.
10. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. Т. 1. Факты. Модели. Фазис, 1998.
11. Weron R. Levy-stable distributions revisited: tail index > 2 does not exclude the Levy-stable regime. International Journal of Modern Physics. Vol. 12, 2001.
12. Золотарев В. М. Одномерные устойчивые распределения. Наука, 1983.

ОБОБЩЕННЫЕ ПОЧТИ ЭРМИТОВЫ СТРУКТУРЫ НА ОДНОРОДНЫХ Φ -ПРОСТРАНСТВАХ КОНЕЧНОГО ПОРЯДКА

Д. В. Вылегжанин

Научный руководитель — В. В. Балащенко
Белорусский государственный университет

Пусть M — связное гладкое многообразие, $C^{\infty}(M)$ — кольцо гладких функций на M , $\mathcal{L}(M)$ — алгебра Ли векторных полей на M со скобкой Ли $[\cdot, \cdot]$. Все многообразия, тензорные поля и тому подобные объекты будем предполагать гладкими класса C^{∞} .

Определение [1]. Обобщенной почти эрмитовой структурой (короче, *GAN-структурой*) ранга r на гладком многообразии M называется совокупность $\{g, J_1, \dots, J_r, T\}$ тензорных полей на M , где $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$ — псевдориманова метрика на M , J_1, \dots, J_r — линейно независимые в каждой точке многообразия тензоры типа $(1,1)$ называемые структурными аффинорами, или структурными операторами, определенные в каждой точке многообразия с точностью до ненулевого числового множителя и являющиеся вместе со своими квадратами и тождественным аффинором образующими некоторого подмодуля, являющегося подалгеброй алгебры всех эндоморфизмов касательного пучка многообразия, T — тензор типа $(2,1)$, называемый *композиционным тензором*.

При этом должны выполняться условия: 1) $\langle J_i X, Y \rangle + \langle X, J_i Y \rangle = 0$; 2) $T(J_i X, Y) = T(X, J_i Y) = -J_i T(X, Y)$; 3) $T_x g = 0$; 4) $\bigcap_{i=1}^r \ker J_i \subset \ker T \subset \bigcap_{i=1}^r \ker (J_i^2 - \lambda_i J_i)$; 5) $J_i J_j = J_j J_i$ ($ij=1, \dots, r$).

$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$. Здесь $0 < \lambda_i \in C^\infty(M)$; $T_x Y = T(X, Y)$; оператор T_x отождествляется с порожденным им дифференцированием тензорной алгебры многообразия. Многообразие, наделенное GАН-структурой, называется *обобщенным почти эрмитовым (GАН)-многообразием*. Символом GАН обозначается класс всех GАН-структур на M .

Наличие обобщенной почти эрмитовой структуры позволяет ввести в рассмотрение алгебраический объект, исследуя свойства которого можно делать выводы о геометрическом строении обобщенного почти эрмитова многообразия. Возникающая таким образом алгебраическая структура на $\mathfrak{X}(M)$ называется Q-алгеброй [1]. Более точно, операция композиции в $\mathfrak{X}(M)$ определяется формулой. $X * Y := T(X, Y)$.

Определение [1] Q-алгебра V называется абелевой, если $V * V = \{0\}$.

Определение [1] K-алгеброй называется антикоммутативная Q-алгебра. $X * Y = -Y * X$.

В названии GАН-многообразия фиксируется соответствующее свойство его присоединенной Q-алгебры [1]. GАН-многообразие, присоединенная Q-алгебра которого является K-алгеброй (абелевой Q-алгеброй), называется, соответственно, *обобщенным G_r-многообразием (обобщенным эрмитовым многообразием)*, и соответствующая GАН-структура обозначается, соответственно, GG_r, GH [1].

Как оказалось, наиболее удачно вписываются в понятие обобщенной эрмитовой геометрии многообразия с f-структурами (см. [1], [2]). Среди всех таких многообразий, благодаря результатам [3], самыми удобными для рассмотрения являются однородные Ф-пространства конечного порядка.

Пусть G/H — однородное Ф-пространство порядка n , определяемое автоморфизмом Φ связанной группы Ли G . Все такие пространства регулярны [4]. Пусть $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{m}$ — каноническое редуктивное разложение, соответствующее автоморфизму $\varphi = d\Phi_e$ алгебры Ли \mathfrak{g} , то есть $\mathfrak{m} = A_\varphi \mathfrak{g}$, где $A_\varphi = \varphi - id$ [3], [4]. Обозначим через θ сужение φ на \mathfrak{m} . Инвариантная аффинорная структура F на G/H называется *канонической* [3], если она в точке o является полиномом от θ : $F = F(\theta)$. Для таких пространств в [3] получены формулы для всех канонических f-структур. Более того, в [5] показывается, что все канонические f-структуры в случае полупростых групп G согласованы с метрикой на G/H , индуцируемой формой Киллинга.

Рассмотрим канонические f-структуры, заданные на однородном Ф-пространстве конечного порядка n . Пусть спектр оператора θ состоит из s пар сопряженных корней степени n из 1, где $s \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Тогда число элементов спектра θ равно $2s$, если -1 не входит в спектр, или $2s-1$, если корень -1 принадлежит спектру (последнее возможно лишь в случае $n=2k$) [3].

Используя результаты [2], можно установить:

Теорема. Пусть G/H — однородное Ф-пространство порядка n , причем спектр оператора θ состоит из s пар корней степени n из 1 [3]. Предположим, что G — полупростая группа Ли, g — инвариантная псевдориманова метрика на G/H , индуцированная формой Киллинга. Тогда на указанном пространстве может быть задана GАН-структура $\{g, f_1, \dots, f_r, T\}$ ранга $r=s-1$, если -1 принадлежит спектру оператора θ , и ранга $r=s$ в противном случае, где $T = \sum_{i=1}^r T_i$. Здесь T_i обо-

значает композиционный тензор для структуры f_i [1], а $if_i=0, i \neq j, i, j = \overline{1, r}$.

Приведенная теорема находит свою реализацию в следующем примере.

Рассмотрим однородное пространство $SU(9)/T$, где T — максимальный тор. Можно построить следующий аналитический автоморфизм: $\Phi(g) = sgs^{-1}$, где $s = \text{diag}\{\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \varepsilon^4, \varepsilon^5, \varepsilon^6, \varepsilon^7, \varepsilon^8, 1\}$. Не трудно видеть, что $\Phi^9 = id$. Тогда пространство $SU(9)/T$ обладает структурой однородного Ф-пространства порядка 9. На таком пространстве существует четыре канонические f-структуры такие, что их попарные произведения равны нулю. Относительно этих структур $SU(9)/T$ может быть рассмотрено как обобщенное почти эрмитово многообразие. В предложенных обозначениях справедлива.

Теорема. Однородное Ф-пространство $SU(9)/T$ с метрикой g , индуцированной формой Киллинга, является GG_1 -многообразием. Кроме того, существует каноническая f -структура, относительно которой $SU(9)/T$ не является обобщенным эрмитовым многообразием.

Литература.

1. Кириченко В.Ф. Методы обобщенной эрмитовой геометрии в теории почти контактных структур // Итоги науки и техники. Проблемы геометрии. 1986. Т.18. ВИНТИ АН СССР. С.25-71.
2. Вылегжанин Д.В. Естественная конструкция обобщенной почти эрмитовой структуры // Вестник Витебского Гос. Училища. — 2001. — №2. — 114-119.
3. Балащенко В.В., Степанов Н.А. Канонические аффинорные структуры классического типа на регулярных Ф-пространствах // Математический сборник. 1995. Т.166 N 11 С.3-34.
4. Степанов Н.А. Основные факты теории Ф-пространств // Изв. вузов. Математика. - 1967. - №3 - С 88-95.
5. Balashchenko V.V. Riemannian geometry of canonical structures on regular Ф-spaces // Fakultat fur Mathematik der Ruhr-Universitat Bochum. - Preprint N174/1994

МНОГОФАКТОРНАЯ АФФИННАЯ МОДЕЛЬ ДОХОДНОСТИ

О.Г. Казанцева

*Научный руководитель – Г.А. Медведев
Белорусский государственный университет*

Введение

В статье рассмотрена многофакторная модель временной структуры процентных ставок из класса экспоненциально-аффинных моделей. Факторами модели являются доходности $X=(X_1, X_2, \dots, X_n)$ бескупонных облигаций n различных фиксированных сроков погашения $\{z_1, z_2, \dots, z_n\}$. Доходность любой бескупонной облигации берется в виде зависящей от даты погашения аффинной комбинации избранного «базового» набора доходностей. Полагая, что факторы следуют многомерному марковскому процессу, описываемому многомерным аналогом однофакторной модели МС [2, стр 59-67], мы получили аналитическое представление цен дисконтируемых облигаций с глобым сроком погашения.

Аффинная факторная модель.

Пусть задано полное вероятностное пространство (Ω, F, P) , пополняемое фильтрацией $\{F_t; t \geq 0\}$, порождаемой стандартным Броуновским движением W в R^n . И пусть имеется однородный во времени марковский процесс X , принимающий значения в некотором открытом подмножестве D из R^n , такой, что для любых моментов времени t и τ рыночная стоимость в момент t бескупонной облигации, погашаемой в момент $T=t+\tau$, дается в виде $p(X(t), z)$, где $p \in C^{2,1}(D \times]0, \infty[)$. Процесс краткосрочной ставки r определяется через непрерывность с использованием измеримой функции $R: D \rightarrow R^1$, определяемой как предел доходности, когда срок погашения стремится к нулю:

$$R(x) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{-\ln p(x, \tau)}{\tau}, \quad x \in D$$

Предполагаем, что X образует марковский процесс, заданный многомерной версией модели МС, и удовлетворяет стохастическому дифференциальному уравнению вида:

$$dX(t) = \mu(X(t)) dt + \sigma(X(t)) dW(t), \text{ где } \mu(X(t)) = aX(t) + b; \quad a, \sigma \in R^{n \times n}, \quad b \in R^n.$$

$$a = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix}, \quad \sigma(X) = \begin{bmatrix} \sigma_1 \sqrt{X_1 + z_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_2 \sqrt{X_2 + z_2} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \sigma_n \sqrt{X_n + z_n} \end{bmatrix}$$