Рассмотрим теперь случай приближения с помощью ряда Фурье подынтегрального выражения $g^i(\alpha)$ в (3) с последующим точным интегрированием:

$$g^i(\alpha) \approx \sum_{j=1}^{s} c_j^i w_j(\alpha), \quad y^{i+1}(\beta) = y + \tau \sum_{j=1}^{s} c_j^i \int_0^{\beta} w_j(\alpha) d\alpha = y + \sum_{j=1}^{s} c_j^i w_j^*(\beta).$$

Здесь $c_j^i = \int_0^1 w_j(\alpha) g^i(\alpha) d\alpha \approx \sum_{k=1}^{n} A_k w_j(\alpha_k) g^i(\alpha_k)$.

С применением матричных обозначений предыдущие выражения переписываются соответственно в виде $Y_{i+1} = Y + \tau C_i W^*$, $C_i = G(Y_i)W$, откуда следует, что

$$Y_{i+1} = Y + \tau G(Y_i) W W^* = Y + \tau G(Y^i)\Xi. \qquad (14)$$

Сравнивая (10), (13) и (14), можно сделать вывод, что все предложенные численные реализации (2) записываются в одинаковой форме

$$Y_{i+1} = Y + \tau G(Y_i)\Omega, \qquad (15)$$

причем квадратная матрица Ω не зависит от исходной задачи (1), и остается постоянной на протяжении всего итерационного процесса (15)

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ТИПА ПИКАРА С ИСПОЛЬЗОВАНИМ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Б.В. Фалейчик
Научный руководитель – В.В. Бобков
Белорусский государственный университет

Рассмотрим начальную задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений нормального вида в локальной постановке:

$$\frac{d}{dx}u(x) = f(x, u(x)), \quad t \le x \le t + \tau, \qquad (1)$$

$$u(t) = y. \qquad (2)$$

Для традиционных пошаговых методов фиксированного порядка точности численного решения исходной задачи практически единственным рычагом управления величиной локальной ошибки является шаг сетки ф. Основной целью данной работы будет построение таких вычислительных алгоритмов, которые позволяют поднимать уровень точности локального приближения, не прибегая к процедуре дальнейшего уменьшения величины шага дискретизации ф. Такой рычаг повышения точности может опираться, скажем, на известный процесс последовательных приближений Пикара [1, с. 48, 58], который запишем в форме

$$\begin{aligned} &u^1(x) = u^0(x) + \int_t^x f(z, u^0(z))dz, \quad u^0(x) \equiv y, \\ &u^{i+1}(x) = u^i(x) + \int_t^x [f(z, u^i(z)) - f(z, u^{i-1}(z))]dz, \quad i = 1,2,\ldots \end{aligned} \qquad (3)$$

Главные трудности реального применения в вычислительной практике приближений типа (3) сопряжены с необходимостью нахождения (точного или приближенного) представления для интегралов с переменным верхним пределом вида

$$I^i(x)=\int_t^x g^i(z)dz,$$
$$g^i(z)=\begin{cases} f(z,y), i=0; \\ f(z,y^i(z))-f(z,y^{i-1}(z)), i=1,2,... \end{cases} \quad (4)$$

Как и в [3], при построении такого представления будем использовать аппарат рядов Фурье.

После замены в (4) переменной интегрирования

$$z=t+\tau\sin^2\frac{\psi}{2} \quad (5)$$

интегралы принимают вид

$$I^i(x)=\frac{1}{2}\tau\int_0^{\varphi} q^i(\psi)d\psi \quad (6), \quad q^i(\psi)=g^i(\psi)\sin\psi, \quad i=0,1,...,$$

где (см. (5))

$$\varphi=2\arcsin\sqrt{\frac{x-t}{\tau}}. \quad (7)$$

Так как подынтегральная функция q^i(ш) в правой части (6) является нечетной и 2π – периодической, при этом на границах отрезка $0\le\varphi\le\pi$ (см. ('), (7)) выполняются условия $q^i(0)=q^i(\text{p})=0$, то удобным представлением такой функции может служить (см., напр., [3, с. 227-229] следующее разложение в ряд Фурье:

$$q^i(\psi)=\sum_{j=1}^{\infty}\beta_{i,j}\sin j\psi, \quad (8)$$

$$\beta_{i,j}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}q^i(\varphi)\sin j\varphi d\varphi. \quad (9)$$

Если интеграл из (9) приблизить, скажем, посредством составной квадратурной формулы трапеций с равноотстоящими узлами

$$\varphi_p=\frac{\pi p}{m}, \quad p=0,1,...,m \quad (m\ge 2), \quad (10)$$

а в правой части (8) ограничиться, например, лишь первыми $m-1$ слагаемыми, то приходим к приближенному равенству

$$q^i(\psi)\approx\sum_{j=1}^{m-1}b_{i,j}\sin j\psi=q^i_m(\psi), \quad (11)$$

где (см. [4, с.144])

$$b_{i,j}=\frac{2}{m}\sum_{p=1}^{m-1}q^i(\varphi_p)\sin j\varphi_p\approx\beta_{i,j}. \quad (12)$$

Точные соотношения из (11), (12) с учетом (10) приводят к формулам интерполяции синусами (см. [3, с. 244]). Такого рода тригонометрический интерполяционный многочлен для функций с ограниченной вариацией сходится к заданной функции в каждой точке рассматриваемого отрезка, когда число узлов интерполирования неограниченно возрастает (см. [3, с. 219, 244]). Этим данная интерполяция выгодно отличается от степенной для случая равноотстоящих узлов.

Воспользовавшись аппроксимацией (11) и выполнив интегрирование в (6), вместо (3) для приближения $y^{i+1}(x)$ к $u^{i+1}(x)$ можно записать:

$$y^{i+1}(x)=y^i(x)+\tau\sum_{j=1}^{m-1}b_{i,j}\frac{1}{j}\sin^2(j\arcsin\sqrt{\frac{x-t}{\tau}}), \quad i=0,1,...(y^0(x)\equiv y). \quad (13)$$

Заметим, что в правой части (13) используются значения функции $y^i(x)$ лишь в узлах

$$x_p = t + \tau \sin^2 \frac{\pi p}{2m}, \quad p = 0,1,\dots,m-1, \tag{14}$$

вспомогательной сетки на отрезке дискретизации (см. (5),(6), (10), (12)). Поэтому для практических целей значения нового приближения $y^{i+1}(x)$ также достаточно вычислять только в фиксированных точках x_k, $k = 1,2,\dots,m$, вида (14). При этом значительно упрощаются и сами расчетные формулы (13):

$$y^{i+1}(x_k) = y^i(x_k) + \tau \sum_{j=1}^{m-1} b_{i,j} \frac{1}{j} \sin^2 \frac{j\pi k}{2m}, \quad k = 1,2,\dots,m-1, \tag{15}$$

$$y^{i+1}(t+\tau) = y^i(t+\tau) + \tau \sum_{\nu=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} b_{i,2\nu-1} \frac{1}{2\nu-1}, \quad i \ge 0. \tag{16}$$

Здесь (см. (12))

$$b_{i,j} = \begin{cases} \dfrac{2}{m} \displaystyle\sum_{p=1}^{m-1} f(x_p, y) \sin \frac{\pi p}{m} \cdot \sin \frac{j\pi p}{m}, & i = 0; \\ \dfrac{2}{m} \displaystyle\sum_{p=1}^{m-1} [f(x_p, y^i(x_p)) - f(x_p, y^{i-1}(x_p))] \sin \frac{\pi p}{m} \cdot \sin \frac{j\pi p}{m}, & i = 1,2,\dots \end{cases} \tag{17}$$

а через $[\alpha]$, как обычно, обозначена целая часть числа α

Построенные вычислительные алгоритмы могут быть особенно полезными, скажем, в ситуации, характерной для жестких (см. [1]) систем, когда в случае традиционных пошаговых численных методов уменьшение величины шага сетки, вызванное необходимостью повышения уровня точности приближения быстро изменяющихся составляющих решения исходной задачи, приводит к "подвисанию" во времени его медленных составляющих. Проведенные численные эксперименты подтверждают, в частности, и такие возможности предлагаемых методов.

Литература.

1. Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи М., 1990.
6. Бобков В.В. // Вестн. Белорус. ун-та. Сер. 1. 2001. № 3. С. 57.
7. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. М., 1961.
8. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Начала теории вычислительных методов. Интерполирование и интегрирование. Мн., 1983.
9. Федоренко Р.П.//Сб. "Численное решение обыкновенных дифференциальных уравнений", под ред. С.С.Филиппова. М.: ИПМ АН СССР. 1988. С. 17

О СИСТЕМАХ, ЭКВИВАЛЕНТНЫХ УРАВНЕНИЯМ ПЕНЛЕВЕ

А.С. Зенченко
Научный руководитель – В.И. Громак
Белорусский государственный университет

Нормальные системы обыкновенных дифференциальных уравнений, эквивалентные уравнениям Пенлеве, играют важную роль в теории этих уравнений. Наиболее важное применение эквивалентных систем состоит в том, что они дают простой метод построения преобразований Беклунда, которые являются одним из основных инструментов исследования различных свойств решений уравнений Пенлеве [1]. Эквивалентные системы для уравнений Пенлеве представляют собой сцепленные уравнения Риккати, которые могут быть стандартным образом линеаризова-