Секция 2 "МАТЕМАТИКА, ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА, МЕХАНИКА И АСТРОНОМИЯ"

К ВОПРОСУ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ МЕТОДА ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ПИКАРА

И.А. Кучминенко
Научный руководитель – В.В. Бобков
Белорусский государственный университет

Рассмотрим задачу Коши для системы m обыкновенных дифференциальных уравнений

$$u'(x) = f(x,u(x)),\ u(t) = y,\ t \le x \le t + \tau . \tag{1}$$

Для решения этой задачи будем использовать итерационный процесс Пикара

$$u^{i+1}(x) = y + \int_t^x f(z,u^i(z))\,dz\ ,\ i = 0,1,... \tag{2}$$

В данной работе мы рассмотрим два подхода, позволяющие аппроксимировать интеграл с переменным верхним пределом в (2): с использованием интерполяции или аппарата рядов Фурье.

В интеграле из (2) проведем предварительно замену переменной интегрирования $z = t + \alpha\tau$. Тогда будем иметь равенства

$$u^{i+1}(x) = y + \tau\int_0^\beta f(t + \alpha\tau, u^i(t + \alpha\tau))\,d\alpha = y + \tau\int_0^\beta g^i(\alpha)\,d\alpha\ ,\ i = 0,1,... . \tag{3}$$

где $\beta = \dfrac{x-t}{\tau}$, $0 \le \beta \le 1$.

Проинтерполируем $g^i(\alpha)$ в (3) по ее значениям в узлах $\alpha_k \in [0,1]$, $k = \overline{1,n}$, посредством базисных функций $l_j(\alpha)$, $\alpha \in [0,1]$, $j = \overline{1,n}$, с последующим точным интегрированием.

$$\int_0^\beta g^i(\alpha)\,d\alpha \approx \sum_{j=1}^n c_j^i\, l_j^*(\beta) \tag{4}$$

Здесь $l_j^*(\beta) = \int_0^\beta l_j(\alpha)\,d\alpha$, а коэффициенты c_j^i находятся из условий

$$\sum_{j=1}^n c_j^i\, l_j(\alpha_k) = g^i(\alpha_k)\ ,\ k = \overline{1,n}. \tag{5}$$

Равенства (5) дают нам m систем линейных алгебраических уравнений размерности $n \times n$, решениями которых являются компоненты векторов-столбцов $c^j(i)$ размерности m.

С учетом (3), (4) приближение к итерационному процессу (2) мы можем численно реализовать как

$$y^{i+1}(\beta) = y + \tau\sum_{j=1}^n c_j^i\, l_j^*(\beta)\,, \tag{6}$$

где $y^{i+1}(\beta) \approx u^{i+1}(t + \tau\beta)$.

Реализация итерационного процесса (6) упростится, если мы будем искать значения $y^{i+1}(\beta)$ только в точках α_k, $k = \overline{1,n}$. В этом случае равенства (6) принимают вид

$$y^{i+1}(\alpha_k) = y + \tau \sum_{j=1}^{n} c_j^i\, l_j^*(\alpha_k),\ \ k = \overline{1,n},\ i = 0,1,... \tag{7}$$

Если ввести обозначения

$Y_{i+1} = [y^{i+1}(\alpha_1), \dots, y^{i+1}(\alpha_n)]$, $Y = [y, \dots, y]$, $C_i = [c_1^i, \dots, c_n^i]$, $L^* = [l_j^*(\alpha_k)]$, $j = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,n}$,

то (7) можно записать в виде

$$Y_{i+1} = Y + \tau C_i L^* \tag{8}$$

Аналогичным образом запишем и (5):

$$G(Y_i) = C_i L. \tag{9}$$

При этом использованы обозначения

$G(Y_i) = [g^i(\alpha_1), \dots, g^i(\alpha_n)]$, $L = [l_j(\alpha_k)]$, $j = \overline{1,n}$, $k = \overline{1,n}$.

Из (9) находим $C_i = G(Y_i)L^{-1}$, и, подставляя это выражение для C_i в (8), получаем расчетное правило

$$Y_{i+1} = Y + \tau G(Y_i)\Phi, \text{ где } \Phi = L^{-1}L^*. \tag{10}$$

При использовании аппарата рядов Фурье для аппроксимации интеграла в (3) мы можем поступить двояко: либо аппроксимировать интеграл целиком, либо аппроксимировать подынтегральное выражение $g^i(\alpha)$, а затем выполнить его точное интегрирование. Рассмотрим оба случая.

В первом случае мы приближаем интеграл в (3) частной суммой s первых членов ряда Фурье:

$\int_0^\beta g^i(\alpha)\,d\alpha \approx \sum_{j=1}^{s} c_j^i\, w_j(\beta)$, где $c_j^i = \int_0^1 (w_j(\beta) \int_0^\beta g^i(\alpha)\,d\alpha)\,d\beta$, а функции $w_j(\beta)$ образуют на $[0,1]$ полную ортонормированную систему.

В выражении для c_j^i поменяем порядок интегрирования, а затем приблизим полученный определенный интеграл квадратурной суммой, имеющей своими узлами точки α_k, $k = \overline{1,n}$. Тогда будем иметь:

$$c_j^i = \int_0^1 (w_j(\beta) \int_0^\beta g^i(\alpha)\,d\alpha)\,d\beta = \int_0^1 (g^i(\alpha) \int_\alpha^1 w_j(\beta)\,d\beta)\,d\alpha = \int_0^1 g^i(\alpha)\, w_j^*(\alpha)\,d\alpha \approx$$

$$\approx \sum_{k=1}^{n} A_k w_j^*(\alpha_k)\, g^i(\alpha_k).$$

Введя обозначение $W^* = [A_k w_j^*(\alpha_k)]$, $k = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,s}$, получим:

$$C_i = G(Y_i)W^* \tag{11}$$

Здесь использованы обозначения, аналогичные случаю интерполяции.

Далее, для того, чтобы найти $y^{i+1}(\beta)$ во всех точках α_k, $k = \overline{1,n}$, нужно вычислить значения выражения $y - \tau \sum_{j=1}^{s} c^i w_j(\alpha_k)$ для всех $k = \overline{1,n}$. Используя обозначение $W = [w_j(\alpha_k)]$, $j = \overline{1,s}$, $k = \overline{1,n}$, перепишем это выражение в виде

$$Y_{i+1} = Y + \tau C_i W. \tag{12}$$

С учетом (11), (12) получаем:

$$Y_{i+1} = Y + \tau G(Y_i)W^*W = Y + \tau G(Y_i)\Psi. \tag{13}$$

Рассмотрим теперь случай приближения с помощью ряда Фурье подынтегрального выражения $g'(\alpha)$ в (3) с последующим точным интегрированием:

$$g'(\alpha) \approx \sum_{j=1}^{s} c_j^i w_j(\alpha), \quad y^{i-1}(\beta) = y + \tau \sum_{j=1}^{s} c_j^i \int_0^{\beta} w_j(\alpha) d\alpha = y + \sum_{j=1}^{s} c_j^i w_j^*(\beta).$$

Здесь $c_j^i = \int_0^1 w_j(\alpha) g^i(\alpha) d\alpha \approx \sum_{k=1}^{n} A_k w_j(\alpha_k) g^i(\alpha_k)$.

С применением матричных обозначений предыдущие выражения переписываются соответственно в виде $Y_{i+1} = Y + \tau C_i W^*$, $C_i = G(Y_i)W$, откуда следует, что

$$Y_{i+1} = Y + \tau G(Y_i) W W^* = Y + \tau G(Y^i)\Xi. \tag{14}$$

Сравнивая (10), (13) и (14), можно сделать вывод, что все предложенные численные реализации (2) записываются в одинаковой форме

$$Y_{i+1} = Y + \tau G(Y_i)\Omega, \tag{15}$$

причем квадратная матрица Ω не зависит от исходной задачи (1), и остается постоянной на протяжении всего итерационного процесса (15)

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ ТИПА ПИКАРА С ИСПОЛЬЗОВАНИМ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ АППРОКСИМАЦИИ

Б.В. Фалейчик
Научный руководитель – В.В. Бобков
Белорусский государственный университет

Рассмотрим начальную задачу для системы обыкновенных дифференциальных уравнений нормального вида в локальной постановке:

$$\frac{d}{dx} u(x) = f(x, u(x)), \quad t \le x \le t + \tau, \tag{1}$$

$$u(t) = y. \tag{2}$$

Для традиционных пошаговых методов фиксированного порядка точности численного решения исходной задачи практически единственным рычагом управления величиной локальной ошибки является шаг сетки ф. Основной целью данной работы будет построение таких вычислительных алгоритмов, которые позволяют поднимать уровень точности локального приближения, не прибегая к процедуре дальнейшего уменьшения величины шага дискретизации ф. Такой рычаг повышения точности может опираться, скажем, на известный процесс последовательных приближений Пикара [1, с. 48, 58], который запишем в форме

$$\begin{gathered} u^1(x) = u^0(x) + \int_t^x f(z, u^0(z)) dz, \quad u^0(x) \equiv y, \\ u^{i+1}(x) = u^i(x) + \int_t^x [f(z, u^i(z)) - f(z, u^{i-1}(z))] dz, \quad i = 1,2,\ldots \end{gathered} \tag{3}$$

Главные трудности реального применения в вычислительной практике приближений типа (3) сопряжены с необходимостью нахождения (точного или приближенного) представления для интегралов с переменным верхним пределом вида