

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования

«Витебский государственный технологический университет»

ЭЛЕКТРОННЫЙ КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ  
ПО УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЕ  
«Гидрогазодинамика»

для студентов специальности

1-43 01 07 «Техническая эксплуатация энергооборудования организаций»

Витебск

2019

УДК 621.1

Составители: В.И. Ольшанский

Гидрогазодинамика: электронный конспект лекций / сост. В.И. Ольшанский – Витебск : УО «ВГТУ», 2019. – 133 с.

Конспект лекций предназначен для изучения теоретических основ учебной дисциплины: «Гидрогазодинамика» студентами специальности 1-43 01 07 «Техническая эксплуатация энергооборудования организаций» всех форм обучения.

УДК 621.1

© УО «ВГТУ», 2019

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ .....	6
1 ОСНОВНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА И ПАРАМЕТРЫ ЖИДКОСТИ. СИЛЫ И НАПРЯЖЕНИЯ.....	11
1.1 Плотность.....	10
1.2 Вязкость .....	11
1.3. Классификация сил.....	14
1.3.1. Массовые силы .....	14
1.3.2. Поверхностные силы. ....	14
1.3.3. Тензор напряжения. ....	15
1.3.4. Уравнение движения в напряжениях .....	17
2. ГИДРОСТАТИКА .....	18
2.1. Уравнение равновесия жидкости. ....	18
2.2. Основное уравнение гидростатики в дифференциальной форме. ....	21
2.3. Эквипотенциальные поверхности и поверхности равного давления. ....	22
2.4. Равновесие однородной несжимаемой жидкости в поле сил тяжести. Закон Паскаля. Гидростатический закон распределения давления. ....	24
2.5. Определение силы давления жидкости на поверхности тел.....	26
2.5.1. Плоская поверхность .....	27
2.5.2. Гидростатический парадокс .....	28
3. КИНЕМАТИКА.....	29
3.1. Установившееся и неустановившееся движение жидкости.....	29
3.2. Уравнение неразрывности (сплошности).....	30
3.3. Линии тока и траектории .....	31
3.4. Трубка тока (поверхность тока).....	32
3.5. Струйная модель потока. ....	32
3.6. Уравнение неразрывности для струйки .....	33
3.7. Ускорение жидкой частицы .....	34
3.8. Анализ движения жидкой частицы .....	34
3.8.1. Угловые деформации .....	35

3.8.2. Линейные деформации .....	39
4. ВИХРЕВОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ.....	41
4.1. Кинематика вихревого движения. ....	41
4.2. Интенсивность вихря. ....	42
4.3. Циркуляция скорости. ....	44
4.4. Теорема Стокса.....	45
5. ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ.....	46
5.1. Потенциал скорости. ....	46
5.2. Уравнение Лапласа.....	48
5.3. Циркуляция скорости в потенциальном поле.....	49
5.4. Функция тока плоского течения. ....	49
5.5. Гидромеханический смысл функции тока. ....	51
5.6. Связь потенциала скорости и функции тока.....	51
5.7. Наложение потенциальных потоков. ....	52
5.8. Бесциркуляционное обтекание круглого цилиндра. ....	56
6. ГИДРОДИНАМИКА ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ.....	58
6.1. Уравнения движения идеальной жидкости.....	58
6.2. Преобразование Громеки-Лэмба. ....	59
6.3. Уравнение движения в форме Громеки-Лэмба. ....	60
6.4. Интегрирование уравнения движения для установившегося течения .....	61
6.5. Упрощенный вывод уравнения Бернулли.....	62
6.6. Энергетический смысл уравнения Бернулли.....	64
6.7. Уравнение Бернулли в форме напоров. ....	64
7. ГИДРОДИНАМИКА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ .....	66
7.1. Модель вязкой жидкости .....	66
7.1.1. Гипотеза линейности .....	66
7.1.2. Гипотеза однородности.....	68
7.1.3. Гипотеза изотропности.....	68
7.2 Уравнение движения вязкой жидкости - уравнение Навье- Стокса) .....	68

8. ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ЭНЕРГИИ В ИНТЕГРАЛЬНОЙ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМАХ .....	70
9. ОБЩАЯ ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ И МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ .....	72
9.1. Основные сведения.....	72
9.2. Применение закона импульса и закона момента импульса в механике жидкости.....	72
10. ОДНОМЕРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ.....	74
10.1. Расход потока и средняя скорость.....	74
10.2. Слабodeформированные потоки и их свойства.....	75
10.3. Уравнение Бернулли для потока вязкой жидкости.....	76
10.4. Физический смысл коэффициента Кориолиса.....	79
11. КЛАССИФИКАЦИЯ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ. УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ.....	80
12. ЗАКОНОМЕРНОСТИ ЛАМИНАРНОГО РЕЖИМА ТЕЧЕНИЯ В КРУГЛЫХ ТРУБАХ.....	83
13. ОСНОВНЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ТУРБУЛЕНТНОГО ДВИЖЕНИЯ.....	86
13.1. Общие сведения.....	86
13.2. Турбулентное течение в трубах.....	87
13.3. Потери давления (напора) при турбулентном течении в трубах.....	90
14. СТРУЙНЫЕ ТЕЧЕНИЯ.....	92
14.1. Общие свойства струй.....	92
14.2. Структура свободной струи.....	92
15. ОДНОМЕРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА.....	96
15.1. Скорость распространения малых возмущений в газовых потоках.....	96
15.2. Параметры торможения.....	98
15.3. Критическая скорость. Критические параметры.....	99
15.4. Газодинамические функции.....	100
15.5. Закон обращения воздействия.....	101
15.6. Геометрическое сопло.....	102
15.7. Вихревой эффект Ранка.....	105

16. УДАРНЫЕ ВОЛНЫ .....	108
16.1. Классификация разрывов в потоках газа .....	108
16.2. Прямой скачок уплотнения.....	110
16.3. Тепловые скачки.....	113
17. ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЯ .....	115
17.1. Инспекционный анализ дифференциальных уравнений.....	118
17.2. Понятие об автомодельности.....	123
17.3. Анализ размерностей.....	124
ПРИЛОЖЕНИЯ.....	129
ЛИТЕРАТУРА.....	133

Витебский государственный технологический университет

## ВВЕДЕНИЕ

Гидрогазодинамика изучает законы равновесия и движения жидких и газообразных тел, применение этих законов для решения технических задач. Дисциплина базируется на высшей математике (теория поля, дифференциальные уравнения), физике (механика, свойства жидкостей и газов), теоретической механике.

Теоретические и экспериментальные исследования показывают, что газы при скоростях, меньших по сравнению скоростью распространения звука в них, ведут себя как несжимаемые жидкости. А капельные жидкости, например вода, при больших давлениях ведут себя как сжимаемые жидкости.

В гидрогазодинамике принимается гипотеза о сплошности жидкости. Условие сплошности выполняется в случае, если размеры рассматриваемых объемов жидкости значительно превосходят характеристики молекул и их движения (размеры, длина свободного пробега и проч.). Следовательно, в гидрогазодинамике отбрасываются от дискретного молекулярно-атомного строения вещества, считая, что все пространство непрерывно заполнено веществом.

Одним из свойств жидкости является текучесть – свойство жидкости принимать форму той емкости, в которой она находится. Текучесть обусловлена тем, что жидкость в покое не способна сопротивляться внутренним касательным усилиям, т.е. усилиям, действующим вдоль поверхности сдвига. Следовательно, жидкости мало сопротивляются деформациям сдвига (взаимному скольжению слоев жидкости), т.е. обладают хорошей подвижностью или текучестью.

Учет внутреннего трения (вязкости) значительно усложняет изучение законов движения жидкости, в связи с чем в гидрогазодинамике вводится понятие идеальной (невязкой) жидкости. Идеальная жидкость характеризуется абсолютной подвижностью (отсутствием сил взаимодействия между молекулами) и абсолютной неизменяемостью в объеме при изменении температуры или под действием каких-либо сил. Таким образом, в идеальной жидкости отсутствуют касательные напряжения при ее движении, т.е. она не сопротивляется сдвигающим усилиям.

При изучении процессов гидрогазодинамики широко применяется математическое моделирование. Основными чертами математических моделей, определяющими уровень соответствия модели изучаемому объекту и возможность ее реализации, являются адекватность и простота. Удовлетворительная адекватность определяется, прежде всего, выбором соответствующей умозрительной физической модели; достаточная простота использованием хорошо обусловленных приемов и методов информационного упрощения. Последнее особенно важно в приложениях, где математическое моделирование служит основой разработки инженерных методов расчета технологических агрегатов и систем, использующих жидкости и газы в качестве рабочих тел.

В результате изучения дисциплины гидрогазодинамика инженеры специальности 1-43 01 07 «Техническая эксплуатация энергооборудования организаций»

должны иметь представление:

- о теории подобия и размерности в процессах движения жидкости и газа;

- об основах моделирования, гидромеханических явлениях;

должны знать:

- основные законы механики жидких и газообразных сред;

- модели течения жидкости и газа;

должны владеть:

- методами расчета жидких и газовых потоков;

- приемами постановки инженерных задач для решения их коллективом специалистов различных направлений;

должны уметь пользоваться:

- использования математических моделей гидромеханических явлений и процессов для расчетов на ЭВМ;

должны иметь опыт:

- проведения гидромеханических экспериментов в лабораторных условиях.

Зарождение отдельных представлений из области гидромеханики следует отнести к глубокой древности на основе практических сведений, накопленных в Египте, Месопотамии, Греции и Китае в результате гидротехнических работ. Устройства и машины, созданные Ктесибием и Героном, в Александрии были образцами для подражания в течение многих столетий. В Древнем Риме сооружались сложные системы водоснабжения. В Древней Греции появился впервые термин «гидравлика», первоначально обозначающий «искусство сооружения музыкальных инструментов типа органов, использующих вертикальные трубы, частично заполненные водой». Этимология термина связана с двумя греческими словами: «гидр» - вода и «авлос» - труба, трубка.

Период Средневековья обычно характеризуется как регресс. Однако именно в это время были созданы универсальные энергетические машины водяные колеса различных типов и размеров, послуживших основой промышленной революции нового времени.

Эпоха Возрождения неразрывно связана, прежде всего, с именем Леонардо да Винчи (1452-1519), явившимся основоположником гидравлики как науки. Голландский инженер и математик Симон Стевин (1548-1620) решил задачу об определении силы давления, действующей на плоскую фигуру. Он также впервые объяснил гидростатический парадокс. Великий итальянский физик Галилео Галилей (1564-1642) опубликовал трактат по гидростатике. Он также показал, что сила гидравлического сопротивления возрастает с увеличением скорости движущегося в жидкости твердого тела и с ростом плотности жидкой среды.

Период с начала XVII до конца XVIII в.в. является временем формирования теоретических основ механики жидкости и газа. Бенедетто Кастелли

(1577-1644) преподаватель математики в городах Пиза и Рим, четко изложил принцип неразрывности движения жидкости (уравнение расхода). Эвандже-лист Торричелли, выдающийся математик и физик, изобрел ртутный баро-метр и установил формулу для истечения жидкости в виде закона подобия. Блез Паскаль (1623-1662) сформулировал основной закон гидростатики о не-зависимости значения гидростатического давления от ориентировки поверх-ности в рассматриваемой точке. Он же показал возможность применения для измерения атмосферного давления различных жидкостей. Исаак Ньютон (1643-1727) установил квадратичный закон сопротивления при обтекании и дал описание закона вязкого трения в жидкости. Важный этап в становлении инженерного образования связан с созданием Леонардом Эйлером (1707-1783), Д-Аламбером (1717-1783) и Лагранжем (1736-1813) аналитической механики. Даниил Бернулли (1700-1782) впервые в 1738 году ввел термин «гидродинамика». Так был назван и его знаменитый труд, изданный в Страсбурге. Его отец, Иоганн Бернулли (1667-1748), опубликовал в 1743 году трактат под названием «Гидравлика». основополагающая работа Эйлера с выводом системы уравнений движения идеальной жидкости увидела свет в 1755 году.

Наибольшие успехи в рамках модели идеальной жидкости были достигнуты Гельмгольцем и Кирхгофом, разработавшими методы теории функций комплексной переменной. Дальнейшее развитие эти методы получили в работах Н.Е. Жуковского, С.А. Чаплыгина и их учеников.

Основы учения о движении вязкой жидкости были заложены Луи Мари Анри Навье (1785-1836). Джордж Габриель Стокс (1819-1903) дал вывод уравнений движения вязкой жидкости в современной форме и опубликовал ряд точных решений. Осборн Рейнольдс (1842-1912) распространил уравнения Навье-Стокса на случай турбулентного движения, сформулировал условия перехода от ламинарного режима течения к турбулентному, объяснил явление кавитации, дал систему уравнений смазочного слоя. Слово «турбулентность», по всей вероятности, впервые ввел в 1887 году выдающийся английский физик Уильям Томсон, лорд Кельвин (1824-1907). Немецкий меха-ник Людвиг Прандтль сформулировал основные понятия теории пограничного слоя, развитые в дальнейшем Теодором фон Карманом, Карлом Польгаузенем, Л.И. Седовым, Л.Г. Лойцяным, В.С. Авдуевским. В.М. Иевлевым. Первые работы по расчету турбулентного пограничного слоя с при-влечением полуэмпирических гипотез А.Н. Колмогорова были выполнены Г.П. Глушко. Дальнейшие развитие эти идеи получили в работах Сполдинга и Петанкара.

Основоположниками теоретической газовой динамики следует считать немецкого математика Б.Римана (1826-1866), впервые получившего решения дифференциальных уравнений газовой динамики, и русского ученого-механика С.А.Чаплыгина (1869-1942), разработавшего метод исследования

установившихся течений газа, носящего сегодня его имя. Важные экспериментальные данные были получены в XIX веке многими исследователями:

Сен-Венаном, Гюгонио, Жуге, Сен-Венаном, Гюгонио, Жуге, Н.В. Маиевским, Э.Махом. Развитие теоретической газовой динамики в текущем столетии связано с целым рядом имен выдающихся ученых, таких как Л.Прандль, Т.Карман, Н.Е. Жуковский, А.Бузман, Г.Гудерлей, К.Фридрихс, М.А.Лаврентьев, Л.И.Седов, С.А.Христианович, М.В.Келдыш, А.А.Дородницын, Ф.И.Френкель и др.

Основоположником численного анализа дифференциальных уравнений в частных производных следует считать Ричардсона (1910), первое численное решение уравнений в частных производных для задач гидродинамики вязкой жидкости дано Томом в 1933 году. Очень важным этапом для дальнейшего развития вычислительной гидромеханики стала работа Аллена и Саусвелла, выполненная вручную по расчету обтекания цилиндра вязкой несжимаемой жидкостью. Развитие ЭВМ придало применению численных методов в механике жидкости и газа лавинообразный характер. В этом направлении известны труды фон Неймана, Харлоу, Фромма, Сполдинга, Петанкара, О.М. Белоцерковского, А.А. Самарского, С.К. Годунова.

# 1 ОСНОВНЫЕ ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА И ПАРАМЕТРЫ ЖИДКОСТИ. СИЛЫ И НАПРЯЖЕНИЯ

Жидкостями называют физические тела, легко изменяющие свою форму под действием поверхностных и массовых сил. Различают два вида жидкостей:

1. Капельные (несжимаемые).
2. Газообразные (сжимаемые).

## 1.1 Плотность

Выделим в жидкости некоторый объем  $\Delta V$ . Пусть масса жидкости в этом объеме равна  $\Delta m$ . Тогда  $\frac{\Delta m}{\Delta V} = \rho$  будет называться средней в данном объеме плотностью жидкости (если жидкость неоднородна).

Уменьшая  $\Delta V$  до нуля, находя предел

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta m}{\Delta V} \right| = \rho, \quad (1.1)$$

получим истинное значение плотности в данной точке.

Таким образом, плотностью жидкой среды в данной точке называют предел, к которому стремится средняя плотность в данном объеме при стремлении этого объема к нулю.

Плотность – это масса единицы объема

$$\rho = \frac{m}{V}. \quad (1.2)$$

Плотность выражается в  $\text{кг}/\text{м}^3$ .

Если тело однородно, то удельный вес – это вес единицы объема

$$\gamma = \frac{G}{V} = \frac{gm}{V}. \quad (1.3)$$

Как следует из (1.3), удельный вес выражается в  $\text{Н}/\text{м}^3$ . Заменяя в (1.3)  $m/V$  его значением из (1.2), получаем связь между плотностью и удельным весом:

$$\gamma = \rho g. \quad (1.4)$$

Величина, обратная плотности, называется удельным объемом

$$v = \frac{1}{\rho} = \frac{V}{m}. \quad (1.5)$$

Следовательно, это объем, занимаемый единицей массы.

Под сжимаемостью жидкости понимают уменьшение её объема и изменение плотности при влиянии внешнего давления. Это свойство жидкости характеризуется коэффициентом объемного сжатия  $\beta_v$  ( $\text{Па}^{-1}$ ), который представляет собой относительное уменьшение объема жидкости, приходящееся на единицу изменения давления:

$$\beta_V = \frac{V_1 - V_2}{p_2 - p_1 V_1}, \quad (1.6)$$

где  $V_1$  и  $V_2$  – соответственно начальный и конечный объемы жидкости;  
 $p_1$  и  $p_2$  – соответственно начальное и конечное давления.

Величина, обратная коэффициенту объемной сжимаемости, называется модулем упругости жидкости (Па):

$$E_0 = \frac{1}{\beta_V} \quad (1.7)$$

Изменение объема жидкости в зависимости от температуры характеризуется температурным коэффициентом объемного расширения  $\beta_t$  ( $^{\circ}\text{C}^{-1}$  или  $\text{K}^{-1}$ ), который показывает относительное изменение объема жидкости при изменении ее температуры на  $1^{\circ}\text{C}$  или  $1\text{K}$ :

$$\beta_t = \frac{V_2 - V_1}{T_2 - T_1 V_1}, \quad (1.8)$$

где  $T_1$  и  $T_2$  – соответственно начальная и конечная температуры.

## 1.2 Вязкость

Под вязкостью понимают свойство жидкости оказывать сопротивление перемещению ее частиц. Физической причиной вязкости является молекулярное взаимодействие. Вследствие различия в молекулярной структуре капельных жидкостей и газов различна и природа их вязкостей. В жидкостях вязкость есть проявление сил сцепления между молекулами, в газах она – результат взаимодействия, обусловленный хаотическим движением молекул. Поэтому при повышении температуры в газах вязкость увеличивается за счет более интенсивного движения молекул. Наоборот, в капельных жидкостях повышение температуры приводит к снижению вязкости, т.к. происходит увеличение среднего расстояния между молекулами.

Равновесное состояние вещества характеризуется распределением его параметров в пространстве. Если за счет какого-либо воздействия окажется, что в каком-то месте пространства возникла неравновесность, то в веществе начинает происходить механический или тепловой обмен, который стремится сгладить неравномерность. В общем случае этот обмен называют процессом переноса. В различных явлениях можно наблюдать процессы переноса энергии, массы (вещества) и количества движения. Как будет показано ниже, вязкость обусловлена процессом переноса количества движения.

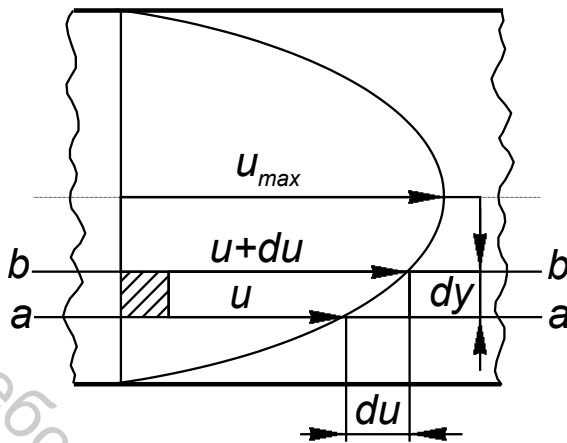


Рис. 1.1

Рассмотрим течение жидкости в круглой трубе (рис.1.1). Будем считать, что векторы скоростей частиц параллельны оси  $x$ .

Установим вид распределения скоростей в поперечном сечении потока. Очевидно, что скорости частиц, находящихся на стенках трубы, равны нулю и возрастают по мере приближения к оси (на оси  $u = u_{\max}$ ).

Рассмотрим два слоя жидкости ( $a-a$  и  $b-b$ ), расположенные на расстоянии  $dy$ .

Пусть слой  $a-a$  движется со скоростью  $u$ , тогда, как следует из эпюры, слой  $b-b$  имеет скорость  $u+du$ . Таким образом, на верхней и нижней границах прямоугольной жидкой частицы, расположенной между слоями, скорости различны, что в соответствии с законами механики должно привести к ее деформации. Заметим, что такое движение в гидромеханике называют простым сдвигом, либо течением чистого сдвига.

Взаимодействие молекул через этот элемент приводит к появлению касательной составляющей напряжения. При этом знак этой составляющей, т.е. ее направление, таково, что оно соответствует уменьшению разности скоростей по обе стороны рассматриваемого элемента. Величина силы трения, возникающая между слоями движущейся жидкости, определяется по формуле, предложенной Ньютоном

$$F_{тр} = \mu \frac{du}{dy} S \quad (1.9)$$

где  $S$  – площадь поверхности соприкасающихся слоев;

$\mu$  – динамическая вязкость, зависящая от физической природы жидкости, ее агрегатного состояния и температуры, и практически не зависящая от давления. Динамическая вязкость выражается в Па·с.

В технических приложениях часто используется не динамическая, а кинематическая вязкость, представляющая собой отношение

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (1.10)$$

Кинематическая вязкость выражается в  $\text{м}^2/\text{с}$ .

Величина  $\frac{du}{dy}$  характеризует изменение скорости в направлении нормали к ней, либо, если говорить об эпюре – темп изменения скорости. Иногда эту величину называют поперечным градиентом скорости.

Разделим правую и левую части (1.9) на  $S$ . Отношение  $F_{mp}/S$  есть не что иное, как касательное напряжение  $\tau$ , т.е.

$$\tau = \mu \frac{du}{dy} \quad (1.11)$$

Таким образом, можно сказать, что вязкость жидкости – это способность ее оказывать сопротивление касательным напряжениям.

Из (1.11) можно сделать еще один важный вывод. Если жидкость находится в состоянии покоя, то  $u = 0$  и, следовательно,  $\tau = 0$ , т.е. в покоящейся жидкости силы вязкости не проявляются. Выше было высказано предположение, что вязкость обусловлена переносом количества движения. Для того, чтобы убедиться в этом, рассмотрим формулу Ньютона с позиций физических величин, входящих в нее

$$\tau \rightarrow \frac{H}{M^2} \rightarrow \frac{кг \cdot м}{с^2 \cdot м^2} \rightarrow \frac{кг \cdot м / с}{м^2 \cdot с}$$

В числителе – количество движения, т.е.  $\tau$  – это количество движения, переносимое через единицу поверхности в единицу времени.

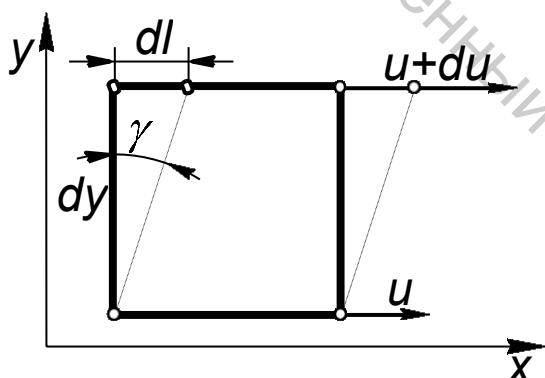


Рис. 1.2

Установим физический смысл поперечного градиента скорости, для чего рассмотрим жидкую частицу, показанную на рис. 1.2. Вследствие разности скоростей на верхней и нижней гранях, первоначально прямоугольная частица будет деформироваться и превращаться в параллелограмм.

Отрезок  $dl$  характеризует величину деформации за время  $dt$ , т.е.

$$dl = du \cdot dt, \quad \text{тогда} \quad \frac{du}{dy} = \frac{dl}{dt \cdot dy}, \quad \text{но}$$

$\frac{dl}{dy} = \text{tg } \gamma$ , тогда  $\frac{du}{dy} = \frac{\text{tg } \gamma}{dt}$ . Следовательно, поперечный градиент скорости

представляет собой скорость относительной деформации сдвига. Таким образом, касательное напряжение в жидкости линейно зависит от скорости относительной деформации. В этом принципиальное отличие жидкости от твердого тела, в котором касательные напряжения зависят от величины деформации, а не от ее скорости.

Жидкости, удовлетворяющие (1.11) называются ньютоновскими, а не подчиняющиеся этой формуле – неньютоновскими. Неньютоновские жидкости не обладают большой подвижностью и отличаются от ньютоновских жидкостей наличием касательных напряжений (внутреннего трения) в состоянии покоя. Причем величина их зависит от вида жидкости. Эта особен-

ность была подмечена Ф.Н. Шведовым (1889г.), а затем Бингемом (1916г.), поэтому такие жидкости (битум, гидросмеси, глинистый раствор, коллоиды, нефтепродукты при температуре близкой к температуре застывания) получили и другое название – бингемовские.

В этом случае касательное напряжение

$$\tau = \tau_0 + \mu du/dy, \quad (1.12)$$

где  $\tau_0$  – начальное напряжение сдвига, после достижения которого рассматриваемая жидкость приходит в движение.

### 1.3 Классификация сил

В покоящейся жидкости отсутствует движение слоев относительно друг друга. Это свидетельствует, что в жидкости действуют не сосредоточенные силы, а силы, непрерывно распределенные по ее массе (объему) и по поверхности. В связи с этим силы, действующие на жидкость, подразделяются на массовые и поверхностные.

#### 1.3.1 Массовые силы

Массовыми называют силы, величина которых пропорциональна массе рассматриваемого объема. Важнейшей особенностью является то, что они действуют на все частицы жидкости. В общем случае это силы, подчиняющиеся второму закону Ньютона  $\vec{F} = m\vec{a}$ . В проекциях на декартовы оси координат можно записать:  $F_x = ma_x$ ;  $F_y = ma_y$ ;  $F_z = ma_z$ . В гидромеханике вместо  $a_x$ ,  $a_y$ ,  $a_z$  принято писать  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ . Поделив обе части запи-

санных выражений на массу, получим  $\frac{F_x}{m} = X$ ;  $\frac{F_y}{m} = Y$ ;  $\frac{F_z}{m} = Z$ .

Таким образом,  $X$ ,  $Y$  и  $Z$  есть проекции единичных массовых сил на соответствующие координатные оси, иногда их называют напряжениями массовых сил. Если в жидкости выделить элементарный объем  $dV$ , то его масса  $-\rho dV$ . В общем случае массовая сила, действующая на этот объем  $\rho \vec{F} dV$ , а главный вектор массовых сил, действующих на весь объем, представляется как

$$\iiint_V \rho \vec{F} dV \quad (1.13)$$

#### 1.3.2 Поверхностные силы

В отличие от массовых, поверхностные силы действуют лишь на частицы, находящиеся на поверхности жидкого объема.

Выделим на поверхности жидкого объема элементарную площадку  $\Delta S$  (рис.1.3), ориентация этой площадки в пространстве задается внешней нормалью  $\vec{n}$ . Обозначим через  $\Delta\vec{p}_n$  поверхностную силу, приложенную к площадке  $\Delta S$ . Предел отношения  $\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{p}_n}{\Delta S} = \vec{p}_n$  называют напряжением поверхностной силы.

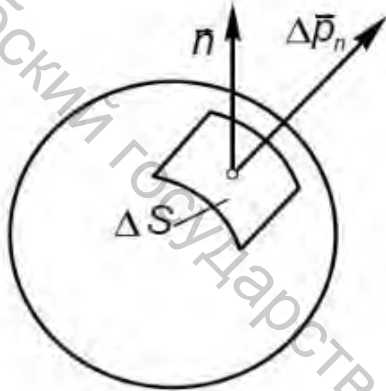


Рис. 1.3

Таким образом, под действием внешних сил, в жидкости возникают напряжения. В общем случае  $\vec{p}_n$  не является обычным вектором. Его величина зависит от ориентации площадки. Это означает, что если через данную точку пространства провести одинаковые по величине, но различно ориентированные площадки, то действующие на них напряжения поверхностных сил будут различны.

Физическая величина, характеризуемая в данной точке вектором  $\vec{p}_n$ , принимающим бесконечное множество значений в зависимости от ориентации площадки, называется тензором напряжений.

Таким образом, на площадку  $dS$  действует поверхностная сила  $\vec{p}_n dS$ , а на всю поверхность, ограничивающую объем  $V$

$$\iint_S \vec{p}_n dS \quad (1.14)$$

Проекция  $\vec{p}_n$  на направление нормали называется нормальным напряжением, а проекция на площадку действия – касательным напряжением.

### 1.3.3 Тензор напряжения

Рассмотрим подробнее вектор  $\vec{p}_n$ . В движущейся среде мысленно выделим частицу в форме жидкого тетраэдра. Пусть  $\vec{n}$  - внешняя нормаль к четвертой (наклонной) грани тетраэдра, а площадь этой грани  $dS$  (рис. 1.4).

Площади других граней - соответственно  $dS_x$ ,  $dS_y$ ,  $dS_z$ , т.к. их можно рассматривать как проекции грани  $ABC$  на координатные оси. Следовательно,  $dS_x = dS \cos \angle(\vec{n}, \vec{x}) = n_x dS$ , где  $n_x$  обозначает направляющий косинус. Аналогично,  $dS_y = n_y dS$ ,  $dS_z = n_z dS$ . Обозначим объем тетраэдра  $dV$ , тогда действующая на него массовая сила  $\rho \vec{F} dV$ , а массовая сила

инерции  $\rho \vec{a} dV$ , где  $\vec{a}$  вектор ускорения жидкого тетраэдра. Поверхностная сила, действующая на наклонную грань –  $\vec{p}_n dS$ . Для трех других граней можем записать

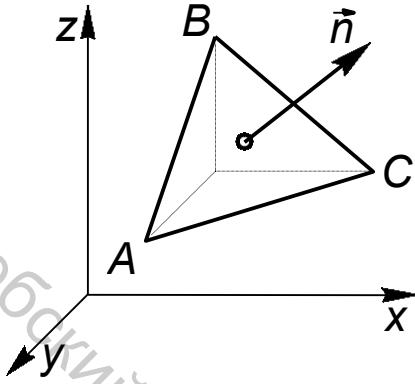


Рис. 1.4

$$\begin{aligned} -\vec{p}_x dS_x &= -\vec{p}_x n_x dS \\ -\vec{p}_y dS_y &= -\vec{p}_y n_y dS \\ -\vec{p}_z dS_z &= -\vec{p}_z n_z dS \end{aligned}$$

Знаки минус указывает, что векторы  $\vec{p}_x$ ,  $\vec{p}_y$  и  $\vec{p}_z$  направлены в стороны, противоположные координатным осям.

Запишем уравнение движения тетраэдра, которое в соответствии с общими законами механики должно иметь вид:

Масса · ускорение = (результатирующая массовых сил) +

$$+ (\text{результатирующая поверхностных сил}).$$

Имеем

$$\rho \vec{a} dV = \rho \vec{F} dV + \vec{p}_n dS - \vec{p}_x n_x dS - \vec{p}_y n_y dS - \vec{p}_z n_z dS. \quad (1.15)$$

Слагаемые  $\rho \vec{a} dV$  и  $\rho \vec{F} dV$  есть величины третьего порядка малости, а остальные – второго, поэтому ими можно пренебречь, что дает

$$\vec{p}_n = n_x \vec{p}_x + n_y \vec{p}_y + n_z \vec{p}_z. \quad (1.16)$$

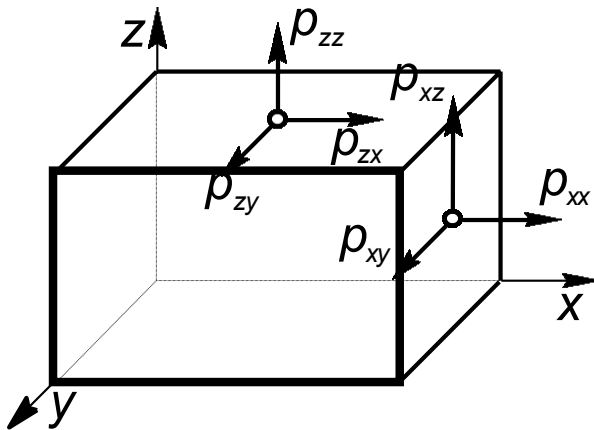


Рис. 1.5

Из этого равенства следует, что напряжение  $\vec{p}_n$  при произвольной ориентации нормали  $\vec{n}$  может быть определено, если известны напряжения в той же точке для площадок, внешние нормали которых параллельны осям  $ox$ ,  $oy$  и  $oz$ .

Проекции векторов  $\vec{p}_x$ ,  $\vec{p}_y$  и  $\vec{p}_z$  на координатные оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  обозначаются:

$$p_{xx} \quad p_{xy} \quad p_{xz}$$

$$p_{yx} \quad p_{yy} \quad p_{yz}$$

$$p_{zx} \quad p_{zy} \quad p_{zz}$$

Первый подстрочный индекс указывает ось, перпендикулярную ориентации площадки, второй – ось, на которую спроектировано напряжение.

Для уяснения ориентации рассмотрим параллелепипед, выделенный в движущейся жидкости и показанный на рис.1.5.

Из рисунка, в частности, видно, что напряжения с одинаковыми индексами являются нормальными, а с разными – касательными. В проекциях на декартовы оси координат выражение (1.16) может быть записано как

$$\begin{aligned} p_{nx} &= n_x p_{xx} + n_y p_{yx} + n_z p_{zx} \\ p_{ny} &= n_x p_{xy} + n_y p_{yy} + n_z p_{zy} \\ p_{nz} &= n_x p_{xz} + n_y p_{yz} + n_z p_{zz} \end{aligned} \quad (1.17)$$

Совокупность этих девяти составляющих компонентов напряжения образует тензор напряжения. В матричной форме он записывается в следующем виде:

$$\Pi = \begin{vmatrix} p_{xx} & p_{yx} & p_{zx} \\ p_{xy} & p_{yy} & p_{zy} \\ p_{xz} & p_{yz} & p_{zz} \end{vmatrix}$$

В тензорном анализе доказывается, что тензор напряжений является симметричным. Это означает, что величины, расположенные симметрично главной диагонали, равны ( $p_{yx} = p_{xy}$ ;  $p_{zx} = p_{xz}$ ;  $p_{zy} = p_{yz}$ ). Следовательно, для определения тензора напряжений достаточно знать не девять, а шесть скалярных величин.

Следует учесть одно обстоятельство. Векторы напряжений  $\vec{p}_x$ ,  $\vec{p}_y$ ,  $\vec{p}_z$  в соотношении (1.16), носящем имя Коши, и приложенные к координатным площадкам, не имеют объективного физического смысла, т.к. зависят от выбора системы координат. Поэтому такие величины причисляются к так называемым «квзивекторам», хотя к ним и можно применять все операции, применимые к физическим векторам.

### 1.3.4 Уравнение движения в напряжениях

Получим наиболее общее уравнение, связывающее поверхностные и массовые силы – так называемое уравнение движения в напряжениях. Для вывода уравнения проанализируем движение жидкой частицы, масса которой  $\rho dV$  и поверхность  $dS$ . Аналогично тому, как это было сделано для тетраэдра, можем записать уравнение движения в виде

$$\rho \frac{d\vec{u}}{dt} dV = \rho \vec{F} dV + \vec{p}_n dS \quad (1.18)$$

Для всего движущегося объема ( $V$ ), поверхность которого  $S$ , имеем

$$\iiint_V \rho \frac{d\vec{u}}{dt} dV = \iiint_V \rho \vec{F} dV + \iint_S \vec{p}_n dS \quad (1.19)$$

Преобразуем поверхностный интеграл в правой части в объемный с учетом того, что, как было показано, тензор напряжений имеет вид

$$\vec{p}_n = n_x \vec{p}_x + n_y \vec{p}_y + n_z \vec{p}_z$$

где  $n_x, n_y, n_z$  – направляющие косинусы.

Воспользуемся известными из векторного анализа и справедливыми для любых векторов формулами

$$\begin{aligned} \iint_S n_x \vec{R} dS &= \iiint_V \frac{\partial \vec{R}}{\partial x} dV \\ \iint_S n_y \vec{R} dS &= \iiint_V \frac{\partial \vec{R}}{\partial y} dV ; \\ \iint_S n_z \vec{R} dS &= \iiint_V \frac{\partial \vec{R}}{\partial z} dV \end{aligned} \quad (1.20)$$

Применяя эти формулы к тензору  $\vec{p}_n$ , получаем:

$$\iint_S \vec{p}_n dS = \iiint_V \left( \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right) dV \quad (1.21)$$

Подставляя это выражение в исходное уравнение, получаем:

$$\iiint_V \left[ \rho \frac{d\vec{u}}{dt} - \rho \vec{F} - \left( \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right) \right] dV = 0$$

Но так как  $dV \neq 0$ , а объем  $V$  выбран произвольно, то

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F} + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \vec{p}_x}{\partial x} + \frac{\partial \vec{p}_y}{\partial y} + \frac{\partial \vec{p}_z}{\partial z} \right) \quad (1.22)$$

Это и есть уравнение движения в напряжениях.

В проекциях на декартовы оси координат можем записать:

$$\begin{aligned} \frac{du_x}{dt} &= X + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \\ \frac{du_y}{dt} &= Y + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial p_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \\ \frac{du_z}{dt} &= Z + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial p_{zz}}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (1.23)$$

Эта система включает в качестве неизвестных девять величин: три проекции скорости и шесть проекций напряжений. Проекции единичных массовых сил, как правило, известны из постановки задачи.

## 2 ГИДРОСТАТИКА

Гидростатика занимается изучением жидкости, находящейся в состоянии относительного покоя. Под относительным покоем понимают состояние, при котором отсутствуют перемещения частиц относительно друг друга.

В основу гидростатики положены две теоремы: равенство нулю суммы всех сил, приложенных к рассматриваемому элементу жидкости и, как следствие, равенство нулю суммы моментов этих сил относительно какой-то оси. Однако, несмотря на простоту принципов, гидростатика приводит к важным результатам и выводам.

### 2.1 Уравнение равновесия жидкости

Выделим в жидкости, находящейся в равновесии, элементарный параллелепипед с ребрами  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , параллельными осям координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (рис. 2.1). Выберем в центре параллелепипеда точку  $A$ . Давление в этой точке будет  $p=f(x,y,z)$ . Так как это давление является непрерывной функцией координат, то, разлагая функцию  $p=f(x,y,z)$  в ряд Тэйлора в окрестности точки  $A$  с точностью до бесконечно малых первого порядка, получим следующие соотношения для давлений  $p_1$  и  $p_2$  в точках 1 и 2 на гранях параллелепипеда, перпендикулярных оси  $x$ :

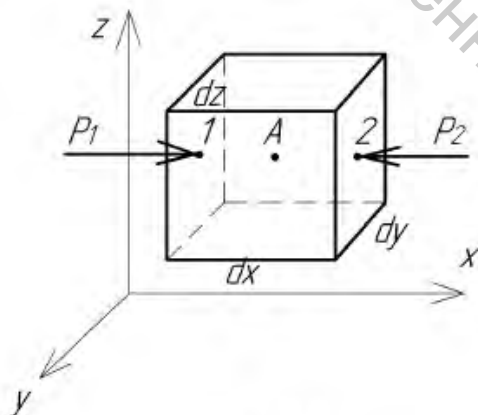


Рис. 2.1.

$$p_1 = p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} dx;$$

$$p_2 = p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} dx.$$

Давления на гранях параллелепипеда можно также записать в виде отношения силы к площади:

$$p_1 = \frac{F_1}{dzdy} = \frac{F_1}{d\omega_x}; \quad p_2 = \frac{F_2}{dzdy} = \frac{F_2}{d\omega_x}. \quad (2.1)$$

Запишем условие равновесия сил, действующих на элементарный параллелепипед, в проекции на ось  $x$

$$F_1 - F_2 + F_m = 0, \quad (2.2)$$

где  $F_m$  — массовая сила, определяемая по формуле

$$F_m = Xdm = X\rho dV = X\rho dx dy dz, \quad (2.3)$$

где  $dm$  - масса элементарного параллелепипеда.

Подставляя формулы (2.1), (2.3) в формулу (2.2), получим

$$p_1 dz dy - p_2 dz dy + X\rho dx dy dz = 0. \quad (2.4)$$

Подставляя формулы для  $p_1$  и  $p_2$  найдем

$$p - \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} dx - \left( p + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{2} dx \right) + X\rho dx = 0.$$

Отсюда

$$X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \quad (2.5)$$

Аналогичные уравнения можно получить, если спроектировать действующие на параллелепипед силы на оси  $y$  и  $z$ . В итоге будем иметь систему трех дифференциальных уравнений вида

$$\left. \begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= 0; \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0; \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

где  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  - проекции ускорений массовых сил, приходящихся на единицу массы.

Эти уравнения впервые были выведены Эйлером в 1755 г. и называются уравнениями равновесия Эйлера. Они показывают, что при равновесии жидкости массовые силы уравновешиваются соответствующими поверхностными силами.

В векторной форме эти уравнения имеют вид

$$F - \frac{1}{\rho} \text{grad } p = 0, \quad (2.7)$$

где  $F = Xi + Yj + Zk$ ;  $i, j, k$  - орты координатных осей;

$$\text{grad } p = \frac{\partial p}{\partial x} i + \frac{\partial p}{\partial y} j + \frac{\partial p}{\partial z} k.$$

При  $i=1 \quad j=k=0$ ; при  $j=1 \quad i=k=0$ ; при  $k=1 \quad i=j=0$ .

Уравнения равновесия жидкости могут быть получены из уравнений движения в напряжениях (1.23), если положить в них  $u_x = u_y = u_z = 0$ .

Кроме того, как было показано, в покоящейся жидкости касательные напряжения не проявляются, т.е. все производные по  $\tau$  равны нулю. И, наконец, нормальные напряжения заменяем давлением, что дает выражение (2.6)

На жидкое тело могут действовать силы, имеющие различную физическую природу. Поэтому правомерна такая постановка вопроса: всегда ли под действием приложенных сил жидкость может находиться в состоянии равновесия? Для ответа на этот вопрос необходимо выполнить некоторые преобразования системы дифференциальных уравнений (3.1).

## 2.1 Основное уравнение гидростатики в дифференциальной форме

Умножим каждое из уравнений, входящих в (2.6) на  $dx$ ,  $dy$  и  $dz$  соответственно и просуммируем их, что даст

$$Xdx + Ydy + Zdz - \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p}{\partial x} dx + \frac{\partial p}{\partial y} dy + \frac{\partial p}{\partial z} dz \right) = 0 \quad (2.8)$$

Выражение, стоящее в скобках во втором члене уравнения, есть не что иное, как полный дифференциал давления -  $dp$ , поэтому можем записать

$$dp = \rho (Xdx + Ydy + Zdz) \quad (2.9)$$

Это уравнение называют основным уравнением гидростатики в дифференциальной форме. В левой части его - полный дифференциал, поэтому и правая часть также должна быть полным дифференциалом. Следовательно, силы и плотность должны быть такими функциями  $x$ ,  $y$  и  $z$ , чтобы они обращали правую часть (2.9) в полный дифференциал. Если этого не происходит, то равновесие жидкости невозможно. Другими словами, если жидкость находится в состоянии равновесия, то правая часть (2.9) является полным дифференциалом какой-то функции  $\Phi$ .

Считая плотность постоянной ( $\rho = \text{const}$ ), можем записать

$$Xdx + Ydy + Zdz = d\Phi \quad (2.10)$$

Из теоретической механики известно, что скалярное произведение силы на элементарное перемещение частицы называют элементарной работой, т.е.

$$f_x dx + f_y dy + f_z dz \quad (2.11)$$

Силы, работа которых не зависит от пути движения, а только от начального и конечного положений, называют потенциальными. При этом для того, чтобы работа силы не зависела от пути движения, необходимо и достаточно, чтобы выражение для элементарной работы, т.е. (2.11), было полным дифференциалом некоторой скалярной функции  $P$ , называемой силовой. Взятая с противоположным знаком, она называется потенциалом. Таким образом, рассмотренную выше функцию можно назвать силовой функцией, а (2.9) представить как

$$dp = \rho d\Phi \quad (2.12)$$

Из чего следует, что несжимаемая жидкость может находиться в равновесии только под действием сил, имеющих потенциал.

## 2.2 Эквипотенциальные поверхности и поверхности равного давления

Поверхности, в каждой точке которых  $\Phi = \text{const}$ , называют эквипотенциальными. Частным случаем эквипотенциальной поверхности является поверхность равного давления, т.е. поверхность, в каждой точке которой  $p = \text{const}$ . В этом случае  $dp = 0$  и (2.12) принимает вид

$$\rho (Xdx + Ydy + Zdz) = 0. \quad (2.13)$$

Но плотность  $\rho \neq 0$ , и, следовательно,

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0 \quad (2.13)$$

Уравнение (2.13) называют уравнением поверхности равного давления.

Рассмотрим наиболее часто встречающиеся случаи.

**Первый случай**, когда на покоящуюся жидкость действует одна внешняя сила, сила тяжести, тогда  $X = 0$ ,  $Y = 0$ ,  $Z = -g$  (направление ускорения свободного падения не совпадает с положительным направлением оси  $Z$ ). В этом случае исходное уравнение имеет вид

$$-gdz = 0 \text{ или } Z = \text{const},$$

т. е. получаем поверхности равного давления, представляющие собой семейство горизонтальных плоскостей. Каждому значению  $Z$  соответствует плоскость, точки которой имеют определенное постоянное значение давления. Свободная поверхность жидкости (для ограниченного объема), в данном случае – одна из плоскостей равного давления. На свободную поверхность будет приложено постоянное давление равное атмосферному.

**Второй случай**, когда поверхность равного давления может быть наклонной. Например, свободная поверхность бензина в железнодорожной цистерне, движущейся горизонтально с ускорением  $a$  (рис.2.2)

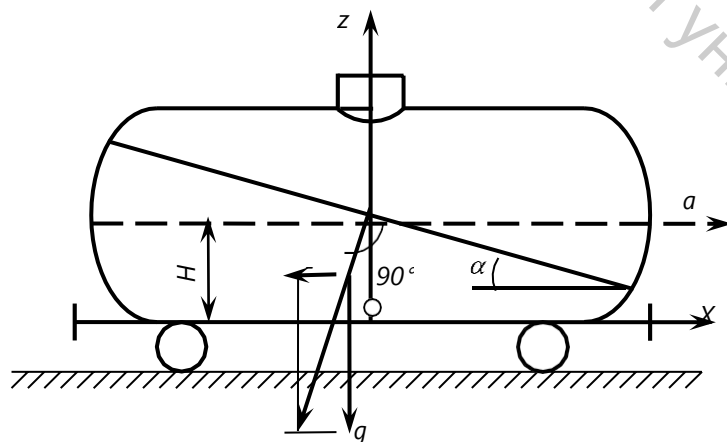


Рис.2.2

В этом случае единичная масса жидкости находится под действием силы тяжести  $Z = -1 \cdot g$  и горизонтального ускорения силы инерции  $X = -1 \cdot a$  (к цистерне приложена сила с ускорением  $a$ , а к жидкости – такая же по величине сила инерции с ускорением  $-a$ ).

Составляющие массовых сил в уравнении получают значения:

$$X = -a; Y = 0; Z = -g$$

Из вышеизложенного следует, что свободная поверхность бензина в цистерне представляет собой плоскость с углом наклона

$$\alpha = \arctg \left( \frac{a}{g} \right)$$

Уравнение в этом случае примет вид

$$dp = -\rho (a dx + g dz) \quad (2.14)$$

После интегрирования получим зависимость распределения давления в любой точке цистерны с бензином

$$P = \rho gh - \rho ax - \rho gz = \rho \left( h - z - \frac{a}{g} x \right) \quad (2.15)$$

Из этого выражения следует, что наибольшее давление будет в точке  $z=0$  и максимальным отрицательным значением  $x$ .

**Третий случай**, когда жидкость находится в открытом цилиндрическом сосуде, вращающемся вокруг его вертикальной оси с постоянной угловой скоростью (рис 2.3).

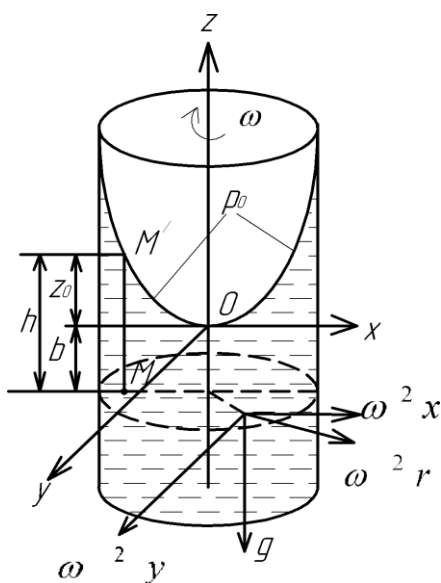


Рис.2.3

В этом случае на частицу жидкости массой  $m=1$  действуют сила тяжести  $G = -1 \cdot g$ , параллельная оси  $z$ , и центробежная сила  $F = \frac{mV^2}{r} = \frac{V^2}{r} = \frac{\omega^2 r^2}{r} = \omega^2 r$ , перпендикулярная к оси  $z$ .

Зависимость распределения давления получим в виде

$$P = \rho \left( \frac{\omega^2 \cdot r^2}{2} - g \cdot z \right) \quad (2.16)$$

Из уравнения видно, что при вращении сосуда наибольшее давление будет в точках у дна и на боковых стенках сосуда.

Уравнение свободной поверхности можно получить при  $P=0$

$$z = \frac{\omega^2 \cdot r^2}{2 \cdot g} \quad (2.17)$$

Кривая  $A-O-B$  – это парабола, а свободная поверхность жидкости – параболоид вращения. Такую же форму имеют и другие поверхности равного давления.

### 2.3 Равновесие однородной несжимаемой жидкости в поле сил тяжести. Закон Паскаля. Гидростатический закон распределения давления

Проинтегрируем основное уравнение гидростатики (2.9) в предположении, что  $\rho = \text{const}$  (жидкость несжимаема) и считая, что из массовых сил действует только сила тяжести. Как показано выше, в этом случае  $X = Y = 0, Z = -g$ , т.е.  $dp = -\rho g dz$ , и после интегрирования

$$p = -\rho g z + C \quad (2.18)$$

где  $C$  – произвольная постоянная. Для ее нахождения используем следующее граничное условие (см. рис. 2.4): при  $z = z_0$   $p = p_0$ . Из (2.18) следует, что

$$C = p_0 + \rho g z_0$$

И после подстановки

$$p = p_0 + \rho g (z_0 - z) \quad (2.19)$$

Как видно из рис. 2.4, разность  $(z_0 - z)$  – глубина погружения рассматриваемой частицы, которую будем обозначать буквой  $h$ , т.е.

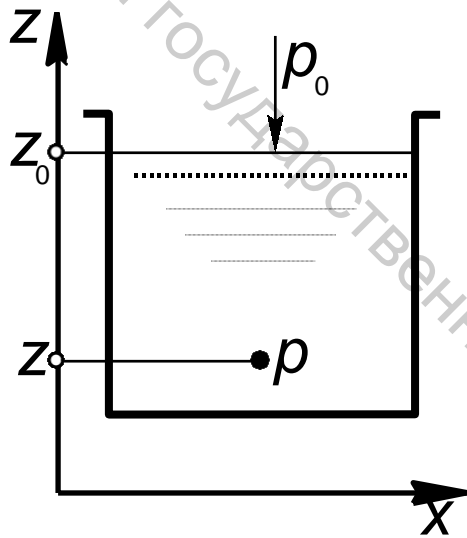


Рис. 2.4

$$p = p_0 + \rho g h \quad (2.20)$$

Полученное уравнение выражает известный из курса физики закон Паскаля: давление, приложенное к свободной поверхности, передается во все точки без изменения.

Поскольку любое правильное физическое уравнение должно быть размерностно однородным, то ясно, что член  $\rho g h$  должен выражаться в единицах давления, т.е. в паскалях (Па – Н/м<sup>2</sup>). Эту величину называют избыточным давлением. Она может быть как положительной, так и отрицательной. Такая трактовка приводит нас к понятию абсолютного давления, которое в соответствии с (2.20) может быть представлено как сумма барометрического (атмосферного) давления и избыточного, т.е.

$$P_{\text{абс.}} = P_{\text{бар.}} \pm P_{\text{изб.}} \quad (2.21)$$

Отрицательное избыточное давление называют вакуумом.

Вернемся вновь к уравнению (2.19). После деления обеих его частей на  $\rho g$  ( $\gamma$ ) получаем

$$z + \frac{p}{\rho g} = z_0 + \frac{p_0}{\rho g} \quad (2.22)$$

В таком виде все его члены выражаются в единицах длины и носят название напоров. Величина  $z$  характеризует положение жидкой частицы над произвольно выбираемой горизонтальной плоскостью отсчета, т.е.  $z$  – это геомет-

рический напор;  $\frac{p}{\rho g}$  – пьезометрический напор. Сумму этих величин

$z + \frac{p}{\rho g}$  называют гидростатическим напором. Чтобы уяснить физический

смысл этих величин, рассмотрим простую схему, показанную на рис. 3.2.

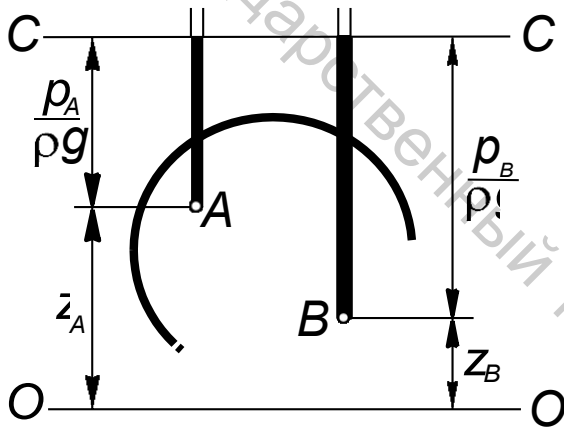


Рис. 2.5

Представим герметично закрытый сосуд, заполненный жидкостью, находящейся под давлением. Выберем в этом сосуде две произвольно расположенные точки  $A$  и  $B$  и произвольную горизонтальную плоскость  $O-O$ , – плоскость отсчета.

Координаты частиц, расположенных в точках  $A$  и  $B$  будут  $z_A$  и  $z_B$ .

В соответствии со сказанным выше,

величины  $z_A$  и  $z_B$  выражают геометри-

ческий напор. Введем теперь через крышку сосуда в точки  $A$  и  $B$  сообщенные с атмосферой стеклянные трубки. Эти трубки называют пьезометрами. Поскольку по условию жидкость находится под давлением, то она начнет подниматься по пьезометрам. Не представляет труда и ответ на вопрос о том, когда прекратится подъем. Очевидно, что это произойдет в тот момент, когда высота столба жидкости уравнивает давление в рассматриваемой точке. Это и есть пьезометрическая высота, либо пьезометрический напор.

Соотношение (2.22) справедливо для любых произвольно выбранных частиц покоящейся жидкости, поэтому в общем виде его можно записать как

$$z + \frac{p}{\rho g} = \text{const}, \text{ т.е. для любых точек жидкости гидростатический напор}$$

одинаков. Следовательно, уровни в пьезометрах установятся на одной и той же высоте (плоскость  $C-C$  на рис. 2.5). Уравнение (2.22) выражает так называемый гидростатический закон распределения давления.

## 2.4 Определение силы давления жидкости на поверхности тел

Задача сводится к нахождению силы давления жидкости на поверхности стенок, ограничивающих ее.

Рассмотрим криволинейную поверхность  $AB$  произвольной формы, площадь которой  $S$  (рис. 2.6). Выделим на ней элементарную площадку  $dS$ , пусть  $\vec{n}$  - орт внешней нормали. Сила, действующая на эту площадку

$$d\vec{F} = p\vec{n}dS. \quad (2.23)$$

где  $p$  - гидростатическое давление в центре площадки. Обычно в технических приложениях интерес представляет лишь сила, возникающая от избыточного давления. Имея в виду, что  $p = \rho gh$ , получаем

$$d\vec{F} = \rho gh\vec{n}dS \quad (2.24)$$

На всю площадь действует сила

$$\vec{F} = \iint_S \rho gh\vec{n}dS \quad (2.25)$$

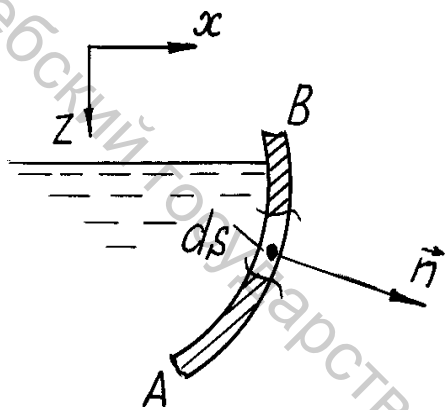


Рис. 2.6

Запишем это выражение в проекциях на оси координат, что дает

$$F_x = \rho g \iint_S h \cos(\vec{n}, \vec{x}) dS. \quad (2.26)$$

$$F_z = \rho g \iint_S h \cos(\vec{n}, \vec{z}) dS. \quad (2.27)$$

Из рисунка 2.6. следует, что

$$dS \cdot \cos(\vec{n}, \vec{x}) = dS_x. \quad (2.28)$$

$$dS \cdot \cos(\vec{n}, \vec{z}) = dS_z. \quad (2.29)$$

где  $dS_z$  - вертикальная, и  $dS_x$  - горизонтальная проекции  $dS$ . Таким образом

$$F_x = \rho g \iint_S h \cdot dS_x. \quad (2.30)$$

$$F_z = \rho g \iint_S h \cdot dS_z. \quad (2.31)$$

Рассмотрим горизонтальную составляющую.

Из механики известно, что интеграл (2.30) есть статический момент площади, равный произведению  $h_{cm} \cdot S_x$ , где  $h_{cm}$  - координата центра тяжести вертикальной проекции.

Следовательно,

$$F_x = \rho g h_{\text{цм}} S_x \quad (2.32)$$

т.е. горизонтальная составляющая равна произведению вертикальной проекции стенки на гидростатическое давление в центре тяжести этой проекции.

Определим теперь вертикальную составляющую силы, для чего воспользуемся следствием из формулы Гаусса-Остроградского (приложение А)

$$\iint_S p \vec{n} dS = \iiint_V \text{grad } p dV$$

Из уравнения равновесия (2.7) имеем  $\rho \vec{F} = \text{grad } p$ , т.е.

$$\iiint_V \text{grad } p dV = \iiint_V \rho \vec{F} dV$$

Вертикальная проекция единичной массовой силы  $\vec{F} = Z = g$  (знак плюс, т.к. в данном случае ось  $z$  ориентирована вниз).

Следовательно,

$$F_z = \iiint_V \rho g dV = \rho g \iiint_V dV = \rho g V \quad (2.33)$$

$V$  носит название объема тела давления. Таким образом, вертикальная составляющая равна весу жидкости, заключенному в объеме тела давления. Для нахождения этого объема следует использовать формальное правило: тело давления - это объем, образованный криволинейной стенкой, ее проекцией на свободную поверхность (либо на продолжение свободной поверхности) и вертикальными проектирующими плоскостями.

### 2.5.1 Плоская поверхность

Этот случай можно рассматривать как частный предыдущего, но можно получить и более удобное соотношение. Действительно, общее выражение для силы давления имеет вид (2.25), но так как поверхность плоская, то ориентация нормали для всех ее точек остается одинаковой, и, следовательно,

$$\vec{F} = \rho g \vec{n} h_{\text{цм}} S \quad (2.34)$$

Из формулы (2.34) следует, что  $\vec{F}$  направлена по нормали к стенке, поэтому можно записать

$$F = \rho g h_{\text{цм}} S \quad (2.35)$$

Следовательно, сила давления на плоскую поверхность равна произведению ее площади на гидростатическое давление в центре тяжести этой поверхности. Следует отметить, что задачи, связанные с определением сил давления на поверхности, играют исключительно важную роль в гидротехнической практике. Применительно к энергетике и машиностроению круг

этих задач заметно сужается и ограничивается, главным образом, расчетом болтовых соединений люков различных резервуаров, находящихся под давлением.

### 2.5.2 Гидростатический парадокс

Формула для силы давления на горизонтальную стенку показывает, что суммарное давление на плоскую фигуру определяется лишь глубиной погружения центра тяжести и площадью самой фигуры, но не зависит от формы того сосуда, в котором находится жидкость. Поэтому, если взять ряд сосудов, различных по форме, но имеющих одинаковую площадь дна  $\omega_r$  и равные уровни жидкости  $H$ , то во всех этих сосудах суммарное давление на дно будет одинаковым (рис. 2.6). Гидростатическое давление обусловлено в данном случае силой тяжести, но вес жидкости в сосудах разный.

Возникает вопрос: как же различный вес может создать одинаковое давление на дно? В этом кажущемся противоречии и состоит так называемый гидростатический парадокс. Раскрытие парадокса заключается в том, что сила веса жидкости действует в действительности не только на дно, но еще и на другие стенки сосуда.

В случае расширяющегося вверх сосуда очевидно, что вес жидкости больше силы, действующей на дно. Однако в данном случае часть силы веса действует на наклонные стенки. Эта часть есть вес тела давления.

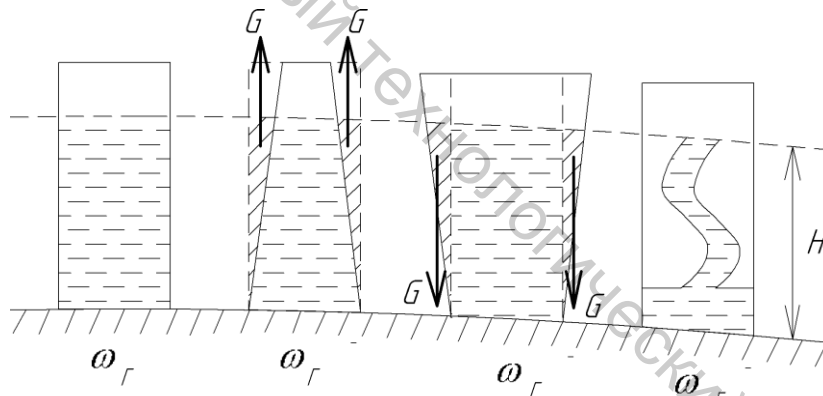


Рис.2.6

В случае сужающегося вверх сосуда достаточно вспомнить, что вес тела давления  $G$  в этом случае отрицателен и действует на сосуд вверх.

### 3 КИНЕМАТИКА

Кинематика занимается изучением движения жидкости, не интересуясь причинами, которые его вызвали. По образному выражению Н.Е.Жуковского, кинематика изучает «геометрию движения».

При изучении движения жидкостей рассматриваются две основные задачи.

1. Заданы гидродинамические характеристики потока (скорость и давление); требуется определить силы, действующие на жидкость.

2. Заданы силы, действующие на жидкость; требуется определить гидродинамические характеристики потока.

Принципиально можно пойти двумя путями. По первому из них изучается движение каждой отдельной жидкой частицы. Чтобы выделить ее, в начальный момент времени  $t_0$  отмечают ее координаты  $x_0$ ,  $y_0$  и  $z_0$ . Движение считается определенным, если в каждый момент времени для каждой частицы известны уравнения, описывающие ее путь во времени, т.е. известны параметрические уравнения траекторий всех частиц. Этот путь предложен Лагранжем. По методу Эйлера изучается изменение скорости и других параметров в точках пространства  $x$ ,  $y$ ,  $z$ .

В гидродинамике применяют оба метода. Однако благодаря простоте более распространен метод Эйлера. По методу Эйлера изучение движения жидкости состоит: а) в исследовании изменений во времени векторных и скалярных величин в некоторой фиксированной точке пространства; б) исследовании изменений этих величин при переходе от одной точки пространства к другой.

Таким образом, в методе Эйлера предметом изучения являются поля тех или иных векторных или скалярных величин. Полем какой-либо величины, как известно, называется часть пространства, в каждой точке которого имеется определенное значение этой величины.

#### 3.1 Установившееся и неуставившееся движения жидкости

**Установившимся (стационарным)** называют движение, при котором основные параметры потока (скорость, давление, плотность) в данной точке пространства не изменяются с течением времени, т.е.

$$\vec{u} = f(x, y, z); \quad p = f(x, y, z); \quad \rho = f(x, y, z). \quad (3.1)$$

Если это условие не соблюдается и параметры в точке меняются с течением времени

$$\vec{u} = f(x, y, z, t); \quad p = f(x, y, z, t); \quad \rho = f(x, y, z, t). \quad (3.2)$$

движение называют неуставившимся (нестационарным).

### 3.2 Уравнение неразрывности (сплошности)

Уравнение неразрывности либо сплошности выражает один из фундаментальных законов природы – закон сохранения массы применительно к жидкой среде.

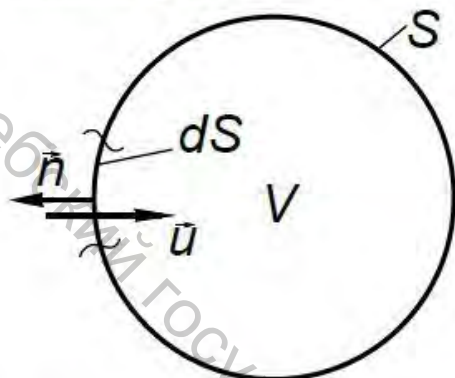


Рис. 3.1

Рассмотрим объем  $V$ , ограниченный поверхностью  $S$  (рис. 3.1). Выделим элемент поверхности  $dS$ . Пусть  $\vec{n}$  – орт внешней нормали, а  $\vec{u}$  – вектор скорости. Через выделенный элемент  $dS$  в единицу времени внутрь объема проникает масса жидкости

$$-\rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS. \quad (3.3)$$

(знак минус, т.к. направления  $\vec{u}$  и  $\vec{n}$  противоположны). Секундная масса, проникающая

в объем через всю поверхность,

$$-\iint_S \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS. \quad (3.4)$$

С другой стороны, приток жидкости в объем приводит к изменению ее массы. При этом, поскольку выделенный объем является постоянным, изменение массы может происходить только за счет изменения ее плотности. Скорость изменения массы можно представить как

$$\frac{\partial}{\partial t} \iiint_V \rho dV, \quad (3.5)$$

либо с учетом того, что  $V = \text{const}$ , можно записать

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \quad (3.6)$$

Очевидно, что изменение массы внутри объема должно быть равно массе, поступившей в него извне, т.е.

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\iint_S \rho \vec{u} \cdot \vec{n} dS. \quad (3.7)$$

Применяя преобразование Гаусса-Остроградского, получим:

$$\iiint_V \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\iiint_V \text{div} (\rho \vec{u}) dV, \quad (3.8)$$

либо

$$\iiint_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{u} \right] dV = 0. \quad (3.9)$$

Равенство нулю интеграла возможно лишь при условии

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \rho \vec{u} = 0. \quad (3.10)$$

Это и есть уравнение неразрывности. Поскольку при выводе его не делалось никаких ограничений, то оно справедливо как для установившегося, так и для неустановившегося движений сжимаемой и несжимаемой жидкости. Уравнение (3.10) относится к числу фундаментальных уравнений механики жидкости.

Рассмотрим некоторые частные случаи. При установившемся движении все производные по времени равны нулю, что следует из самого определения этого понятия, поэтому

$$\operatorname{div} \rho \vec{u} = 0. \quad (3.11)$$

Если движение установившееся и жидкость несжимаема, т.е.  $\rho = \text{const}$ , то

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0. \quad (3.12)$$

Либо в проекциях на декартовы оси координат

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0. \quad (3.13)$$

Установим физический смысл этого соотношения. Частные производные  $\frac{\partial u_x}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u_y}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial u_z}{\partial z}$  характеризуют скорость относительного удлинения (укорочения) жидкой частицы. Если этот процесс происходит одновременно вдоль всех координатных осей, то он приводит к объемному расширению либо сжатию частицы. Ясно, что если частица удлиняется вдоль осей  $x$  и  $y$ , то она должна укорачиваться относительно оси  $z$ . Другими словами, хотя бы одна из производных, входящих в (3.13), должна быть отрицательна, т.к. в противном случае соотношение не может быть равным нулю.

### 3.3 Линии тока и траектории

Линией тока называют такую линию, в каждой точке которой в данный момент времени  $t$  векторы скорости являются касательными к этой линии.

В векторной форме это условие может быть записано как  $\vec{u} \times d\vec{S} = 0$ , т.е. векторное произведение должно быть равно нулю. Это, как известно (приложение 1.4), может быть записано в виде определителя

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ u_x & u_y & u_z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0 \quad (3.14)$$

Раскрывая определитель, получаем дифференциальное уравнение линии тока в виде

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z} \quad (3.15)$$

Под траекторией понимается след, оставленный движущейся частицей в пространстве. Дифференциальное уравнение траектории

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z} = dt \quad (3.16)$$

Из сопоставления (4.8) и (4.9) следует, что в общем случае, т.е. при неустановившемся движении, линии тока и траектории не совпадают.

### 3.4 Трубка тока (поверхность тока)

В движущейся жидкости выделим бесконечно малый замкнутый контур, и через все точки его периметра проведем линии тока (рис. 3.2).

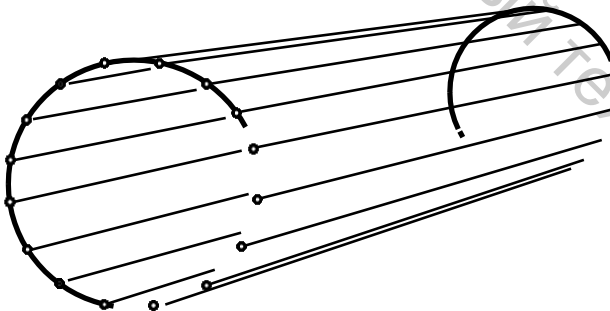


Рис.3.2

Совокупность линий тока, проведенных через какой-либо контур в жидкости, образует поверхность, называемую трубкой тока.

Совокупность линий тока, проведенных через все точки элементарной площадки  $dA$ , составляет элементарную струйку.

Ясно также, что поскольку контур намечался в пространстве, занятом движущейся жидкостью, то какая-то часть ее должна находиться и внутри поверхности тока.

### 3.5 Струйная модель потока

Струйная модель потока введена в рассмотрение Л.Эйлером. Основу этой модели составляет понятие о струйке (либо элементарной струйке), под которой понимают жидкость, протекающую внутри трубки тока.

Так как границами боковой поверхности трубки тока являются линии тока, т.е. линии, к которым касателен вектор скорости частиц, которые в данный момент времени находятся в ней, то ясно, что ни одна частица не может проникнуть извне в струйку, и, наоборот, выйти из нее через боковую поверхность. Действительно, вектор скорости частицы, пытающейся, например, проникнуть в струйку извне, должен быть ориентирован к ее границе

под каким-то углом, а по определению, на самой границе линии тока – вектор скорости касателен. Из сказанного следует, что струйка ведет себя как трубка с непроницаемыми стенками.

Поперечное сечение струйки мало, поэтому можно допустить, что в пределах сечения все частицы движутся с одинаковыми скоростями либо, что то же, эпюра скоростей в сечении представляет собой цилиндр для трехмерной струйки либо прямоугольник – для плоской (двумерной).

Совокупность струек, заполняющих поперечное сечение канала конечных размеров, образует поток.

### 3.6 Уравнение неразрывности для струйки

Первое свойство струйки, говорящее о том, что боковая поверхность непроницаема для частиц, по существу выражает закон сохранения секундной массы. Действительно, если

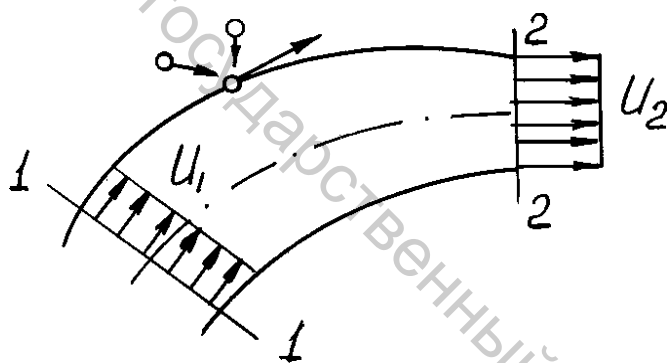


Рис. 3.3

через сечение 1-1 в единицу времени вошла масса  $dm_1$  (рис 3.3), то за то же время через сечение 2-2 должна выйти масса  $dm_2$ , равная  $dm_1$ . Массу жидкости, протекающую через поперечное сечение струйки в единицу времени называют элементарным массовым расходом и обозначают

$dQ_m$ .

Легко убедиться в том, что  $dQ_m = \rho u dA$ , где  $dA$  - площадь поперечного сечения струйки.

Из сказанного выше следует, что

$$\rho_1 u_1 dA_1 = \rho_2 u_2 dA_2 \quad (3.17)$$

Это и есть уравнение неразрывности для струйки. Если жидкость несжимаема, т.е.  $\rho = \text{const}$ , то  $\rho_1 = \rho_2$  и

$$u_1 dA_1 = u_2 dA_2 = \text{const} \quad (3.18)$$

При этом произведение  $u dA$  выражает элементарный объемный расход –  $dQ$ . Уравнение (3.18) называют уравнением неразрывности потока при установившемся движении. Из нее получают важное соотношение

$$u_1 / u_2 = A_2 / A_1. \quad (3.19)$$

т. е. средние скорости обратно пропорциональны площадям живых сечений, которым соответствуют эти средние скорости.

### 3.7 Ускорение жидкой частицы

Запишем выражение для проекции ускорения жидкой частицы на какую-либо координатную ось, например,  $x$ . Имеем

$$a_x = \frac{du_x}{dt}. \quad (3.20)$$

Для нахождения этой величины следует учесть, что проекция скорости  $u_x$  (как и две другие проекции) является функцией координат  $x, y, z$ , которые, в свою очередь, в общем случае зависят от времени  $t$ . Представим величину  $du_x$  в виде полного дифференциала

$$du_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} dt + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz$$

Разделим обе части на  $dt$ . Имея в виду, что  $\frac{dx}{dt} = u_x$ ,  $\frac{dy}{dt} = u_y$  и  $\frac{dz}{dt} = u_z$ ,

получим

$$a_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z}. \quad (3.21)$$

Аналогичные соотношения можно записать и для двух других компонент.

Выражение (3.21) носит название полной либо субстанциональной производной. Установим смысл величин, входящих в нее. Производная  $\frac{\partial u_x}{\partial t}$

- проекция локального ускорения, которое характеризует изменение скорости во времени в данной точке пространства. Локальное ускорение обусловлено нестационарностью процесса. Из чего следует, что если движение стационарное (установившееся), то локальное ускорение отсутствует, т.е.

$\frac{\partial u_x}{\partial t} = 0$ . Три остальных члена (3.21) – проекции конвективного ускорения,

которое возникает при переходе частицы от одной точки пространства к другой, оно обусловлено неравномерностью скоростного поля, т.е. неравномерным распределением скоростей.

### 3.8 Анализ движения жидкой частицы

Движение жидкой частицы является более сложным, чем движение твердого тела, которое, как известно из механики, может быть поступательным и вращательным. Особенностью жидкости и ее частиц, как уже неоднократно отмечалось, является легкая деформируемость. Поэтому помимо поступательного и вращательного, жидкая частица может участвовать и в де-

формационном движении. Это положение и составляет суть так называемой первой теоремы Гельмгольца, к рассмотрению которой мы и приступаем. Оценивая значение работы Г. Гельмгольца, основоположник отечественной аэродинамики Н. Е. Жуковский писал, что «современная гидродинамика своим развитием обязана главным образом Гельмгольцу».

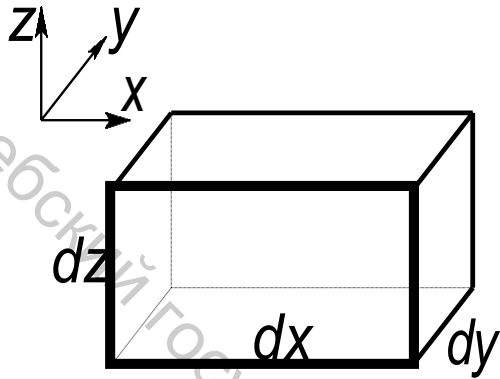


Рис. 3.4

Рассмотрим жидкую частицу в форме прямоугольного параллелепипеда (рис. 3.4). Длина его ребер  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ . Деформация такой жидкой частицы может быть как линейной (ребра удлиняются и укорачиваются), так и угловой (грани скашиваются). Удобней рассмотреть каждый из этих видов отдельно. Начнем с угловых деформаций.

### 3.8.1 Угловые деформации.

Из рис. 3.4 следует, что угловая деформация (скашивание) может возникнуть из-за разности скоростей, перпендикулярных ребрам. Для упрощения целесообразно ограничиться лишь одной гранью, показанной на рис. 3.5.

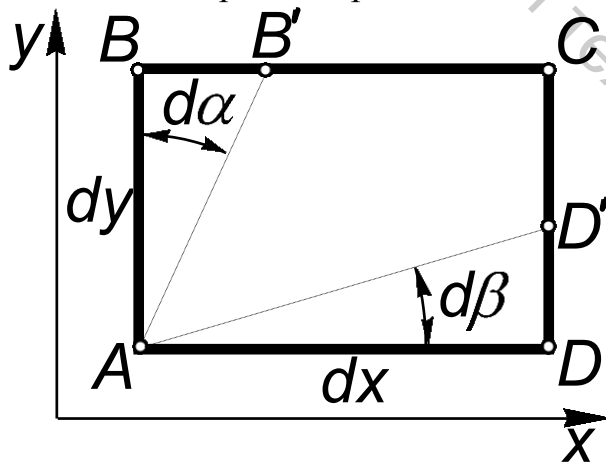


Рис. 3.5

Пусть компоненты скорости в точке  $A$  равны  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$ . Найдем скорости в точке  $B$ , считая, что движение установившееся и, следовательно, все производные по  $t$  равны нулю. Приращение компоненты скорости при переходе из одной точки пространства в другую можно представить как  $u + du$ . Так для проекции  $u_x$  можем записать

$$u_x + du_x, \quad (3.22)$$

Где

$$du_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz$$

Аналогичные выражения можно записать и для других проекций.

Рассмотрим приращение  $u_x$  при переходе от точки  $A$  к точке  $B$ . В этом случае  $dx = dz = 0$ , т.е.

$$u_{x(B)} = u_{x(A)} + du_x = u_{x(A)} + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy. \quad (3.23)$$

Предположим, что за время  $dt$  за счет разности скоростей в точках  $A$  и  $B$  ребро займет положение  $AB'$ .

Аналогично рассуждая относительно скорости  $u_y$  в точках  $A$  и  $D$  получим:

Точка  $A$ :  $u_y$  (по условию)

$$\text{Точка } D: u_{y(D)} = u_{y(A)} + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx$$

За счет разности этих скоростей точка  $D$  займет позицию  $D'$ . Таким образом

$$u_{x(B)} - u_{x(A)} = \frac{\partial u_x}{\partial y} dy; \quad (3.24)$$

$$u_{y(D)} - u_{y(A)} = \frac{\partial u_y}{\partial x} dx. \quad (3.25)$$

Путь, проходимый точкой  $B$  за время  $dt$  в положение  $B'$ , определяет величину скашивания, которую можно найти как

$$BB' = \frac{\partial u_x}{\partial y} dy dt$$

Угловая деформация характеризуется тангенсом угла  $d\alpha$ . При этом

$$\operatorname{tg} d\alpha = \frac{BB'}{AB} = \frac{\partial u_x}{\partial y} dt \approx d\alpha$$

(имея в виду, что  $AB = dy$ ).

Вследствие малости угла  $d\alpha$  можно считать, что  $\operatorname{tg} d\alpha \approx d\alpha$ .

Аналогично,

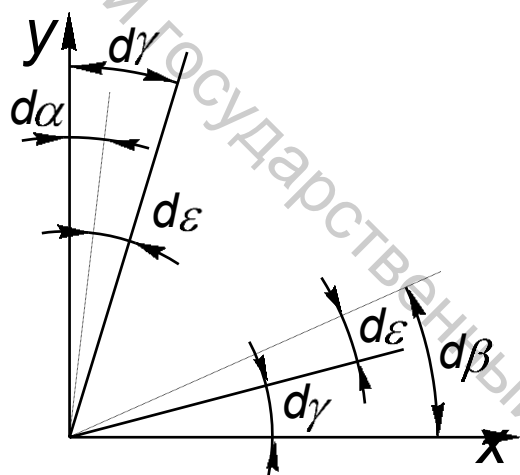
$$\operatorname{tg} d\beta = \frac{DD'}{AD} = \frac{\partial u_y}{\partial x} dt \approx d\beta$$

Полное скашивание первоначально прямого угла  $A$  определяется как сумма

$$d\alpha + d\beta = \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) dt \quad (3.26)$$

Здесь следует обратить внимание на одно весьма существенное обстоятельство: рассматриваемое перемещение ребер вызвано не только деформацией, но и вращением частицы. Действительно, если бы грань только деформировалась без вращения, то ребра повернулись бы на одинаковый угол навстречу друг другу. Наоборот, если бы происходило только вращение, то ребра поворачивались бы на одинаковый угол в направлении вращения.

Следовательно, в общем случае движение элемента можно рассматривать как сумму деформационного и вращательного движений, и таким образом определить  $d\alpha$  и  $d\beta$ . Рассмотрим деформацию прямого угла  $A$ , считая, что вращение происходит против часовой стрелки. Чисто деформационное движение будем характеризовать углами  $d\gamma$ , а чисто вращательное -  $d\varepsilon$ .



Из рис. 3.6 следует, что

$$d\alpha = d\gamma - d\varepsilon$$

$$d\beta = d\gamma + d\varepsilon$$

либо  $d\alpha + d\beta = 2d\gamma$ ,

откуда

$$d\gamma = \frac{1}{2}(d\alpha + d\beta) \quad (3.27)$$

Вычитая, получим

Рис. 3.6

$$d\varepsilon = \frac{1}{2}(d\beta - d\alpha) \quad (3.28)$$

Таким образом, деформация характеризуется полусуммой углов, а вращение - полуразностью. Имея в виду (3.26), можем записать:

$$d\gamma = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) dt \quad (3.29)$$

Скорость угловой деформации, происходящей вокруг оси  $z$

$$\gamma_z = \frac{d\gamma}{dt} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) \quad (3.30)$$

И по аналогии

$$\gamma_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \quad (3.31)$$

$$\gamma_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \quad (3.32)$$

Выражение  $\frac{d\varepsilon}{dt} = \omega$  есть угловая скорость вращения жидкой части-

цы. Проекция угловых скоростей

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \quad (3.33)$$

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \quad (3.34)$$

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \quad (3.35)$$

Соотношения (3.33-3.35) играют исключительно важную роль в механике жидкости. Они устанавливают связь между угловой и поступательной скоростями жидкой частицы. Вопрос о знаках чисто условный. В гидромеханике поворот против часовой стрелки считается положительным, по часовой - отрицательным.

В векторной форме выражение для угловой скорости может быть записано как

$$\vec{\omega} = \vec{e}_x \omega_x + \vec{e}_y \omega_y + \vec{e}_z \omega_z \quad (3.36)$$

Заменяя  $\omega_x$ ,  $\omega_y$  и  $\omega_z$  их выражениями по (3.33 – 3.35) получаем

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \left[ \vec{e}_x \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) + \vec{e}_y \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \vec{e}_z \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \right] \quad (3.37)$$

Сопоставляя выражение в квадратных скобках с формулой (А.7) (приложение А) видим их полную идентичность, поэтому можем записать:

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot } \vec{u} \quad (3.38)$$

либо

$$\text{rot } \vec{u} = 2\vec{\omega} \quad (3.39)$$

Формула (3.39) раскрывает гидромеханический смысл вихря (ротора) векторного поля. Если  $u$  характеризует поле мгновенных скоростей, то векторное поле  $\text{rot } \vec{u}$  представляет собой поле удвоенных угловых скоростей частиц жидкости этого поля.

### 3.8.2 Линейные деформации

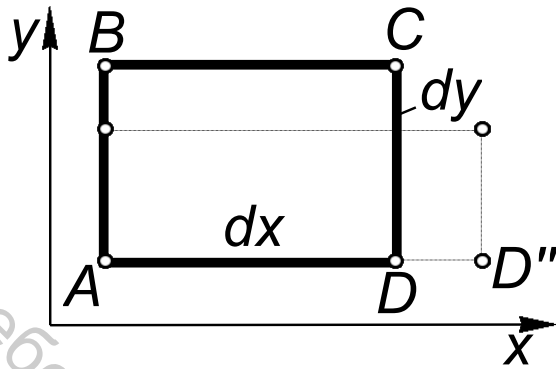


Рис. 3.7

Очевидно, что линейные деформации частицы (рис. 3.7) могут возникнуть в результате различия в скоростях, совпадающих с направлением ребер. Как и ранее, компоненты скорости в точке  $A$  -  $u_x, u_y, u_z$ .

Вдоль оси  $x$ :

Точка  $A$ :  $u_{x(A)}$

Точка  $D$ :  $u_{x(D)} = u_{x(A)} + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx$

Разность скоростей, вызывающая удлинение ребра  $AD$ :

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} dx.$$

Удлинение частицы  $DD''$  за время  $dt$

$$DD'' = \frac{\partial u_x}{\partial x} dx dt \quad (3.40)$$

Относительное удлинение

$$\frac{DD''}{AD} = \frac{\partial u_x}{\partial x} dt = d\varepsilon_x \quad (3.41)$$

Скорость относительного удлинения

$$\frac{d\varepsilon_x}{dt} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = \varepsilon_x \quad (3.42)$$

Аналогично для других осей

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

Если процесс происходит одновременно вдоль всех осей, то это приводит к объемному расширению либо сжатию частицы. Таким образом, объемная деформация сводится к изменению первоначального объема параллелепипеда  $dV = dx dy dz$  на величину  $\delta V = \delta V_x + \delta V_y + \delta V_z$  за счет растяжения либо сжатия ребер. При этом  $\delta V_x = DD'' dy dz$ , и с учетом (3.40)

$$\delta V_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} dV dt. \quad \text{Аналогично } \delta V_y = \frac{\partial u_y}{\partial y} dV dt \quad \text{и} \quad \delta V_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} dV dt.$$

Таким образом

$$\delta V = \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) dV dt. \quad (3.43)$$

Скоростью относительной объемной деформации назовем отношение изменения объема к его первоначальному объему и скорости деформации, т.е.

$$\frac{\delta V}{dV dt} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{u}. \quad (3.44)$$

Если  $\operatorname{div} \vec{u} = 0$ , то это означает, что  $\delta V = 0$ , т.е. деформация жидкой частицы происходит без изменения ее объема. В этом и заключается гидромеханический смысл равенства нулю дивергенции.

Полученную выше связь между поступательной и вращательной скоростями жидкой частицы можно получить и более коротким путем.

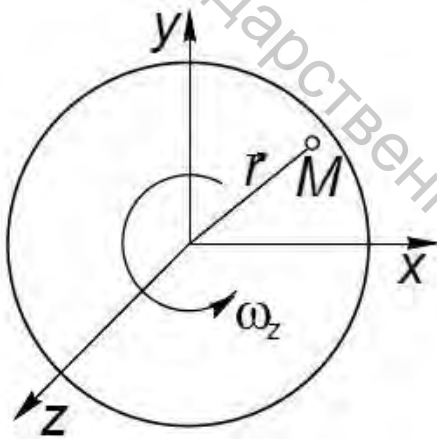


Рис. 3.8

Пусть жидкая частица вращается вокруг оси  $z$  с угловой скоростью  $\omega_z$ . Запишем выражение для ротора в проекциях на оси координат

$$\operatorname{rot}_x \vec{u} = \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z}$$

$$\operatorname{rot}_y \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}$$

$$\operatorname{rot}_z \vec{u} = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y}$$

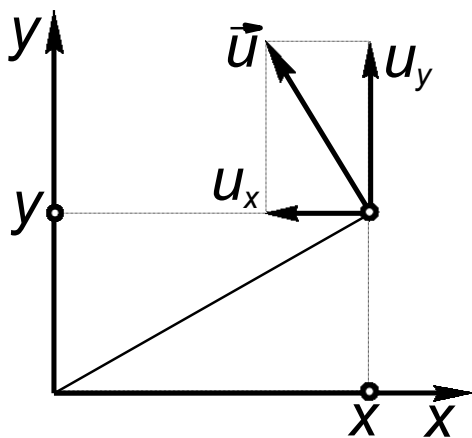


Рис. 3.9

Рассмотрим точку  $M$  на жидкой частице (рис. 3.9).

Линейная скорость этой частицы  $\vec{u} = \vec{\omega}_z \times \vec{r}$ . Запишем выражения для проекций скоростей на оси координат:

$$u_x = -\omega_z y;$$

$$u_y = \omega_z x;$$

$$u_z = 0$$

Откуда находим  $\frac{\partial u_y}{\partial x} = \omega_z$ ;  $\frac{\partial u_x}{\partial y} = -\omega_z$ .

Таким образом

$$\text{rot}_z \vec{u} = \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} = 2\omega_z$$

Аналогично для двух других компонент

$$\text{rot}_x \vec{u} = 2\omega_x; \text{rot}_y \vec{u} = 2\omega_y$$

Либо в векторной форме

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{u}$$

что полностью совпадает с (3.38).

Движение, при котором  $\text{rot} \vec{u} \neq 0$  называют вихревым, при  $\text{rot} \vec{u} = 0$  – безвихревым либо потенциальным. Из чего следует, что если течение вихревое, то движение жидких частиц происходит с вращением.

#### 4 ВИХРЕВОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ

Вихревое движение широко распространено как в природе, так и в разного рода технических устройствах. Поэтому изучение его закономерностей представляет несомненный практический интерес. Вращательное движение жидких частиц характеризуется вихрем скорости

$$\vec{\omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{u} \quad (4.1)$$

Это означает, что в каждой точке пространства вращение жидких частиц может быть охарактеризовано этим вектором. Его модуль

$$\omega = \sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} \quad (4.2)$$

Движение, при котором величина вихря скорости не равна нулю, т.е.  $\text{rot} \vec{u} \neq 0$ , называют вихревым. При условии  $\text{rot} \vec{u} = 0$  движение безвихревое либо потенциальное.

##### 4.1 Кинематика вихревого движения

Кинематические понятия для вихревого движения можно получить по аналогии с общими понятиями кинематики. В основу кинематики вихревого движения положено представление о вихревой линии, которое аналогично понятию линии тока. Вихревой называется линия, в каждой точке которой в данный момент времени вектор вихря скорости совпадает с касательной (рис. 4.1). Другими словами, вихревая линия – это мгновенная ось вращения частиц жидкости, которые в данный момент времени расположены на ней. По аналогии с дифференциальным уравнением линии тока можно записать

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z} \quad (4.3)$$

Вихревая трубка - аналог трубки (поверхности) тока. Это поверхность, образованная вихревыми линиями, проведенными через все точки бесконечно малого замкнутого контура. Вихревая нить - аналог струйки - это жидкость, заключенная в вихревой трубке. Если вихревая трубка имеет конечные размеры, то частицы, заполняющие ее и находящиеся во вращательном движении, образуют вихревой шнур.

#### 4.2 Интенсивность вихря

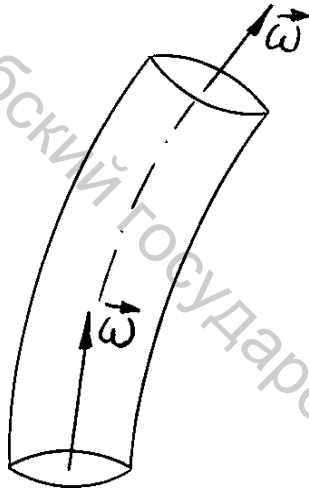


Рис. 4.1

Понятие интенсивности вихря достаточно абстрактно и вводится чисто математически. Напомним, что потоком векторного поля называют интеграл вида

$$\iint_A \vec{u} \cdot \vec{n} dA. \quad (4.4)$$

Поскольку вихрь скорости (ротор) есть вектор, то вместо  $\vec{u}$  можно подставить  $\text{rot } \vec{u}$ , что и приводит нас к понятию интенсивности вихря, т.е. интенсивность вихря – это поток вектора вихря

$$i = \iint_A \text{rot } \vec{u} \cdot \vec{n} dA. \quad (4.5)$$

Можно использовать и другую форму записи:  $\text{rot } \vec{u} \cdot \vec{n} = \text{rot}_n \vec{u}$ ;

$$i = \iint_A \text{rot}_n \vec{u} dA \quad (4.6)$$

Имея в виду, что  $\text{rot } \vec{u} = 2\vec{\omega}$ , можем записать

$$i = 2 \iint_A \vec{\omega} \cdot \vec{n} dA = 2 \iint_A \omega_n dA \quad (4.7)$$

Воспользуемся формулой Гаусса-Остроградского и перейдем от интеграла по поверхности к интегралу по объему. Имеем:

$$i = 2 \iint_A \omega_n dA = 2 \iiint_V \text{div } \vec{\omega} dV = 2 \iiint_V \left( \frac{\partial \omega_x}{\partial x} + \frac{\partial \omega_y}{\partial y} + \frac{\partial \omega_z}{\partial z} \right) dV.$$

Раскроем выражение, стоящее под знаком интеграла, имея в виду, что проекции вектора вихря имеют вид:

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right);$$

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right);$$

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right).$$

Имеем

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial z} \right) = 0.$$

Следовательно, можно записать

$$\iint_A \omega_n dA = 0 \quad (4.8)$$

Заметим, что это выражение по структуре напоминает уравнение неразрывности.

Применим (4.8) к вихревому шнуру (рис. 4.2).

На боковой поверхности  $\omega_n \equiv 0$ , так как  $\vec{\omega}$  направлен по касательной к поверхности. Поэтому можем записать

$$\iint_{A_1} \omega_{n1} dA_1 + \iint_{A_2} \omega_{n2} dA_2 = 0;$$

$$\iint_{A_1} \omega_{n1} dA_1 = \iint_{A_2} \omega_{n2} dA_2.$$

Если допустить, что в пределах сечения  $\omega_n = \text{const}$ , то

$$\omega_{n1} A_1 = \omega_{n2} A_2 \quad (4.9)$$

Либо в общем случае

$$\omega A = \text{const} \quad (4.10)$$

т.е. это своеобразное «уравнение неразрывности». Полученный результат носит название теоремы Гельмгольца о вихрях, которую можно сформулировать следующим образом: интенсивность вихревого шнура на всей его протяженности остается постоянной.

Из выражения (4.10) следует и другой весьма важный вывод, сделанный Г. Гельмгольцем в 1855 г. в работе «Об интегралах уравнений, соответствующих вихревым движениям». Так как произведение  $\omega A$  остается неизменным, то уменьшение площади сечения шнура должно приводить к увеличению угловой скорости вращения частиц. При  $A = 0$   $\omega = \infty$ , что физически невозможно. Следовательно, вихрь не может зародиться либо оканчиваться в толще жидкости. Окончательно развившись, он должен замкнуться

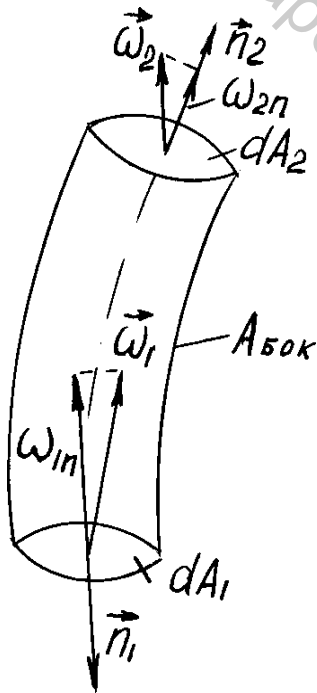


Рис. 4.2

либо на твердую поверхность, либо сам на себя, т.е. образовать вихревое кольцо.

Понятие об интенсивности является весьма важным, но, к сожалению, непосредственное определение этой величины экспериментальным путем связано с непреодолимыми трудностями. Кроме того, если пытаться распространить это понятие на вихри конечных размеров, то по аналогии со средней скоростью пришлось бы вводить понятие о средней угловой скорости, что связано с определенными трудностями чисто математического характера. Поэтому гидромеханика избрала другой путь, заменив это понятие другим, более удобным для целей практики – циркуляцией скорости.

### 4.3 Циркуляция скорости

Рассмотрим крыловой профиль, находящийся в потоке газа (воздуха).

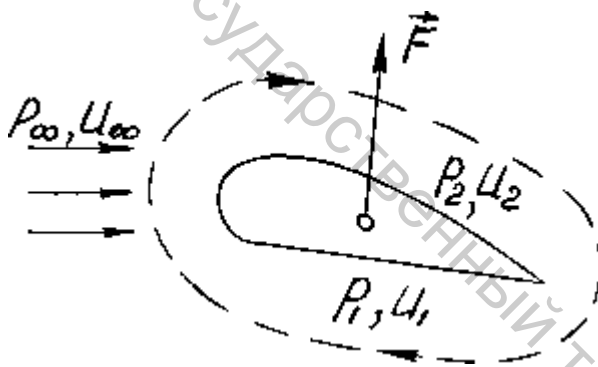


Рис. 4.3

Как известно, на профиль в этом случае будет действовать подъемная сила (см. рис. 4.3). Физически наличие этой силы можно объяснить лишь тем, что давление под профилем ( $p_1$ ) больше, а давление над профилем ( $p_2$ ) меньше, чем давление на каком-то удалении от него, которое мы обозначим  $p_\infty$ . Это позволяет утверждать, что под крыловым профилем скорость  $u_1 < u_\infty$ , а над ним

$u_2 > u_\infty$ . В данном случае  $u_\infty$  - скорость невозмущенного потока.

Вычтем теперь из скоростей  $u_1$  и  $u_2$  скорость  $u_\infty$ , т.е.  $u_1 - u_\infty$  и  $u_2 - u_\infty$ . Это действие приводит нас к понятию потока возмущения, т.е. движения, которое возникает в среде из-за того, что в нее внесено инородное тело, т.е., по существу, это реакция потока, обусловленная в рассматриваемом случае тем, что в ней появился крыловой профиль. Установим теперь направление потоков возмущения. Под профилем  $u_1 < u_\infty$ , и он направлен против скорости  $u_\infty$  над профилем - наоборот. В результате появляется циркуляционный поток, направленный по часовой стрелке, как это показано на рис. 5.3. Теперь необходимо охарактеризовать этот поток количественно. Именно с этой целью вводится понятие циркуляции скорости по замкнутому контуру.

Рассмотрим замкнутый контур  $C$ , показанный на рис. 4.4. Пусть в произвольной точке  $M$  скорость равна  $\vec{u}$ . Составим скалярное произведение  $\vec{u} \cdot d\vec{l}$ , где  $d\vec{l}$  - направленный элемент дуги.

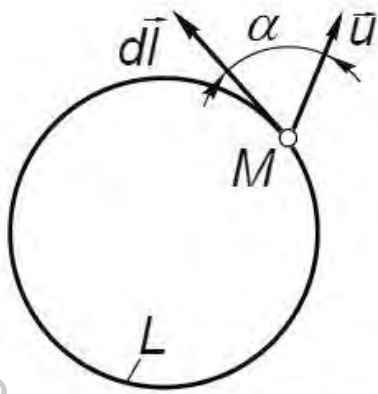


Рис. 4.4

Циркуляцией скорости называют контурный интеграл вида

$$\Gamma = \oint \vec{u} \cdot d\vec{l} \quad (4.11)$$

Обратим внимание на структуру этого соотношения. Оно построено аналогично выражению для работы, поэтому иногда говорят, что циркуляция - это своеобразная «работа» вектора скорости. Имея в виду, что  $\vec{u} = (u_x, u_y, u_z)$  и  $d\vec{l} = (dx, dy, dz)$ , по правилу скалярного произведения получим

$$\Gamma = \oint (u_x dx + u_y dy + u_z dz) \quad (4.12)$$

Для плоского течения:

$$\Gamma = \oint (u_x dx + u_y dy) \quad (4.13)$$

В конце предыдущего раздела утверждалось, что понятие циркуляции является более удобным, чем интенсивность вихря. Действительно, из (4.13) следует, что для определения циркуляции достаточно знать проекции скорости, нахождение которых не связано с существенными трудностями. Однако остается пока открытым вопрос о том, существует ли связь между циркуляцией и интенсивностью вихря. Ответ на него дает теорема Стокса.

#### 4.4 Теорема Стокса

В движущейся жидкости рассматриваем вихревое поле и выделяем в нем малый замкнутый контур со сторонами  $dx$  и  $dy$  (рис. 4.5). Пусть в начале

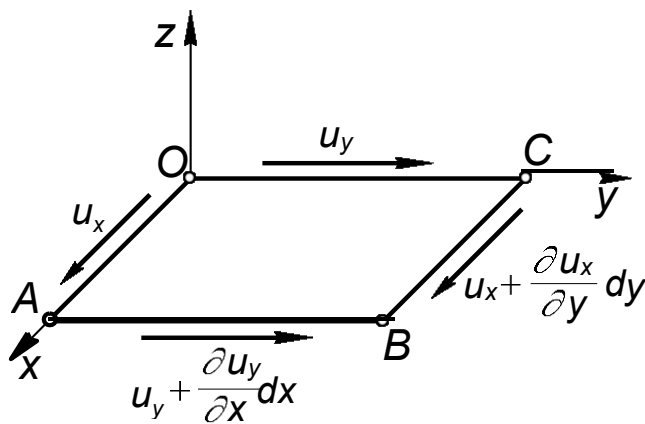


Рис. 4.5

координат скорости будут  $u_x$  и  $u_y$ . Запишем выражение для элементарной циркуляции по этому контуру, имея в виду, что поток двумерный

$$d\Gamma = u_x dx + u_y dy.$$

Рассмотрим контур  $OABC$ . Если вдоль  $OA$  скорость  $u_x$ , то вдоль  $CB$  ее приращение

составит  $\frac{\partial u_x}{\partial y} dy$ , и аналогично вдоль

$AB - \frac{\partial u_v}{\partial x} dx$ . Это следует из выражения для полного дифференциала скорости, например,  $du_x = \frac{\partial u_x}{\partial x} dx + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy$ .

Запишем теперь выражение для элементарной циркуляции вдоль контура  $OABCO$ . Имеем:

$$d\Gamma = u_x dx + \left( u_y + \frac{\partial u_y}{\partial x} dx \right) dy - \left( u_x + \frac{\partial u_x}{\partial y} dy \right) dx - u_y dy$$

Раскрывая скобки и выполнив сокращения, получаем

$$d\Gamma = \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) dx dy = 2\omega_z dA$$

Из чего следует, что циркуляция по бесконечно малому замкнутому контуру равна интенсивности вихря, пронизывающего этот контур.

Таким образом, можем записать:

$$\Gamma = 2 \iint_A \omega_n dA = i \quad (4.14)$$

Это и есть формула Стокса, показывающая, что циркуляция по произвольному контуру равна сумме интенсивностей (напряжений) вихрей, пронизывающих поверхность, натянутую на контур.

## 5 ПОТЕНЦИАЛЬНОЕ ДВИЖЕНИЕ ЖИДКОСТИ

Как уже отмечалось, условием по тенциальности движения является равенство нулю вихря скорости, т.е.  $\text{rot} \vec{u} = 0$ . Физически это означает, что движение жидкости происходит без вращения частиц. Как будет показано, потенциальное движение играет исключительно важную роль в механике жидкости.

### 5.1 Потенциал скорости

Сущность теоремы Стокса, по существу, сводится к утверждению о равенстве числовых значений интенсивности вихря и циркуляции, т.е.

$i = \Gamma$ , либо

$$i = \iint_A \text{rot} \vec{u} \cdot \vec{n} dA = \Gamma$$

С другой стороны, для потенциального потока по его определению  $\text{rot} \vec{u} = 0$ , т.е. в потенциальном поле циркуляция по замкнутому контуру равна нулю.

Запишем выражения для проекций угловых скоростей.

$$\omega_x = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right)$$

$$\omega_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)$$

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)$$

Из сказанного выше следует, что для безвихревого (потенциального) движения  $\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0$ . Следовательно, в этом случае

$$\frac{\partial u_z}{\partial y} = \frac{\partial u_y}{\partial z}; \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} = \frac{\partial u_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad (5.1)$$

Эти соотношения позволяют существенным образом упростить вычисления компонент скорости  $u_x$ ,  $u_y$  и  $u_z$ .

Рассмотрим выражение

$$u_x dx + u_y dy + u_z dz. \quad (5.2)$$

Оно построено аналогично известному из механики твердого тела выражению для элементарной работы. В каком случае приведенное выражение является полным дифференциалом. Напомним, что если выражение для работы является полным дифференциалом, то силы называются консервативными или имеющими потенциал.

При потенциальном движении выражение (5.2) является полным дифференциалом какой-то функции,  $\varphi$  и

$$d\varphi = u_x dx + u_y dy + u_z dz \quad (5.3)$$

С другой стороны, по общему правилу полный дифференциал может быть представлен как

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \quad (5.4)$$

Сопоставляя (5.3) и (5.4), получаем

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (5.5)$$

По предложению Гельмгольца функцию  $\varphi$  называют потенциалом скорости.

Таким образом, всякому движению жидкости, происходящему без вращения частиц, соответствует свой потенциал скорости. Справедливо и обратное утверждение: если существует потенциал скорости, то движение происходит без вращения частиц.

Соотношения (5.5) можно получить и другим путем.

Как уже отмечалось, условием потенциальности является  $\text{rot } \vec{u} = 0$ . С другой стороны, как показано при рассмотрении операций второго порядка, операция ротора над градиентом какой-то скалярной функции тождественно равна нулю, т.е.

$$\text{rot grad } \varphi = 0$$

Сопоставляя эти соотношения, можем записать

$$\vec{u} = \text{grad } \varphi \quad (5.6)$$

Это означает, что вектор скорости можно рассматривать как градиент какой-то скалярной функции  $\varphi$ . Раскроем значения  $\vec{u}$  и  $\text{grad } \varphi$ . Имеем

$$\vec{u} = \vec{e}_x u_x + \vec{e}_y u_y + \vec{e}_z u_z;$$

$$\text{grad } \varphi = \vec{e}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Откуда, учитывая (5.6), получаем

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}; \quad u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

т.е. вновь приходим к соотношениям (5.5).

В задачах гидромеханики определяют силы, действующих на тела, обтекаемые потоками жидкости либо газа. Решение этих задач непосредственно связано с необходимостью расчета поля скоростей, т.е. определением проекций скоростей ( $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$ ) в каждой его точке. Из выражений (5.5) непосредственно следует, что все три компоненты скорости могут быть определены, если известна лишь одна величина – потенциал скорости. Таким образом, знание потенциала скорости существенно упрощает расчет поля. Однако возникает следующая проблема – как найти потенциал скорости течения. Чтобы решить ее, необходимо прежде всего уяснить некоторые свойства, присущие потенциалу.

## 5.2 Уравнение Лапласа

Операция дивергенции над градиентом скалярной функции приводит к оператору Лапласа. Если в качестве скалярной функции использовать потенциал скорости, то можно записать

$$\text{div grad } \varphi = \nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad (5.7)$$

Для несжимаемой жидкости  $\text{div } \vec{u} = 0$ , а  $\text{grad } \varphi = \vec{u}$  (5.6). Таким образом

$$\text{div grad } \varphi = 0 \quad (5.8)$$

или

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (5.9)$$

Выражения (5.8) и (5.9) носят название уравнения Лапласа. Таким образом, для нахождения потенциала скорости необходимо проинтегрировать уравнение Лапласа. Любая функция, удовлетворяющая этому уравнению, носит название гармонической. Следовательно, потенциал скорости является гармонической функцией. Как любое дифференциальное уравнение, уравнение Лапласа имеет бесчисленное множество решений, поэтому для того, чтобы однозначно определить потенциал скорости, необходимо задать граничные условия. Для задач, связанных с обтеканием тел, так называемых внешних задач гидромеханики, такими условиями являются  $u_n = 0$  и  $u = u_\infty$ .

Первое условие характеризует безотрывность течения (равенство нулю нормальной компоненты скорости). Второе – показывает, что вдали от тела распределение скоростей известно.

Поверхности (либо линии для двумерных потоков), в каждой точке которых  $\varphi = \text{const}$ , называются эквипотенциальными.

### 5.3 Циркуляция скорости в потенциальном поле

Рассмотрим плоский (двумерный) поток. Выделим в нем произвольную кривую (рис. 5.1) и запишем выражение для циркуляции вдоль этой кривой

$$\Gamma = \int_A^B u_x dx + u_y dy = \int_A^B \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y} dy = \int_A^B d\varphi = \varphi_A - \varphi_B \quad (5.10)$$

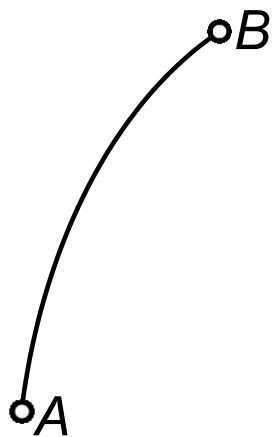


Рис. 5.1

т.е. циркуляция вдоль кривой не зависит от ее формы, а определяется лишь разностью потенциалов в ее конечных точках. Если кривая замкнута, то очевидно, что  $\varphi_B = \varphi_A$  и  $\Gamma = 0$ , т.е. циркуляция по замкнутому контуру в потенциальном поле равна нулю.

### 5.4 Функция тока плоского течения

В практических задачах гидромеханики двумерных потоков широчайшее применение находит понятие о функции тока. Рассмотрим двумерный поток и ограничимся несжимаемой жидкостью.

Как было показано, дифференциальное уравнение линии тока имеет вид

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y}$$

или

$$u_x dy - u_y dx = 0. \quad (5.11)$$

Запишем уравнение неразрывности для этого случая, которое будет иметь вид

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0. \quad (5.12)$$

Аналогично тому, как это делалось при рассмотрении потенциала скорости, поставим вопрос об условиях необходимых и достаточных для того, чтобы выражение (5.11) являлось полным дифференциалом какой-то скалярной функции. Применим к (5.11) условия Клеро (равенство взятых накрест производных). Имеем:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = -\frac{\partial u_y}{\partial y} \quad \text{и} \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0.$$

Но это есть не что иное, как уравнение неразрывности (5.12) для плоского потока, которое удовлетворяется всегда, если только движение существует. Следовательно, можно записать:

$$d\psi = u_x dy - u_y dx \quad (5.13)$$

где  $\psi$  носит название функции тока. С другой стороны, поскольку, как показано выше,  $d\psi$  является полным дифференциалом, то можно записать:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial y} dy \quad (5.14)$$

Сопоставляя (5.13) и (5.14), получаем

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (5.15)$$

Из чего следует, что если функция тока течения известна, то можно определить компоненты скорости в любой точке пространства. Сопоставляя (5.11) и (5.13) приходим к выводу, что если частица движется вдоль линии тока, то функция тока остается постоянной (при  $\psi = \text{const}$ ,  $d\psi = 0$  и (5.13) превращается в (5.11)). Проверим теперь, является ли функция тока гармонической функцией, т.е. удовлетворяет ли она уравнению Лапласа.

Для плоского потенциального течения  $\omega_z = 0$ , но

$$\omega_z = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = 0, \quad \text{откуда} \quad \frac{\partial u_y}{\partial x} = \frac{\partial u_x}{\partial y}. \quad \text{Из (5.15) } u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \text{ и}$$

$$u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad \text{следовательно}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \psi}{\partial y} \right),$$

откуда

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0.$$

Таким образом, функция тока, как и потенциал скорости, является гармонической функцией. И еще одно важное обстоятельство. Если потенциал скорости существует только в потенциальном потоке, то функция тока этим условием не ограничена. Это объясняется тем, что уравнение неразрывности, которое используется для получения этого понятия, справедливо как для вихревого, так и для безвихревого движений.

### 5.5 Гидромеханический смысл функции тока

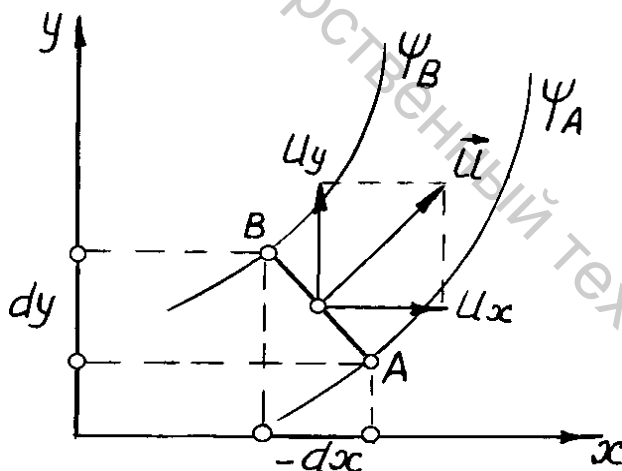


Рис. 5.2

Установим гидромеханический смысл функции тока, для чего проведем две достаточно близко расположенные линии тока (рис. 5.2). Вычислим объемный расход жидкости, протекающий между ними, для чего разложим вектор скорости частицы  $\vec{u}$  на две составляющие  $u_x$  и  $u_y$ , что позволит представить расход как сумму

$$dQ = dQ_x + dQ_y,$$

при этом

$$dQ_x = u_x dy \text{ и } dQ_y = -u_y dx \text{ (рис. 5.2).}$$

$$dQ = u_x dy - u_y dx$$

$$Q = \int_A^B (u_x dy - u_y dx) = \int_A^B d\psi = \psi_B - \psi_A. \quad (5.16)$$

т.е. разность значений функций тока на двух смежных линиях тока равна объемному расходу между ними.

### 5.6 Связь потенциала скорости и функции тока

Связь между этими параметрами может быть легко установлена, если записать полученные выше выражения для проекций скоростей

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}; \quad u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y};$$

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

откуда

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (5.17)$$

Эти соотношения играют чрезвычайно важную роль в механике жидкости и носят название соотношений Коши-Римана, перемножим их. Это дает

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x}. \quad (5.18)$$

Из математики известно, что выражения типа (5.18) свидетельствуют о взаимной ортогональности кривых. Следовательно, линии тока и эквипотенциальные линии образуют сетку взаимно ортогональных кривых, которая носит название гидродинамической сетки движения. Примерный ее вид показан на рис. 5.3.

### 5.7 Наложение потенциальных потоков

Предположим, что имеются два потока с известными потенциалами скорости  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , удовлетворяющими уравнению Лапласа. Из теории линейных дифференциальных уравнений, к которым принадлежит и уравнение Лапласа, известно, что сумма частных решений этих уравнений также является их решением. Другими словами, это означает, что потенциал  $\varphi$ , образованный как  $\varphi_1 + \varphi_2$ , также будет удовлетворять уравнению Лапласа, т.е. бу-

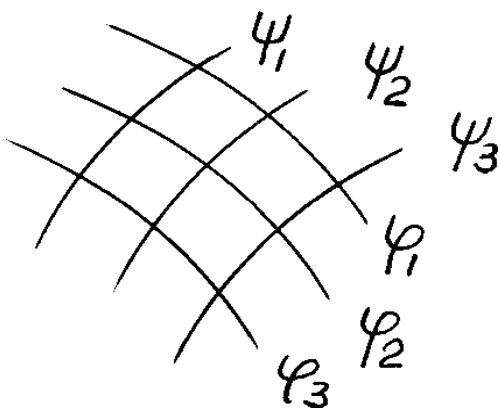


Рис. 5.3

дет описывать какой-то новый поток, имеющий потенциал  $\varphi$ . Из этого следует, что можно получить новый поток путем сложения (наложения) уже известных. Следует обратить внимание на то, что собственно наложение потоков здесь не производится, а речь идет о сложении потенциалов скорости уже известных течений.

Скорость в каждой точке нового потока является суммой скоростей первоначальных потоков. Задача нахождения нового течения может быть решена как гра-

фически, так и аналитически.

Рассмотрим сначала графический метод. Общий подход сводится к следующему. Необходимо построить линии тока течений в одинаковом мас-

штабе, что при достаточной густоте линий тока при пересечении дает фигуру, близкую к параллелограмму (рис. 5.4).

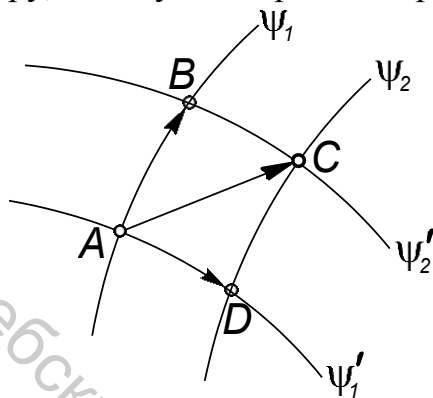


Рис. 5.4

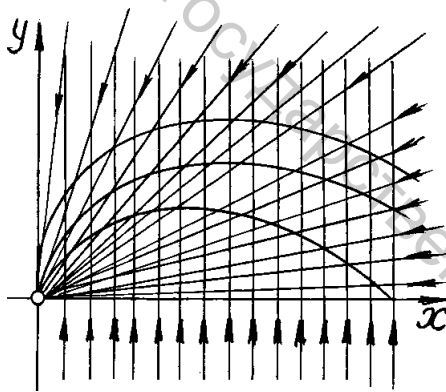


Рис. 5.5

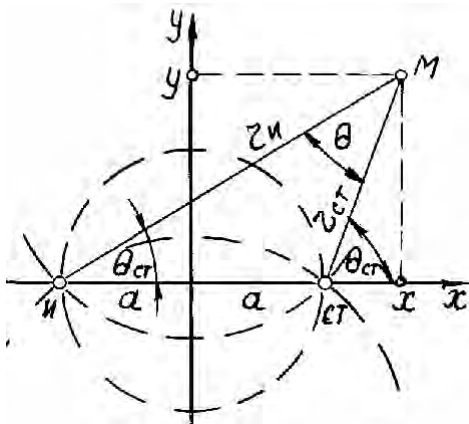


Рис. 5.6

Отрезки  $AB$  и  $AD$  в каком-то масштабе представляют скорости течения, их результирующая определяется как диагональ параллелограмма ( $AC$ ). Для построения такой сетки необходимо соблюсти следующее условие: расход между соседними линиями тока обоих течений должен быть одинаков.

В качестве примера рассмотрим картину течения, образующуюся при наложении плоского параллельного потока на сток (рис. 5.5). Как следует из рис. 5.5, частицы жидкости в новом течении будут двигаться по кривым, направленным к стоку.

Задача, как отмечалось выше, может быть решена и аналитически. В этом случае должны быть известны  $\varphi$  и  $\psi$  обоих течений.

Выполним сложение источника и стока с одинаковыми расходами, симметрично расположенными относительно начала координат на расстоянии  $a$  (см. рис. 5.6).

Потенциалы скорости: источника  $\varphi_u = \frac{Q}{2\pi} \ln r_u$ ;

стока -  $\varphi_{cm} = -\frac{Q}{2\pi} \ln r_{cm}$ .

Выбираем произвольную точку  $M$  с координатами  $x$  и  $y$ . Потенциал скорости в этой

точке  $\varphi = \varphi_u + \varphi_{cm}$ , т.е.

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} (\ln r_u - \ln r_{cm}) = \frac{Q}{2\pi} \ln \frac{r_u}{r_{cm}}$$

Выполним некоторые преобразования этого соотношения.

Из треугольников  $MIx$  и  $MCx$  получаем:

$$r_u = \sqrt{y^2 + \zeta^2 + a^2}$$

$$r_{cm} = \sqrt{y^2 + \zeta^2 - a^2}$$

Следовательно, потенциал скорости нового течения

$$\varphi = \frac{Q}{2\pi} \ln \sqrt{\frac{y^2 + \zeta^2 + a^2}{y^2 + \zeta^2 - a^2}} \quad (5.19)$$

Существенно больший интерес представляет функция тока. Как было показано,  $\psi_u = \frac{Q}{2\pi} \theta_u$  и  $\psi_{cm} = -\frac{Q}{2\pi} \theta_{cm}$ .

Аналогично предыдущему

$$\psi = \psi_u + \psi_{cm} = \frac{Q}{2\pi} (\theta_u - \theta_{cm}) \quad u, \text{ откуда}$$

С другой стороны, из рис. 5.6 следует, что  $\theta_{cm} = \theta + \theta_u - \theta_{cm} = -\theta$ , т.е.  $\psi = -\frac{Q}{2\pi} \theta$ . При этом условию  $\psi = \text{const}$  (т.е. линии тока) соответствует  $\theta = \text{const}$ . Таким образом, линии тока нового течения представляют собой окружности, проходящие через источник и сток.

Рассмотрим теперь картину, образующуюся при сближении источника и стока. Получаемое при сближении источника и стока течение называется диполем. В чем особенность рассматриваемой задачи? Если просто предположить, что расстояние  $a = 0$ , то  $r_u = r_{cm}$ , и  $\varphi$  и  $\psi$  тождественно равны нулю. Поэтому рассмотрим другой предельный случай. Пусть при  $2a \rightarrow 0$  расход  $Q \rightarrow \infty$ , но так, что произведение  $2a \cdot Q = \text{const} = M$ , где  $M$  носит название момента диполя. Таким образом,

$$Q = \frac{M}{2a} \quad (5.20)$$

При этом потенциал скорости диполя

$$\varphi_D = \frac{M}{2\pi} \frac{\ln \sqrt{y^2 + \zeta^2 + a^2} - \ln \sqrt{y^2 + \zeta^2 - a^2}}{2a}$$

Рассмотрим предел этого отношения

$$\varphi_D = \frac{M}{2\pi} \lim_{a \rightarrow 0} \frac{\ln \sqrt{y^2 + \zeta^2 + a^2} - \ln \sqrt{y^2 + \zeta^2 - a^2}}{2a}$$

Разберемся теперь в том, что представляет собой выражение, стоящее под знаком предела. Знаменатель можно рассматривать как приращение независимого переменного, а числитель – как соответствующее приращение функции. Действительно, рассмотрим функцию  $\ln \sqrt{y^2 + x^2}$ . Придадим  $x$  значение  $x+a$  и  $x-a$ . Если теперь из значения функции, соответствующей  $x+a$ , вычтем ее значение при  $x-a$ , то получим числитель. Разность значений независимого переменного  $(x+a) - (x-a) = 2a$  есть знаменатель. Таким образом, мы должны вычислить предел отношения приращения функ-

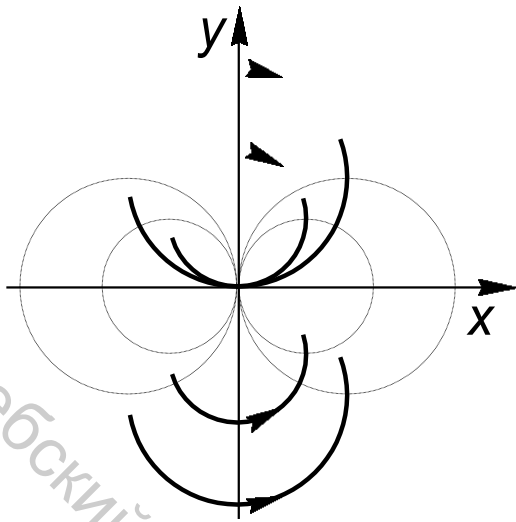


Рис. 5.7

ции к приращению независимого переменного при стремлении последнего к нулю. Как известно, в математике такой предел называют производной функции, т.е.

$$\varphi_D = \frac{M}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \ln \sqrt{x^2 + y^2}$$

Дифференцирование легко выполняется методом подстановок. Пусть

$$u = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad u^* = x^2 + y^2. \quad \text{Тогда}$$

$$z = \ln u; \quad z' = \frac{1}{u} u'; \quad u' = \frac{1}{2\sqrt{u^*}} (u^*)'$$

Имеем:  $u' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad z' = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + y^2}} \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{x}{x^2 + y^2},$

т.е.  $\frac{\partial}{\partial x} \ln \sqrt{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$

Таким образом:

$$\varphi_D = \frac{M}{2\pi} \frac{x}{x^2 + y^2} \quad (5.21)$$

Действуя аналогичным образом, можно показать, что

$$\psi_D = -\frac{M}{2\pi} \frac{y}{x^2 + y^2} \quad (5.22)$$

Из чего следует, что линии тока и эквипотенциальные линии - окружности, касающиеся осей  $Ox$  и  $Oy$  в начале координат (рис. 5.7). Действительно, придавая функции тока постоянные значения, получаем:

$$x^2 + y^2 = Cy$$

где  $C = -\frac{M}{2\pi};$

$$x^2 + y^2 - Cy + \frac{C^2}{4} = \frac{C^2}{4};$$

$$x^2 + \left( y^2 - Cy + \frac{C^2}{4} \right) = \frac{C^2}{4};$$

$$x^2 + \left( y - \frac{C}{2} \right)^2 = \left( \frac{C}{2} \right)^2,$$

а это и есть уравнения окружностей с разными центрами.

## 5.8 Бесциркуляционное обтекание круглого цилиндра

Используя понятие диполя, можно получить весьма интересные и полезные для практических приложений результаты. Для подтверждения этого проанализируем течение, возникающее при наложении прямолинейного поступательного потока на диполь с центром, расположенным в начале координат. Прямолинейный поток движется вдоль оси  $Ox$  со скоростью, равной единице, т.е.  $u_x = u_0 = \text{const}$ ;  $u_y = 0$ . Потенциал скорости

$$d\varphi = u_x dx + u_y dy$$

и  $\varphi = u_0 x$  с точностью до произвольной постоянной.

Функция тока  $d\psi = u_x dy - u_y dx = u_0 dy$  и  $\psi = u_0 y$ . Если, как принято в условии,  $u_0 = 1$ , то  $\varphi = x$  и  $\psi = y$ . Примем для упрощения вы-

кладок момент диполя  $M = 2\pi$ , тогда  $\varphi_D = \frac{x}{x^2 + y^2}$  и  $\psi_D = -\frac{y}{x^2 + y^2}$ .

Складывая потенциалы и функции тока, получаем  $\varphi = x + \frac{x}{x^2 + y^2}$  и

$$\psi = y - \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

Найдем линии тока, для чего приравняем функцию тока постоянной:

$$\psi = y - \frac{y}{x^2 + y^2} = C, \text{ откуда}$$

$$y \left( 1 - \frac{1}{x^2 + y^2} \right) = C \quad (5.23)$$

Из чего следует, что линии тока течения представляют семейство кривых третьего порядка. Найдем нулевую линию тока, т.е. линию, для которой  $C = 0$ . Это дает два уравнения:

$$y = 0 \text{ и } x^2 + y^2 = 1,$$

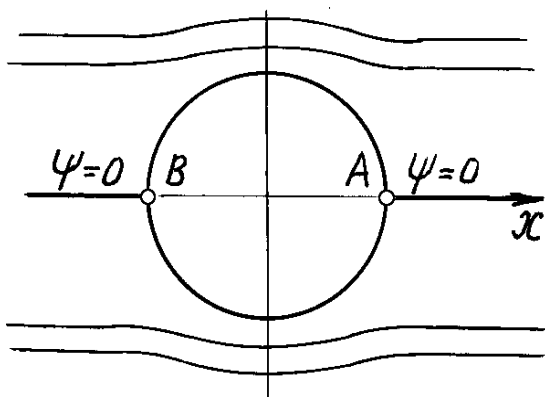


Рис. 5.8

т.е. линия тока представляет собой ось  $x$ -ов и окружность единичного радиуса с центром в начале координат (см. рис. 5.8). Это позволяет рассматривать окружность как твердую границу и течение вне ее, что приводит к задаче обтекания бесконечно длинного цилиндра.

Покажем, что на достаточно большом удалении от цилиндра скорость направлена вдоль оси  $x$  и равна  $u_\infty = 1$ . Найдем проекции скоростей

$u_x$  и  $u_y$ .

$$\text{Имеем: } u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( x + \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = 1 + \frac{x^2 + y^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\text{Откуда } u_x = 1 - \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2};$$

$$\text{аналогично } u_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( x + \frac{x}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Для дальнейшего удобно перейти к полярным координатам, имея в виду, что  $x = r \cos \theta$  и  $y = r \sin \theta$ . Подстановка этих значений в выражения для  $u_x$  и  $u_y$  дает:

$$u_x = 1 - \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{r^2} \quad (5.24)$$

$$u_y = \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} \quad (5.25)$$

Перейдем к пределу. При  $r \rightarrow \infty$  получаем  $u_x(\infty) = 1$  и  $u_y(\infty) = 0$ , т.е. то, что и требовалось доказать.

Точки  $B$  и  $A$ , показанные на рис. 5.8, являются так называемыми особыми либо критическими точками, т.к. скорость в них обращается в нуль. Покажем, что это действительно так, для чего запишем выражение для потенциала скорости в полярных координатах:

$$\begin{aligned} \varphi &= x + \frac{x}{x^2 + y^2} = r \cos \theta + \frac{r \cos \theta}{r^2}; \\ \varphi &= \left( r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta \end{aligned} \quad (5.36)$$

Найдем проекции скорости в произвольной точке на произвольной линии тока (рис. 5.9). Имеем:

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{\partial \varphi}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \left( r + \frac{1}{r} \right) \cos \theta = \left( 1 - \frac{1}{r^2} \right) \cos \theta; \\ u_\theta &= \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} = \left( 1 + \frac{1}{r^2} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \cos \theta = - \left( 1 + \frac{1}{r^2} \right) \sin \theta. \end{aligned}$$

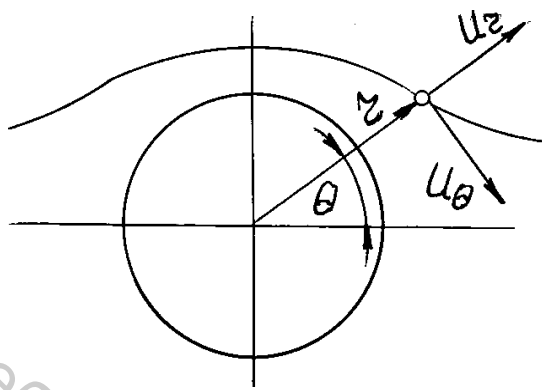


Рис. 5.9

На поверхности цилиндра  $r = 1$  и  $u_r = 0$ , т.е. обтекание безотрывно. Компонента  $u_\theta = -2\sin\theta$ . В общем случае, когда  $u_\infty \neq 1$ ,

$$u_\theta = -2u_\infty \sin\theta$$

Знак «минус» указывает на то, что направление скорости на верхней половине цилиндра противоположно положительному направлению отсчета угла  $\theta$ . В

точках  $B$  и  $A$  ( $\sin\theta = 0$ ) скорости равны нулю, т.е. действительно эти точки являются критическими.

## 6 ГИДРОДИНАМИКА ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

В механике жидкости понятию «гидродинамика» придается весьма широкий смысл. Гидродинамика, в отличие от кинематики, рассматривающей движение жидкости без учета причин, обусловивших его, изучает как само движение, так и причины, приводящие к его возникновению. Движение жидкости вызывается действием сил, а если иметь в виду, что давление есть частное от деления силы на площадь, то можно считать, что причиной возникновения движения частиц с какими-то скоростями является разность (перепад) давлений. Таким образом, для расчета течений необходимо иметь уравнение, связывающее давление в точке со скоростью движения частицы.

### 6.1 Уравнения движения идеальной жидкости.

Уравнения движения идеальной жидкости можно получить из уравнений движения в напряжениях, положив в них все производные от  $\tau$  равными нулю и заменив нормальные напряжения давлениями, имея в виду, что  $P_{xx} = P_{yy} = P_{zz} = -p$ . Таким образом, уравнения гидродинамики принимают вид

$$\begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} &= \frac{du_x}{dt} \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= \frac{du_y}{dt} \\ Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} &= \frac{du_z}{dt} \end{aligned} \quad (6.1)$$

либо в векторной форме

$$\vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad } p = \vec{a} \quad (6.2)$$

Система (6.1) называется системой дифференциальных уравнений Эйлера для гидродинамики, она связывает давления и скорости в движущейся жидкости. Следует помнить, что выражения в правой части уравнений системы являются полными либо субстанциональными производными. Наличие конвективных членов ускорения приводит к тому, что система является нелинейной, содержащей четыре неизвестных: три проекции скорости и давление. Проекция единичных массовых сил обычно известны из постановки задачи.

Три уравнения (6.1) плюс уравнение неразрывности образуют замкнутую систему.

## 6.2 Преобразование Громеки-Лэмба

Рассмотрение теоремы Гельмгольца о движении жидкой частицы показывает, что жидкость как любое материальное тело может участвовать в поступательном и вращательном движениях.

Следует обратить внимание на то, что для совершения работы в современных технических устройствах может использоваться только энергия поступательного движения. Энергия же вращательного (вихревого) движения полностью теряется, рассеивается в окружающей среде, превращаясь в теплоту.

Система уравнений Эйлера (6.1) не учитывает факт существования этих двух движений, что в определенной степени обедняет ее. Поэтому целесообразно использовать преобразование, позволяющее учесть эту особенность движения жидких частиц, называемое преобразованием Громеки-Лэмба. Формально оно сводится к тому, что в выражение для ускорения вводятся члены, характеризующие вращение жидких частиц.

Рассмотрим лишь одну компоненту

$$a_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \quad (6.3)$$

Прибавим и вычтем в конвективной части ускорения выражение

$$u_y \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial x}$$

Скомпонуем члены с учетом знаков:

$$u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + \left( u_y \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \left( u_x^2 + u_y^2 + u_z^2 \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x}$$

$$\begin{aligned}
 & u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} - \left( u_y \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \\
 & = -u_y \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) + u_z \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)
 \end{aligned}$$

Выражения в скобках есть не что иное, как удвоенные компоненты вихря  $\omega_z$  и  $\omega_y$ , т.е. можем записать

$$-2u_y \omega_z + 2u_z \omega_y = 2 \omega_z \omega_y - u_y \omega_z$$

Подставляя полученные значения в (6.3) имеем

$$a_x = \frac{\partial u_x}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial x} + 2 \omega_z \omega_y - u_y \omega_z \quad (6.4)$$

и по аналогии

$$a_y = \frac{\partial u_y}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial y} + 2 \omega_x \omega_z - u_z \omega_x \quad (6.5)$$

$$a_z = \frac{\partial u_z}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial z} + 2 \omega_y \omega_x - u_x \omega_y \quad (6.6)$$

В векторной форме выражение для ускорения будет иметь вид:

$$\vec{a} = \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \text{grad} \frac{u^2}{2} + 2\vec{\omega} \times \vec{u} \quad (6.7)$$

Если движение установившееся, то

$$\vec{a} = \text{grad} \frac{u^2}{2} + 2\vec{\omega} \times \vec{u} \quad (6.8)$$

### 6.3 Уравнение движения в форме Громеки-Лэмба

Если в (6.2) в правую часть подставить ускорение в виде (6.7) либо (6.8), то это приводит к уравнению движения в форме Громеки-Лэмба. Для установившегося движения имеем

$$\vec{F} - \frac{1}{\rho} \text{grad} p = \text{grad} \frac{u^2}{2} + 2\vec{\omega} \times \vec{u} \quad (6.9)$$

Выполним некоторые преобразования (7.9).

В разделе гидростатики было введено понятие о скалярной функции  $\Phi$ , называемой силовой. Было показано, что

$$Xdx + Ydy + Zdz = d\Phi \quad (6.10)$$

Поскольку эта функция является полным дифференциалом, то можно записать

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\Phi}{\partial y} dy + \frac{\partial\Phi}{\partial z} dz \quad (6.11)$$

Сопоставляя (6.10) и (6.11), получаем

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = X; \frac{\partial\Phi}{\partial y} = Y; \frac{\partial\Phi}{\partial z} = Z \quad (6.12)$$

С другой стороны вектор  $\vec{F}$ , проекциями которого являются  $X$ ,  $Y$ , и  $Z$

$$\vec{F} = \vec{e}_x X + \vec{e}_y Y + \vec{e}_z Z \quad (6.13)$$

Из (6.12) и (6.13) следует, что

$$\vec{F} = \vec{e}_x \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial\Phi}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial\Phi}{\partial z} = \text{grad } \Phi \quad (6.14)$$

С учетом (6.14) выражение (6.9) принимает вид

$$\text{grad} \left( \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \Phi \right) = -2\vec{\omega} \times \vec{u} \quad (6.15)$$

Следует иметь в виду, что эта форма записи справедлива лишь для несжимаемой жидкости, т.е. при условии  $\rho = \text{const}$ . И, наконец, уравнению движения (6.15) можно придать более удобную для анализа форму, умножив скалярно его левую и правую части на произвольный направленный отрезок

$$d\vec{l} = \vec{e}_x dx + \vec{e}_y dy + \vec{e}_z dz \quad (6.16)$$

Приведем лишь конечный результат

$$d \left( \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \Phi \right) = -2 \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ u_x & u_y & u_z \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \end{vmatrix} \quad (6.17)$$

#### 6.4 Интегрирование уравнения движения для установившегося течения

Интегрирование уравнения движения (6.17) возможно лишь в случае, когда его правая часть равна нулю. Из теории определителей известно, что признаками равенства нулю являются: равенство нулю какой-либо строки или пропорциональность элементов одной строки элементам другой.

Исходя из физического смысла имеем четыре возможных случая

$$\omega_x = \omega_y = \omega_z = 0 \quad (6.18)$$

$$\frac{u_x}{\omega_x} = \frac{u_y}{\omega_y} = \frac{u_z}{\omega_z} \quad (6.19)$$

$$\frac{dx}{\omega_x} = \frac{dy}{\omega_y} = \frac{dz}{\omega_z} \quad (6.20)$$

$$\frac{dx}{u_x} = \frac{dy}{u_y} = \frac{dz}{u_z} \quad (6.21)$$

Для любого из них можем записать

$$d\left(\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \Phi\right) = 0$$

И после интегрирования

$$\frac{u^2}{2} + \frac{p}{\rho} - \Phi = C \quad (6.22)$$

Если из массовых сил действует только сила тяжести, то, как показано в разделе гидростатики,

$$\Phi = -gz$$

и (6.22) принимает вид

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = C \quad (6.23)$$

Вид уравнения (6.23) одинаков вне зависимости от того, какой из четырех случаев равенства нулю определителя рассматривается. Однако смысл интеграла и область его применения различны.

Первый случай является признаком потенциальности движения. Интеграл (6.23) в этом случае называют интегралом Коши-Лагранжа. Он справедлив для любых точек жидкости, движущейся без вращения частиц, т.е. потенциально.

Второй случай является признаком коллинеарности вектора вихря и вектора скорости. Это весьма редкий случай так называемого винтового движения.

Третий случай характеризует движение жидкой частицы вдоль вихревой линии, а четвертый - движение вдоль линии тока. Интеграл (6.23) при этом носит название интеграла Бернулли. Он справедлив как для потенциального, так и для вихревого движений. Именно этот случай и будет интересовать нас в дальнейшем.

### 6.5 Упрощенный вывод уравнения Бернулли

В вывода уравнения Бернулли положено принимаемое без каких-либо доказательств положение о том, что рассматривается жидкая частица, движущаяся вдоль линии тока. После чего производится преобразование систе-

мы дифференциальных уравнений Эйлера (6.1) путем умножения каждой из его проекций соответственно на  $dx$ ,  $dy$  и  $dz$  и почленного их сложения аналогично тому, как это делалось в гидростатике. Это преобразование уже рассматривалось в случае, когда из массовых сил действуют лишь силы тяжести (см. раздел «Гидростатика»). Оно приводит к соотношению

$$-gdz - \frac{dp}{\rho}.$$

Поэтому рассмотрим лишь правую часть. Имеем

$$\frac{du_x}{dt} dx + \frac{du_y}{dt} dy + \frac{du_z}{dt} dz$$

Считая, что  $\frac{dx}{dt} = u_x$ ;  $\frac{dy}{dt} = u_y$ ;  $\frac{dz}{dt} = u_z$ , можем записать

$$\begin{aligned} u_x dx + u_y dy + u_z dz &= \frac{1}{2} du_x^2 + \frac{1}{2} du_y^2 + \frac{1}{2} du_z^2 = \\ &= \frac{1}{2} d(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) = \frac{1}{2} du^2 = d \frac{u^2}{2} \end{aligned}$$

Таким образом

$$-gdz - \frac{dp}{\rho} = d \frac{u^2}{2}$$

либо

$$gdz + \frac{dp}{\rho} + d \frac{u^2}{2} = 0 \quad (6.24)$$

Это выражение называют уравнением Бернулли в дифференциальной форме. При условии  $\rho = \text{const}$  (для несжимаемой жидкости) интегрирование его дает

$$gz + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} = C \quad (6.25)$$

т.е. соотношение (6.23).

Очевидно, для обеспечения математической строгости следовало бы доказать, что вдоль линии тока проекции вектора скорости могут быть представлены не как частные, а как полные производные от соответствующих координат частицы. Но при этом вывод уравнения Бернулли утратил бы свою простоту.

## 6.6 Энергетический смысл уравнения Бернулли

Прежде чем приступить к анализу физического содержания полученного соотношения, следует вспомнить одно важное обстоятельство. При введении понятия о струйке было показано (см. раздел «Кинематика»), что одним из ее свойств является равномерное распределение скоростей в пределах любого ее поперечного сечения. Это означает, что соотношение (6.25) остается справедливым для любой линии тока, проходящей внутри струйки. Поэтому уравнение (6.25) можно назвать уравнением Бернулли для струйки идеальной жидкости. Для двух произвольных поперечных сечений струйки можно записать

$$gz_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{u_1^2}{2} = gz_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{u_2^2}{2} \quad (6.26)$$

Выясним физический смысл величин, входящих в уравнение Бернулли. В любом физически правильном соотношении все члены имеют одинаковую размерность, поэтому достаточно рассмотреть один из его членов. Наиболее удобно обратиться к третьему –  $u^2/2$ . Эта величина выражается в  $\text{м}^2/\text{с}^2$ .

Умножим и разделим числитель и знаменатель на кг, что дает

$$\frac{\text{м}^2}{\text{с}^2} \frac{\text{кг}}{\text{кг}} \rightarrow \frac{\text{кг} \cdot \text{м} \cdot \text{м}}{\text{с}^2 \text{кг}} \rightarrow \frac{\text{Н} \cdot \text{м}}{\text{кг}} \rightarrow \frac{\text{Дж}}{\text{кг}}$$

Из чего следует, что каждый член уравнения выражает энергию, отнесенную к единице массы, т.е. удельную энергию. Это позволяет придать уравнению Бернулли энергетический смысл. Первые два члена выражают удельную потенциальную энергию (положения –  $gz$  и давления –  $p/\rho$ ), а третий – удельную кинетическую энергию. Следовательно, полная удельная энергия в любом сечении струйки остается неизменной. Другими словами, уравнение Бернулли выражает закон сохранения энергии в ее простейшей форме – форме сохранения механической энергии.

## 6.7 Уравнение Бернулли в форме напоров

В практических приложениях широко используется другая форма уравнения Бернулли – форма напоров. Разделив обе части уравнения (6.26) на ускорение свободного падения  $g$ , получаем

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{u_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{u_2^2}{2g} \quad (6.27)$$

Каждый член (6.27) имеет линейную размерность и выражает напор, под которым в общем случае понимают высоту столба жидкости, уравновешивающую давление в данной точке. Таким образом,  $z$  – геометрический напор, характеризующий положение жидкой частицы над какой-то произвольной плоскостью, называемой плоскостью отсчета;  $\frac{p}{\rho g}$  – пьезометрический напор – высота столба жидкости, уравновешивающая давление в данной точке;  $\frac{u^2}{2g}$  –

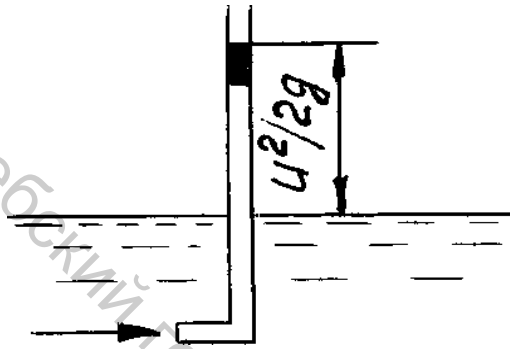


Рис. 6.1

скоростной напор, представляющий собой высоту столба жидкости в трубке полного напора (трубке Пито). Принцип действия этого устройства легко уясняется из рис. 6.1.

Сумма двух первых членов носит название гидростатического напора, а трех – полного либо гидродинамического напора. Таким образом, уравнению Бернулли придается геометрическое толкование, которое сводится к следующему. Сумма трех высот: геометрической ( $z$ ), пьезометрической ( $\frac{p}{\rho g}$ ) и скоростной ( $\frac{u^2}{2g}$ ) есть величина постоянная вдоль струйки. Либо, что то же самое, полный или гидродинамический напор при движении вдоль струйки остается неизменным. Сказанное иллюстрируется рис. 6.2, который иногда называют диаграммой уравнения Бернулли.

На рис. 6.2  $N-N$  - напорная линия;  $O-O$  - плоскость (линия) отсчета;  $P-P$  - пьезометрическая линия, лежащая ниже напорной на величину скоростного напора в данном сечении.

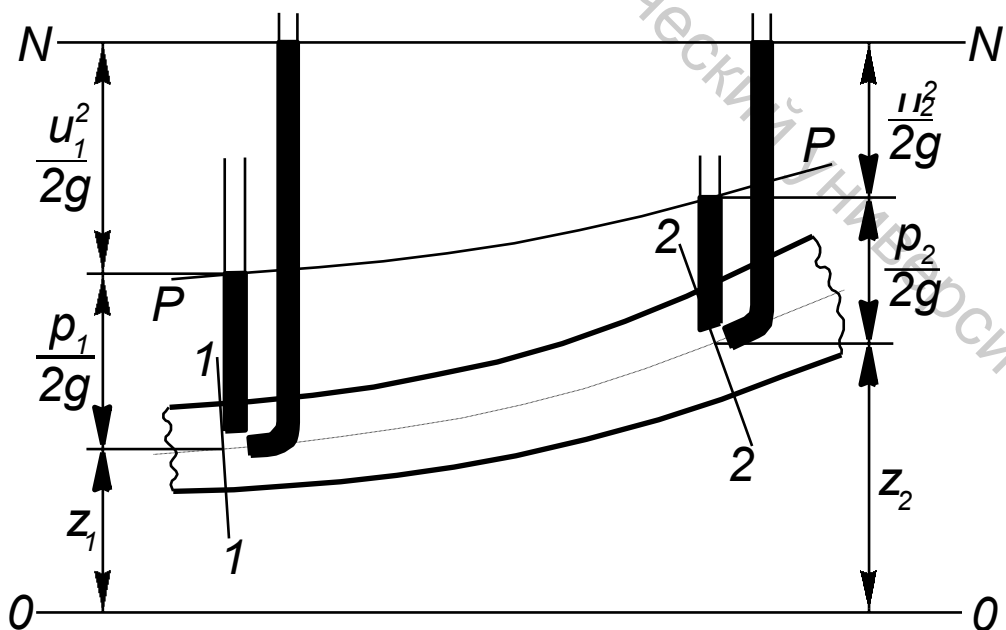


Рис. 6.2

## 7 ГИДРОДИНАМИКА ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

### 7.1 Модель вязкой жидкости

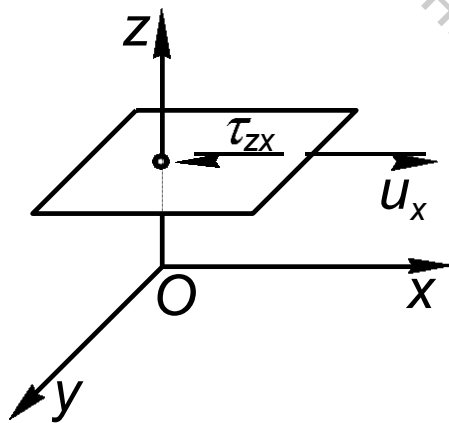
Приступая к рассмотрению движения вязкой жидкости, необходимо прежде всего уяснить терминологию, т. е. смысл, вкладываемый в понятие «вязкая жидкость». С математических позиций необходимо установить вид функциональной зависимости для напряжений, либо, другими словами, сформировать модель вязкой жидкости. В дальнейшем под вязкой мы будем понимать жидкость, удовлетворяющую трем гипотезам: линейности, однородности и изотропности.

#### 7.1.1 Гипотеза линейности

Применим закон Ньютона к жидкости, движущейся параллельно плоскости  $xOy$  (рис. 7.1), что дает

$$\tau_{zx} = \mu \frac{\partial u_x}{\partial z}$$

Вспользуемся результатом, полученным при рассмотрении теоремы Гельмгольца о движении жидкой частицы. Согласно теореме, скорость угловой деформации относительно оси  $y$



$$\gamma_y = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)$$

Так как движение происходит в плоскости  $xOy$ , то  $u_z = 0$  и

Рис. 7.1

$$\gamma_y = \frac{1}{2} \frac{\partial u_x}{\partial z}$$

и, следовательно, касательное напряжение

$$\tau_{zx} = 2\mu\gamma_y \quad (7.1)$$

Полученный результат иллюстрирует так называемый закон трения Стокса. Согласно этому закону, напряжения, возникающие в жидкости, в отличие от твердого тела, пропорциональны не величинам, а скоростям деформаций, и связаны с ними линейной зависимостью. При этом коэффициент пропорциональности остается неизменным и равным  $2\mu$ .

Кроме того, согласно закону Стокса касательные напряжения, как показано выше, пропорциональны скоростям угловой деформации, а нормальные – скорости линейной деформации, т.е.  $\frac{\partial u_x}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial u_y}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial u_z}{\partial z}$ .

Таким образом, можем записать

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = 2\mu\gamma_z = \mu\left(\frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y}\right) \quad (7.2)$$

и т.д.

Рассмотрим нормальные напряжения, возникающие от сил вязкости. Согласно закону Стокса, их можно записать в виде так называемых девиаторов напряжения, имеющих вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \sigma_{yy} &= 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \sigma_{zz} &= 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (7.3)$$

Полные нормальные напряжения отличаются тем, что помимо записанных выше в любой, как в вязкой, так и в невязкой жидкости, действуют и статические давления. Другими словами

$$\begin{aligned} p_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ p_{yy} &= -p + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ p_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{aligned} \quad (7.4)$$

Выполним следующую операцию: из утроенной величины  $p_{xx}$  вычтем сумму ( $p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}$ ). Это дает

$$\begin{aligned} 3p_{xx} - (p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}) &= -3p + 6\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} - \\ &- \left[ -3p + 2\mu \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] = 6\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} - 2\mu \operatorname{div} \vec{u} \end{aligned}$$

откуда найдем

$$p_{xx} = 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \vec{u} + \frac{p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}}{3}$$

В качестве давления в вязкой жидкости принимают среднее арифметическое, т.е.  $p = -\frac{p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}}{3}$ . И, следовательно,

$$\begin{aligned} p_{xx} &= -p + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \vec{u} \\ p_{yy} &= -p + 2\mu \frac{\partial u_y}{\partial y} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \vec{u} \\ p_{zz} &= -p + 2\mu \frac{\partial u_z}{\partial z} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \vec{u} \end{aligned} \quad (7.5)$$

Для несжимаемой жидкости  $\operatorname{div} \vec{u} = 0$ , и выражения упрощаются.

### 7.1.2. Гипотеза однородности

Предполагается, что вид линейной зависимости между напряжениями и скоростями деформаций одинаков для всех точек пространства.

### 7.1.3. Гипотеза изотропности

Вязкая жидкость предполагается изотропной, т.е. ее свойства в любом направлении одинаковы.

## 7.2 Уравнение движения вязкой жидкости – уравнение Навье-Стокса

Уравнения движения вязкой жидкости можно получить из уравнений движения в напряжениях (1.23), выполнив некоторые преобразования. Рассмотрим лишь одну проекцию этих уравнений:

$$\frac{du_x}{dt} = X + \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right)$$

Как было показано при рассмотрении модели вязкой жидкости, нормальные напряжения

$$p_{xx} = -p + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \mu \operatorname{div} \vec{u}$$

Для упрощения задачи будем считать жидкость несжимаемой ( $\operatorname{div} \vec{u} = 0$ ), тогда

$$\frac{\partial p_{xx}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( -p + 2\mu \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \quad (7.6)$$

Касательное напряжение  $\tau_{yx} = \mu \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)$

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} = \mu \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) = \mu \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial x} + \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \quad (7.7)$$

аналогично

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = \mu \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) = \mu \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial x} \quad (7.8)$$

Суммируя (7.6), (7.7) и (7.8) и группируя члены, получаем:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \mu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial x} \right)$$

Третий член можно записать в виде:

$$\mu \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \mu \frac{\partial}{\partial x} \operatorname{div} \vec{u}$$

но жидкость несжимаема, и  $\operatorname{div} \vec{u} = 0$ . Таким образом получаем:

$$\frac{du_x}{dt} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho} \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) \quad (7.9)$$

Выражение в скобках есть ни что иное, как оператор Лапласа -  $\nabla^2 \vec{u}$ ,

а  $\frac{\mu}{\rho} = \nu$ . Окончательно получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \\ + \nu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (7.10)$$

Аналогично можно расписать и две другие проекции. Полученная система уравнений движения вязкой жидкости и носит название системы уравнений Навье-Стокса.

В векторной форме можно записать

$$\vec{a} = \vec{F} - \frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \nabla^2 \vec{u} \quad (7.11)$$

Как следует из (7.11), это уравнение отличается от уравнения движения идеальной жидкости дополнительным членом  $(\nu \nabla^2 \vec{u})$ , учитывающим действие сил вязкого трения.

Целью гидродинамического расчета является нахождение полей скоростей и давлений, т.е. в результате расчета должны быть найдены четыре величины:  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$  и  $p$ . Принципиально это оказывается возможным, так как три уравнения Навье-Стокса (в проекциях) плюс уравнение неразрывности образуют замкнутую систему. Плотность и вязкость, входящие в них, считаются известными, а проекции массовых сил ( $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ ) задаются условиями конкретной задачи.

С чисто математических позиций уравнения Навье-Стокса относятся к классу нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка. Одно из наиболее неприятных из их свойств – нелинейность, обусловленная наличием конвективных членов ускорения. Следует отметить, что до настоящего времени вследствие практически непреодолимых математических трудностей не получено ни одного общего решения уравнений Навье-Стокса в их полном виде, т.е. при сохранении всех конвективных членов и всех членов, учитывающих вязкость. Известны лишь отдельные частные решения.

## 8 ОБЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ЭНЕРГИИ В ИНТЕГРАЛЬНОЙ И ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ФОРМАХ

Применим первое начало термодинамики для контрольного объема, являющегося незамкнутой системой. Уравнение энергии примет тогда следующий вид

$$q + \sum \dot{q}_F u_{\text{вх}} = \left( \frac{\partial E}{\partial t} \right)_{\text{вн}} + \sum \dot{q}_F u_{\text{внеш}} + \frac{dW_x}{dt}. \quad (8.1)$$

Знак  $\sum$  означает суммирование всех протекающих и вытекающих потоков;  $q$  – все виды переноса тепла на границе контрольного объема;  $E$  – все виды энергии, накопленной в контрольном объеме;  $h_F = e + pv$ , где  $e = E$  на единицу массы потока;  $u$  – массовая скорость;  $W_x$  – вся выполненная механическая работа, за исключением обратимой работы потока.

Таким образом, поток тепла в систему и поток энергии, входящей с массой, включая обратимую работу потока равны сумме потока внутренней энергии, потока энергии, который покидает систему вместе с массой, включая обратимую работу потока, и потока полезной работы, за исключением обратимой работы потока. В тепловой член можно включить все виды передачи тепла: радиацию, конвекцию и теплопроводность. В работу при необходимости можно включить все взаимодействия с окружающей средой, не входящие в члены пе-

переноса тепла и массы. Можно учесть не только механические эффекты, но и взаимодействия полей, например, электромагнитного. В члены переноса массы должны быть включены все виды энергии, связанные с переходом массы через границы нашей системы, в том числе энергия, связанная с химическими превращениями, если таковые имеют место. В определенном смысле конкретная запись общего уравнения энергии может явиться выражением наших современных знаний, если только последние не являются менее полными, чем мы считаем на самом деле.

Уравнение энергии в дифференциальной форме запишем в общем виде для сжимаемой сплошной среды. Рассматривая движение элементарного объема  $dx dy dz$  при его движении вместе с остальной жидкостью, в соответствии с первым началом термодинамики, подводимое к этому объему тепло расходуется на увеличение полной энергии и на выполнение работы:

$$\frac{DQ}{Dt} = \frac{DE_G}{Dt} + \frac{DL}{Dt} . \quad (8.2)$$

Все входящие в это уравнение производные являются субстанциональными, имеющими в общем случае локальные и конвективные составляющие.

Учитывая подвод тепла только за счет теплопроводности, согласно закону Фурье, после ряда преобразований, можно получить уравнение энергии для термически совершенного газа в следующем виде:

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \frac{Dp}{Dt} + \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] + \mu \Phi . \quad (8.3)$$

Функция  $\Phi$ , называемая диссипативной, равна

$$\begin{aligned} \Phi = & 2 \left[ \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} + \frac{\partial V_x}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial V_z}{\partial y} + \frac{\partial V_y}{\partial z} \right)^2 + \\ & + \left( \frac{\partial V_x}{\partial z} + \frac{\partial V_z}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z} \right)^2 \end{aligned}$$

В общем случае  $c_p$  – удельная теплоемкость при постоянном давлении,  $\lambda$  – коэффициент теплопроводности, зависят от температуры (для термически несовершенного газа и от давления). При постоянном коэффициенте теплопроводности уравнение энергии в дифференциальной форме упрощается и принимает следующий вид:

$$\rho c_p \frac{DT}{DT} = \frac{Dp}{Dt} + \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \mu \Phi . \quad (8.4)$$

Для несжимаемой жидкости уравнение при постоянном коэффициенте теплопроводности принимает более простой вид:

$$\rho c \frac{DT}{DT} = \lambda \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + \mu \Phi. \quad (8.5)$$

## 9 ОБЩАЯ ИНТЕГРАЛЬНАЯ ФОРМА УРАВНЕНИЙ КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ И МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

### 9.1 Основные сведения

Запишем уравнение второго закона Ньютона в форме закона сохранения импульса или количества движения. Отметим, что в отечественной литературе по общей физике чаще используется термин «импульс», а в курсах теоретической механики – «количество движения», в английском языке – «momentum».

$$\int \rho u_i u_R dA + \frac{\partial}{\partial t} \int \rho u_i dV + F + \int \sigma dA = 0, \quad (9.1)$$

где  $u_i$  – скорость в любой произвольно выбранной инерциальной системе координат;  $u_R$  – относительная скорость на граничной поверхности контрольного объема;  $\rho$  – плотность;  $t$  – время;  $\sigma$  – напряжение;  $A$  – площадь;  $V$  – объем.

Уравнение (9.1) легко приводится к более удобной форме, когда  $u_i = u_R$ . В этом случае контрольный объем не ускоряется, а координаты связаны с контрольной поверхностью.

Записанное уравнение применимо к любой макроскопической контрольной поверхности при отсутствии релятивистских эффектов.

### 9.2 Применение закона импульса и закона момента импульса в механике жидкости

Эти законы установлены в механике для любой системы материальных точек, между которыми действуют силы взаимодействия, попарно равные и противоположно направленные, вследствие чего главный век юр и главный момент внутренних сил равны нулю в любой момент движения. Оба этих закона справедливы как для идеальной, так и для вязкой жидкости.

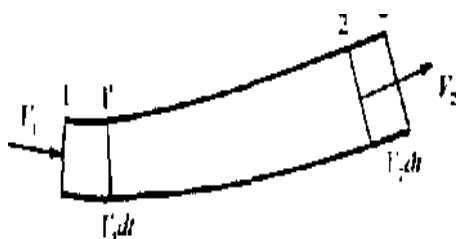


Рис.9.1

Рассмотрим установившееся движение жидкости в элементарной трубке тока (рис. 9.1). Пусть скорости в сечениях 1 и 2 будут  $\vec{u}_1$  и  $\vec{u}_2$ , соот-

ответственно, и за время  $dt$  жидкий объем из положения 1-2 перейдет в положение 1'-2' так, что

$$\overline{1-1'} = \vec{u}_1 dt \text{ и } \overline{2-2'} = \vec{u}_2 dt.$$

Так как движение установившееся, то объемы 1' - 2 будут иметь один и тот же импульс в момент времени  $t$  и  $t + dt$ .

В соответствии с уравнением расхода

$$dm = u_1 dt \rho_1 dA_1 = u_2 dt \rho_2 dA_2. \quad (9.1)$$

Таким образом, изменение импульса за время  $dt$  будет

$$d\vec{K} = \vec{u}_2 dm - \vec{u}_1 dm. \quad (9.2)$$

Это изменение импульса равно элементарному импульсу всех внешних сил (массовых и поверхностных), приложенных как к боковой поверхности трубки, так и к сечениям 1 и 2. Если массовыми силами можно пренебречь, то остаются только поверхностные силы (в случае идеальной жидкости – только силы давления).

$$d\vec{K} = \vec{u}_2 dm - \vec{u}_1 dm = \vec{P} dt$$

или

$$\vec{P} = \vec{u}_2 \frac{dm}{dt} - \vec{u}_1 \frac{dm}{dt}. \quad (9.3)$$

Аналогично, рассматривая закон момента импульса, легко придти к уравнению

$$d\vec{l} = r_2 u_2 dm - r_1 u_1 dm = L \cdot dt$$

или

$$\vec{L} = \vec{r}_2 \vec{u}_2 \frac{dm}{dt} - \vec{r}_1 \vec{u}_1 \frac{dm}{dt}, \quad (9.4)$$

где  $\vec{l}$  – момент импульса жидкого объема 1-2,  $r_1$  и  $r_2$  – радиусы вектора сечений 1 и 2.  $L$  – главный момент внешних сил, приложенных ко всей замкнутой поверхности объема (1 + 2).

Полученные равенства могут быть объединены теоремой Эйлера сумма всех внешних сил, приложенных ко всей поверхности произвольного объема трубки тока, эквивалентна в случае установившегося движения двум силам

$$\vec{u}_2 \frac{dm}{dt} \text{ и } -\vec{u}_1 \frac{dm}{dt},$$

приложенным к конечному и начальному сечениям и численно равным секундным импульсам жидкости, вытекающей и втекающей в трубу

## 10 ОДНОМЕРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Одномерными называются течения, в которых основные параметры потока зависят лишь от одной координаты, направление которой совпадает с направлением вектора скорости. Использование одномерных течений позволяет достаточно просто решать многие важные прикладные задачи.

### 10.1 Расход потока и средняя скорость

Для решения широкого круга прикладных инженерных задач плодотворной явилась введенная Эйлером так называемая струйная модель потока. Согласно этой модели поток представляется состоящим из бесконечного множества струек жидкости. При рассмотрении потока поперечные сечения в нем выбираются так, чтобы пересекающие их линии тока были нормальны к ним. В этом случае сечение потока называется «живым». Очевидно, что если линии тока параллельны, то живое сечение будет плоским.

Элементарный объемный расход несжимаемой жидкости может быть определен как

$$dQ = u dA \quad (10.1)$$

где  $u$  - скорость в сечении струйки,  $dA$  - площадь ее поперечного сечения.

В соответствии со струйной моделью расход потока

$$Q = \iint_A u dA \quad (10.2)$$

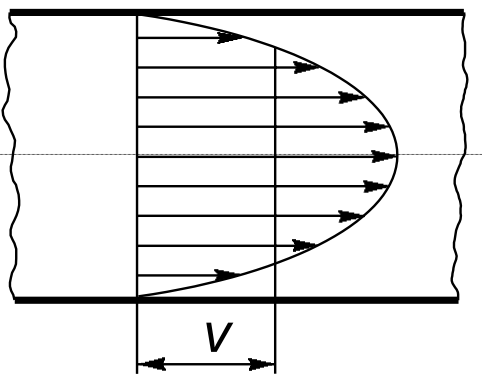


Рис. 10.1

Рассмотрим движение жидкости в трубе круглого поперечного сечения. В силу тормозящего действия сил вязкого трения распределение скоростей в поперечном сечении трубопровода (эюра скорости) будет иметь вид, показанный на рис. 10.1. Для удобства перейдем к цилиндрическим координатам  $(r, \theta)$ , где  $\theta$  - полярный угол.

В этой системе

$$dA = r dr d\theta \quad (10.3)$$

Подставляя (10.3) в (10.2) получаем

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^R u r dr d\theta \quad (10.4)$$

Имея в виду, что  $\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi$ , имеем

$$Q = 2\pi \int_0^R u r dr \quad (10.5)$$

Запись  $u(r)$  обозначает, что местные скорости в сечении трубы изменяются по радиусу. Другими словами,  $u(r)$  описывает закон изменения скорости, т.е. является математическим описанием эпюры. Следовательно, для того, чтобы вычислить расход по (10.5), необходимо знать уравнение эпюры скорости, которое, как правило, неизвестно. Поскольку расход является важнейшим параметром, знание которого требуется при проведении любых гидравлических расчетов, необходимо найти путь, позволяющий преодолеть возникшее затруднение.

С чисто математических позиций интеграл в правой части выражает объем эпюры скорости. Рассмотрим невязкую жидкость при неизменном расходе  $Q$ . Это, очевидно, приведет к тому, что эпюра начнет перестраиваться и, так как исчезнут силы вязкого трения, то все частицы жидкости будут двигаться с какой-то одинаковой скоростью  $v$  (см. рис. 10.1), а так как по условию расход остается тем же, то объем новой эпюры равен объему старой.

При этом условии  $u(r) = u_{cp} = \text{const}$ , и из (10.5) получаем

$$Q = 2\pi \int_0^R u_{cp} r dr = 2\pi u_{cp} \int_0^R r dr = 2\pi u_{cp} \frac{R^2}{2} = u_{cp} A \quad (10.6)$$

Скорость  $V$ , введенная таким образом носит название средней либо среднерасходной скорости. Следовательно, формально средняя скорость может быть определена как фиктивная скорость, с которой должны были бы двигаться все частицы жидкости для того, чтобы расход был равен его истинному значению.

С физической точки зрения использование понятия средней скорости, одинаковой для всех частиц жидкости в сечении, позволяет свести задачу о движении жидкости в трубах и каналах к одномерной.

## 10.2 Слабодеформированные потоки и их свойства

Рассмотрим движение в трубе с несколько иных позиций. Если считать его установившимся, то все производные по времени, входящие в уравнение движения, равны нулю. Если исходить из одномерной модели, то равны нулю и компоненты скорости  $u_y$  и  $u_z$ . При этом из уравнения неразрывности следует, что  $\frac{\partial u_x}{\partial x} = 0$ . Применительно к этому случаю система дифференциальных уравнений Навье-Стокса принимает вид:

$$\begin{aligned} X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) &= 0 \\ Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (10.7)$$

$$z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

Последние два уравнения (10.7) совпадают с уравнениями гидростатики, а это означает, что в плоскости поперечного сечения движущейся жидкости давления распределены по гидростатическому закону

$$z + \frac{p}{\rho g} = \text{const} \quad \text{или} \quad gz + \frac{p}{\rho} = \text{const} \quad (10.8)$$

Этот вывод приближенно справедлив для слабodeформированных потоков. Под слабodeформированными понимают потоки, у которых угол расхождения линий тока мал, а радиус кривизны – велик, т.е. понятие это носит скорее качественный, чем количественный характер.

### 10.3 Уравнение Бернулли для потока вязкой жидкости

Как уже отмечалось, уравнение Навье-Стокса в подавляющем большинстве случаев не поддаются интегрированию. Вместе с тем, практическая деятельность, связанная с необходимостью использования законов движения жидких сред, настоятельно требовала разработки инженерных методов расчета.

Одним из путей решения этой задачи, оказавшимся наиболее плодотворным, явился путь обобщения уравнения Бернулли, т.е. распространения его на поток вязкой жидкости. В основу этого метода, как уже отмечалось, положена струйная модель – представление о потоке как о бесконечно большой сумме струек, протекающих через сечение.

Исходим из того, что движение установившееся и в рассматриваемом сечении поток слабо деформирован. Определим энергию, проносимую секундной массой струйки через сечение (т.е. мощность струйки). Эта величина может быть найдена как произведение полной удельной энергии струйки

$\left( gz + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right)$  на ее массовый расход  $(\rho u dA)$ . В справедливости этого

легко убедиться непосредственно. Действительно, удельная энергия – Дж/кг, массовый расход – кг/с, их произведение

$$\frac{\text{Дж}}{\text{кг}} \frac{\text{кг}}{\text{с}} = \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \text{Вт}.$$

Таким образом

$$dN = \left( gz + \frac{p}{\rho} + \frac{u^2}{2} \right) \rho u dA \quad (10.9)$$

Секундная энергия (мощность) потока в соответствии со струйной моделью

$$N = \iint_A \left( \overline{gz} + \frac{\overline{p}}{\rho} + \frac{\overline{u^2}}{2} \right) \rho u dA \quad (10.10)$$

либо

$$N = \rho \iint_A \left( gz + \frac{p}{\rho} \right) u dA + \frac{\rho}{2} \iint_A u^3 dA \quad (10.11)$$

Так как поток слабдеформированный, то  $gz + \frac{p}{\rho} = \text{const}$  и первый интеграл принимает вид

$$\begin{aligned} \rho \left( gz + \frac{p}{\rho} \right) \iint_A u dA &= \rho \left( gz + \frac{p}{\rho} \right) Q \\ N &= \left( gz + \frac{p}{\rho} \right) \rho Q + \frac{\rho}{2} \iint_A u^3 dA \end{aligned} \quad (10.13)$$

По физическому смыслу второй член в (10.13) представляет собой кинетическую энергию секундной массы.

Поскольку мы ограничимся одномерным представлением, то в (10.13) необходимо ввести среднюю скорость. Поступим следующим образом: разделим обе части уравнения на массовый расход  $Q$ , т.е. отнесем это соотношение, как и уравнение Бернулли для струйки, к единице массы ( $N \rightarrow \text{Дж/с}$ ;

$$\rho Q \rightarrow \text{кг/с}; \quad \frac{N}{\rho Q} \rightarrow \frac{\text{Дж} \cdot \text{с}}{\text{кг} \cdot \text{с}} \rightarrow \frac{\text{Дж}}{\text{кг}} \quad \text{и, следовательно, } E = \frac{N}{\rho Q} \text{ — удельная}$$

энергия.

Таким образом, имеем

$$E = gz + \frac{p}{\rho} + \frac{1}{2Q} \iint_A u^3 dA \quad (10.14)$$

Разделив и умножив третий член на квадрат средней скорости  $u_{cp}^2$  с учетом того, что  $Q = u_{cp} A$ , получим

$$E = gz + \frac{p}{\rho} + \frac{u_{cp}^2}{2} \frac{1}{u_{cp}^3 A} \iint_A u^3 dA \quad (10.15)$$

Обозначим выражение  $\frac{1}{u_{cp}^3 A} \iint_A u^3 dA = \alpha$ ; тогда

$$E = gz + \frac{p}{\rho} + \frac{\alpha u_{cp}^2}{2} \quad (10.16)$$

Величина  $\alpha$  носит название коэффициента кинетической энергии, коррективы скорости либо коэффициента Кориолиса. Физический смысл этой величины будет раскрыт позже.

Разделив обе части (10.16) на ускорение свободного падения  $g$ , выразим это соотношение в единицах длины, т.е. в форме напоров

$$\frac{E}{g} = H = z + \frac{p}{\rho g} + \frac{\alpha u_{cp}^2}{2g} \quad (10.17)$$

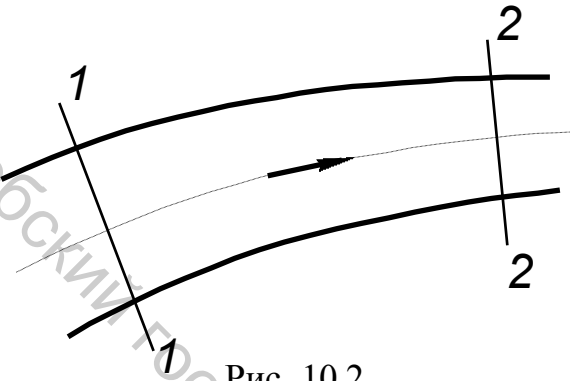


Рис. 10.2

Рассмотрим движение потока вязкой жидкости в канале (рис. 10.2) от сечения 1-1 к сечению 2-2. Обозначим удельную энергию потока в сечении 1-1 через  $E_1$ , а в 2-2 -  $E_2$ .

Так как жидкость вязкая, то процесс ее перемещения сопровождается диссипацией энергии, т.е. какая-то ее часть расходуется на преодоление сил внутреннего трения и пре-

вращается в тепло, следовательно,  $E_2 < E_1$ . Поэтому баланс энергии для выбранных сечений должен быть записан в виде

$$E_1 = E_2 + \Delta e \quad (9.18)$$

где  $\Delta e$  - потери энергии.

Раскрывая значения  $E_1$  и  $E_2$ , получаем:

$$gz_1 + \frac{p_1}{\rho} + \frac{\alpha_1 u_{cp1}^2}{2} = gz_2 + \frac{p_2}{\rho} + \frac{\alpha_2 u_{cp2}^2}{2} + \Delta e \quad (10.19)$$

Это и есть энергетическая форма уравнения Бернулли для потока вязкой жидкости.

В практических приложениях чаще используют уравнение Бернулли, выраженное в напорах

$$z_1 + \frac{p_1}{\rho g} + \frac{\alpha_1 u_{cp1}^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\rho g} + \frac{\alpha_2 u_{cp2}^2}{2g} + \Delta h \quad (10.20)$$

где  $\frac{\Delta e}{g} = \Delta h$  - потери напора.

Для газовых потоков (без учета сжимаемости), а также при расчетах систем гидравлического привода обычно используют уравнение Бернулли в форме давлений

$$\rho g z_1 + p_1 + \frac{\rho \alpha_1 u_{cp1}^2}{2} = \rho g z_2 + p_2 + \frac{\rho \alpha_2 u_{cp2}^2}{2} + \Delta p \quad (10.21)$$

где  $\Delta p$  - потери давления.

Обычно в упомянутых системах член  $\rho g z$  оказывается пренебрежимо малым по сравнению с остальными. В этих случаях (10.21) принимает вид:

$$p_1 + \frac{\rho \alpha_1 u_{cp1}^2}{2} = p_2 + \frac{\rho \alpha_2 u_{cp2}^2}{2} + \Delta p \quad (10.22)$$

#### 10.4 Физический смысл коэффициента Кориолиса

Как уже упоминалось, коэффициент  $\alpha$  носит название коэффициента кинетической энергии, коррективы скорости, коэффициента Кориолиса. Выясним физический смысл этой величины.

Как уже отмечалось выше, второй член в уравнении (10.13) представляет собой кинетическую энергию секундной массы потока, определяемую истинным распределением скоростей в сечении, т.е.

$$E_{\kappa}^{ист} = \frac{\rho}{2} \iint_A u^3 dA \quad (10.23)$$

Если бы скорости в сечении были бы распределены равномерно, то  $u = u_{cp} = \text{const}$  ( $u_{cp}$  – средняя скорость потока), и кинетическая энергия потока была бы

$$E_{\kappa}^{cp} = \frac{\rho}{2} \iint_A u_{cp}^3 dA = \frac{\rho}{2} u_{cp}^3 \iint_A dA = \frac{\rho u_{cp}^3 A}{2} \quad (10.24)$$

Разделив (10.23) на (10.24), получим

$$\frac{E_{\kappa}^{ист}}{E_{\kappa}^{cp}} = \frac{1}{u_{cp}^3 A} \iint_A u^3 dA = \alpha \quad (10.25)$$

Следовательно, коэффициент Кориолиса представляет собой отношение кинетической энергии потока, вычисленной по истинному распределению скоростей, к кинетической энергии, определенной по средней скорости.

Для уяснения вопроса рассмотрим гипотетический «поток», состоящий из двух струек, скорости которых  $u_1 = 2 \text{ м/с}$  и  $u_2 = 4 \text{ м/с}$  и вычислим коэффициент Кориолиса.

Истинная кинетическая энергия (сумма кинетических энергий струек)

$$E_{\kappa}^{ист} = \frac{u_1^2}{2} + \frac{u_2^2}{2} = \frac{4}{2} + \frac{16}{2} = 10 \frac{\text{м}^2}{\text{с}^2}$$

Средняя скорость  $u_{cp} = \frac{u_1 + u_2}{2} = 3 \frac{\text{м}}{\text{с}}$ ;

$$E_k^{cp} = \frac{u_{cp1}^2}{2} + \frac{u_{cp2}^2}{2} = \frac{9+9}{2} = 9 \frac{M^2}{c^2}$$

и  $\alpha = \frac{E_k^{ист}}{E_k^{cp}} = \frac{10}{9}$ , т. е.  $\alpha > 1$  (истинная кинетическая энергия больше средней).

Легко убедиться, что чем больше неравномерность распределения скоростей, тем больше коэффициент Кориолиса. Так, если  $u_1 = 2$  м/с, а  $u_2 = 6$  м/с, то  $\alpha = 5/4$ . Очевидно, что минимальное значение  $\alpha = 1$  будет при равномерном распределении скоростей. Действительно, пусть  $u_1 = u_2 = 4$  м/с,

тогда  $E_k^{ист} = 16 \frac{M^2}{c^2}$  и  $E_k^{cp} = 16 \frac{M^2}{c^2}$ . Следовательно, можно утверждать, что  $\alpha$  корректирует ошибку, возникающую при вычислении кинетической энергии при замене истинного распределения скоростей условным равномерным.

В природе существует два принципиально отличающихся режима течения жидкости: ламинарный и турбулентный. При ламинарном течении в трубах  $\alpha_l = 2$ , при турбулентном  $\alpha_T = 1,02...1,04$ . Это позволяет утверждать, что в турбулентном потоке скорости в поперечном сечении распределены существенно равномерней, чем в ламинарном (эпюра турбулентного потока более «наполненная», ближе к прямоугольной по сравнению с эпюрой ламинарного потока).

Использование струйной модели потока и сведение его к одномерному путем введения представления о средней скорости позволяют получить одно из основных уравнений гидродинамики – уравнение Бернулли для потока вязкой жидкости. Принципиально, с помощью этого уравнения можно рассчитать движение жидкости в каналах при установившемся течении и условии, что в выбранных сечениях поток слабodeформированный либо параллельно-струйный. Однако, для полного решения задачи необходимо уметь определять потери напора ( $\Delta h$ ), возникающие при движении жидкости в каналах.

## 11 КЛАССИФИКАЦИЯ ТЕЧЕНИЙ ЖИДКОСТИ. УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ

В 80-х годах XIX-го столетия работы, связанные с изучением сопротивления движению жидкости при течении в трубах, зашли в тупик. Опыты одних исследователей (немецкий инженер-строитель Г. Хаген, французский врач Ж. Пуазейль) показали, что сопротивление линейно зависит от скорости. В то же время не менее тщательные и точные опыты французского инженера А. Дарси свидетельствовали, что сопротивление пропорционально

квадрату скорости. Возникшее противоречие тормозило развитие инженерной практики и требовало разрешения.

Наблюдения, выполненные Г. Хагеном еще в 1855 г. показали, что характер движения в трубе изменяется при достижении каких-то определенных условий. На это же со всей определенностью было указано в 1870 году нашим соотечественником проф. Н.Н.Петровым при разработке им теории гидродинамической смазки. Эта гипотеза нашла блестящее подтверждение в опытах английского физика Осборна Рейнольдса, результаты которых были опубликованы в 1883-1884 годах и имели далеко идущие последствия для всей механики жидкости.

Идея опытов отличалась ясностью и предельной простотой. В стеклянную трубу, скорость движения воды в которой могла регулироваться, Рейнольдс вводил струйки красителя. При малых скоростях струйки двигались параллельно оси трубы и вся картина представлялась неподвижной. При увеличении скорости воды за счет открытия крана картина изменялась, струйка красителя сначала приобретала синусоидальную форму, а дальнейшее увеличение скорости приводило к ее размыву, что свидетельствовало о беспорядочном движении.

Первый режим – спокойный, слоистый без перемешивания частиц был назван ламинарным. Второй – бурный, хаотичный, приводящий к перемешиванию частиц, позднее по предложению У. Томсона (Лорда Кельвина) получил название турбулентного. Как истинный ученый, Рейнольдс не остановился на констатации факта. Он предположил, что увеличению скорости потока приводит к возникновению каких-то возмущений, дестабилизирующих его структуру. Если понимать под устойчивостью способность потока подавлять возникающие в нем малые возмущения, то переход к турбулентному режиму может рассматриваться как потеря устойчивости. При этом из двух категорий сил, действующих на жидкие частицы, вязкого трения и инерции, первые играют стабилизирующую роль, а вторые – дестабилизирующую. Таким образом, отношение этих сил может служить критерием (мерой) устойчивости потока, т.е.

$$\text{Мера устойчивости} = \frac{\text{сила инерции}}{\text{сила вязкого трения}}$$

Такой подход позволяет получить и количественную меру. Действительно, сила инерции  $F = ma$ . Массу можно представить как произведение плотности на объем, но объем пропорционален кубу линейных размеров, т.е.

$$m \cong \rho l^3. \text{ Ускорение есть изменение скорости в единицу времени } a = \frac{u}{t}.$$

Таким образом

$$F_{ин} \cong \frac{\rho l^3 u}{t} \quad (11.1)$$

По смыслу  $l/t$  есть скорость, следовательно,

$$F_{ин} \cong \rho l^2 u^2 \quad (11.2)$$

Сила вязкого трения (по Ньютону)

$$F_{тр} = \mu \frac{du}{dy} S \quad (11.3)$$

Действуя аналогично предыдущему, получаем

$$F_{тр} \cong \mu \frac{u}{l} l^2 \cong \mu u l$$

и безразмерный комплекс, характеризующий устойчивость, приобретает вид

$$\frac{F_{ин}}{F_{тр}} = \frac{\rho u l}{\mu} \quad (11.4)$$

В дальнейшем это соотношение получило название числа Рейнольдса, т.е.

$$Re = \frac{\rho u l}{\mu} \quad (11.5)$$

где  $u$  - характерная скорость течения;  $l$  - характерный линейный размер.

Для круглых труб характерный размер – диаметр, характерной скоростью является средняя скорость. С учетом этого, имея в виду, что  $\frac{\mu}{\rho} = \nu$ , выражение (10.5) принимает вид

$$Re = \frac{u_{cp} d}{\nu} \quad (11.6)$$

При течении в каналах некруглого сечения в качестве характерного размера принимают так называемый гидравлический радиус

$$R = \frac{A}{\Pi} \quad (11.7)$$

где  $A$  - площадь поперечного сечения канала;  $\Pi$  – смоченный периметр (часть периметра, находящаяся в контакте с жидкостью).

Для круглых труб при напорном движении  $A = \frac{\pi d^2}{4}$ ,  $\Pi = \pi d$  и

$R = \frac{d}{4}$ , т.е. гидравлический радиус в два раза меньше геометрического.

Одним из наиболее существенных результатов, обнаруженных в опытах Рейнольдса являлось то, что переход от ламинарного течения к турбулентному происходил при одном и том же численном значении введенного им критерия устойчивости, названного впоследствии критическим значени-

ем числа Рейнольдса ( $Re_{кр}$ ). По данным многочисленных опытов в круглых трубах  $Re_{кр} \approx 2300$ . Это так называемое нижнее критическое число Рейнольдса, которое получают, если не принимать специальных мер по стабилизации потока. При принятии мер, переход к турбулентному течению можно существенно затян timer. При выполнении технических расчетов принято считать, что если число Рейнольдса, вычисленное по фактическим значениям параметров, меньше критического, то режим ламинарный, и наоборот.

## 12 ЗАКОНОМЕРНОСТИ ЛАМИНАРНОГО РЕЖИМА ТЕЧЕНИЯ В КРУГЛЫХ ТРУБАХ

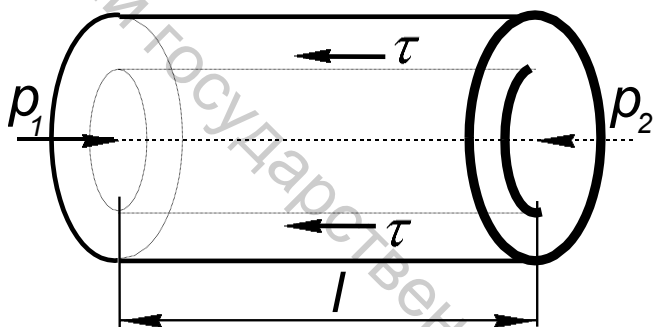


Рис. 12.1

Рассмотрим установившееся ламинарное течение в горизонтальной трубе, происходящее под действием постоянного перепада давления. Радиус трубопровода -  $R$ .

Двумя сечениями, отстоящими на расстоянии  $l$  друг от друга, выделим отсек трубопровода, и в нем цилиндр радиуса  $r$ . Составим

уравнение движения. Так как течение установившееся, то сумма проекций на ось всех сил, действующих на цилиндр, должна быть равна нулю. Другими словами, активные силы, приводящие частицы жидкости в движение, должны быть равны силам сопротивления.

Активные силы:  $p_1 A - p_2 A = \Delta p A = \pi r^2 \Delta p$ .

Силы сопротивления:  $2\pi r l \tau$ .

Таким образом,  $\pi r^2 \Delta p = 2\pi r l \tau$  и

$$\tau = \frac{\Delta p r}{2l} \quad (12.1)$$

Из (12.1), в частности, следует, что касательные напряжения изменяются вдоль радиуса по линейному закону. С другой стороны, по Ньютону касательные напряжения

$$\tau = -\mu \frac{du}{dr} \quad (12.2)$$

Знак «минус» потому, что направления отсчета  $u$  и  $r$  противоположны.

Приравнивая (12.1) и (12.2), получаем

$$\frac{\Delta p r}{2l} = -\mu \frac{du}{dr} \quad (12.3)$$

Либо после разделения переменных

$$du = -\frac{\Delta p}{2\mu l} r dr \quad (12.4)$$

и после интегрирования

$$u = -\frac{\Delta p}{2\mu l} \frac{r^2}{2} + C \quad (12.5)$$

Произвольную постоянную интегрирования находим из граничных условий: при  $r = R$   $u = 0$  (условие прилипания), и

$$C = \frac{\Delta p}{4\mu l} R^2$$

Следовательно,

$$u = \frac{\Delta p}{4\mu l} (R^2 - r^2) \quad (12.6)$$

или

$$u = \frac{\Delta p R^2}{4\mu l} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad (12.7)$$

Максимальная скорость движения частиц будет на оси трубы, т.е. при  $r = 0$ , а ее величина

$$u_{\max} = \frac{\Delta p R^2}{4\mu l} \quad (12.8)$$

Подставляя (12.8) в (12.7) получим

$$u = u_{\max} \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) \quad (12.9)$$

Из чего следует, что в поперечном сечении трубы скорости распределены по параболическому закону, т.е. эпюра скорости представляет собой параболоид вращения.

Выражение (12.9) можно представить в виде

$$\frac{u}{u_{\max}} = 1 - \frac{r^2}{R^2} \quad (12.10)$$

Из чего следует, что отношение скорости в любой точке к скорости на оси не зависит от расхода, рода жидкости и материала стенок трубы: при всех значениях  $Re < Re_{гп}$  оно одинаково.

Определим расход, протекающий через трубопровод. При введении понятия о средней скорости было показано, что

$$Q = 2\pi \int_0^R u(r) r dr \quad (12.11)$$

где  $u(r)$  – уравнение эпюры скорости.

Воспользуемся (12.6), что дает

$$Q = \frac{2\pi\Delta p}{4\mu l} \int_0^R (R^2 - r^2) r dr \quad (12.12)$$

Выполнив интегрирование и имея в виду (12.8), можно получить

$$Q = \frac{\pi u_{\max} R^2}{2} = \frac{1}{2} u_{\max} A = u_{cp} A$$

Из чего следует, что

$$u_{\max} = 2u_{cp} \quad (12.13)$$

Раскрывая значение  $u_{\max}$  по (12.8), получаем выражение для определения потерь давления при ламинарном режиме течения в круглой трубе

$$\Delta p = \frac{8\mu l u_{cp}}{R^2} \quad (12.14)$$

Или, заменяя радиус диаметром,

$$\Delta p = \frac{32\mu l u_{cp}}{d^2} \quad (12.15)$$

Полученное соотношение носит название формулы Хагена-Пуазейля. Для потерь напора с учетом того, что  $\Delta p = \rho g \Delta h$ , формула принимает вид

$$\Delta h = \frac{32\mu l u_{cp}}{\rho g d^2} \quad (12.16)$$

Важнейший вывод, следующий из этого соотношения, можно сформулировать так: потери давления (напора) при ламинарном течении в круглых трубах линейно зависят от средней скорости.

Выполним некоторые формальные преобразования формулы Хагена-Пуазейля, которые окажутся полезными в дальнейшем. Умножим числитель и знаменатель (12.16) на  $2u_{cp}$ , что дает

$$\Delta h = \frac{32 \cdot 2u_{cp}}{u_{cp} d} \frac{l}{d} \frac{u_{cp}^2}{2g} = \frac{64u_{cp}}{u_{cp} d} \frac{l}{d} \frac{u_{cp}^2}{2g} = \frac{64}{Re} \frac{l}{d} \frac{u_{cp}^2}{2g} \quad (12.17)$$

Таким образом, можем записать, что в формуле  $\Delta h = f \frac{l}{d} \frac{u_{cp}^2}{2g}$  при ламинарном течении  $m = 1$ .

## 13 ОСНОВНЫЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ ТУРБУЛЕНТНОГО ДВИЖЕНИЯ

### 13.1 Общие сведения

Теория турбулентных течений представляет собой важнейший для практики, но и наиболее сложный раздел гидродинамики.

Основной, определяющей чертой турбулентного движения является его хаотичность. Это означает, что скорость (и другие параметры) в любой точке потока зависят от времени. Более того, эти флуктуации скорости в данной точке также являются хаотическими.

Турбулентное движение по своей физической природе является движением неустановившимся. С другой стороны, непосредственные измерения свидетельствуют, что при турбулентном характере потока в нем можно выделить основную, так называемую регулярную часть, на которую накладывается случайная часть движения.

На рис. 13.1 показан типичный вид экспериментально снятой зависимости проекции скорости в какой-то точке потока от времени при сохраняющихся неизменными граничных условиях.

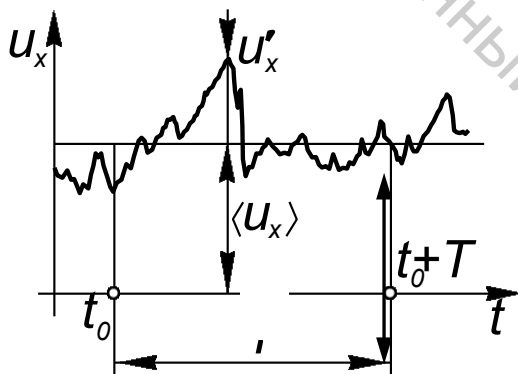


Рис. 13.1

Как следует из графика, особенно этой этого процесса является его непериодичность, при этом

$$u'_x = u_x - \langle u_x \rangle$$

где  $\langle u_x \rangle$  — осредненная скорость, представляющая регулярную часть;  $u'_x$  — пульсационная скорость, разность между мгновенным и регулярным значением скорости.

Аналогичные соотношения можно записать и для других компонент.

Таким образом, осредненная скорость — это какое-то устойчивое значение, вокруг которого происходит изменение рассматриваемой проекции скорости (в данном случае). Все сказанное в равной мере относится и к другим параметрам, в частности, к давлению.

Наиболее важной характеристикой течения при его расчете является поле скоростей. Но, как показано выше, в любой точке потока при турбулентном течении скорость выступает как случайная величина, что исключает возможность записи начальных условий для системы дифференциальных уравнений Навье-Стокса, т.е. оказывается невозможной математическая постановка задачи. Именно это и приводит к необходимости перехода к какому-то осредненному описанию, использующему не истинные, а осредненные величины скоростей и давлений. Осреднение скоростей и давлений производится путем интегрирования функций  $u_x(x, y, z, t), u_y(x, y, z, t),$

$u_z(x, y, z, t)$ ,  $p(x, y, z, t)$  по промежутку времени  $T$  (см. рис. 13.1), величина которого намного больше так называемого характерного времени турбулентных пульсаций. Это время определяется как частное от деления масштаба  $l$  на скорость турбулентных пульсаций. Под масштабом турбулентных пульсаций понимают расстояние, на котором пульсации претерпевают заметное изменение. Так, например, при турбулентном движении в трубах наибольший масштаб пульсаций равен диаметру трубы. Таким образом, осредненная компонента скорости, например,  $\langle u_x \rangle$

$$\langle u_x \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u_x dt \quad (13.1)$$

Аналогичное соотношение можно записать и для давления. При этом, поскольку флуктуации (пульсации) имеют как положительный так и отрицательный знак, то

$$\langle u'_x \rangle = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} u'_x dt \equiv 0 \quad (13.2)$$

Ясно также, что  $\langle u'^2_x \rangle \neq 0$ . Если в данной точке потока  $\langle u'^2_x \rangle = \langle u'^2_y \rangle = \langle u'^2_z \rangle$ , то турбулентность называют изотропной, а если это условие соблюдается во всех точках, то она называется еще и однородной.

### 13.2 Турбулентное течение в трубах

Расчет турбулентного течения в трубах относится к широко распространенным инженерным задачам. Одним из важных элементов расчета является нахождение закона распределения осредненных скоростей в поперечном сечении трубы.

По Прандтлю, поток в трубах при турбулентном течении условно разбивается на две области (двухслойная модель Прандтля): турбулентное ядро, в котором определяющими являются напряжения Рейнольдса, и тонкий вязкий подслой (ламинарный подслой по Прандтлю либо пристенный слой) вблизи стенки, в котором влияние турбулентности пренебрежимо мало, а касательные напряжения обусловлены физической вязкостью в соответствии с законом трения Ньютона.

На рис. 13.2 приведен примерный вид поля осредненных скоростей (эпюра скорости) при турбулентном течении в трубопроводе. Следует обратить внимание на ее большую наполненность (большую равномерность) по сравнению с ламинарным течением. Это объясняется тем, что вследствие перемешивания частиц за счет турбулентных пульсаций происходит обмен количеством движения и, как следствие, более равномерное распределение скоростей в поперечном сечении.

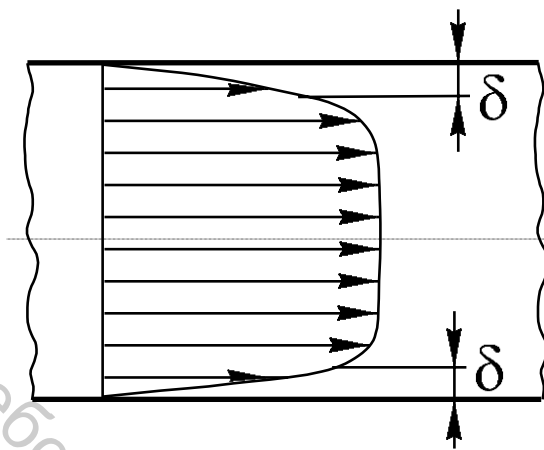


Рис. 13.2

В непосредственной близости от стенки в пределах пристенного слоя решающее влияние на течение оказывают жесткость стенки, ее непроницаемость и эффект прилипания частиц. На самой стенке справедливы условия:

$$u_x = u_y = u_z = 0; \quad u'_x = u'_y = u'_z = 0;$$

Таким образом, для области в пределах вязкого подслоя можно записать:

$$\tau = \tau_0 = \mu \frac{du}{dy} \quad (13.7)$$

где  $\tau_0$  - касательное напряжение на стенке.

Интегрирование (13.7) дает

$$\mu u = y \tau_0 + C$$

при  $y = 0, u = 0$  и  $C = 0$ . Таким образом,

$$u = \frac{\tau_0 y}{\mu} \quad (13.8)$$

Имея в виду, что  $\mu = \nu \rho$ , после подстановки получаем

$$u = \frac{\tau_0 y}{\rho \nu} \quad (13.9)$$

Из чего следует, что в пределах подслоя скорость изменяется по линейному закону. Величина  $\frac{\tau_0}{\rho}$  имеет размерность квадрата скорости, поэтому корень квадратный из нее, т.е.

$$\sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} = u_\tau \quad (13.10)$$

называют динамической скоростью либо скоростью трения. Таким образом, динамическая скорость является мерой интенсивности турбулентного пульсационного движения, т.е. мерой интенсивности переноса количества движения.

Подставляя (13.10) в (13.9), получаем

$$u = u_\tau^2 \frac{y}{\nu} \quad (13.11)$$

Оценим толщину вязкого подслоя. На его границе  $y = \delta$ , и (13.11) можно придать вид

$$\frac{u}{u_\tau} = \frac{u_\tau \delta}{\nu} \quad (13.12)$$

В правой части стоит выражение, аналогичное числу Рейнольдса. Согласно тщательным опытам ближайшего сотрудника Л.Прандтля, Никурадзе, эта величина приближенно равна 11,6; тогда

$$\delta = 11,6 \frac{\nu}{u_\tau} \quad (13.13)$$

Очевидно, что этим соотношением можно воспользоваться лишь в случае, если известна динамическая скорость. Для ее нахождения необходимо увязать ее с параметрами осредненного потока, что является решаемой задачей.

Чтобы завершить вопрос о турбулентном течении в трубах, установим закон распределения осредненных скоростей в ядре потока. В этой области определяющую роль играют турбулентные касательные напряжения, и, следовательно, можно воспользоваться формулой Прандтля

$$\tau_T = \rho l_n^2 \left( \frac{du}{dy} \right)^2, \quad (13.14)$$

где  $l_n$  - длина пути перемешивания.

Однако для того, чтобы продвинуться дальше, необходимо принять дополнительные допущения.

Первое допущение связано с длиной пути перемешивания. Согласно наиболее простой гипотезе, принадлежащей Л.Прандтлю,

$$l_n = \kappa y \quad (13.15)$$

где  $\kappa$  - какая-то величина, называемая постоянной Кармана. Выполненные измерения показывают, что  $\kappa \approx 0,4$ . Более поздние исследования показали, что зависимость (13.15) справедлива лишь в пристенной части турбулентного ядра потока.

Вторым является допущение о касательных напряжениях. Следует полагать, что принципиально они являются величинами переменными. Однако, если рассматривать область, расположенную достаточно близко к стенке, то здесь величина касательного напряжения изменяется незначительно, и можно принять ее равной касательному напряжению на стенке, т.е.

$$\tau_T = \tau_0.$$

При этих допущениях формула Прандтля принимает вид

$$\tau_0 = \rho \kappa^2 y^2 \left( \frac{du}{dy} \right)^2$$

или

$$u_\tau^2 = \kappa^2 y^2 \left( \frac{du}{dy} \right)^2$$

Извлекая квадратный корень и разделяя переменные, получаем

$$du = \frac{u_\tau}{\kappa} \frac{dy}{y}$$

и после интегрирования

$$u = \frac{u_\tau}{\kappa} \ln y + C \quad (13.16)$$

т.е. скорости в ядре потока распределены по логарифмическому закону.

Произвольную постоянную интегрирования можно найти из граничных условий на оси трубы; при  $y = R$   $u = u_{\max}$ , и  $C = u_{\max} - \frac{u_\tau}{\kappa} \ln R$ .

После подстановки и простых преобразований

$$\frac{u_{\max} - u}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{R}{y} \quad (13.17)$$

Строго говоря, соотношение (13.17) выводится для плоских труб, но опыт показывает, что оно оказывается справедливым и для круглых, и подтверждает экспериментально установленный факт о независимости распределения скорости от причин, обуславливающих возникновение касательных напряжений (вязкости, шероховатости).

Выражение (13.17) иногда называют законом дефекта скорости.

Использование двухслойной модели, т.е. разделение потока на ядро и пристенный слой, приводит к специфической классификации стенок труб. Если толщина пристенного слоя больше выступов шероховатости, трубы называют гидравлически гладкими, в противном случае – шероховатыми.

### 13.3 Потери давления (напора) при турбулентном течении в трубах

Напомним, что рассмотрение закономерностей как ламинарного, так и турбулентного течений в трубах помимо чисто познавательных целей преследовало и цели сугубо практические: получить соотношения, позволяющие определять потери давления (напора) в трубопроводных сетях при выполнении инженерных расчетов. Для ламинарного течения эта задача решается с помощью формулы Хагена-Пуазейля. Из рассмотрения закономерностей турбулентного течения становится ясным, что вследствие его чрезвычайной

сложности получение аналогичного соотношения чисто теоретическим путем практически невозможно. Поэтому, основываясь на уже известных положениях, можно установить общие закономерности.

С большой долей уверенности можно утверждать, что при турбулентном течении связь между средней скоростью и касательным напряжением на стенке трубы имеет вид

$$\tau_0 = k \rho u_{cp}^2 \quad (13.18)$$

где  $k$  - коэффициент пропорциональности.

С другой стороны, из условия равновесия движущегося под действием постоянного перепада давления жидкого цилиндра длиной  $l$

$$\Delta p = \frac{2l}{R} \tau_0$$

После замены радиуса диаметром и подстановки  $\tau_0$

$$\Delta p = 4k \frac{l}{d} \rho u_{cp}^2 \quad (13.19)$$

или

$$\Delta p = 8k \frac{l}{d} \frac{\rho u_{cp}^2}{2} \quad (13.20)$$

В такой форме записи выражение  $\frac{\rho u_{cp}^2}{2}$  имеет четкий физический смысл. Это так называемое динамическое давление потока, обусловленное средней скоростью, либо кинетическая энергия потока, заключенная в единице объема.

Обозначим величину  $8k = \lambda$  и назовем ее гидравлическим коэффициентом трения, тогда

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \frac{\rho u_{cp}^2}{2} \quad (13.21)$$

либо

$$\Delta h = \lambda \frac{l}{d} \frac{u_{cp}^2}{2g} \quad (13.22)$$

Полученное соотношение носит название формулы Дарси. Более строго это соотношение будет получено методом анализа размерностей.

Отметим попутно, что если в преобразованной формуле Хагена-Пуазейля (12.17) обозначить величину  $\frac{64}{Re}$  буквой  $\lambda$ , то она превращается в

формулу Дарси. В этом смысле формула Дарси может быть названа универсальной, т.е. пригодной как для ламинарного, так и для турбулентного течений. В последнем случае открытым остается вопрос о нахождении гидравли-

ческого коэффициента трения, который, как следует из всего сказанного выше, может быть решен только экспериментальным путем.

## 14 СТРУЙНЫЕ ТЕЧЕНИЯ

### 14.1 Общие свойства струй

Струя – поток жидкости (газа), не ограниченный твердыми стенками.

Струя называется свободной, если истечение жидкости происходит в неподвижную безграничную среду. Различают спутное движение струи, когда по обе стороны поверхности разрыва потоки имеют одинаковое направление, и встречное – когда направления противоположны.

Свободные струи могут быть незатопленными или затопленными. Если струя и среда имеют одинаковые физические свойства, то струя называется затопленной. К затопленным струям относятся, например, воздушные струи в воздухе, водяные струи в воде и т.п. К незатопленным струям относятся жидкие струи в газовой среде (в частности в воздухе); жидкие струи в жидкостях, не смешивающихся с ними; струи газа в жидкости. Такие струи встречаются в контактных теплообменниках (например, градирнях), при сжигании жидкого топлива в воздухе и т.п. При движении незатопленных струй массообмен между струей и средой, по существу, отсутствует.

Ламинарный струйный пограничный слой наблюдается при очень малых числах  $Re$ , поэтому его рассмотрение не представляет практического интереса.

Механизм движения в турбулентном струйном пограничном слое сводится к чисто турбулентному перемешиванию и не зависит от числа  $Re$ , поскольку влияние обычной «молекулярной» вязкости при этом пренебрежимо мало. Это позволяет не учитывать вязкие напряжения при моделировании течения в этой области. Поскольку твердые стенки как границы течения в струйных потоках отсутствуют, течения в этих потоках называют свободными, а турбулентность – свободной турбулентностью.

### 14.2 Структура свободной струи

Рассмотрим общую схему затопленной турбулентной струи.

При турбулентном движении, как известно, наряду с осевым движением существует и поперечное движение частиц. Последние при своем движении попадают за пределы струи и переносят в граничащие со струей массы неподвижного воздуха свое количество движения, увлекают (эжектируют) эти массы, придавая им определенную скорость. На место ушедших из струи частиц в нее попадают частицы из окружающего воздуха, которые подтормаживают граничные слои струи. Следствием этого обмена импульсами между струей и неподвижным воздухом является возрастание массы струи и убывание скорости у ее границ.

Подторможенные частицы струи вместе с увлеченными частицами окружающего воздуха образуют турбулентный пограничный слой, толщина которого по мере удаления от выходного отверстия непрерывно возрастает. Соприкасаясь с внешней стороны с неподвижной средой  $u = 0$ , а с внутренней – с ядром постоянной скорости  $u = u_0$ , пограничный слой приобретает переменный профиль скоростей (рис. 14.1).

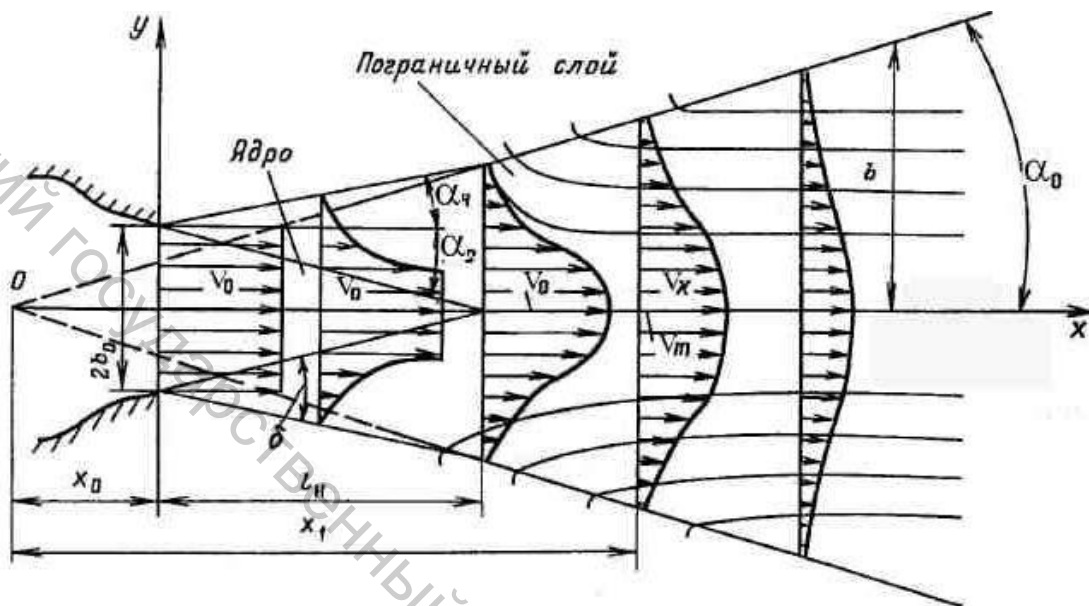


рис. 14.1

Ядро постоянной скорости по мере удаления от выходного отверстия и утолщения пограничного слоя сужается, пока полностью не исчезнет. После этого пограничный слой уже заполняет все сечение струи, включая и ось потока. Таким образом, дальнейшее размывание струи сопровождается не только возрастанием ее ширины, но и падением скорости на оси.

Сечение струи, в котором завершается размыв ядра постоянной скорости и на оси которого обе половины пограничного слоя смыкаются, называется переходным.

Участок струи, расположенный между выходным отверстием и переходным сечением, в котором скорость на оси остается неизменной и равной начальной скорости  $u_0$ , называется начальным.

Участок, следующий за переходным сечением, в котором скорость на оси постепенно уменьшается и затухает, называется основным.

Как показывают опыты, границы струи, как внешняя, так и ядра постоянной скорости, прямолинейны. Точка 0 пересечения внешних границ струи с осью называется полюсом струи.

Угол расширения струи  $\alpha$  (для осесимметричной струи – половина угла конусности) обычно равен  $12-14^\circ$  и зависит от степени турбулентности струи на выходе из отверстия (насадка). Расширение струи и увеличение ее массового расхода по движению приводит к непрерывной деформации эпо-

ры осредненных скоростей. В пределах начального участка, длина которого составляет приблизительно пять характерных поперечных размеров струи в выходном сечении, эпюра скоростей имеет сложный вид.

Статическое давление в разных точках струи изменяется незначительно и приблизительно равно давлению в окружающем пространстве, т.е. свободную струю можно считать изобарической.

Основными параметрами, характеризующими турбулентную струю, являются осевая скорость  $u_0$ , радиус  $R$  для круглых и ширина  $b$  для плоских струй, расход воздуха  $Q$  и скорость  $u$ .

Как показали теоретические и экспериментальные исследования Г.Н. Абрамовича, основные параметры струи зависят от коэффициента турбулентности  $a$ , характеризующего интенсивность перемешивания и зависящего от конструкции насадка, из которого вытекает струя. Чем больше коэффициент турбулентности, тем интенсивнее перемешивание и больше угол одностороннего расширения струи  $\alpha$ . В табл. 14.1 приводятся значения коэффициента турбулентности  $a$  для некоторых типов насадков.

**Таблица 14.1- Коэффициент турбулентности  $a$  турбулентной струи**

Насадок	$a$
Плавно выполненное сопло	0,066
Цилиндрическая труба	0,07
Внешний цилиндрический	0,076
Конически расходящийся	0,08
Плоский при отношении его высоты к длине:	
1:20	0,1-0,15
1:10	0,09- 0,14

Опыт и теория показывают, что поперечные составляющие скорости в любом сечении струи малы по сравнению с продольной скоростью и в первом приближении ими можно пренебречь. Характерно, что профили продольной скорости струйного течения в пределах основного участка, целиком состоящего из струйного пограничного слоя, подобны. Это означает, что линии равных безразмерных скоростей представляют собой лучи, исходящие из полюса. Условие подобия аналитически может быть представлено в виде

$$\frac{u}{u_0} = f\left(\frac{y}{x}\right); \quad (14.1)$$

где  $x$  – расстояние от полюса струи до данного сечения;  $y$  – расстояние от оси струи до точки, в которой определяется скорость;  $u_0$  – скорость на оси струи.

Основные расчетные соотношения для круглой и плоской свободных затопленных турбулентных струй приведены в таблице 14.2.

Таблица 14.2 – Основные расчетные соотношения для свободных затопленных турбулентных струй.

Параметры струй	Значения параметров или расчетная формула для	
	круглой струи	плоской струи
Коэффициент турбулентной структуры $a$	0,08	0,09-0,12
Половина угла расширения струи $\alpha$	$3,4a$	$2,4a$
Расстояние от полюса до начального сечения $x_0$	$0,29 \frac{r_0}{a}$	$0,41 \frac{b_0}{a}$
Длина начального участка $x_n$	$0,67 \frac{r_0}{a}$	$1,03 \frac{b_0}{a}$
Радиус R или полутолщина b струи	$\left(3,4 \frac{ax}{r_0} + 1\right) r_0$	$\left(2,4 \frac{ax}{b_0} + 1\right) b_0$
Скорость на оси основного участка струи $u_x$	$\frac{0,96u_0}{ax/r_0 + 0,29}$	$\frac{1,2u_0}{\sqrt{ax/b_0 + 0,41}}$
Средняя скорость на основном участке струи $u$	$\frac{0,19u_0}{ax/r_0 + 0,29}$	$\frac{0,492u_0}{\sqrt{ax/b_0 + 0,41}}$
Расход на основном участке Q, где $Q_0 = \pi r_0^2 u_0$	$2,2Q_0 \left(\frac{ax}{r_0} + 0,29\right)$	$1,2Q_0 \sqrt{\frac{ax}{b_0} + 0,41}$

Движение струй в ограниченном объеме существенно отличается от движения свободных струй. Течение таких струй условно можно разделить на две зоны: собственно струя (часто эту зону называют транзитной струей) и циркуляционная область, находящаяся между струей и твердыми границами. Взаимодействие между этими областями определяется не только параметрами струи, но и линейными размерами объема, в пределах которого происходит растекание. Если поперечное сечение струи составляет величину, меньшую 20% площади поперечного сечения объема, движение струи по существу не отличается от движения свободной струи. При увеличении этой величины до 40% движение транзитной струи значительно замедляется и циркуляция вокруг нее возрастает. Дальнейшее увеличение отношения площадей приводит к вырождению струи. Эффективность вентиляции помещений несвободными (ограниченными) струями существенно меньше эффективности вентиляции свободными струями.

## 15 ОДНОМЕРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОГО ГАЗА

В отличие от потоков жидкости газовые течения могут двигаться со значительными скоростями, соизмеримыми со скоростью распространения возмущений. Возмущениями называются отклонения параметров сред от их установившихся значений. Обозначая параметры среды в состоянии равновесия через  $p_0$ ,  $T_0$ ,  $\rho_0$ , а текущие их значения –  $p$ ,  $T$ ,  $\rho$ , имеем возмущения параметров:

$$\Delta p = p - p_0; \quad \Delta T = T - T_0; \quad \Delta \rho = \rho - \rho_0.$$

В зависимости от относительной величины возмущения различают:

- малые (слабые) возмущения

$$\frac{\Delta p}{p_0} \ll 1; \quad \frac{\Delta T}{T_0} \ll 1; \quad \frac{\Delta \rho}{\rho_0} \ll 1.$$

К малым возмущениям относятся отклонения параметров среды при сжатии (разрежении) в звуковой волне;

- сильные возмущения – отклонения параметров имеют порядок, соизмеримый с их невозмущенными значениями

$$\frac{\Delta p}{p_0} \cong 1; \quad \frac{\Delta T}{T_0} \cong 1; \quad \frac{\Delta \rho}{\rho_0} \cong 1.$$

Параметры сред претерпевают значительные возмущения в ударных волнах или скачках уплотнения, возникающих при концентрированных энерговыделениях (взрывах, детонационном горении) и при обтекании тел сверхзвуковыми потоками соответственно.

Одинаковые внешние воздействия (изменения условий течения) принципиально различно влияют на параметры потока в зависимости от величины скорости (до- или сверхзвуковой) его течения.

Анализ газовых потоков высокой скорости осуществляется с учетом сжимаемости среды. Для большинства случаев приемлемой оказывается модель энергетически изолированного течения, соответствующая стационарному течению газа в каналах произвольного сечения.

### 15.1 Скорость распространения малых возмущений

#### в газовых потоках

##### *Распространение малых возмущений в неподвижном газе*

Скорость распространения малых возмущений в среде называется скоростью звука. Для определения скорости звука в неподвижной среде рассмотрим движение плоской звуковой волны в трубе постоянного сечения вдоль оси трубы  $x$ . Пусть в момент времени  $t$  фронт звуковой волны находится на расстоянии  $x$  от начала отсчета. За промежуток времени  $dt$  фронт волны продвинется на расстояние  $dx$ , заняв положение  $x + dx$ , т.е. скорость движения волны равна  $c = dx/dt$ .

Рассмотрим объем, ограниченный двумя последовательными положениями плоского фронта волны  $x$  и  $x + dx$  и боковой поверхностью трубы. При прохождении звуковой волны параметры среды испытывают малые возмущения  $dp$ ,  $dT$ ,  $d\rho$ . Фронт волны отделяет область возмущенной среды от исходной невозмущенной, расположенной перед ним. Подсчитаем изменение количества движения среды в выделенном объеме  $dx$  при прохождении звуковой волны, в которой среда приобретает скорость  $du$ :  $dK = mdu = \rho dVdu = \rho S dx duv$  ( $S$  – поперечное сечение трубы, в расчетах пренебрегаем бесконечно малыми второго порядка малости по сравнению с  $dx$ ,  $dv$ ,  $d\tau$ ).

Согласно теореме классической механики, изменение количества движения выделенного объема равно импульсу внешних сил, приложенных к нему. В данном случае в качестве равнодействующей внешних сил рассматривается только сила, обусловленная повышением давления в звуковой волне  $dpS$ . Следовательно,

$$mdu = \rho S dx du = dpS d\tau. \quad (15.1)$$

Для оценки скорости движения среды в волне возмущения  $du$  воспользуемся законом сохранения массы. Поскольку при прохождении фронтом волны пути  $dx$  плотность среды возросла на величину возмущения  $d\rho$ , масса вещества в объеме  $dV = S dx$  увеличилась:  $dm = d\rho dV$ . Это увеличение происходит за счет притока  $dQ$  в объем  $dV$  вещества из невозмущенной области через поверхность фронта волны  $S$  со скоростью  $du$  за промежуток времени  $d\tau$   $dQ = pdu S d\tau$ . Поскольку  $dm = dQ$ , имеем

$$d\rho S dx = \rho dV S d\tau. \quad (15.2)$$

Рассматривая совместно (15.1) и (15.2), получим с учетом  $c = dx/d\tau$

$$c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho}. \quad (15.3)$$

Скорость звука физически связана со сжимаемостью среды – его распространение определяется взаимодействием микроструктуры вещества (скоростью обмена импульсом между структурными частицами).

Скорости распространения малых возмущений (скорости звука) в сплошных средах можно рассчитать по формулам

$$c^2 = \frac{\partial p}{\partial \rho} = \frac{1}{\beta \rho} = \frac{E}{\rho}. \quad (15.4)$$

$$c = c_s = \sqrt{\frac{k\rho}{\rho}} = \sqrt{kRT}. \quad (15.5)$$

Скорость звука в атмосфере (воздух,  $k = 1.4$ ,  $R = 287 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ )

$$c = \sqrt{1,4287T} \approx 20\sqrt{T}. \quad (15.6)$$

Таким образом, с подъемом на высоту скорость звука в атмосфере уменьшается вследствие уменьшения температуры, в среднем на один метр в секунду на каждые 250 метров подъема.

Для несжимаемой среды ( $\rho = \text{const}$ ) скорость звука  $c = \infty$ .

Однако реальные среды (жидкости, твердые тела) обладают конечной, хотя и малой, сжимаемостью. Так, для воды ( $E = 20 \cdot 10^8 \text{ Па}$ ,  $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ ),  $c = 1414 \text{ м/с}$ , для стали ( $E = 20 \cdot 10^{10} \text{ Па}$ ,  $\rho = 7,8 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ),  $c = 5060 \text{ м/с}$ , в то время как для воздуха при нормальных условиях  $c = 340 \text{ м/с}$ .

## 15.2 Параметры торможения

Уравнение энергии адиабатно изолированного течения идеального газа

$$h + \frac{v^2}{2} = \text{const.}$$

позволяет проанализировать закономерности изменения параметров по длине одномерного потока. Полное торможение потока в условиях энергетической изоляции приведет к преобразованию кинетической энергии в тепловую сопровождающемуся повышением термодинамических параметров среды. Параметры заторможенного таким образом потока называются *параметрами торможения*.

Величину температуры торможения можно определить непосредственно из приведенного выше уравнения с учетом соотношения  $h = C_p T$ , где  $C_p$  – теплоемкость при постоянном давлении:

$$T_0 = T + \frac{u^2}{2C_p} \quad (15.7)$$

В гидрогазодинамике обычно выражают теплоемкости при постоянном давлении  $C_p$  и постоянном объеме  $C_v$  через показатель адиабаты  $k$  и газовую постоянную  $R$  с помощью соотношений

$$\frac{C_p}{C_v} = k \text{ – определение показателя адиабаты,}$$

$$C_p - C_v = R \text{ – уравнение Майера.}$$

Решая представленную систему уравнений относительно  $C_p$  и  $C_v$ , получим

$$C_p = \frac{kR}{k-1} \quad (15.8)$$

откуда температура торможения

$$T_0 = T + \frac{k-1}{2} \frac{u^2}{kR}, \quad (15.9)$$

или

$$\frac{T_0}{T} = 1 + \frac{k-1}{2} M^2, \quad (15.10)$$

где  $M = u / c$  – число Маха, равное отношению скорости потока к местной скорости звука. Согласно (15.9) температура торможения потока воздуха ( $k = 1.4$ ;  $R = 287 \text{ Дж}/[\text{кг} \cdot \text{К}]$ ) определяется выражением

$$T_0 = T + \frac{u^2}{2000}. \quad (15.11)$$

Температура торможения всегда больше температуры в потоке, поскольку тепловая энергия заторможенного потока увеличивается по сравнению с тепловой энергией в потоке за счет кинетической энергии макроскопического движения масс среды. Это обстоятельство объясняет такие физические явления как разогрев элементов конструкции летательных аппаратов, известный в авиации под названием «тепловой барьер», и метеоритных тел, движущихся в атмосфере с большой скоростью.

Элементарные расчеты по выражению (15.11) температуры носового конуса сверхзвукового пассажирского самолета Ту-144 (крейсерская скорость на высоте 12 км, где температура стандартной атмосферы составляет  $-56^\circ\text{C}$ , достигала  $u = 2200 \text{ км/ч}$  или  $\sim 611 \text{ м/с}$ ) дают  $T_0 = 131^\circ\text{C}$ . Для метеоритных тел, влетающих в земную атмосферу со скоростями порядка первой космической ( $\sim 8 \text{ км/с}$ ), расчет по (15.11) дает величины порядка 30000 К.

### 15.3 Критическая скорость. Критические параметры

Скорость потока и местная скорость звука в адиабатно изолированных условиях связаны соотношением

$$\frac{c^2}{k-1} + \frac{u^2}{2} = h_0 = \text{const}. \quad (15.12)$$

Из (15.12) следует, что увеличение скорости потока приводит к снижению местной скорости звука. В некотором сечении потока эти скорости могут стать одинаковыми. Скорость потока, численно равная местной скорости звука, называется критической, а соответствующие этому состоянию термодинамические параметры – критическими параметрами.

Величину критической скорости определяют из (15.12), полагая  $u = c = u_{\text{кр}}$

$$\frac{u_{\text{кр}}^2}{k-1} + \frac{u_{\text{кр}}^2}{2} = h_0 = \frac{kRT_0}{k-1},$$

откуда

$$u_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{2kRT_0}{k+1}}. \quad (15.13)$$

Критическому режиму течения соответствует число Маха

$$M = \frac{u}{c} = 1.$$

Критические параметры потока можно определить из выражений

$$\begin{aligned} \frac{T_{кр}}{T_0} &= \frac{2}{k+1}; \\ \frac{p_{кр}}{p_0} &= \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{k}{k-1}}; \\ \frac{\rho_{кр}}{\rho_0} &= \left(\frac{2}{k+1}\right)^{\frac{1}{k-1}}. \end{aligned} \quad (15.14)$$

В газодинамических расчетах наряду с числом Маха  $M = u/c$  вводится коэффициент скорости  $\lambda = u / u_{кр}$ . По смыслу введенных безразмерных скоростей число  $M$  дает соотношение между кинетической и потенциальной энергией потока, а коэффициент  $\lambda$  определяет соотношение кинетической и полной энергии. Полученные выше формулы для расчета параметров торможения устанавливают связь между безразмерными параметрами и безразмерными скоростями, что имеет важное практическое значение, так как позволяет по любому безразмерному параметру найти все остальные величины.

#### 15.4 Газодинамические функции

В основе расчета стационарных энергетически изолированных потоков идеального газа в рамках одномерной модели лежат уравнения непрерывности и энергии:

Связь между параметрами потока и торможения, как показано выше, определяется безразмерными соотношениями, получившими название газодинамических функций

$$\begin{aligned} \tau &= \frac{T}{T_0} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{-1} = 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2; \\ \varepsilon &= \frac{\rho}{\rho_0} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{-\frac{1}{k-1}} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{1}{k-1}}; \\ \pi &= \frac{p}{p_0} = \left(1 + \frac{k-1}{2} M^2\right)^{-\frac{k}{k-1}} = \left(1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2\right)^{\frac{k}{k-1}}. \end{aligned}$$

Таким образом, значения газодинамических функций  $\tau$ ,  $\varepsilon$ ,  $\pi$  зависят от величины показателя адиабаты  $k$  и безразмерных скоростей – чисел Маха

$M = u / c$  и  $\lambda = u / u^*$ . Газодинамические функции табулированы. Критические параметры потоков определяются по газодинамическим таблицам при  $\lambda = M = 1$ .

Из более сложных газодинамических функций при расчете газовых струйных аппаратов используется функция  $q = f(k, M) = \phi(k, \lambda)$ , которая определяется как отношение плотности потока газа, изоэнтропно текущего в данном сечении, к плотности критического потока

$$q = \frac{\rho u}{\rho^* u^*} = \frac{S^*}{S}.$$

В различных модификациях функцию  $q$  можно записать так:

$$q = \frac{S^*}{S} = \frac{\varepsilon \lambda}{\varepsilon^*} = \left( \frac{k+1}{k} \right)^{k/k-1} \lambda \left( 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right)^{1/k-1}$$

Для критического потока  $q = 1$ .

### 15.5 Закон обращения воздействия

Изменения условий течения газа, вызывающие соответствующие изменения параметров состояния потока, называются воздействиями. Существует пять видов воздействий:

1. Геометрическое воздействие – изменение величины проходного сечения канала вдоль потока.
2. Расходное воздействие – изменение массового расхода газа в канале путем вдува (отсоса) дополнительной массы через боковую поверхность.
3. Механическое воздействие – обмен механической энергией в форме технической работы между потоком газа и окружающей средой.
4. Тепловое воздействие – подвод (отвод) тепла в поток.
5. Воздействие трением – учет влияния реально существующих сил вязкого трения в рамках модели идеального газа.

Для рассмотрения влияния комбинации воздействий на скорость потока используем модель одномерного течения. Выделим в канале переменного сечения участок длиной  $dx$ . Пусть на этом участке изменение размеров проходного сечения канала составит  $dS$ ; изменение массового расхода –  $dG$ ; совершается техническая работа  $dL_{техн}$  (в расчете на единицу массы газа); подводится отнесенное к единице массы газа количество тепла  $dQ$ , а также совершается работа против сил трения  $dL_{трени}$ , также отнесенная к единице массы газа. Математическая модель такого течения содержит следующие уравнения одномерного стационарного течения газа.

1. Уравнение непрерывности  $G = \rho u S$  или в дифференциальной форме:

$$\frac{dG}{G} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{d\bar{u}}{\bar{u}} + \frac{dS}{S}$$

2. Уравнение баланса механической энергии потока (4.6)

$$d\left(\frac{\bar{u}^2}{2}\right) + \frac{dp}{\rho} + dL_{\text{техн}} + d\psi + dL_{\text{трех}} + \frac{dG}{G} \bar{u} \bar{u}_{\text{бок}} = 0.$$

3. Уравнение первого начала термодинамики для газового потока:

$$dQ = dh + d\left(\frac{u^2}{2}\right) + dL_{\text{техн}}$$

4. Уравнение состояния идеального газа  $p = \rho RT$ , или в дифференциальной форме:

$$\frac{dp}{p} = \frac{d\rho}{\rho} + \frac{dT}{T}.$$

Последовательно исключая из системы термодинамические параметры состояния газа и учитывая  $c = \sqrt{kRT}$ ;  $M = u/c$ , получим

$$M^2 - 1 \frac{du}{u} = \frac{dS}{S} - \frac{dG}{G} - \frac{1}{c^2} dL_{\text{техн}} - \frac{\kappa - 1}{c^2} dQ - \frac{k}{c^2} dL_{\text{трех}}. \quad (15.15)$$

Это соотношение получило название закона обращения воздействия. Особенность этого выражения заключается в том, что знак его левой части изменяется при переходе значения скорости через критическое ( $M = 1$ ), поэтому характер влияния отдельных физических воздействий на газовое течение противоположен при дозвуковом и сверхзвуковом режимах. Воздействия, вызывающие ускорение ( $du > 0$ ) в дозвуковом потоке ( $M < 1$ ) – сужение канала  $dS < 0$ , подвод дополнительной массы газа  $dG > 0$ , совершение газом работы  $dL_{\text{техн}} > 0$ , трение  $dL_{\text{трех}}$  и подвод тепла  $dQ > 0$ , приводят к замедлению сверхзвукового потока; воздействия обратного знака ( $dS > 0$ ;  $dG < 0$ ;  $dL_{\text{техн}} < 0$ ;  $dL_{\text{трех}}$ ;  $dQ < 0$ ), приводят к замедлению дозвукового потока и ускорению сверхзвукового. Отсюда следует важный вывод: под влиянием одностороннего воздействия величину скорости газового потока можно довести до критической, но нельзя перевести через нее.

Аппарат, предназначенный для непрерывного увеличения скорости потока, называется соплом. В принципе, возможны четыре вида сопел, реализующих непрерывное ускорение газовых потоков с переходом через скорость звука за счет обращения соответствующих изолированных воздействий: геометрическое, расходное, механическое и тепловое.

## 15.6 Геометрическое сопло

Проанализируем влияние размеров проходного сечения канала на скорость газа. Для этого выделим из (15.15) геометрическое воздействие на поток, рассматривая течение идеального ( $dL_{\text{трех}} = 0$ ) газа в канале с непро-

нищаемой боковой поверхностью ( $dG = 0$ ) в условиях энергетической изоляции ( $dL_{\text{мех}} = 0; dQ = 0$ ):

$$M^2 - 1 \frac{du}{u} = \frac{dS}{S}. \quad (15.16)$$

Как видно из (15.16), ускорение потока ( $du > 0$ ) в дозвуковой части канала ( $M < 1$ ) получается при его сужении ( $dS < 0$ ), но начиная с критического сечения ( $M = 1$ ), для получения сверхзвукового потока и дальнейшего его ускорения необходимо изменить знак воздействия, т.е. расширить канал в направлении течения ( $dS > 0$ ).

Профилирование входной части канала в направлении течения обуславливается относительно медленным изменением плотности газа при его начальном ускорении в дозвуковом течении. Поскольку массовый расход газа  $G = \rho u S = \text{const}$ , увеличение скорости при  $\rho \approx \text{const}$  требует быстрого уменьшения размеров сечения  $S$ . При дальнейшем ускорении рост скорости газа сопровождается заметным уменьшением давления, и, следовательно, плотности газа, что частично компенсирует рост скорости, и поэтому сечение надо сужать уже не так быстро. Наконец, скорость потока становится равной местной скорости звука – в этом сечении канала плотность уменьшается обратно пропорционально скорости  $\rho \approx 1/u$ .

Для получения практически равномерного распределения скоростей в выходном сечении дозвуковой части сопла его профиль должен очерчиваться по кривой Виташинского  $r = r(x)$  (рис.15.1), определяемой уравнением

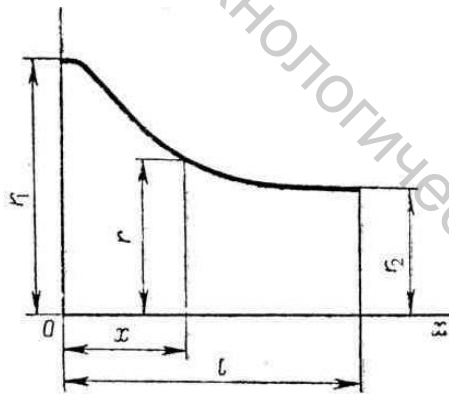


Рис.15.1 – Профиль сопла Виташинского

$$r = \frac{r_2}{\sqrt{1 - \left[ 1 - \left( \frac{r_2}{r_1} \right)^2 \right] \frac{-x^2/l^2}{+3x^2/l^2}}}, \quad (15.17)$$

где  $r, x$  — текущие координаты профиля сопла, радиальная и осевая соответственно;  $r_1, r_2$  — радиусы входного и выходного поперечных сечений;  $l$  — параметр, выбираемый обычно равным  $4r_1$ . Профиль Виташинского при-

меняют для соединения труб различных диаметров при дозвуковых скоростях вплоть до значений  $u/u_{кр} = 0,9-0,95$ . Дозвуковые сопла, присоединяемые к резервуарам, могут очерчиваться по дугам окружностей, лемнискатам или параболам.

### Сверхзвуковая часть сопла.

Дальнейшее увеличение скорости сопровождается более быстрым уменьшением плотности, и для компенсации этого изменения при  $G = const$  сечение канала приходится увеличивать. Таким образом, сверхзвуковая часть сопла должна выполняться в виде расширяющегося канала. Форма расширяющейся части сопла может быть в первом приближении принята конической. Угол раствора конуса принимается не превосходящим  $12^\circ-14^\circ$ , хотя в отдельных случаях (в целях сокращения размеров) этот угол увеличивают.

Комбинация из суживающегося (дозвукового) и расширяющегося каналов образует сверхзвуковое сопло. В самом узком сечении сопла (горловине) скорость потока равна критической. Такое геометрическое сопло называется соплом Лавала.

Радиус кривизны стенки горловины сопла должен быть не меньше диаметра критического сечения. Такое сопло может обеспечить лишь приближенное к заданному среднее значение скорости на выходе и создает неравномерное распределение местных скоростей. Для получения равномерного потока применительно к аэродинамическим трубам и реактивным аппаратам с очень большой скоростью истечения используются сопла со специально профилированными стенками. Следует отметить, что сверхзвуковое сопло в целом эффективно (с минимальными потерями) работает лишь в расчетном режиме.

**Расчет геометрического сопла.** В рамках одномерной модели расчет геометрического сопла строится на основе системы двух уравнений стационарного энергетически изолированного течения идеального газа в канале переменного сечения при постоянном расходе:

$$G = \rho \cdot u \cdot S = const; \quad i + \frac{u^2}{2} = i_0.$$

Основным соотношением, связывающим изменение площади сечения с параметрами газа, является функция расхода

$$\frac{S_{кр}}{S} = \frac{\rho \cdot u}{\rho_{кр} \cdot u_{кр}} = \left( \frac{k+1}{2} \right)^{1/(k+1)} \lambda \left( 1 - \frac{k-1}{k+1} \lambda^2 \right)^{1/(k+1)}. \quad (15.18)$$

В практических расчетах удобно пользоваться соотношением, получаемым из (15.18)

$$\frac{G \sqrt{T_0}}{S_{кр} p_0} = \sqrt{\frac{k}{R} \left( \frac{2}{k+1} \right)^{\frac{k+1}{k-1}}} = const. \quad (15.19)$$

Для воздуха ( $k = 1.4$ ,  $R = 287$  Дж/кг К) выражение (15.19) приобретает вид ( $g = 9.8$  м/с<sup>2</sup>)

$$\frac{G\sqrt{T_0}}{gS_{кр}p_0} \approx 0,4. \quad (15.20)$$

### 15.7 Вихревой эффект Ранка

Измерения в закрученных потоках, текущих в циклонных аппаратах очистки промышленных газов, свидетельствуют о различии в температурах в ядре потока и на периферии. В основе этого феномена – вихревой эффект Ранка, обнаруженный еще в 30-х годах XX века. Физическая причина возникновения эффекта Ранка заключается в перераспределении полной энергии во вращающихся потоках газа, при котором быстрые струйки оказываются обогащенными энергией за счет медленных.

В закрученных потоках скорость  $u = u(r)$ , и в начальный момент времени более быстрые струйки имеют более низкую термодинамическую температуру при одинаковой по сечению температуре торможения

$$T_0^{исх} = const ; r \uparrow T \downarrow.$$

$$T_0^{исх} = T^{исх} + \frac{u^2}{2C_p} = const.$$

Неоднородность поля скоростей, таким образом, обуславливает неоднородность поля термодинамической температуры при постоянстве исходной температуры торможения, что вызывает перенос теплоты от более медленных струек к более быстрым. Распределение температур формируется также под влиянием диссипации части механической энергии потока в сечении вихревого потока. В следующие моменты времени между слоями газа, движущимися с различными скоростями, происходит интенсивный обмен импульсом за счет турбулентных пульсаций – вращающийся поток существенно турбулизируется. Этот обмен, играющий определяющую роль в явлении в целом, приводит к практическому выравниванию термодинамической температуры по сечению камеры. Если предположить, что вращение является квазитвердым, ( $u(r) = \omega r$ ,  $\omega = const$ ), то в начальный момент температура по сечению камеры определяется выражением

$$T = T_0^{исх} - \frac{u^2}{2C_p} = T_0^{исх} - \frac{\omega^2 r^2}{2C_p}.$$

Затем за счет турбулентного обмена термодинамическая температура по сечению выравнивается  $T = T_{вих} = const$ . Тогда температура торможения и полная энергия потока зависят от радиальной координаты следующим образом:

$$T_0^{\text{ВЫХ}} = T^{\text{ВЫХ}} + \frac{u^2 r^2}{2C_p} = T^{\text{ВЫХ}} + \frac{\omega^2 r^2}{2C_p}$$

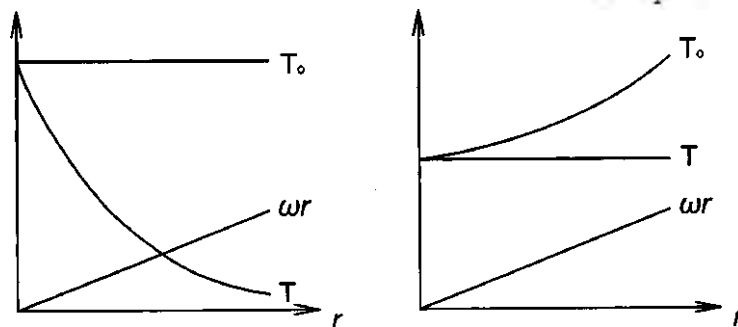


Рис.15.2

Следовательно, происходит перераспределение полной энергии в потоке: центральные слои газа имеют меньшую температуру торможения на выходе и соответственно меньшую полную энергию, т.е. являются более холодными по сравнению с периферийными слоями (рис. 15.2). Очевидно, что разность температур холодного и горячего потоков составляет  $u_{\text{max}}^2 / 2C_p$ , или для воздуха  $u_{\text{max}}^2 / 2000$ . При больших скоростях, особенно звуковых или сверхзвуковых  $\approx 300\text{--}400$  м/с,  $\Delta T$  достигает  $50\text{--}80^\circ\text{C}$ .

Если осуществить отдельный вывод газа из центральной части вихревой камеры и с окраинных слоев, можно из исходного газа получить холодный (массовая доля  $\mu$ ) и горячий (массовая доля  $\mu_k = \mu - l$ ) потоки. Соответствующая конструкция называется вихревой трубкой Ранка.

Вихревая труба в ее основной модификации – это устройство, в котором сжатый газ при расширении разделяется на два потока: один – более холодный, чем исходный, и второй, более горячий.

В представленной на рис. 15.3 конструкции вихревой трубы цилиндрическая трубка 1 соединена с распределительной головкой, которая содержит сопловой ввод 3, диафрагму 4 и трубку холодного потока 5. С противоположной стороны расположен корпус регулирующего вентиля 6 с конусом 7 и трубкой 8 горячего потока.

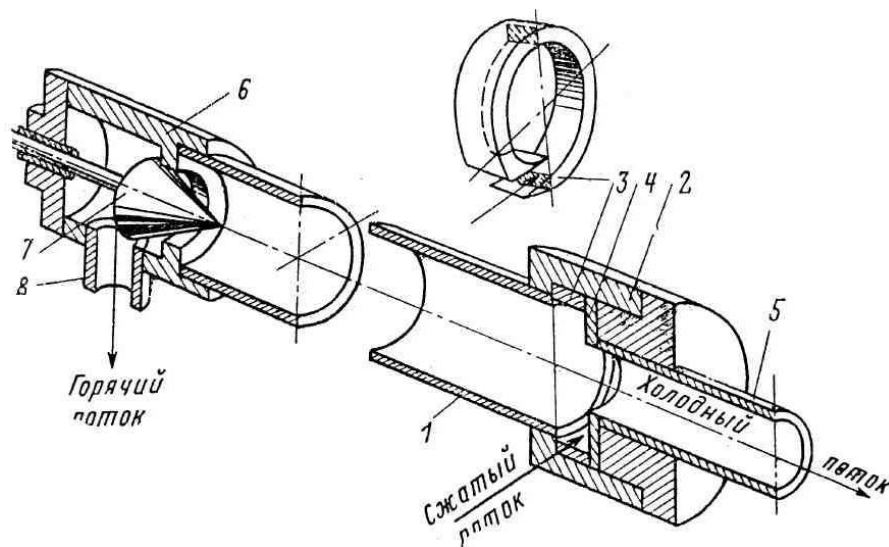


Рис.15.3 – Общий вид вихревой трубы

Меняя положение конуса 7, можно изменять расходы и температуры холодного и горячего потоков. Для понижения температуры  $T_x$  необходимо расход холодного потока уменьшить (вентиль 7 открывается). Для повышения температуры  $T_2$  горячего потока, наоборот – вентиль 7 прикрывается.

С помощью регулирующего вентиля, таким образом, можно изменять соотношение массовых расходов холодного и горячего потоков. При уменьшении доли холодного газа  $\mu = G_{хол} / G_{сум}$  разность температур между горячим потоком и поступающим в камеру исходным потоком  $\Delta T_2 = T_2 - T^{исх}$  уменьшается, а разность температур исходного потока и холодного газа  $\Delta T_x = T^{исх} - T_x$  увеличивается. Охлаждение газа в вихревой трубе значительно больше, чем при дросселировании. Так, при расширении воздуха с давлением  $p = 11 \text{ атм}$ , температурой перед соплом  $T^{исх} = 20^\circ\text{C}$  и  $\mu = 0,2$  температура холодного потока на выходе из трубки снижается до  $T_k = -48^\circ\text{C}$ .

При дросселировании воздуха тех же параметров его можно охладить только лишь на  $(2 - 3)^\circ\text{C}$ . Температурная эффективность энергетического разделения потока существенно зависит от давления перед разгонным соплом на входе в вихревую камеру и возрастает с увеличением давления. Однако как только давление перед соплом возрастает до величины, обеспечивающей критическое истечение из сопла, дальнейший его рост не изменяет величины температурных разностей – вихревой эффект перестает зависеть от давления (явление насыщения вихревого эффекта).

Для оценки эффективности вихревых труб по холодопроизводительности применяется так называемый холодильный КПД, равный отношению полученной холодопроизводительности к максимально возможной работе в идеальном адиабатическом процессе расширения:

$$\eta_q = \frac{\mu \Delta T_x}{\Delta T_s},$$

где  $\Delta T_S$  – разность температур при изоэнтропическом процессе расширения. Максимальное значение  $\eta_q$  для воздуха не превышает 24 - 25%, в то время как расширение воздуха в детандере с отдачей внешней работы в тех же условиях является гораздо более эффективным:  $\eta_q = 78\%$ .

В тех областях техники, где расход энергии не играет решающей роли, а требуются лишь мобильность и простота конструкции, а также там, где потребность в холоде возникает эпизодически, применение вихревой трубы может быть оправданным. Важны и такие преимущества вихревой трубы, как возможность использования воздуха в качестве хладагента, утилизация малых перепадов давления и, наконец, возможность получения двух потоков – горячего и холодного, температуру которых легко регулировать.

Имеется ряд патентов по применению вихревой трубы для кондиционирования воздуха, осушки газа, измерения скорости и статической температуры за бортом самолета и т.д.

## 16 УДАРНЫЕ ВОЛНЫ

### 16.1 Классификация разрывов в потоках газа

На поверхностях разрыва должны выполняться граничные условия, следующие из законов сохранения массы, импульса и энергии, формулируемые в виде условий непрерывности соответствующих потоков. Рассмотрим элемент поверхности разрыва в связанной с ним системе координат. Пусть  $\vec{n}$  – вектор нормали к поверхности разрыва в данной точке, направленный в сторону течения газа (рис. 16.1).

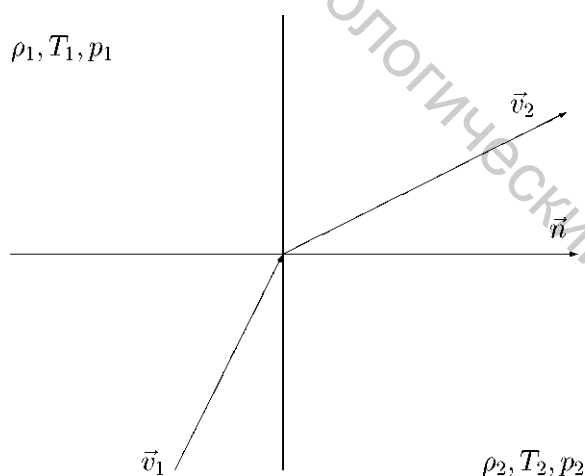


Рис.16.1 - Схема поверхности разрыва

Параметры течения на входе в поверхность разрыва снабжены индексом «1», на выходе – индексом «2».

Условия непрерывности потоков массы, импульса и энергии через поверхность разрыва (в расчете на единицу площади) имеют вид

$$\begin{aligned}
\rho_1 \vec{u}_1 \vec{n} &= \rho_2 \vec{u}_2 \vec{n}, \\
\rho_1 u_{1n} \vec{n} + p_1 \vec{n} &= \rho_2 u_{2n} \vec{n} + p_2 \vec{n}, \\
\rho_1 \vec{n} \vec{n} \left[ \frac{u_1^2}{2} + h_1 \right] &= \rho_2 \vec{n} \vec{n} \left[ \frac{u_2^2}{2} + h_2 \right].
\end{aligned} \tag{16.1}$$

Проекция векторного условия непрерывности потока импульса на плоскость поверхности разрыва приводят к следующему ( $x, y$  – оси координат, лежащие в плоскости разрыва;  $(\vec{u}_j \vec{n}) = u_{jn}, j = 1, 2$

$$\begin{aligned}
\rho_1 u_{1n} u_{1x} &= \rho_2 u_{2n} u_{2x}, \\
\rho_1 u_{1n} u_{1y} &= \rho_2 u_{2n} u_{2y}.
\end{aligned} \tag{16.2}$$

Полная система граничных условий (16.2) позволяет сделать вывод о существовании двух типов поверхностей разрыва:

1. В первом случае через поверхность разрыва нет потока вещества  $\rho_1 u_{1n} = \rho_2 u_{2n} = 0$ . Поскольку плотности потока  $\rho_1, \rho_2$  отличны от нуля, следовательно,  $u_{1n} = u_{2n} = 0$ . При этом условие непрерывности потока энергии удовлетворяется автоматически, а условие непрерывности потока импульса приводит к соотношению  $\rho_1 = \rho_2$ . Тангенциальные же составляющие скорости и плотность могут испытывать произвольный скачок. Такие разрывы называются тангенциальными. Как показывает исследование устойчивости границы раздела двух относительно движущихся слоев вязкой среды, тангенциальные разрывы являются абсолютно неустойчивыми: они неустойчивы уже по отношению к бесконечно малым возмущениям.

2. Во втором случае поток вещества, а вместе с ним и нормальные к поверхности разрыва компоненты скорости  $u_{1n}$  и  $u_{2n}$  отличны от нуля. Равенство плотностей потока массы  $\rho_1 u_{1n} = \rho_2 u_{2n}$  при этом приводит согласно (16.2) к условию сохранения тангенциальных составляющих скорости потока  $u_{1x} = u_{2x}, u_{1y} = u_{2y}$ . Плотность, давление и нормальные компоненты скорости испытывают скачок, величина которого определяется условиями (16.1). Квадрат скорости потока газа можно заменить суммой квадратов нормальной и касательных составляющих:

$$u^2 = u_n^2 + u_x^2 + u_y^2$$

Преобразуя выражения (16.1) с учетом сделанных замечаний, получим

$$\begin{aligned}
\rho_1 u_{1n} &= \rho_2 u_{2n}, \\
\rho_1 u_{1n}^2 + p_1 &= \rho_2 u_{2n}^2 + p_2, \\
u_{1x} &= u_{2x}, \\
u_{1y} &= u_{2y},
\end{aligned}$$

$$u \frac{u_{1n}^2}{2} + h_1 = \frac{u_{2n}^2}{2} + h_2. \quad (16.3)$$

Разрывы этого типа называются ударными волнами. Такие разрывы возникают при обтекании тел сверхзвуковыми газовыми потоками, при торможении сверхзвуковых потоков вблизи омываемых поверхностей и при течениях в каналах, конденсации переохлажденного пара, а также при концентрированных энерговыделениях (взрывах) в сплошных средах.

### 16.2 Прямой скачок уплотнения

Прямой скачком уплотнения называется плоская поверхность разрыва, перпендикулярная скорости набегающего потока. Из определения следует

$$\begin{aligned} u_{1n} &= u_1; & u_{2n} &= u_2 \\ u_{1x} &= u_{2x} = 0; & u_{1y} &= u_{2y} = 0. \end{aligned}$$

Из (16.3) с учетом приведенных соотношений получим

$$\begin{aligned} \rho_1 u_1 &= \rho_2 u_2, \\ \rho_1 u_1^2 + p_1 &= \rho_2 u_2^2 + p_2, \\ \frac{u_1^2}{2} + h_1 &= \frac{u_2^2}{2} + h_2. \end{aligned} \quad (16.4)$$

Анализ этих соотношений позволяет получить связь между параметрами потока при пересечении фронта прямого скачка.

Соотношение скоростей. Используя первое из выражений (16.4), преобразуем второе из них

$$u_1 u_2 \rho_2 - \rho_1 = \rho_2 - \rho_1,$$

откуда

$$u_1 u_2 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1}. \quad (16.5)$$

Для исключения термодинамических параметров потока из последнего выражения рассмотрим условие непрерывности потока энергии, заме-

няя  $h = c_p T = \frac{kRT}{k-1}$ ; ( $k = C_p/C_v$  – показатель адиабаты Пуассона)

$$\frac{u_j^2}{2} + c_p T_j = h_0 = c_p T_0, \quad j = 1, 2.$$

Отсюда, используя уравнение состояния идеального газа, получим

$$p_j = p_i \left[ RT_0 - \frac{k-1}{2k} u_j^2 \right], \quad j = 1, 2. \quad (16.6)$$

Определим  $p_2 - p_1$  из предыдущих выражений, вычитая одно ( $j = 2$ ) из

другого ( $j = 1$ ):

$$p_2 - p_1 = \rho_2 - \rho_1 \frac{2kRT_0}{k+1},$$

или

$$u_1 u_2 = \frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{2kRT_0}{k+1} = u_{кр}^2$$

Таким образом, скорости потока по обе стороны фронта прямого скачка связаны соотношением

$$u_1 u_2 = u_{кр}^2.$$

Поскольку скорость потока на входе в скачок  $u_1 > u_{кр}$  – поток сверхзвуковой, на выходе из скачка  $u_2 < u_{кр}$ , т.е. при пересечении фронта прямого скачка уплотнения сверхзвуковой поток становится дозвуковым.

**Ударная адиабата.** Процесс изменения состояния газа при пересечении фронта скачка уплотнения происходит за доли секунды (толщина скачка соизмерима со средней длиной свободного пробега молекул), т.е. без теплообмена с окружающей средой. Следовательно, этот процесс можно считать адиабатическим. Однако, как будет показано ниже, ударная адиабата (адиабата Гюгонио) в отличие от адиабаты Пуассона не является изоэнтропой: процесс изменения параметров газа в скачке сопровождается увеличением энтропии.

Для нахождения связи между термодинамическими параметрами газа по обе стороны прямого скачка исключим скорости потока совместным рассмотрением (16.5) и (16.6). Для этого найдем из (16.6) величину  $(p_2 + p_1)$ , суммируя соответствующие выражения при  $j = 2$  и  $j = 1$ :

$$p_2 + p_1 = \rho_2 + \rho_1 \frac{RT_0}{k} - \frac{k-1}{2k} (\rho_2 u_2^2 + \rho_1 u_1^2)$$

Проводя преобразования, аналогичные использованным при выводе соотношения скоростей, получим уравнение термодинамического процесса, происходящего при пересечении фронта скачка

$$\frac{p_2 - p_1}{\rho_2 - \rho_1} = \frac{1}{k} \frac{p_2 + p_1}{\rho_2 + \rho_1},$$

или

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\frac{k+1}{k-1} \frac{p_1}{p_2} + 1}{\frac{k+1}{k-1} \frac{p_1}{p_2} + 1}. \quad (16.7)$$

Выражение (16.7) является уравнением ударной адиабаты. Оно существенно отличается от уравнения адиабаты Пуассона (изоэнтропы):

$$pV^k = \frac{P}{p^k} = \text{const};$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{1/k}. \quad (16.8)$$

В отличие от адиабаты Пуассона (16.8) ударная адиабата (16.7) обладает следующими особенностями:

1. Бесконечное увеличение давления в адиабате Пуассона (16.8) приводит к соответствующему росту плотности газа

$$\text{при } \frac{p_2}{p_1} \rightarrow \infty \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} \rightarrow \infty;$$

в то время как в ударной адиабате (16.7)

$$\text{при } \frac{p_2}{p_1} \rightarrow \infty \quad \frac{\rho_2}{\rho_1} \rightarrow \frac{k+1}{k-1}.$$

Таким образом, рост плотности газа при ударном сжатии отстает от такового в адиабате Пуассона. Следствием такого запаздывания является опережающий рост температуры. Это обстоятельство объясняет возгорание горючих материалов при прохождении сильной ударной волны и является основой детонационного механизма распространения горения – взрыва.

2. В адиабате Пуассона не происходит изменения энтропии при сжатии (расширении) газа, в то время как ударное сжатие сопровождается возрастанием энтропии. Для доказательства рассмотрим изменение энтропии в произвольном процессе изменения состояния идеального газа

$$dS = \frac{dq}{T} = \frac{1}{T} \left( dh - V dp \right) = \frac{c_p dT}{T} - \frac{dp}{\rho T} = \frac{kR}{k-1} \left[ \frac{dp}{p} - \frac{dp}{\rho} \right] - R \frac{dp}{p} = \frac{R}{k-1} \left[ \frac{dp}{p} - k \frac{dp}{\rho} \right].$$

Проинтегрируем полученное дифференциальное уравнение в пределах от некоторого исходного состояния газа (1) до состояния (2)

$$\Delta S = \int_1^2 dS = \frac{R}{k-1} \ln \left[ \frac{p_2 \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^k}{p_1 \left( \frac{\rho_1}{\rho_2} \right)^k} \right] = \frac{R}{k-1} \ln \left( \frac{p_2}{p_1} \right).$$

Очевидно, что изменение состояния идеального газа в адиабате Пуассона не сопровождается изменением энтропии

$$\frac{p_2}{p_1} = \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^k, \quad \Delta S = \ln \left( \frac{p_2}{p_1} \right) = 0$$

В ударной адиабате вследствие запаздывания роста плотности с увеличением давления по сравнению с адиабатой Пуассона

$$\frac{p_2}{p_1} > \left( \frac{\rho_2}{\rho_1} \right)^k, \quad \Delta S = \ln \left( \frac{p_2}{p_1} \right) > 0.$$

Следовательно, ударное сжатие газа сопровождается ростом энтропии, т.е. диссипацией энергии, необратимым переходом части механической энергии газа в тепловую. Становится понятным существование в природе только скачков уплотнения – процессов ударного сжатия, но не ударного разрежения газа, хотя приведенные выше условия непрерывности потоков массы, импульса и энергии теоретически одинаково пригодны для обеих разновидностей скачкообразного изменения состояния: процесс ударного разрежения (скачкообразного уменьшения плотности) сопровождался бы уменьшением энтропии без компенсирующего процесса совершения работы, что противоречит II началу термодинамики.

Потери механической энергии в скачке обуславливают появление дополнительного вида сопротивления тел при сверхзвуковом обтекании – так называемого волнового сопротивления. Стремление минимизировать величину этого вида сопротивления явилось причиной появления ряда конструкторских решений в авиации около- и сверхзвуковых скоростей: стреловидные крылья тонкого заостренного профиля, аэродинамические иглы и т.д.

### 16.3 Тепловые скачки

В условиях концентрированного выделения теплоты (горение, детонация, экзотермическая химическая реакция, конденсация паров в движущемся газе) термодинамические параметры и скорости газа изменяются скачкообразно, т.е. образуются тепловые скачки.

Анализ течения газа через фронт теплового скачка проведем, считая скачок прямым,  $u_n = u$ , в рамках модели идеального газа. Граничные условия непрерывности потоков массы и импульса остаются полностью аналогичными соответствующим выражениям (16.3):

$$\begin{aligned} \rho_1 u_1 &= \rho_2 u_2, \\ \rho_1 u_1^2 + p_1 &= \rho_2 u_2^2 + p_2. \end{aligned} \quad (16.9)$$

Условие непрерывности потока энергии содержит дополнительное слагаемое – удельную (отнесенную к единице массы) энергию  $q$ , выделяемую на скачке

$$h_1 + \frac{u_1^2}{2} + q = h_2 + \frac{u_2^2}{2}. \quad (16.10)$$

В общем случае идеальный газ за фронтом теплового скачка имеет иной химический состав, нежели перед скачком. Поэтому уравнения состояния газа до и после скачка различны:

$$p_1 = \rho_1 R_1 T_1, \quad p_2 = \rho_2 R_2 T_2. \quad (16.11)$$

Изменяются также показатель адиабаты газа  $k_1 \neq k_2$  температура торможения  $T_0^{(1)} \neq T_0^{(2)}$  и величина критической скорости

$$u_{кр}^{(j)} = \sqrt{\frac{2k_j R_j T_0^{(j)}}{k_j + 1}}, \quad j = 1, 2.$$

Заменяя в (16.10)  $h_j = k_j R_j / (k_j - 1)$  и вводя безразмерные скорости  $\lambda_j = u_j / u_{кр}^{(j)}$ , получим уравнение, связывающее скорости газа до и после скачка:

$$\lambda_2^2 - \bar{K} \frac{1 + \lambda_1^2}{\lambda_1 \sqrt{1 + q}} \lambda_2 + 1 = 0, \quad (16.12)$$

где

$$\bar{K} = \frac{k_2}{k_1} \sqrt{\frac{k_1^2 - 1}{k_2^2 - 1}}, \quad \bar{q} = \frac{q}{h_0^{(j)}}.$$

Решение уравнения (16.12) имеет вид

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \bar{K} \frac{1 + \lambda_1^2}{\lambda_1 \sqrt{1 + q}} \pm \sqrt{\bar{K}^2 \frac{(1 + \lambda_1^2)^2}{4\lambda_1^2 (1 + q)} - 1}. \quad (16.13)$$

Уравнение (16.13) упрощается для частного случая, когда физические свойства газа в тепловом скачке не меняются:  $k_1 = k_2 = k$ ;  $\bar{K} = 1$  и

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \frac{1 + \lambda_1^2}{\lambda_1 \sqrt{1 + q}} \pm \sqrt{\frac{(1 + \lambda_1^2)^2}{4\lambda_1^2 (1 + q)} - 1}. \quad (7.14)$$

Уравнения (16.12) и (16.13) показывают, что теоретически возможно существование четырех типов прямых тепловых скачков, отвечающих условиям  $\lambda_1 > 1$  и  $\lambda_1 < 1$ , при которых в зависимости от величины  $\sqrt{1 + q}$  безразмерные скорости за скачком могут быть  $\lambda_2 < 1$  и  $\lambda_2 > 1$ . В действительности тепловые скачки с  $\lambda_1 < 1$  и  $\lambda_2 > 1$  не реализуются, так как переход через критическую скорость в условиях подвода тепла невозможен. Не реализуются также тепловые скачки, когда  $\lambda_1 > 1$  и  $\lambda_2 > 1$ . Такие скачки перемещались бы относительно находящегося перед ними газа со сверхзвуковой скоростью, и их возникновение не должно было бы отразиться на состоянии газа. Следовательно, реальными оказываются тепловые скачки двух типов:

1.  $\lambda_1 > 1$  и  $\lambda_2 < 1$  – сверхзвуковые скачки, в которых выделение тепла сопровождается сжатием газа ( $p_2 > p_1$ ).
2.  $\lambda_1 < 1$  и  $\lambda_2 < 1$  – дозвуковые скачки, в которых выделение теплоты сопровождается разрежением газа ( $p_2 < p_1$ ).

В зависимости от пространственной ориентации фронта скачка по отношению к скорости потока тепловые скачки также могут быть косыми и криволинейными.

## 17 ОСНОВЫ ТЕОРИИ ПОДОБИЯ И МОДЕЛИРОВАНИЯ

Существует два метода исследования физических явлений – аналитический и экспериментальный. При аналитическом исследовании движения жидкости задача сводится к интегрированию системы дифференциальных уравнений при заданных условиях однозначности.

Если модель разрешима, т.е. уравнения могут быть проинтегрированы любым путем, то можно считать, что решена и поставленная конкретная задача. Полученные результаты сопоставляются с теми, что наблюдаются в природе. Если они близки, то это означает, что модель правильно отражает поведение и свойства реального объекта, если нет, нужно ввести какие-то дополнительные факторы, не учтенные ранее, т.е. улучшить ее. Проблемы возникают в двух случаях: несмотря на все усилия уравнения, составляющие математическую модель, проинтегрировать не удается; изучаемое явление оказывается столь сложным, что не поддается математическому описанию.

В качестве примера первого случая можно привести уравнения Навье-Стокса, которые не могут быть проинтегрированы для большинства важных для практики случаев. Очевидно, что единственным в этих условиях способом решения задачи является эксперимент на физической модели, под которой понимается уменьшенный (либо увеличенный) реальный объект исследования.

При этом сразу возникают три вопроса: как спроектировать и построить модель, какие величины необходимо измерять при проведении опытов, и как перенести результаты опытов, полученных на модели на натуральный объект. На эти вопросы и отвечает теория подобия, являющаяся основой современного физического эксперимента.

Одно из наиболее удачных определений понятия подобия принадлежит академику Л.И.Седову: «Подобными называются такие явления (процессы), когда по характеристикам одного из них можно получить характеристики другого простым пересчетом, аналогичным переходу от одной системы единиц к другой».

В общем случае различают три вида подобия: геометрическое, кинематическое и динамическое. Наиболее простым является подобие *геометрическое*, требующее, чтобы линейные размеры натуры и модели находились в постоянном соотношении, другими словами, модель повторяет натуру в каком-то масштабе.

Это требование можно записать в виде

$$\frac{L_n}{L_m} = k_L$$

где  $k_L$  – масштабный множитель.

Для площадей ( $S$ ) и объемов ( $V$ )

$$\frac{S_n}{S_m} = k_L^2; \quad \frac{V_n}{V_m} = k_L^3$$

Применительно к физическим явлениям элементарные представления геометрического подобия расширяются и распространяются на все величины, характеризующие данный процесс. Если учесть, что они могут изменяться как во времени, так и в пространстве, образуя поля, то возникает понятие о временном подобии и подобии полей, называемое *кинематическим* подобием.

В механике жидкости оно сводится к подобию полей скоростей в потоках, движущихся в геометрически подобных каналах.

И наконец, имея в виду, что механическое движение происходит под действием сил, вводится понятие *динамического* подобия, которое требует, чтобы в соответствующих точках природы и модели силы находились в постоянном соотношении.

Рассмотрим простейший пример. Известно, что движение любой механической системы подчиняется закону Ньютона

$$F = m \frac{du}{dt} \quad (17.1)$$

Для двух подобных систем можно записать

$$F_1 = m_1 \frac{du_1}{dt_1} \quad \text{и} \quad F_2 = m_2 \frac{du_2}{dt_2}$$

Разделив первое на второе получим:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1 du_1 dt_2}{m_2 du_2 dt_1} \quad \text{либо} \quad \frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1 u_1 t_2}{m_2 u_2 t_1}$$

Имея в виду, что  $m = \rho V \cong \rho L^3$  имеем

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\rho_1 L_1^3 u_1 t_2}{\rho_2 L_2^3 u_2 t_1}$$

По смыслу  $L/t$  есть скорость, поэтому

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\rho_1 L_1^2 u_1^2}{\rho_2 L_2^2 u_2^2} \quad (17.2)$$

либо

$$\frac{F_1}{\rho_1 L_1^2 u_1^2} = \frac{F_2}{\rho_2 L_2^2 u_2^2} \quad (17.3)$$

Очевидно, что полученные комплексы безразмерны.

Таким образом, для двух подобных систем сохраняется числовое равенство безразмерных комплексов  $\frac{F}{\rho L^2 u^2}$ . Кратко это условие можно записать так:

$\frac{F}{\rho L^2 u^2} = \text{idem}$ . В честь Ньютона этот комплекс обозначается

двумя первыми буквами его фамилии, т.е.

$$Ne = \frac{F}{\rho L^2 u^2} \quad (17.4)$$

и называют числом подобия Ньютона, а выражение  $Ne = \text{idem}$  – основным законом динамического подобия механических систем (законом Ньютона).

Величины  $L$  и  $u$ , входящие в (17.4), называются определяющим линейным размером и определяющей скоростью. При проведении опытов они выбираются экспериментатором произвольно, исходя из удобства их измерения.

Полученные результаты позволяют сделать полезные выводы.

- 1) Модель должна быть геометрически подобна натуре;
- 2) Для обеспечения динамического подобия не требуется, чтобы все величины, определяющие характер процесса в натурном объекте, были численно равны аналогичным величинам в модели. Достаточным является равенство безразмерных комплексов, составленных из этих величин для природы и модели, называемых числами подобия;

3) Так как при проведении опытов необходимо обеспечить равенство чисел подобия природы и модели, то ясно, что измерению подлежат лишь те величины, которые входят в эти числа.

По результатам измерений можно вычислить числа подобия модели и, исходя из равенства их числам подобия природы, произвести пересчет.

Какие преимущества дает такой подход в практическом плане?

Из математической статистики известно, что число опытов, которое необходимо поставить для того, чтобы получить закономерность, достоверно описывающую какое-то физическое явление, определяется из соотношения:

$$N = \sigma^k \quad (17.5)$$

где  $\sigma$  – число экспериментальных точек, которое необходимо снять для обеспечения представительности опыта ( $\sigma_{\min} = 5$ );  $k$  – число величин, подлежащих варьированию в опытах.

Таким образом, минимальное число опытов

$$N = 5^k \quad (17.6)$$

Если в опытах варьируется число Ньютона (например, за счет изменения скорости), то  $k = 1$  и  $N = 5$ , но если изучать влияние каждой из величин ( $\rho, u, L$ ), то  $k = 3$  и число опытов  $N = 125$ . Следовательно, использование

числа подобия в качестве своеобразной «обобщенной переменной» позволяет уменьшить число необходимых опытов в 25 раз, а если для надежности принять,  $\sigma = 10$  то в 100 раз.

### 17.1 Инспекционный анализ дифференциальных уравнений

Исходим из того, что математическая модель процесса нам известна, но она не может быть проинтегрирована. В этом случае числа подобия могут быть найдены методом, который по предложению известного американского математика и гидродинамика Г.Биркгофа назван инспекционным анализом. Как следует из названия, метод заключается в организованном по определенным правилам «инспектировании» дифференциальных уравнений, которое должно выявить числа подобия, позволяющие моделировать процесс.

Базой инспекционного анализа является положение, рассматриваемое как постулат и сводящееся к следующему.

Если две системы описываются одинаковыми дифференциальными уравнениями и имеют одинаковые граничные условия, и если значения всех параметров в этих уравнениях и граничных уравнениях равны, то эти две системы подобны, при условии существования единственности решения.

Любое дифференциальное уравнение описывает целый класс явлений, т.е. решение их многозначно. Так, например, то же уравнение Навье-Стокса, может описывать движение жидкости в каналах, реках и океанах, движение атмосферных масс воздуха и т.п. Инженера интересует конкретное явление данного класса. Поэтому из множества возможных решений требуется лишь одно, соответствующее изучаемому явлению. Этого можно добиться, если при постановке задачи ввести дополнительные так называемые условия однозначности, которые включают:

- данные о физических свойствах среды (плотность, вязкость);
- сведения о начальном состоянии системы (начальные условия);
- данные о поведении системы на её границах (граничные условия).

Инспекционный анализ представляет собой определенный алгоритм, включающий два этапа: на первом из них отношение дифференциальных величин заменяются отношениями самих переменных, на втором – уравнение приводится к безразмерному виду путем деления всех его членов на один из них, выбранный произвольно.

Метод наиболее просто усвоить, обратившись к рассмотрению конкретного примера. Имея в виду, что в механике жидкости основными соотношениями, описывающими движение вязких сред, являются уравнения Навье-Стокса, целесообразно воспользоваться именно ими. Рассмотрим одну из проекций в декартовой системе координат. В данном случае безразлично какую, так как структура уравнений одинакова, что обеспечит и одинаковость получаемых результатов.

В проекции на ось  $x$ -ов имеем

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} = X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} +$$

$$+ \nu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right)$$

Будем считать, что из массовых сил действует только сила тяжести, т.е.  $X = g \cos \beta$  ( $\cos \beta$  учитывает знак). С учетом этого и после умножения всех членов уравнения на плотность получим

$$\boxed{\rho \frac{\partial u_x}{\partial t}} + \boxed{\rho \left( u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right)} = \boxed{\rho g \cos \beta} - \frac{\partial p}{\partial x} +$$

$$+ \boxed{\rho \nu \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right)}$$

$F_{u1} \qquad F_{u2} \qquad F_T \qquad F_D \qquad F_{mp}$

В такой форме записи каждый из членов выражает силу, отнесенную к единице объема. При этом

$F_{u1}$  и  $F_{u2}$  – силы инерции;

$F_T$  – сила тяжести;

$F_D$  – сила давления;

$F_{mp}$  – сила вязкого трения.

Действуя по алгоритму, заменим дифференциальные соотношения отношениями величин. Имеем:

$$F_{u1} \cong \frac{\rho u}{t}; \quad F_{u2} \cong \frac{\rho u^2}{L}; \quad F_T \cong \rho g;$$

$$F_D \cong \frac{\Delta p}{L}; \quad F_{mp} \cong \nu \rho \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) \cong \nu \rho \frac{u}{L^2}$$

Приводим эти соотношения к безразмерному виду, приняв в качестве делителя один из комплексов. Как отмечалось выше, он может быть выбран произвольно. Пусть им будет  $F_{u2}$ , т.е. силы инерции. Получаем:

$$\frac{F_{u1}}{F_{u2}} = \frac{L}{tu} = Sh \text{ – это так называемый критерий гомохронности либо}$$

число подобия Струхала. Используются при исследовании неустановившихся явлений.

$$\frac{F_T}{F_{u2}} = \frac{gL}{u^2}, \text{ обратная величина } \frac{u^2}{gL} = Fr - \text{ число Фруда} - \text{ отношение}$$

сил инерции к силам тяжести.

$$\frac{F_D}{F_{u2}} = \frac{\Delta p}{\rho u^2} = Eu - \text{ число Эйлера, отношение сил давления к силам}$$

инерции.

$$\frac{F_{mp}}{F_{u2}} = \frac{\nu}{uL}, \text{ обратная величина } \frac{uL}{\nu} = Re - \text{ уже известное нам число}$$

Рейнольдса – отношение сил инерции к силам вязкого трения.

Таким образом, при моделировании гидромеханических явлений необходимо использовать числа подобия Струхала, Фруда, Рейнольдса и Эйлера.

Анализируя величины, входящие в числа подобия, легко заметить, что они составлены из параметров, входящих в условия однозначности. Эти числа подобия называют определяющими.

Экспериментатор, разумеется, в определенных пределах, может изменять их величину (менять скорость, геометрические размеры, вязкость). В число Эйлера входит величина  $\Delta p$  – перепад давления (потеря давления), которая, как правило, является искомой. Другими словами, величина числа Эйлера является следствием (результатом) процесса. Числа подобия такого рода называются неопределяющими. С чисто математических позиций сказанное можно представить в виде

$$Eu = f(Sh, Fr, Re) \quad (17.7)$$

Если изучается установившееся движение, при котором параметры в точке не изменяются с течением времени, то из рассмотрения выпадает число Струхала и

$$Eu = f(Re, Fr) \quad (17.8)$$

Следовательно, при моделировании гидромеханических явлений в данном случае должны соблюдаться следующие условия, обеспечивающие динамическое подобие:

$$Fr_n = Fr_m; Re_n = Re_m$$

либо

$$\frac{u_n^2}{g_n L_n} = \frac{u_m^2}{g_m L_m}; \frac{u_n L_n}{\nu_n} = \frac{u_m L_m}{\nu_m} \quad (17.9)$$

Если при проведении опытов удастся соблюсти эти требования, то подобие называется полным. Однако в реальных условиях добиться этого достаточно трудно, а иногда и просто невозможно. Поэтому обычно ограничиваются частичным подобием. Анализируя сущность явления экспериментатор уста-

навливают какие из сил (тяжести, трения) играют определяющую роль в исследуемом процессе и моделирует только их. В этом случае при установившемся движении зависимость (17.9) распадается на две

$$Eu = f(Re) \quad \text{и} \quad Eu = f(Gr) \quad (17.10)$$

из которых и выбирается определяющая.

Дополнительно отметим, что для сжимаемых сред в число определяющих чисел подобия помимо полученных выше входит и число Маха.

Кроме перечисленных используют следующие критерии подобия.

Критерием Грасгофа

$$Gr = \frac{g\beta l^3 \Delta T}{\nu^2}$$

Здесь  $g$  - ускорение силы тяжести;  $\beta = \frac{1}{\rho} \frac{\Delta \rho}{\Delta T}$  – коэффициент объемного расширения (1/К);  $\nu$  – кинематический коэффициент вязкости;  $l$  – определяющий размер;  $\Delta T$  – изменение температуры в процессе;  $\rho$  – плотность. Критерий Грасгофа характеризует подъемную силу, возникающую в жидкости вследствие разности плотности из-за изменения температуры.

В случае, когда разность плотностей обусловлена не температурным фактором, а составом жидкости (присутствие примесей или других жидкостей, удельный вес которых отличается от удельного веса основной жидкости), критерием подобия будет диффузионное число Архимеда

$$Ar = \frac{gl^3(\rho_0 - \rho)}{\nu^2 \rho}$$

где  $\rho_0$  и  $\rho$  – плотность одной и другой фаз.

В случае когда в жидкости велики силы поверхностного натяжения, вводится критерий подобия Вебера

$$We = \frac{\rho u^2 l}{\sigma}$$

где  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения.

Критерий подобия Вебера – отношение сил инерции к силам поверхностного натяжения.

При исследовании неустановившихся явлений используются критерии подобия Фурье

$$Fo = \frac{at}{d^2},$$

где  $t$  – время;  $a$  – коэффициент температуропроводности, м<sup>2</sup>/с.

При исследовании процессов теплопередачи и диффузии используют критерий подобия Пекле

$$Pe = \frac{ul}{a},$$

характеризующий отношение тепла, переносимого конвекцией, к теплу, передаваемому теплопроводностью. Например, при больших числах  $Pe$  преобладающим будет конвективный теплоперенос и наоборот.

Критерий подобия Прандтля

$$Pr = \frac{\nu}{a}$$

полностью составлен из физических параметров, а потому и является физическим параметром. Этот критерий имеет смысл подобия полей температур и скоростей.

Остается открытым лишь вопрос о кинематическом подобии. Опыт многочисленных исследований показывает, что для его решения не требуется каких-либо специальных мер. Если системы динамически подобны и течение происходит в геометрически подобных каналах, то кинематическое подобие обеспечивается автоматически.

Кратко остановимся еще на двух вопросах, носящих принципиальный характер. Первый из них связан с понятием геометрического подобия «в большом» и «в малом». В начале раздела было показано, что геометрическое подобие природы и модели может быть легко реализовано. Подобие геометрических границ объектов относится к подобию «в большом». Вместе с тем стенки каналов как природы, так и модели имеют какую-то шероховатость. Очевидно, что моделирование шероховатости практически невозможно, и геометрическое подобие «в малом» недостижимо.

Второй вопрос связан с так называемым «масштабным эффектом». Суть его в том, что моделирование, основанное на классических принципах теории подобия, не обеспечивает масштабный переход. Это означает, что эффективность различного рода промышленных технологических аппаратов оказывается ниже той, которая должна была бы быть по результатам, полученным пересчетом с модельных испытаний. Более того, она ухудшается по мере увеличения размеров аппаратов. Это вынуждает исследователей отказываться от испытаний на моделях и переходу к испытаниям на объектах, построенных в натуральную величину, что резко повышает стоимость эксперимента, а при создании особо крупных аппаратов такой подход вообще невозможно реализовать. Исследования, выполненные в последние годы, показали, что в основе масштабного эффекта лежат чисто гидродинамические явления: неравномерность распределения потоков по сечению аппарата, увеличение масштаба турбулентности и т.п., что позволяет найти способы устранения этого эффекта.

## 17.2 Понятие об автомодельности

Автомодельность – кардинальное понятие теории подобия, принципиальное содержание которого сводится к так называемому вырождению чисел подобия. Формальным признаком её служит выпадение чисел подобия как аргументов, входящих в функциональную зависимость.

Ограничимся кратким рассмотрением содержания этого понятия, без уяснения которого невозможна грамотная постановка эксперимента.

Для простоты будем считать, что в интересующем исследователя процессе определяющими является силы вязкого трения т.е. зависимость (17.8) имеет вид  $Eu = f(Re)$ . График этой зависимости устанавливается экспериментально, и часто имеет вид, показанный на рис. 17.1.

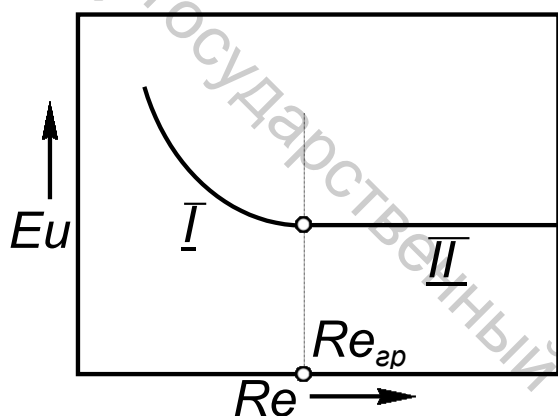


Рис.17.1

механизм процесса таков, что не надо никаких условий для подобия и все процессы такого типа автоматически подобны между собой. Этот случай и называется автомодельностью. На рис.17.1 автомодельная область обозначена римской цифрой II.

В общем случае под автомодельной понимают область, в которой определяющее число подобия перестает зависеть от определяющего (либо определяющих).

Проведение опытов в этой области существенно упрощается. Действительно, если в области I экспериментатор должен заботиться о том, чтобы  $Re_n, Re_m$ , что далеко не всегда возможно, то в автомодельной области достаточно, чтобы  $Re_n$  было больше  $Re_{кр}$ . Нужно лишь помнить, что какого-то универсального значения  $Re_{кр}$  не существует, оно всегда зависит от природы изучаемого объекта, в частности, от его формы. Поэтому, как правило, задачей первого этапа экспериментального исследования является нахождение граничного значения определяющего числа подобия.

Таким образом, приведенные сведения показывают, что если в результате анализа изучаемого явления удастся составить его математическую

Как следует из рисунка, при увеличении числа Рейнольдса в опытах зависимость  $Eu = f(Re)$  ослабевает и при некотором конкретном для каждого случая значении числа  $Re$ , называемого граничным ( $Re_{кр}$ ) происходит «вырождение», т.е. число Эйлера перестает зависеть от  $Re$ .

Исчезновение (вырождение) числа Рейнольдса означает отсутствие предпосылок для подобия. Очевидно,

механизм процесса таков, что не надо никаких условий для подобия и все процессы такого типа автоматически подобны между собой. Этот случай и называется автомодельностью.

В общем случае под автомодельной понимают область, в которой определяющее число подобия перестает зависеть от определяющего (либо определяющих).

Проведение опытов в этой области существенно упрощается. Действительно, если в области I экспериментатор должен заботиться о том, чтобы  $Re_n, Re_m$ , что далеко не всегда возможно, то в автомодельной области достаточно, чтобы  $Re_n$  было больше  $Re_{кр}$ . Нужно лишь помнить, что какого-то универсального значения  $Re_{кр}$  не существует, оно всегда зависит от природы изучаемого объекта, в частности, от его формы. Поэтому, как правило, задачей первого этапа экспериментального исследования является нахождение граничного значения определяющего числа подобия.

Таким образом, приведенные сведения показывают, что если в результате анализа изучаемого явления удастся составить его математическую

модель, то принципиально задача постановки эксперимента может считаться разрешенной. К сожалению, возможность аналитического описания является скорее исключением, чем правилом. Поэтому целью следующего раздела является ознакомление со стратегией исследователя при возникновении такой ситуации.

### 17.3 Анализ размерностей

Следует подчеркнуть, что конечная цель в рассматриваемом случае остается прежней: нахождение чисел подобия, по которым следует вести моделирование, но решается она при существенно меньшем объеме информации о характере процесса. Для уяснения дальнейшего кратко рассмотрим некоторые основополагающие понятия.

Любой материальный объект обладает рядом свойств, которые допускают количественное выражение. При этом каждое из свойств характеризуется размером определенной физической величины. Единицы некоторых физических величин можно выбирать произвольно, и с их помощью представлять единицы всех остальных. Физические единицы, выбираемые произвольно, называют основными. В международной системе (применительно к механике) это - килограмм, метр и секунда. Остальные величины, выраженные через эти три, называют производными.

Основная единица может обозначаться либо символом соответствующей величины, либо специальным символом. Например, единицы длины –  $L$ , единицы массы –  $M$ , единица времени –  $T$ . Либо, единица длины – метр ( $m$ ), единица массы – килограмм ( $kg$ ), единица времени – секунда ( $s$ ).

Под размерностью понимают символическое выражение (иногда его называют формулой) в виде степенного одночлена, связывающее производную величину с основными. Общий вид этой закономерности имеет вид

$$\dim X = L^x M^y T^z \quad (13.11)$$

где  $x, y, z$  – показатели размерности.

Например, размерность скорости

$$\dim u = L \cdot T^{-1}$$

Для безразмерной величины все показатели  $x = y = z = 0$ , и, следовательно,  $\dim X = 1$ .

Два следующих утверждения достаточно ясны и не нуждаются в каких-либо специальных доказательствах.

Отношение размеров двух объектов является величиной постоянной вне зависимости от того, в каких единицах они выражаются. Так, например, если отношение площади, занимаемой окнами, к площади стен составляет 0,2, то этот результат останется неизменным, если сами площади выразить в  $mm^2$ ,  $m^2$ , или  $km^2$ .

Второе положение можно сформулировать следующим образом. Любое правильное физическое соотношение должно быть размерностно одно-

родным. Это означает, что все члены, входящие как в правую, так и в левую его части должны иметь одинаковую размерность.

Метод анализа размерностей базируется на так называемой  $\pi$ -теореме (читается: пи-теорема).  $\pi$ -теорема устанавливает связь между функцией, выраженной через размерные параметры, и функцией в безразмерной форме. Более полно теорема может быть сформулирована так:

Любая функциональная зависимость между размерными величинами может быть представлена в виде зависимости между  $N$  безразмерными комплексами (числами  $\pi$ ), составленными из этих величин. Число этих комплексов  $N = m - n$ , где  $n$  – число основных единиц. Как уже отмечалось выше, в гидромеханике  $n = 3$  (кг, м, с).

Пусть, например, величина  $A$  является функцией пяти размерных величин ( $m = 5$ ), т.е.

$$A = f(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon) \quad (13.12)$$

Из  $\pi$ -теоремы следует, что эта зависимость может быть преобразована в зависимость, содержащую два числа  $\pi$  ( $N = m - n = 5 - 3 = 2$ )

$$A = f_1(\pi_1, \pi_2) \quad (13.13)$$

где  $\pi_1$  и  $\pi_2$  – безразмерные комплексы, составленные из размерных величин.

Эту теорему иногда приписывают Бэкингеу и называют  $\pi$ -теоремой Бэкингема. В действительности в её разработку внесли вклад многие крупные ученые, в том числе Фурье, Рябушинский, Рэлей.

Использование анализа размерностей для решения конкретных практических задач связано с необходимостью составления функциональной зависимости вида (13.12), которая на следующем этапе обрабатывается специальными приемами, приводящими в конечном итоге к получению чисел  $\pi$  (чисел подобия).

Основным, носящим творческий характер, является первый этап, так как получаемые результаты зависят от того, насколько правильно и полно представление исследователя о физической природе процесса. Другими словами, насколько функциональная зависимость (13.12) правильно и полно учитывает все параметры, влияющие на изучаемый процесс. Любая ошибка здесь неизбежно приводит к ошибочным выводам. В истории науки известна так называемая «ошибка Рэля». Суть ее в том, что изучая задачу о теплообмене при турбулентном течении, Рэлей не учел влияние вязкости потока, т.е. не включил её в зависимость (13.12). В результате в конечные соотношения, полученные им, не вошло число подобия Рейнольдса, играющее исключительно важную роль в теплообмене.

Для уяснения сущности метода рассмотрим пример, иллюстрирующий как общий подход к задаче, так и способ получения чисел подобия.

Необходимо установить вид зависимости, позволяющий определить потери давления либо напора при турбулентном течении в круглых трубах.

Ясно, что падение давления вдоль трубы, обусловленное затратами энергии на преодоление сил вязкого трения обратно пропорционально её длине, поэтому с целью сокращения числа переменных целесообразно рассматривать не  $\Delta p$ , а  $\Delta p / l$ , т.е. потери давления на единицу длины трубы. Напомним, что отношение  $\Delta h / l$ , где  $\Delta h$  - потери напора, носит название гидравлического уклона.

Из представлений о физической сущности процесса можно предположить что возникающие потери должны зависеть: от средней скорости течения рабочей среды ( $u$ ); от размера трубопровода, определяемого его диаметром ( $d$ ); от физических свойств транспортируемой среды, характеризующих её плотностью ( $\rho$ ) и вязкостью ( $\mu$ ); и, наконец, разумно считать, что потери должны быть как-то связаны с состоянием внутренней поверхностью трубы, т.е. с шероховатостью ( $k$ ) ее стенок. Таким образом, зависимость (13.12) в рассматриваемом случае имеет вид

$$\frac{\Delta p}{l} = f_1(u, d, \rho, \mu, k)$$

или

$$f_2\left(u, d, \rho, \mu, k, \frac{\Delta p}{l}\right) = 0. \quad (13.14)$$

На этом и заканчивается первый и, нужно подчеркнуть, наиболее ответственный этап анализа размерностей.

В соответствии с  $\pi$ -теоремой, число влияющих параметров, входящих в зависимость,  $m = 6$ . Следовательно, число безразмерных комплексов  $N = m - n = 6 - 3 = 3$ , т.е. после соответствующей обработки (13.14) должна принять вид

$$f_3(\pi_1, \pi_2, \pi_3) = 0 \quad (13.15)$$

Существует несколько способов нахождения чисел  $\pi$ . Мы воспользуемся методом, предложенным Рэлеем.

Основным достоинством его является то, что он представляет собой своеобразный алгоритм, приводящий к решению задачи.

Из параметров, входящих в (13.15) необходимо выбрать три любых, но так, чтобы в них входили основные единицы, т.е. метр, килограмм и секунда. Пусть ими будут  $u$ ,  $d$ ,  $\rho$ . Легко убедиться, что они удовлетворяют поставленному требованию.

Образуются числа  $\pi$  в виде степенных одночленов из выбранных параметров, умноженных на один из оставшихся в (13.14)

$$\pi_1 = u^{x_1} d^{y_1} \rho^{z_1} \frac{\Delta p}{l}; \quad (13.16)$$

$$\pi_2 = u^{x_2} d^{y_2} \rho^{z_2} \mu; \quad (13.17)$$

$$\pi_3 = u^{x_3} d^{y_3} \rho^{z_3} k; \quad (13.18)$$

Теперь задача сводится к нахождению всех показателей степеней. При этом они должны быть подобраны так, чтобы числа  $\pi$  были безразмерны.

Для решения этой задачи определим прежде всего размерности всех параметров:

$$\dim u = L \cdot T^{-1}; \quad \dim d = L; \quad \dim \rho = M \cdot L^{-3}$$

Вязкость  $\mu \rightarrow Pa \cdot c \rightarrow \frac{\kappa z \cdot M \cdot c}{c^2 \cdot M^2} \rightarrow \frac{\kappa z}{M \cdot c}$ , т.е.  $\dim \mu = ML^{-1}T^{-1}$ .

Параметр  $\left[ \frac{\Delta p}{l} \right] \rightarrow \frac{\kappa z \cdot M}{c^2 \cdot M^2 \cdot M} \rightarrow \frac{\kappa z}{M^2 \cdot c^2}$ , и  $\dim \frac{\Delta p}{l} = MT^{-2}L^{-2}$ .

И, наконец,  $\dim k = L$ .

Таким образом, размерности чисел  $\pi$  будут

$$\dim \pi_1 = (L T^{-1})^{x_1} L^{y_1} (M L^{-3})^{z_1} M T^{-2} L^{-2}$$

или

$$\dim \pi_1 = L^{x_1+y_1-3z_1-2} T^{-x_1-2} M^{z_1+1}$$

Аналогично два других

$$\dim \pi_2 = L^{x_2+y_2-3z_2-1} T^{-x_2-1} M^{z_2+1}$$

$$\dim \pi_3 = L^{x_3+y_3-3z_3+1} T^{-x_3} M^{z_3}$$

В начале раздела 13.3 уже отмечалось, что для любой безразмерной величины показатели размерности  $x = y = z = 0$ . Поэтому, например, для числа  $\pi_1$  можем записать

$$L^{x_1+y_1-3z_1-2} T^{-x_1-2} M^{z_1+1} = L^0 T^0 M^0$$

Приравнивая показатели степеней, получаем три уравнения с тремя неизвестными

$$x_1 + y_1 - 3z_1 - 2 = 0$$

$$-x_1 - 2 = 0$$

$$z_1 + 1 = 0$$

Откуда находим  $x_1 = -2$ ;  $z_1 = -1$ ;  $y_1 = 1$ .

Подставляя эти значения в (13.6), получаем

$$\pi_1 = \frac{\Delta p \cdot d}{\rho u^2 l} \quad (13.19)$$

Действуя аналогично, легко показать, что

$$\pi_2 = \frac{ud\rho}{\mu} = \frac{ud}{\nu} = Re \quad \text{и} \quad \pi_3 = \frac{k}{d}$$

Таким образом, зависимость (13.15) принимает вид

$$f_3\left(\frac{\Delta p}{\rho u^2} \frac{d}{l}, Re, \frac{k}{d}\right) = 0 \quad (13.20)$$

Так как  $\frac{\Delta p}{\rho u^2}$  есть неопределяющее число подобия (число Эйлера), то

(13.20) можно записать как функциональную зависимость

$$\frac{\Delta p}{\rho u^2} \frac{d}{l} = f\left(Re, \frac{k}{d}\right) = 0$$

либо

$$\Delta p = f\left(Re, \frac{k}{d}\right) \frac{l}{d} \rho u^2 \quad (13.21)$$

Следует иметь в виду, что анализ размерностей не дает и принципиально не может дать каких-то числовых значений в получаемых с его помощью соотношениях. Поэтому он должен завершаться анализом результатов и при необходимости их корректировкой, исходя из общих физических представлений. Рассмотрим с этих позиций выражение (13.21). В правую его часть входит квадрат скорости, но эта запись не выражает ничего, кроме того, что скорость возводится в квадрат. Однако, если поделить эту величину на два, т.е.  $u^2/2$ , то как известно из гидромеханики, она приобретает важный физический смысл: удельной кинетической энергии, а  $\rho u^2/2$  – динамическое давление, обусловленное средней скоростью. С учетом этого (13.21) целесообразно записать в виде

$$\Delta p = f\left(Re, \frac{k}{d}\right) \frac{l}{d} \rho \frac{u^2}{2} \quad (13.22)$$

Если теперь обозначить  $f\left(Re, \frac{k}{d}\right)$  буквой  $\lambda$ , то приходим к формуле Дарси

си

$$\Delta p = \lambda \frac{l}{d} \rho \frac{u^2}{2} \quad (13.23)$$

или

$$\Delta h = \lambda \frac{l}{d} \frac{u^2}{2g} \quad (13.24)$$

где  $\lambda$  – гидравлический коэффициент трения, который, как следует из (13.22), является функцией числа Рейнольдса и относительной шероховатости ( $k/d$ ). Вид этой зависимости может быть найден только экспериментальным путем.

## ПРИЛОЖЕНИЕ А

### А.1 МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АППАРАТ, ИСПОЛЬЗУЕМЫЙ В ГИДРОГАЗОДИНАМИКЕ

#### А.1.1 Векторы и операции над ними

Поле какой-либо величины называется пространство, в каждой точке которого эта величина вполне определена. Если эта величина скаляр, т.е. характеризуется одним числом, то поле называют скалярным (поле плотности, поле температуры).

Векторным называется поле, которое характеризуется в каждой точке пространства величиной и направлением. К этому следует лишь добавить, что неизменным условием, связанным с векторными величинами, является то, что они должны складываться по правилу параллелограмма. Поэтому, например, поток автомашин, движущихся по улице и характеризующийся как величиной, так и направлением не является вектором.

Единичные векторы (орты) в декартовой системе координат обозначают  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ . Тогда вектор  $\vec{u}$  может быть представлен как

$$\vec{u} = \vec{e}_x u_x + \vec{e}_y u_y + \vec{e}_z u_z \quad (\text{A.1})$$

где  $u_x, u_y, u_z$  – проекции (компоненты) вектора на соответствующие оси координат.

**Скалярное произведение двух векторов** дает скалярную величину

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| |\vec{v}| \cos \alpha \quad (\text{A.2})$$

где  $\alpha$  – угол между векторами.

Ясно, что скалярное произведение обращается в нуль, если векторы  $\vec{u}$  и  $\vec{v}$  взаимно перпендикулярны.

**Векторное произведение двух векторов.**

В противоположность скалярному произведению, здесь первое слово указывает на то, что результат действия есть вектор. Векторное произведение может быть записано в виде определителя третьего порядка

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{e}_x & \vec{e}_y & \vec{e}_z \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Раскрывая определитель по общим правилам, получаем

$$\vec{u} \times \vec{v} = \vec{e}_x (u_y v_z - u_z v_y) - \vec{e}_y (u_x v_z - u_z v_x) + \vec{e}_z (u_x v_y - u_y v_x) \quad (\text{A.4})$$

### А.1.2 Операции первого порядка (дифференциальные характеристики поля)

В теории поля рассматриваются три так называемые операции первого порядка. Эти операции позволяют, выполнив определенные математические действия, превратить:

- скалярную величину в векторную;
- векторную величину в скалярную;
- векторную – в другую векторную;

Эти операции соответственно называются – градиент, дивергенция и ротор (вихрь). Рассмотрим каждую из них.

Градиент какой-то скалярной функции  $\varphi(x, y, z)$  есть вектор, образующийся в результате выполнения следующих действий:

$$\text{grad } \varphi = \vec{e}_x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \vec{e}_y \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \vec{e}_z \frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (\text{A.5})$$

Физически градиент есть вектор, в направлении которого функция в данной точке поля изменяется с максимальной скоростью.

Дивергенцией вектора  $\vec{u}$  называется выражение вида

$$\text{div } \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad (\text{A.6})$$

Следовательно, любое векторное поле дает некоторое скалярное поле, а именно поле своей дивергенции (расходимости). Если  $\text{div } \vec{u} = 0$ , то поле называют соленоидальным.

Вихрь поля (ротор) – это вектор, образующийся при выполнении операции

$$\text{rot } \vec{u} = \vec{e}_x \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) + \vec{e}_y \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) + \vec{e}_z \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \quad (\text{A.7})$$

Если  $\text{rot } \vec{u} = 0$ , то поле называют безвихревым.

### А.1.3 Операции второго порядка

Операции  $\text{grad } \varphi$ ,  $\text{div } \vec{u}$ ,  $\text{rot } \vec{u}$ , переводящие скаляр в вектор, вектор в скаляр и вектор в вектор порождают пять операций второго порядка:

- превращение скалярной величины в векторную

$$\text{grad } (\text{div } \vec{u});$$

- превращение векторной величины в скалярную

$$\text{div } (\text{grad } \varphi);$$

$$\text{div } (\text{rot } \vec{u});$$

- превращение одной векторной величины в другую

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}(\operatorname{grad} \varphi); \\ \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{u}). \end{aligned}$$

В теории поля показывается, что два из этих пяти соотношений тождественно равны нулю:  $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{u}) \equiv 0$  и  $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} \varphi) \equiv 0$ . Операция  $\operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi)$  носит название оператора Лапласа для скалярного поля и имеет вид

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \varphi) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \quad (\text{A.8})$$

#### А.1.4 Интегральные соотношения теории поля

##### А.1.4.1 Поток векторного поля

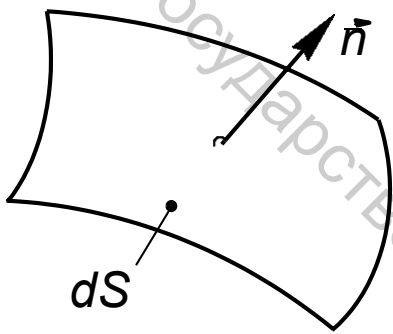


Рис. А.1

Пусть  $dS$  (рис. А.1) - элемент поверхности, а  $\vec{n}$  - единичный вектор, направленный по внешней нормали. Потоком векторного поля (например,  $\vec{u}$ ) называют поверхностный интеграл вида

$$\iint_S \vec{u} \cdot \vec{n} dS \quad (\text{A.9})$$

Если рассматривается векторное поле ротора ( $\operatorname{rot} \vec{u}$ ), то поток этого поля представляется как

$$\iint_S (\operatorname{rot} \vec{u}) \cdot \vec{n} dS \quad (\text{A.10})$$

##### А.1.4.2 Циркуляция вектора поля

Пусть рассматривается векторное поле какой-то величины  $\vec{u}$ . Циркуляцией вектора  $\vec{u}$  вдоль контура  $L$  называют криволинейный интеграл вида

$$\Gamma = \int_L \vec{u} \cdot d\vec{l} \quad (\text{A.11})$$

Иногда этот интеграл интерпретируется как «работа» векторного поля вдоль контура  $L$ . Если циркуляция векторного поля вдоль замкнутого пути (контура) равна нулю, то поле называют потенциальным.

##### А.1.4.3 Формула Стокса

Эта формула позволяет преобразовать криволинейный интеграл вдоль замкнутой пространственной кривой в поверхностный интеграл по поверхности, натянутой на эту кривую, т.е.

$$\oint_L \vec{u} \cdot d\vec{l} = \iint_S (\operatorname{rot} \vec{u}) \cdot \vec{n} dS \quad (\text{A.12})$$

т.е. циркуляция вектора поля вдоль контура равна потоку вихря через поверхность, ограниченную этим контуром.

#### А.1.4.4 Формула Гаусса-Остроградского

Это соотношение, часто называемое преобразованием Гаусса-Остроградского, связывает поверхностный интеграл по замкнутой поверхности с тройным интегралом по области, ограниченной этой поверхностью

$$\iint_S \vec{u} \cdot \vec{n} dS = \iiint_V \operatorname{div} \vec{u} dV \quad (\text{A.13})$$

Формула показывает, что поток векторного поля через замкнутую поверхность равен тройному интегралу от дивергенции поля по объему, ограниченному этой поверхностью.

В механике жидкости широко используется формула, являющаяся следствием формулы Гаусса-Остроградского для скалярного поля

$$\iint_S \varphi \vec{n} dS = \iiint_V \operatorname{grad} \varphi dV \quad (\text{A.14})$$

где  $\varphi$  - какая-то скалярная функция.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Абрамович Г.Н. Прикладная газовая динамика. – М.: Наука, 1991.
2. Альтшуль А.Д. Гидравлические сопротивления. – М.: Недра, 1970. – 215 с.
3. Бендерский Б.Я. Аэрогазодинамика. Учеб. Пособие. – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотичная динамика», Институт компьютерных исследований, 2007. – 496 с.
4. Валландер С.В. Лекции по гидроаэромеханике. – СПб.: Мзд-во С.-Петербург. Ун-та, 2005. – 304 с.
5. Веников В.А. и Г.В.Веников «Теория подобия и моделирования». – М.: Высшая школа, 1984. -439 с.
6. Гальперин Л.Г. Основы гидрогазодинамики: Курс лекций. – Екат.: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2007. – 238 с.
7. Гиргидов А.Д. Техническая механика жидкости и газа: Учебное пособие. – СПб., 1999. – 394 с.
8. Дейч М.Е., Зарянкин А.Е. Газодинамика. – М.: Энергоатомиздат, 1984. – 384 с.
9. Емцев Б.Т. Техническая гидромеханика. – М.: Машиностроение, 1987. – 440 с.
10. жидкостей. - М.: Мир, 1978.-307с.
11. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.: Наука, 1973. -848 с.
12. Павленко В.Г. Основы механики жидкости. – Л.: Судостроение, 1988. – 240 с.
13. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. – М.: Мир, 1980. – 616 с.
14. Самойлович Г.С. Гидроаэромеханика. – М.: Машиностроение, 1980.
15. Слезкин Н.А. Лекции по гидромеханике. – М.: МГУ, 1984. – 225 с.
16. Шейпак А.А. Основы механики жидкости и газа. – М.: МАСИ (ВТУЗ-ЗИЛ), 1991. – 96 с.