УДК 677.05

ОЦЕНКИ СЛОЖНОСТИ ПОЛИЦИКЛИЧЕСКИХ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ.

Бром Е.Л.

На этапе логического синтеза сложность конечного автомата характеризуется числом состояний, необходимых для выполнения заданных условий работы автомата. Поэтому большое значение имеет возможность, не производя синтеза конечного автомата, лишь по данным условиям работы предварительно оценить число его состояний.

Рассмотрим полностью определенный полициклический автомат Мили Nn с циклами одинаковой длины равной n. Полициклический автомат состоит только из циклов с одним и тем же начальным состоинием.

Теорема I. Пусть a - значность входа и p≥2 - число различных значений выхода У. Тогда число состояний автомата Nn удовлетворяет неравенству:

$$R_n \leq \frac{a^{n+2}}{(a-1)\cdot\left(n\cdot(a-1)\cdot\log_p a + a\right)}\cdot\left(1+\xi_{(n)}\right)$$

где : $\xi_{(n)} \to 0$ при $n \to \infty$.

Для доказательства теоремы воспользуемся описанием автомата Nn усеченным открытым деревом [1], в котором состояниям автомата соответствуют номера q вершин кустов. В вершинах усеченного открытого дерева кроме того находятся значения выхода автомата, а ребра соответствуют входу (рис. 1).

В случае представления автомата Мили усеченным открытым деревом при нумерации входной вершины куста номером q два куста считаются одинаковыми, если в одинаково расположенных выходных вершинах пары (q, y) совпадают. Нахождение числа различных состояний Rn автомата Nn сводится к подсчету числа различных вершин соответствущего дерева.

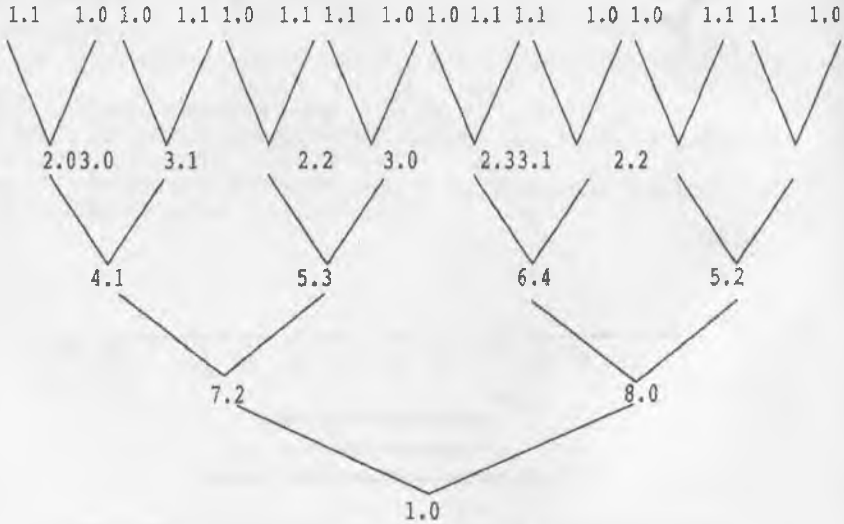

Рис. 1

Рассмотрим (n-i) - ый ярус дерева. Число различных вершин в этом ярусе $R_{n-i} \le a^{n-i}$. С другой стороны каждая входная вершина кустов (n-i) - го яруса определяется i - ярусным деревом, содержащим $\sum_{k=1}^{i} a^k = \frac{a^{i+1}-a}{a-1}$ вершин с p расличными значениями выходов, т.е. $R_{n-i} \le p^{\frac{a^{i+1}-a}{a-1}}$

Таким образом $R_{n-i} \le a^{n-i}$ и $R_{n-i} \le p^{\frac{a^{i+1}-a}{a-1}}$.

Число неравных номеров во всем дереве при любом целом i_1, где $0 \le i_1 \le n-1$, будет:

$$R_n = \sum_{i=0}^{n-1} R_{n-i} = \sum_{i=0}^{n} p^{\frac{a^{i+1}-a}{a-1}} + \sum_{i=i_1+1}^{n-1} a^{n-i} \quad, \tag{1}$$

или

$$R_n < p^{\frac{a^{i_1+1}-a}{a-1}} + \frac{a^{n-i_1}-a}{a-1} \tag{2}$$

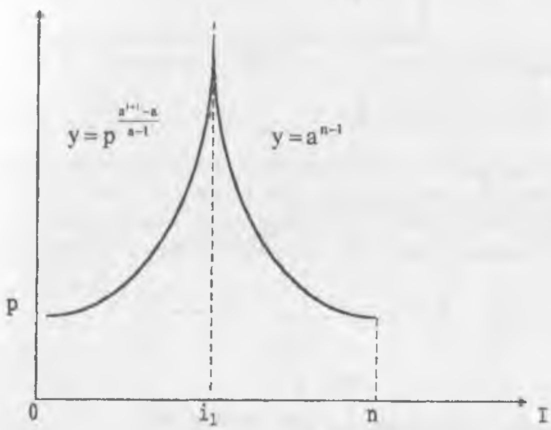

Рис. 2

Выберем i_1, таким, чтобы получить минимум суммы (1). Проанализировав графики рисунка 2, нетрудно установить, что

$$i_1 = \left[\log_a\left(\left(n+1-\alpha\cdot\log_a\left(n(a-1)\log_p a + a\right)\right)(a-1)\log_p a + a\right)\right]$$

где квадратная скобка означает взятие целой части и a>1.

После подстановки i_1 во (2), получим:

$$R_n < \frac{p\cdot a^{n+1}}{\left(n(a-1)\log_p a + a\right)^{\alpha}} + \frac{a^{n+2}}{(a-1)\left(\left(n+1-\alpha\cdot\log_p a + a\right)(a-1)\log_p a + a\right)} - \frac{a}{a-1}$$

Откуда следует, что:

$$R_n \le \frac{a^{n+2}}{(a-1)\left(n(a-1)\log_p a + a\right)}\cdot\left(1+\xi_{(n)}\right)$$

где $\xi \to 0$ при $n \to \infty$.

Для неполностью определенного автомата Nn;m, с числом циклов одинаковой длины $m = q^n$, полученная оценка может быть улутшена.

Теорема 2. Число состояний Rn;m автомата Nn;m удовлетворяет неравенству:

$$R_{n;m} < m \cdot \left(n + p + \frac{1}{a-1} + 3 - \log_a\left((a-1)\log_p m + a\right) - \log_a m \right) - \frac{a}{a-1}$$

Рассмотрим (n-i)-ый ярус усеченного открытого дерева, описывающего автомат $N_{n;m}$. Как указывалось выше $R_{n-i} \le a^{n-i}$ и $R_{n-i} \le p^{a-i}$. Кроме того $R_{n-i} < m$. Тогда можно записать:

$$R_{n;m} = \sum_{i=0}^{n-1} R_{n-i} \le \sum_{i=0}^{i_1} p^{\frac{a^{i_1+1}-a}{a-1}} + k \cdot m + \sum_{i=i_1+k+1}^{n-1} a^{n-i} \tag{3}$$

Откуда:

$$R_{n;m} < p\frac{a^{i_1+1}-a}{a-1} + k_1 \cdot m + \frac{a^{n-i_1-k_1}-a}{a-1} \tag{4}$$

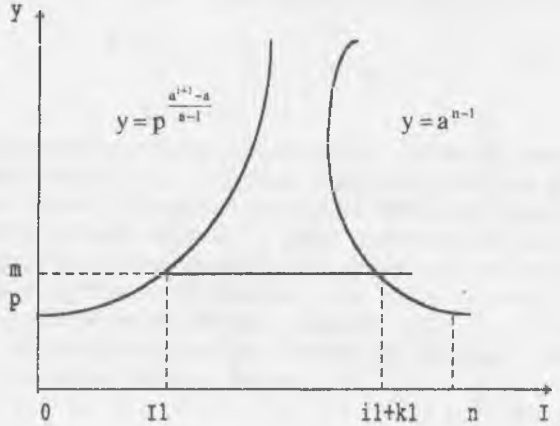

Рис. 3

Выбираем i1 и k1 так, чтобы сумма (3) была минимальной.

$$i_1 = \left[\log_a\left((a-1)\log_p m + a\right)\right] - 1;$$

$$k_1 = n + 1 - \left[\log_a\left((a-1)\log_p m + a\right)\right] - \left[\log_a m\right],$$

где квадратная скобка, как и раньше, означает взятие целой части.

Подставив значения i_1 и k_1 в (4) получим:

$$R_{n;m} < m \cdot p + m\left(n + 1 - \left[\log_a (a-1)\log_p (m+a)\right] - \left[\log_a m\right]\right) + \frac{m-a}{a-1}$$

Следовательно:

$$R_{n;m} < m\left(n + p + \frac{1}{a-1} + 3 - \log_a\left((a-1)\log_p m + a\right) - \log_a m\right) - \frac{a}{a-1} \tag{5}$$

Рассмотрим теперь полициклический автомат Мили Nn1,n2,...,nl с различной длиной циклов. Пусть автомат Nn1,n2,...,nl содержит m1 циклов длиною n1, m2 - длиною n2,..., ml циклов длиною nl=n и пусть для определенности n1<n2<...<nl=n.

Для того, чтобы найти верхнюю оценку числа состояний Rn1,n2,...,nl автомата Nn1,n2,...,nl , доопределим усеченное открытое дерево, описывающее этот автомат так, чтобы длины всех циклов стали равными n. Сделаем это следующим образом: продолжим каждый цикл ломаной до длины n, сохранив в вершинах отрезков ломаных те же значения состояний и выхода, что и в конечных вершинах соответствующих циклов; самим отрезкам припишем последнее значение входа. Получившееся в результате дерево описывает тот же автомат Nn1,n2,...,nl , но с циклами одинаковой длины и число их равно

$$m = \sum_{1}^{l} m_j < a^n .$$

Но в таком случае для автомата Nn1,n2,...,nl справедлива оценка (3), которую можно улутшить, вычтя заведомо равные вершины. Таких вершин будет:

$$m_1(n - n_1) + m_2(n - n_2) + \cdots + m_{l-1}(n - n_{l-1}) = m \cdot n - \sum_{1}^{l} m_j \cdot n_j \qquad (6)$$

Тогда :

$$R_{n1,n2,\dots,nl} < \sum_{1}^{l} m_j \cdot n_j + m\left(p + \frac{1}{a-1} + 3 - \log_a\left((a-1)\log_p m + a\right) - \log_a m\right) - \frac{a}{a-1} \qquad (7)$$

Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема 3. Для автомата Nn1,n2,...,nl справедливо неравенство:

$$R_{n1,n2,\dots,nl} < \sum_{1}^{l} m_j \cdot n_j + m\left(p + \frac{1}{a-1} + 3 - \log_a\left((a-1)\log_p m + a\right) - \log_a m\right) - \frac{a}{a-1}$$

Оценки числа состояний полициклических автоматов Мура выводятся точно также, как и для автоматов Мили. Единственная особенность заключается в том, что при подсчете числа различных вершин дерева каждая вершина определяется не только i-ярусным деревом, но и самой вершиною.