

свободной засыпки, к состоянию «псевдооживления». Этот интервал составляет 60 с, что подтверждается аналогичными исследованиями других авторов [3].

Заключение. На основании полученных экспериментальных данных можно сделать некоторые выводы: для обеспечения стабильности процесса ЭМН, порошок в бункерном дозирующем устройстве должен прийти в «равновесное состояние», и лишь затем подаваться в рабочую зону, т.е. бункерное дозирующее устройство должно работать на холостом ходу определённый промежуток времени (60 с); величина ачи зависит от гранулометрического состава порошка: чем мельче частицы ошка, тем больше необходимо энергии для их вибротранспортирования; величина ачи порошка находится в линейной зависимости от угла наклона лотка бункерного кюйства, т.е. с увеличением угла наклона лотка увеличивается подача порошка.

Обозначения P — масса подаваемого порошка; t — время работы дозатора; a — угол лона лотка бункерного дозирующего устройства.

Список использованных источников

1. Гринкевич И.В., Кульгейко М.П., Рогов С.В. Устройство для электромагнитной наплавки наружных цилиндрических поверхностей // *Материалы, технологии, инструменты* 2000, №2, 100 — 102.
2. Ящерицын П.И., Забавский М.Т., Кожуро Л.М., Акулович Л.М. Алмазно-абразивная обработка и упрочнение изделий в магнитном поле. Мн: *Навука і тэхніка*, 1998.
3. Вибрации в технике: Справочник: В бт.: М: «Машиностроение», т.4 Вибрационные процессы и машины, 1981 г.
4. Роман О.В., Габриелов И.П. Справочник по порошковой металлургии: порошки, материалы, процессы. — Мн.: Беларусь, 1988 г.

УДК 621.1.0.18

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ МИНИМИЗАЦИИ ПРИ НАГРЕВЕ МЕТАЛЛА

В.Н. Зенин, В.Б. Ковалевский
Белорусский национальный технический университет

Суть решаемой задачи сводится к нахождению оптимального управления нестационарными линейными системами с заданными состояниями в конечный момент времени и соответствующих оптимальных траекторий. В качестве критерия качества выбран линейно-квадратичный функционал.

Предлагаемый подход решения задачи основан на построении специальной функции Кротова, которую можно получить в квадратурах. При этом для ее построения приходится интегрировать систему стационарных линейных дифференциальных уравнений и одно нелинейное дифференциальное уравнение.

Полученный алгоритм позволяет решать задачи стабилизации в приложении к различным областям практической деятельности. Среди задач, решение которых может быть получено с помощью разработанных методик, стабилизация нагрева металла в промышленных печах различных типов, управление летательными аппаратами, управление процессами в отраслях металлургии, машиностроения, химической промышленности.

Имеется вполне управляемая нестационарная линейная система

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u, \quad (1)$$

$$x(0) = x_0 \quad (2)$$

$$x(T_k) = x_T, \quad (3)$$

- где x — вектор-столбец размерности $n \times 1$;
 u — вектор-столбец управления размерности $m \times 1$;
 A — матрица размерности $n \times n$;
 B — матрица размерности $n \times m$;
 t_k — фиксированное конечное время ($t_k > 0$);
 x_0 — заданный вектор фазовых координат в момент времени $t = 0$;
 x_T — заданный вектор фазовых координат в момент времени t_k .

Требуется найти такое измеримое управление $u(t)$, которое переводило бы решение системы (1) из начального состояния (2) в конечное (3) за время t_k и доставляло бы минимум функционалу

$$I^*(u) = \int_0^{t_k} \left((a(t), x) + (b(t), u) + x^T P(t)x + u^T Q(t)u \right) dt \rightarrow \min_{u \in R^m}, \quad (4)$$

- где P — симметричная матрица размерности $n \times n$;
 Q — положительно определенная, симметричная матрица размерности $m \times m$;
 a — вектор-столбец размерности $n \times 1$;
 b — вектор-столбец управления размерности $m \times 1$.

Предполагаем, что матрицы $A(t)$, $B(t)$, $P(t)$, $Q(t)$ и вектора $a(t)$, $b(t)$ дважды дифференцируемы на отрезке $[0; t_k]$

Предлагаемый подход решения задачи основан на построении задачи Коши для уравнения Гамильтона-Якоби. При этом для нахождения решения приходится интегрировать систему нестационарных линейных дифференциальных уравнений и одно нелинейное дифференциальное уравнение. Методика решения такого рода задач апробирована в [3].

Для нахождения приближенного решения исходной задачи АКОР (1) – (3) с закрепленными концами рассматривается вспомогательная задача вида

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + B(t)u, \quad (5)$$

$$x(t_k) = x_T, \quad (6)$$

$$I^*(u) = \int_0^{t_k} \left((a, x) + (b, u) + x^T P x + u^T Q u \right) dt + K \|x(0) - x_0\|^2 \rightarrow \min_{u \in R^m}, \quad (7)$$

- где K — достаточно большое фиксированное положительное число.
 Принимается, что

$$\|x(0) - x_0\|^2 = (x_T^T - x_0^T, x_T - x_0) - 2 \int_0^{t_k} (x^T - x_0^T, A(t)x + B(t)u) dt. \quad (8)$$

Тогда после подстановки (8) в (7) имеется функционал вида

$$\begin{aligned} I^*(u) &= \int_0^{t_k} ((a, x) + (b, u) + x^T Px + u^T Qu) dt + \\ &+ K \left((x_T^T - x_0^T, x_T - x_0) - 2 \int_0^{t_k} (x^T - x_0^T, A(t)x + B(t)u) dt \right) = \\ &= K (x_T^T - x_0^T, x_T - x_0) + \\ &+ \int_0^{t_k} ((a, x) + (b, u) + x^T Px + u^T Qu - 2K(x^T - x_0^T, A(t)x + B(t)u)) dt \rightarrow \min_{u \in R^m}. \end{aligned} \quad (9)$$

Таким образом, рассматривается задача с закрепленным правым и свободным левым концом траектории (5) - (7). Для решения полученной задачи строится вспомогательное квазилинейное дифференциальное уравнение в частных производных (уравнение Гамильтона-Якоби) [4], которое может быть записано в виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} + \left(\frac{\partial S(x, t)}{\partial x}, A(t)x + B(t)u \right) &= (a, x) + (b, u) + x^T Px + u^T Qu + \\ &+ \frac{K}{t_k} (x_T^T - x_0^T, x_T - x_0) - 2K(x^T - x_0^T, A(t)x + B(t)u) \end{aligned} \quad (10)$$

с начальным условием

$$S(x, 0) = 0. \quad (11)$$

Точка экстремума для функции управления определяется как

$$u = \frac{1}{2} (Q^{-1}(t))^T B(t)^T \left(\frac{\partial S(x, t)}{\partial x} \right)^T - \frac{1}{2} (Q^{-1}(t))^T b^T + (Q^{-1}(t))^T B(t)^T K(x - x_0). \quad (12)$$

После подстановки (12) в (10) имеется задача Коши для нелинейного уравнения с частными производными первого порядка, решается методом характеристик [5]

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial S(x,t)}{\partial t} + \left(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x}, A(t)x + \frac{1}{2}W(t) \left(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x} \right)^T - \frac{1}{2}V(t) + W(t)K(x-x_0) \right) = (a,x) + \\
 & + \left(b, \frac{1}{2}(Q^{-1}(t))^T B(t)^T \left(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x} \right)^T - \frac{1}{2}(Q^{-1}(t))^T b^T + (Q^{-1}(t))^T B(t)^T K(x-x_0) \right) + \\
 & + x^T P x + \left(\frac{1}{2} \frac{\partial S(x,t)}{\partial x} + K(x^T - x_0^T) \right) W(t) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x} \right)^T + K(x-x_0) \right) - \\
 & - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial S(x,t)}{\partial x} V(t) - \frac{1}{2} b Q^{-1}(t) b^T + K(x^T - x_0^T) V(t) + \right. \\
 & \left. + \frac{1}{2} V(t)^T \left(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x} \right)^T + K V(t)^T (x-x_0) \right) + \frac{K}{t_k} (x_0^T - x^T, x_0 - x) - \\
 & - 2K \left(x^T - x_0^T, A(t)x + \frac{1}{2}W(t) \left(\frac{\partial S(x,t)}{\partial x} \right)^T - \frac{1}{2}V(t) + KW(t)(x-x_0) \right), \tag{13}
 \end{aligned}$$

где $W(t) = B(t)(Q(t)^{-1})^T B(t)^T$, $V(t) = B(t)(Q(t)^{-1})^T b(t)^T$.

Строится характеристическая система уравнений

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \frac{dt}{dv} = 1, \\
 & \frac{dx}{dv} = A(v)x + \frac{1}{2}W(v)R^T - \frac{3}{4}V(v) + KW(v)(x-x_0) \\
 & \frac{dR_0}{dv} = -RA(v)x - \frac{1}{4}RW(v)R^T + \frac{1}{2}R\dot{V}(v) + (\dot{a}(v), x) + \\
 & + \frac{1}{4}\dot{V}(v)^T R^T + \frac{d}{2dv} \left(b(v)(Q^{-1}(v))^T b(v)^T \right) + x^T \dot{P}(v)x \\
 & - KR\dot{W}(v)(x-x_0) + \frac{d}{2dv} \left(b(v)(Q^{-1}(v))^T B(v)^T \right) K(x-x_0) + \\
 & + \frac{1}{2}KR\dot{W}(v)(x-x_0) - \frac{1}{2}K(x^T - x_0^T)\dot{W}(v)R^T - \\
 & - \frac{1}{2}K(x^T - x_0^T)\dot{V}(v) - \frac{1}{2}K\dot{V}(v)^T(x-x_0) - \\
 & - 2K(x^T - x_0^T)\dot{A}(v)x + K(x^T - x_0^T)\dot{V}(v) - \frac{7}{4}K^2(x^T - x_0^T)\dot{W}(v)(x-x_0), \\
 & \frac{dR}{dv} = -RA(v) + a(v) + 2x^T P(v) - KRW(v) + 2Kx_0^T A(v) - \\
 & 4Kx^T A(v) - 2K^2(x^T - x_0^T)W(v) - KV(v) \\
 & \frac{dS}{dv} = R_0 + RA(v)x + \frac{1}{2}RW(v)R^T - \frac{3}{4}RV(v) + \\
 & + KRW(v)(x-x_0)
 \end{aligned} \right. \tag{14}$$

с начальными условиями

$$\begin{cases}
 t|_{v=0} = 0, \\
 x|_{v=0} = \tau, \\
 R_0|_{v=0} = a(0)\tau - \frac{1}{2}b(0)(Q^{-1}(0))^T b(0)^T + \tau^T P(0)\tau - K^2(\tau^T - x_0^T)W(t)(\tau - x_0) + \\
 \quad + \frac{K}{t_k}(x_T^T - x_0^T, x_T - x_0) - 2K(\tau^T - x_0^T)A(0)\tau + \\
 \quad + \frac{1}{2}K(\tau^T - x_0^T)V(0) + \frac{1}{2}KV(0)^T(\tau - x_0) + \frac{1}{4}b(0)Q^{-1}(0)b(0)^T, \\
 R|_{v=0} = (0, \dots, 0), \\
 S|_{v=0} = 0,
 \end{cases} \quad (15)$$

$$\text{где } R = \frac{\partial S}{\partial x}, R_0 = \frac{\partial S}{\partial t}$$

В силу симметричности матрицы Q очевидна симметричность матрицы W. Из анализа систем уравнений (14), (15) следует, что

$$t = v, \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
 R_0 &= a(0)\tau - \frac{1}{2}b(0)(Q^{-1}(0))^T b(0)^T + \\
 &\tau^T P(0)\tau - K^2(\tau^T - x_0^T)W(t)(\tau - x_0) + \frac{K}{t_k}(x_T^T - x_0^T, x_T - x_0) - \\
 &- 2K(\tau^T - x_0^T)A(0)\tau + \frac{1}{2}K(\tau^T - x_0^T)V(0) + \\
 &+ \frac{1}{2}KV(0)^T(\tau - x_0) + \frac{1}{4}b(0)Q^{-1}(0)b(0)^T.
 \end{aligned} \quad (17)$$

На основании системы уравнений (14) составляется уравнение

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dv} \\ \left(\frac{dR}{dv}\right)^T \end{pmatrix} = \Delta(t) \begin{pmatrix} x \\ R^T \end{pmatrix} + f(t), \quad (18)$$

$$\text{где } \Delta(t) = \begin{pmatrix} A(t) + KW(t) & \frac{1}{2}W(t) \\ P(t) + P(t)^T - 2K(A(t) + A(t)^T) - 2K^2W(t)^T & -A(t)^T - KW(t)^T \end{pmatrix};$$

$$f(t) = \begin{pmatrix} -KW(t)x_0 - \frac{1}{2}V(t) \\ -2KA(t)^T x_0 + 2K^2W(t)^T x_0 - a - KV(t) \end{pmatrix}.$$

Получено неоднородное нестационарное уравнение вида $\dot{x} = \Delta(t)x + f(t)$ с начальным условием $x(0) = x_0$. Для данного уравнения решение записывается в виде

$$\begin{pmatrix} x \\ R^T \end{pmatrix} = \Phi(\nu) \begin{pmatrix} \tau \\ 0 \end{pmatrix} + L(\nu), \quad (19)$$

где

$\Phi(\nu)$ — фундаментальная матрица размерности $2n \times 2n$;

$$L(\nu) = \Phi(\nu) \int_0^\nu \Phi^{-1}(\xi) f(\xi) d\xi$$

или

$$\begin{pmatrix} x \\ R^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_1(\nu) & \varphi_3(\nu) \\ \varphi_2(\nu) & \varphi_4(\nu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \tau \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} l_1(\nu) \\ l_2(\nu) \end{pmatrix}, \quad (20)$$

Из (20) следует

$$x = \varphi_1(\nu)\tau + l_1(\nu), \quad (21)$$

$$R^T = \varphi_2(\nu)\tau + l_2(\nu), \quad (22)$$

Вектор τ определяется как

$$\tau = \varphi_1(\nu)^{-1} x - \varphi_1(\nu)^{-1} l_1(\nu). \quad (23)$$

Согласно (21), (22)

$$\left(\frac{\partial S(x, t)}{\partial x} \right)^T = \varphi_2(t) \varphi_1(t)^{-1} (x - l_1(t)) + l_2(t) \quad (24)$$

Подставив (24) в (12) получим

$$u = \frac{1}{2} (Q^{-1}(t))^T B(t)^T \left(\varphi_2(t) \varphi_1(t)^{-1} (x - l_1(t)) + l_2(t) \right) - \frac{1}{2} (Q^{-1}(t))^T b^T + (Q^{-1}(t))^T B(t)^T K (x - x_0) \quad (25)$$

Подстановка выражения (25) в исходную систему (1) позволяет получить уравнение вида

$$\frac{dx}{dt} = N(t)x + M(t), \quad (26)$$

Решение уравнения (26) с условием (3) является искомой оптимальной траекторией $x^*(t)$. Подстановка $x^*(t)$ в формулу (12) позволяет получить оптимальное управление

$$u^* = \frac{1}{2} (Q^{-1}(t))^T B(t)^T \left(\varphi_2(t) \varphi_1(t)^{-1} (x^*(t) - l_1(t)) + l_2(t) \right) - \frac{1}{2} (Q^{-1}(t))^T b(t)^T \quad (27)$$

Рассмотрим пример. Имеется следующая система

$$\begin{cases} \frac{dT}{dt} = \sigma (T_{nc}^4 - T^4) \\ \frac{dT_{nc}}{dt} = A_1 \cdot \nu(t) + A_2 \cdot T^4(t) + A_3 \cdot T_{nc}^4(t) \end{cases}$$

где T, T_{nc} - температуры заготовки и печи (греющей среды), ν - расход топлива

Требуется определить такое оптимальное управление, которое доставляло бы минимум функционалу

$$I = \int_0^{t_k} v(t)^2 dt \rightarrow \min,$$

при условиях: $x(0) = \begin{bmatrix} 293 \\ 980 \end{bmatrix}$, $x(t_k) = \begin{bmatrix} 1223 \\ 1223 \end{bmatrix}$, $t_k = 60 \text{ сек.}$

$$A_1 = 1805,26; \quad A_2 = 1,29 \cdot 10^{-11}; \quad A_3 = -1,3 \cdot 10^{-11}; \quad \sigma = 3,2 \cdot 10^{-11}$$

Для нашего случая определим значения соответствующих матриц:

$$A = \begin{bmatrix} -4\sigma \cdot (T^*)^3 & 4\sigma \cdot (T_{nu}^*)^3 \\ 4A_2 \cdot (T^*)^3 & 4A_3 \cdot (T_{nu}^*)^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,2500 & 0,2500 \\ 0,1009 & -0,1016 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ A_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1805,26 \end{bmatrix}$$

На рисунке 1 приведен полученный график изменения температуры печи, а на рисунке 2 – изменения температуры заготовки для тестовой задачи.

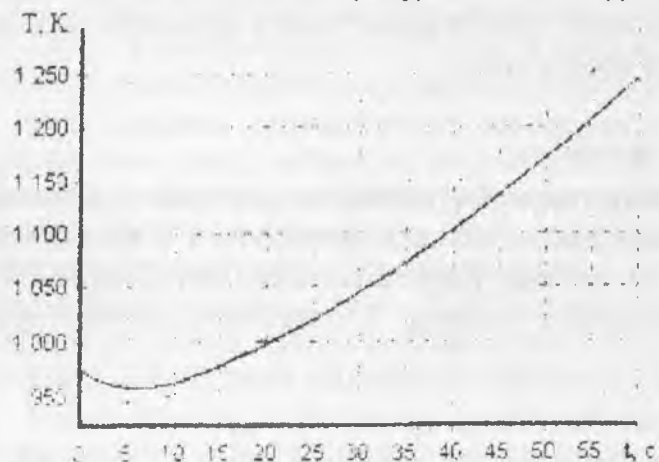


Рисунок 1 - График изменения температуры печи

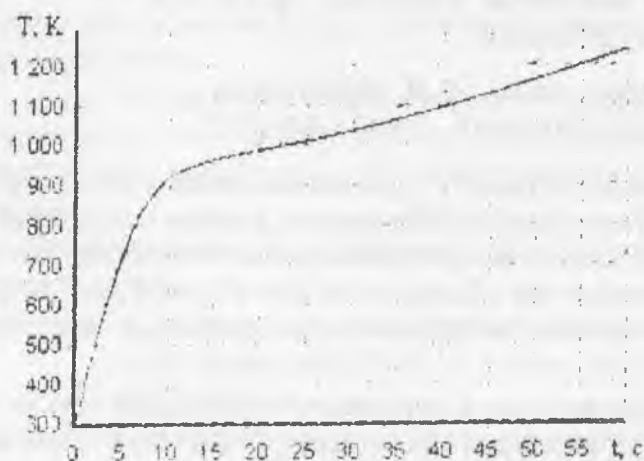


Рисунок 2 - График изменения температуры заготовки

Среди задач, решение которых может быть получено с помощью разработанных методик, минимизация расхода топлива и количества образуемой окалины при нагрева металла в промышленных печах различных типов, управление летательными аппаратами, управление процессами в отраслях металлургии, машиностроения, химической промышленности.

Список использованных источников

1. Кротов В.Ф., Гурман В.И. Методы и задачи оптимального управления. – М.: Наука, 1973.
2. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Методы оптимизации. – Мн.: Вышэйшая школа, 1975.
3. Ковалевский В.Б., Козлов С.М. К решению задачи АКОР // Дифференциальные уравнения, Т.33, №7, 1997.
4. Ковалевский В.Б., Вайс Р.Б., Хо Ж. Магистральная асимптотическая оптимизация. Теория и применение. // Известия РАН. Теория и системы управления, №2, 1995.
5. Смирнов В.И. Курс высшей математики. – М.: Наука, 1981.

Аннотация

Данная задача решается путем сопоставления соответствующей ей задачи автоматического конструирования оптимальных регуляторов (АКОР). Предлагаемый подход основан на построении специальной функции Кротова. Таким образом, отпадает необходимость решения нелинейного уравнения Беллмана, что позволяет построить более эффективный алгоритм решения задачи УКОР. Для разработанного алгоритма спроектировано соответствующее программное обеспечение.

Summary

Given problem is solved by matching the corresponding problem of automatic engineering of optimal regulators (AEOR). Suggested approach is based on development of special Krotov function. Thus, there is no need to solve nonlinear Bellman equation, that allows to construct more effective algorithm of AEOR problem solving. Corresponding software was designed for developed algorithm.

УДК 621.372.853

**РЕСУРСО-СБЕРЕГАЮЩИЕ МЕТОДЫ ПОИСКА ЗАЛЕЖЕЙ
НЕФТИ И ГАЗА**

Н.В. Цывис, В.Ф. Янушкевич, С.В. Калинин
УО "Полоцкий государственный университет"

В последнее время наметилась тенденция активного применения электромагнитных методов (ЭММ) в поисковой геофизике. Важнейшей особенностью данных методов является высокая чувствительность и возможность их использования в сложной геологической обстановке. Эффективное их применение объясняется достаточной достоверностью, экологической чистотой по сравнению с методами грави-, сейсмо- и магнито-разведки.

Требования, предъявляемые к информативности и достоверности методов поиска и выделения месторождений и скоплений углеводородных залежей (УВЗ) предполагают дальнейшее развитие ЭММ с целью повышения производительности геологоразведочных работ, повышения точности определения границ залежей полезных ископаемых (ПИ). В последнее время проводятся активные исследовательские работы ЭММ, по результатам которых создаётся аппаратура, используемая на практике.

ЭММ имеют существенные преимущества перед методами на постоянном токе, заключающиеся в изучении не только контраста сопротивления пород, но и характеристик взаимодействующего с объектом электромагнитного поля (ЭМП) - амплитуд различных составляющих, их фазовых компонент, поляризации и т.д. Таким образом, является возможность получать значительно больше информации от исследуемых