

Министерство образования Республики Беларусь
Витебский государственный технологический университет

А.В. ЛОКТИОНОВ, Л.Г. КРЫГИНА

Теоретическая механика. Сборник заданий для контрольных работ

Библиотека ВГТУ



Витебск

1998

Локтионов А.В., Крыгина Л.Г. Теоретическая механика. Сборник заданий для контрольных работ. Учебное пособие для студентов технических специальностей высших учебных заведений.

Витебск: Министерство образования Республики Беларусь, ВГТУ, 1998.

Допущено Министерством образования Республики Беларусь в качестве учебного пособия для студентов технических специальностей высших учебных заведений.

Сборник содержит задачи с примерами их выполнения, используемые при проведении контрольных работ по теоретической механике для инженерных специальностей высших учебных заведений Республики Беларусь в соответствии с типовой программой дисциплины, разработанной кафедрой теоретической механики Белорусской государственной политехнической академии.

Одобрено кафедрой теоретической механики и теории механизмов и машин ВГТУ.
22 июня 1998 года, протокол № 14.

Рецензенты:

1. Заведующий кафедрой теоретической механики Белорусской государственной политехнической академии, д. ф.-м. н., профессор А.В. Чигарев.

Заведующий кафедрой теоретической механики Могилевского машиностроительного института, к.т.н., доцент Д.М. Макаревич.

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом ВГТУ.

30 декабря 1998 года, протокол № 6.

Ответственный за выпуск Голубев А.Н.

Подписано к печати 19.02.99 Формат 1/16. Уч. изд. лист 11,8.

Офсетная печать. Тираж 317 экз. Заказ 111. Цена 236200р.

Отпечатано на ротапринте Витебского государственного технологического университета.

210028, г. Витебск, Московский пр.-т. 72.

Бібліятэка
УА "Віцебская дзяржаўная
тэхналагічная ўніверсітэта
інв. № У-2334

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	5
Глава 1. Статика.....	6
1.1. Равновесие произвольной плоской системы сил.....	6
1.1.1. Равновесие системы сходящихся сил на плоскости.....	6
1.1.2. Равновесие произвольной плоской системы сил, приложенной к твердому телу.....	8
1.1.3. Равновесие произвольной плоской системы сил, приложенной к системе твердых тел.....	9
1.1.4. Задачи.....	13
1.2. Равновесие произвольной пространственной системы сил.....	24
1.2.1. Задачи.....	26
Глава 2. Кинематика.....	34
2.1. Кинематика точки.....	34
2.1.1. Задачи.....	37
2.2. Плоскопараллельное движение твердого тела.....	55
2.2.1. Задачи.....	74
2.3. Сложное движение точки.....	68
2.3.1. Задачи.....	74
Глава 3. Динамика.....	82
3.1. Дифференциальные уравнения движения материальной точки.....	82
3.1.1. Дифференциальные уравнения прямолинейного движения точки.....	82
3.1.2. Дифференциальные уравнения криволинейного движения точки.....	87
3.1.3. Задачи для механических специальностей.....	92
3.1.4. Задачи для немеханических специальностей.....	110
3.2. Общие теоремы динамики механической системы.....	122
3.2.1. Теорема об изменении кинетической энергии	

механической системы.....	122
3.2.2. Теорема об изменении кинетического момента механической системы.....	125
3.2.3. Задачи для механических специальностей.....	130
3.2.4. Задачи для немеханических специальностей.....	145
3.3. Принцип возможных перемещений. Принцип Даламбера.....	158
3.3.1. Принцип возможных перемещений.....	158
3.3.2. Принцип Даламбера.....	160
3.3.3. Задачи.....	163
3.4. Применение принципа возможных перемещений к определению реакций связей. Общее уравнение динамики.....	172
3.4.1. Применение принципа возможных перемещений к определению реакций связей.....	172
3.4.2. Общее уравнение динамики.....	173
3.4.3. Задачи.....	177

Предисловие

Теоретическая механика — одна из фундаментальных общенаучных дисциплин физико-математического цикла, на материале которой базируются многие общинженерные дисциплины, такие, как сопротивление материалов, строительная механика, гидравлика, теория механизмов и машин, детали машин и др.

Она является теоретической базой современной механики. Поэтому при изучении курса теоретической механики следует дать тот необходимый объем фундаментальных знаний, на базе которого будущий специалист сможет овладеть всем новым, с чем ему придется столкнуться в ходе его практической работы.

Хорошее усвоение курса теоретической механики требует не только глубокого изучения теории, но и приобретения твердых навыков в решении задач. Для этого необходимо самостоятельно решить большое количество задач по всем разделам.

В целях текущего контроля учебной работы студентов при изучении курса проводятся аудиторные контрольные работы.

В сборнике помещены контрольные работы и приведены примеры их выполнения. Основываясь на этих примерах, студенты смогут самостоятельно выполнять задания из этого сборника.

Сборник может использоваться на практических занятиях и в качестве расчетно-графических работ, выполняемых за время изучения курса теоретической механики. В подготовке задач сборника принимал участие к.т.н., доцент Савенок Е.А.

Сборник содержит 529 задач, в том числе по статике — 83, по кинематике — 114, по динамике — 332.

ГЛАВА 1

Статика

1.1. Равновесие произвольной плоской системы сил

При решении задач на равновесие произвольной плоской системы сил необходимо придерживаться такой последовательности:

- 1) выбрать тело (или группу тел), равновесие которых рассматривается;
- 2) освободить тело от связей, заменив действие связей соответствующими силами реакций связей;
- 3) изобразить в виде векторов все действующие на тело заданные силы и реакции связей;
- 4) выбрать систему декартовых осей координат и центр моментов;
- 5) составить уравнения равновесия и определить искомые реакции связей.

Для получения более простых уравнений равновесия следует учесть:

- 1) составляя уравнение проекций, следует направить одну координатную ось перпендикулярно к линии действия одной, а, если возможно, то и двух неизвестных сил;
- 2) составляя уравнение моментов, необходимо выбрать центр моментов в точке пересечения линий действия двух неизвестных сил; тогда в уравнение моментов сил войдёт только одна неизвестная сила.

1.1.1. Равновесие системы сходящихся сил на плоскости

Пример.

Груз $P=20\text{ кН}$ поднимается магазинным краном $ВАС$ посредством цепи, перекинутой через блок A и через блок D , который укреплен на стене так, что угол $CAD=30^\circ$. Углы между стержнями крана: $ABC=60^\circ$; $ACB=30^\circ$. Определить усилия в стержнях AB и AC (рис.1.1).

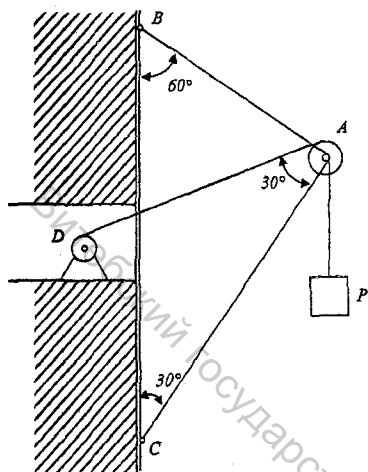


Рис. 1.1

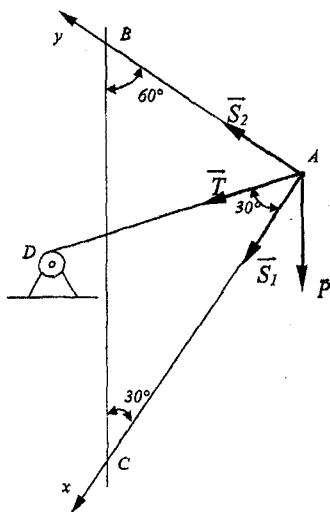


Рис. 1.2

Решение.

Рассмотрим равновесие узла A крана, к которому приложены сила P , реакции $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$ стержней AC и AB соответственно, сила T натяжения цепи AD , причем численно $T=P$, так как при отсутствии трения в блоке A натяжение цепи во всех точках одинаково (рис. 1.2).

Реакции $\vec{S}_1$ и $\vec{S}_2$ направлены в предположении, что стержни AC и AB растянуты.

Учитывая, что угол $BAC = 90^\circ$, напомним оси x и y вдоль стержней AC и AB . Так как линии действия всех сил пересекаются в узле A , составим два уравнения равновесия системы сходящихся сил на плоскости:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad S_1 + T \cos 30^\circ + P \cos 30^\circ = 0, \quad (1.1)$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad S_2 + T \cos 60^\circ - P \cos 60^\circ = 0. \quad (1.2)$$

Поскольку $T=P$, то из уравнения (1.2) получим, что $S_2 = 0$.

Из уравнения (1.1) находим, что $S_1 = -2 P \cos 30^\circ = -P\sqrt{3} = -34,6 \text{ кН}$.

Полученный знак «минус» говорит о том, что реакция S_1 стержня в действительности имеет направление, противоположное указанному на рисунке. Следовательно, стержень AC сжат.

1.1.2. Равновесие произвольной плоской системы сил, приложенных к твердому телу

Пример.

Невесомая горизонтальная балка AB длиной $l=6\text{ м}$ шарнирно закреплена в точке A . В точке D к ней шарнирно прикреплен невесомый стержень DE , образующий с осью балки угол $\beta=60^\circ$. В точке C к балке прикреплена нить, переброшенная через блок L . К свободному концу нити привязан груз $P=8\text{ кН}$. Нить образует с вертикалью угол $\alpha=30^\circ$. Определить реакции связей, учитывая, что $BD=1\text{ м}$, $AC=4\text{ м}$.

Решение.

Рассмотрим равновесие балки AB . Реакцию шарнирно-неподвижной опоры A представим в виде двух взаимно перпендикулярных составляющих X_A и Y_A . Полагая, что стержень DE растянут, направим реакцию S стержня от точки D к точке E . Реакция $\bar{T}$ нити направлена вдоль нити CL , причем $T=P$.

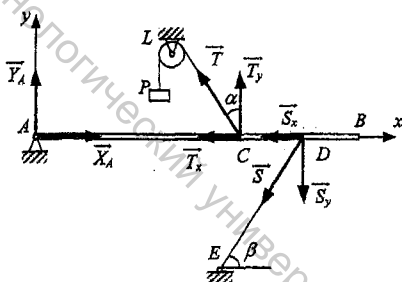


Рис. 1.3

Выбираем оси координат с началом в точке пересечения неизвестных сил X_A и Y_A , а направление осей примем таким же, как и направление сил. Центр моментов выберем в точке A . Это позволяет составить уравнения равновесия балки в наиболее простой форме. Составим уравнения равновесия полученной плоской системы сил:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad X_A - T \sin \alpha - S \cos \beta = 0; \quad (1.3)$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad Y_A + T \cos \alpha - S \sin \beta = 0; \quad (1.4)$$

$$\sum m_A(F_k) = 0, \quad T \cdot AC \cdot \cos \alpha - S \cdot AD \cdot \sin \beta = 0. \quad (1.5)$$

Из уравнения (1.5) найдем значение S : $S = \frac{T \cdot AC \cdot \cos \alpha}{AD \cdot \sin \beta} = 6,4 \text{ кН}$.

Из уравнения (1.4) получим, что $Y_A = S \cdot \sin \beta - T \cdot \cos \alpha = -1,39 \text{ кН}$.

Из уравнения (1.3) найдем X_A : $X_A = T \cdot \sin \alpha + S \cdot \cos \beta = 7,2 \text{ кН}$.

Значения X_A и S получились положительными. Это указывает на то, что принятые направления этих сил совпадают с их действительными направлениями. Отрицательное значение Y_A указывает на то, что принятое направление этой силы противоположно действительному.

1.1.3. Равновесие произвольной плоской системы сил, приложенных к системе твердых тел

Задачи, относящиеся к равновесию двух тел, можно разделить на два типа:

- 1) задачи, в которых равновесие двух тел представлено балкой и узлом;
- 2) задачи, в которых равновесие двух тел представлено блоком и узлом.

При решении таких задач необходимо применять метод расчленения системы, т.е. нужно рассматривать равновесие каждого тела системы в отдельности и для каждого из этих тел составлять уравнения равновесия, учитывая при этом все силы, приложенные к рассматриваемому телу. При этом необходимо, чтобы силы взаимодействия между телами в точках сочленения были равны по величине, но противоположны по направлению.

Пример 1.

Определить реакцию шарнира A и вес груза Q составной конструкции при условии, что $P=120 \text{ н}$, $AB=2a$, $AD=DB=a$ (рис.1.4).

Решение.

Данная составная конструкция состоит из двух тел: балки AB и узла C . Эти тела соединены невесомым стержнем BC . Расчленим эту конструкцию по стержню BC и рас-

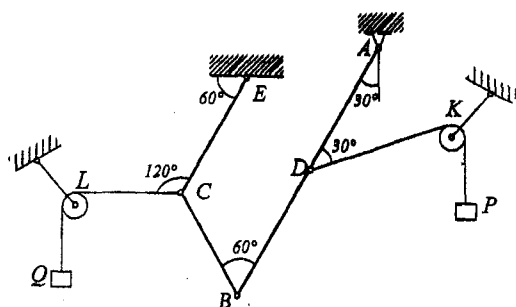


Рис. 1.4

смотрим отдельно равновесие балки AB и узла C .

Сначала рассмотрим равновесие балки AB , на которую действуют составляющие X_A и Y_A реакции неподвижного шарнира A , реакция T_1 нити DK , причем численно $T_1 = P = 120$ н, реакция S стержня BC (рис 1.5).

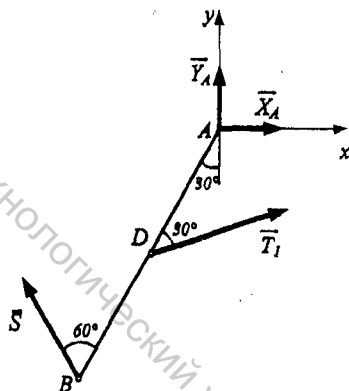


Рис. 1.5

Уравнения равновесия имеют вид:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad X_A + T_1 \cos 30^\circ - S \cos 60^\circ = 0; \quad (1.6)$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad Y_A + T_1 \sin 30^\circ + S \sin 60^\circ = 0; \quad (1.7)$$

$$\sum m_A(F_k) = 0, \quad T_1 \cdot AD \cdot \sin 30^\circ - S \cdot AB \cdot \sin 60^\circ = 0. \quad (1.8)$$

Решая эти уравнения, находим:

$$S = \frac{T_1 \cdot a \cdot \sin 30^\circ}{2 \cdot a \cdot \sin 60^\circ} = 20 \cdot \sqrt{3} \text{ н},$$

$$Y_A = -T_1 \cdot \cos 60^\circ - S \cdot \cos 30^\circ = -90 \text{ н},$$

$$X_A = S \cdot \cos 60^\circ - T_1 \cdot \cos 30^\circ = -50 \cdot \sqrt{3} \text{ н}.$$

Отрицательные значения X_A и Y_A указывают на то, что составляющие X_A и Y_A в действительности направлены противоположно указанным.

Рассмотрим теперь равновесие узла C , на который действует реакция S' стержня CB , причем $S' = -S$, реакция S_2 стержня CE и реакция T_2 нити CL , где численно $T_2 = Q$ (рис. 1.6). Для определения значения $T_2 = Q$ достаточно провести ось x_1 перпендикулярно вектору S_2 и составить одно уравнение равновесия:

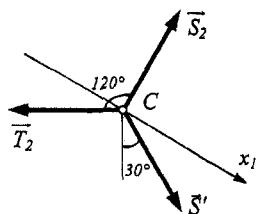


Рис. 1.6

$$\sum F_{ix} = 0, \quad S' \cdot \cos 30^\circ - T_2 \cos 30^\circ = 0, \quad (1.9)$$

$$\text{откуда } T_2 = S' = 20 \cdot \sqrt{3} \text{ н}, \quad Q = 20 \cdot \sqrt{3} \text{ н}.$$

$$\text{Значение реакции шарнира } A: R_A = \sqrt{X_A^2 + Y_A^2} = 20 \cdot \sqrt{39} \approx 124,9 \text{ н}.$$

$$\text{Ответ: } R_A = 20 \cdot \sqrt{39} \text{ н}, \quad Q = 20 \cdot \sqrt{3} \text{ н}.$$

Пример 2.

Определить реакции стержней AC , AD , BE , BF , если $P=120\text{н}$ (рис. 1.7).

Размерами блока A пренебречь.

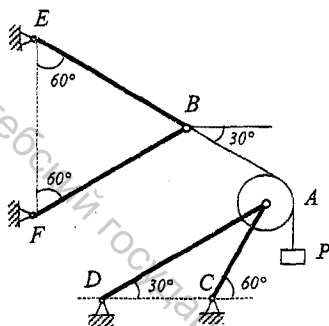


Рис. 1.7

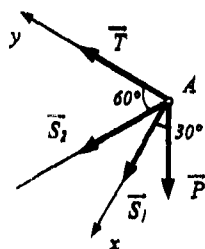


Рис. 1.8

Решение.

Данная составная конструкция представляет собой равновесие блока A и узла B . Рассмотрим равновесие блока A , на который действует сила P , реакция $\bar{T}$ нити AB ($T=P$), реакция $\bar{S}_1$ стержня AC и реакция $\bar{S}_2$ стержня AD . Реакции $\bar{S}_1$ и $\bar{S}_2$ направлены от точки A в предположении, что стержни растянуты (рис.1.8).

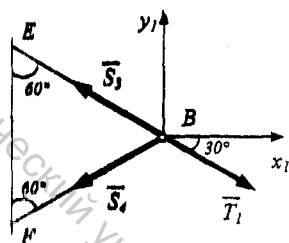


Рис. 1.9

Для полученной системы сходящихся сил на плоскости выберем оси x и y , как показано на рис. 1.8 и составим два уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad S_1 + P \cos 30^\circ + S_2 \cos 30^\circ = 0, \quad (1.9)$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad T + S_2 \cos 60^\circ - P \cos 60^\circ = 0. \quad (1.10)$$

Из уравнения (1.10) определим S_2 : $S_2 = P - \frac{T}{\cos 60^\circ} = -120\text{н}$.

Из уравнения (1.9) найдем S_1 : $S_1 = -(P + S_2) \cos 30^\circ = 0$.

Отрицательное значение S_2 говорит о том, что в действительности стержень AD сжат.

Рассмотрим равновесие узла B (рис. 1.9). На узел B действуют реакция T' нити BA , причем $T' = -T$, а численно $T' = T = P$, реакции S_3 и S_4 стержней BE и BF . Предполагаем, что стержни BE и BF растянуты. Для полученной системы сходящихся сил на плоскости составим два уравнения равновесия:

$$\sum F_{x_i} = 0, \quad T' \cos 30^\circ - S_3 \cos 30^\circ - S_4 \cos 30^\circ = 0, \quad (1.11)$$

$$\sum F_{y_i} = 0, \quad S_3 \cos 60^\circ - S_4 \cos 60^\circ - T' \cos 60^\circ = 0. \quad (1.12)$$

Уравнения (1.11) и (1.12) можно представить следующим образом:

$$\begin{cases} S_3 + S_4 = T', \\ S_3 - S_4 = T', \end{cases} \text{ отсюда следует, что } S_3 = T' = 120 \text{ н}, S_4 = 0.$$

Ответ: $S_1 = 0$, $S_2 = -120 \text{ н}$, $S_3 = 120 \text{ н}$, $S_4 = 0$.

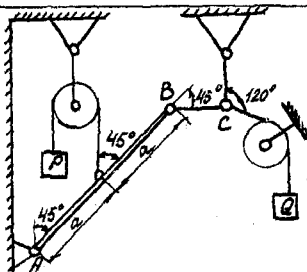
1.1.4. Задачи

№1

Задача 1.1.

Дано: $P = 120 \text{ н}$

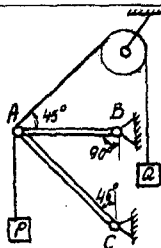
Определить: Q и R_A



Задача 1.2.

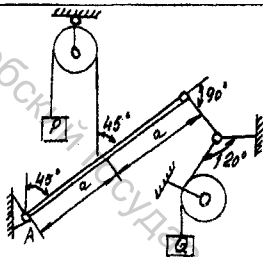
Дано: $P = 100 \text{ н}$; $Q = 100\sqrt{2} \text{ н}$

Определить: S_{AB} и S_{AC}

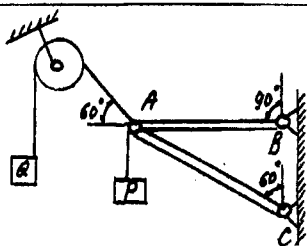


№2

Задача 2.1.

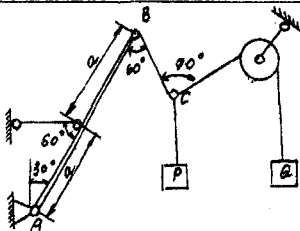
Дано: $P=120\text{H}$ Определить: Q и R_A 

Задача 2.2.

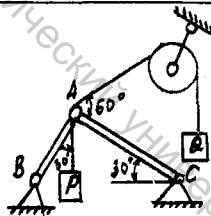
Дано: $P=100\text{H}$; $Q=100\sqrt{3}\text{H}$ Определить: S_{AB} и S_{AC} 

№3

Задача 3.1.

Дано: $P=120\text{H}$ Определить: Q и R_A 

Задача 3.2.

Дано: $P=100\text{H}$; $Q=200\text{H}$ Определить: S_{AB} и S_{AC} 

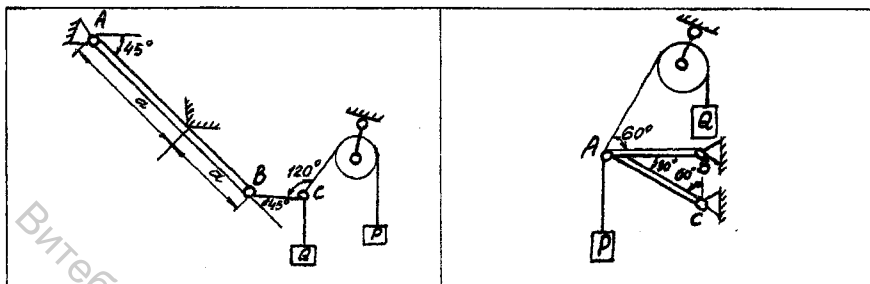
№4

Задача 4.1.

Дано: $P=120\text{H}$ Определить: Q и R_A

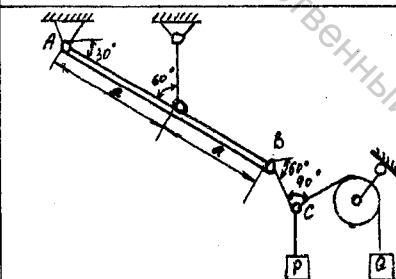
Задача 4.2.

Дано: $P=100\text{H}$; $Q=100\sqrt{3}\text{H}$ Определить: S_{AB} и S_{AC}

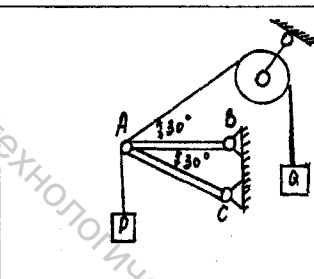


№5

Задача 5.1.

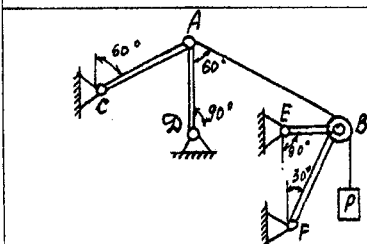
Дано: $P=120\text{H}$ Определить: Q и R_A 

Задача 5.2.

Дано: $P=100\text{H}$; $Q=200\text{H}$ Определить: S_{AB} и S_{AC} 

№6

Задача 6.1.

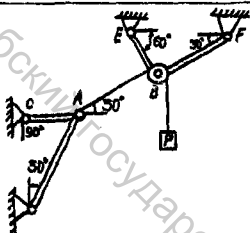
Дано: $P=120\text{H}$ Определить: S_{AC} , S_{AD} , S_{BF} и S_{BE} 

Задача 6.2.

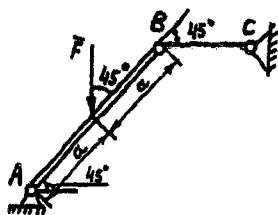
Дано: $F=60\text{H}$ Определить: R_A и S_{BC} 

№7

Задача 7.1.

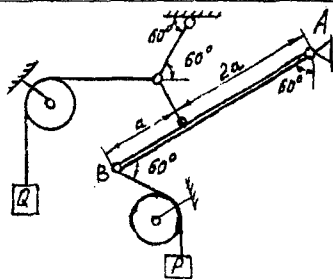
Дано: $P=120\text{ н}$ Определить: S_{AC} , S_{AD} , S_{BF} и S_{BE} 

Задача 7.2.

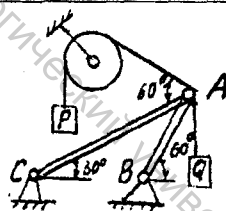
Дано: $P=60\text{ н}$ Определить: R_A и S_{BC} 

№8

Задача 8.1.

Дано: $P=120\text{ н}$ Определить: Q и R_A 

Задача 8.2.

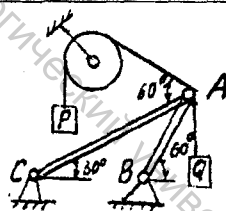
Дано: $P=100\text{ н}$; $Q=200\text{ н}$ Определить: S_{AB} и S_{AC} 

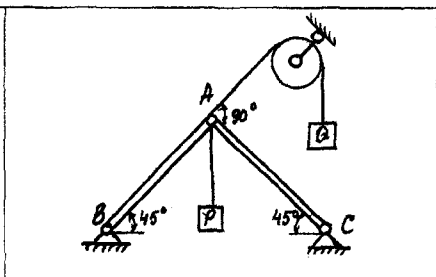
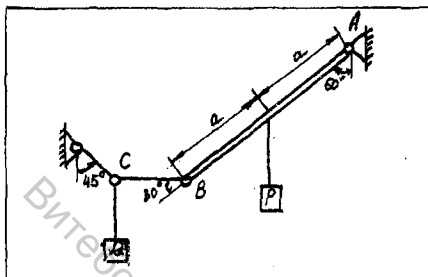
№9

Задача 9.1.

Дано: $P=120\text{ н}$ Определить: Q и R_A

Задача 9.2.

Дано: $P=100\text{ н}$; $Q=100\sqrt{2}\text{ н}$ Определить: S_{AB} и S_{AC} 

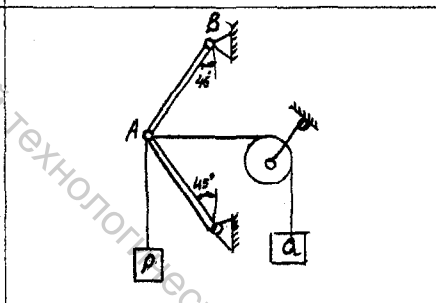
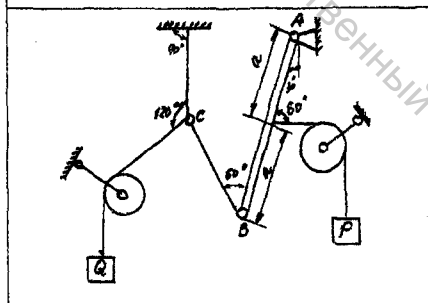


№10

Задача 10.1.

Дано: $P=120\text{H}$ Определить: Q и R_A

Задача 10.2.

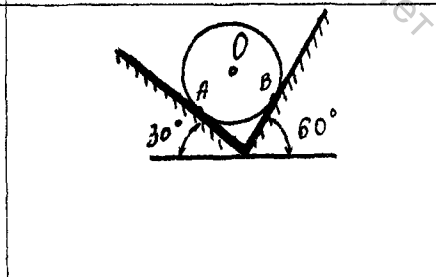
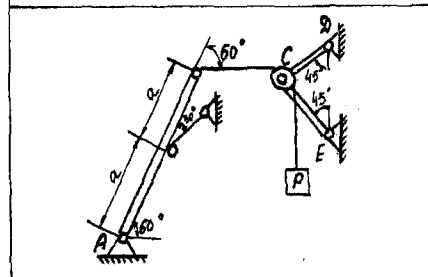
Дано: $P=100\text{H}$; $Q=200\text{H}$ Определить: S_{AB} и S_{AC} 

№11

Задача 11.1.

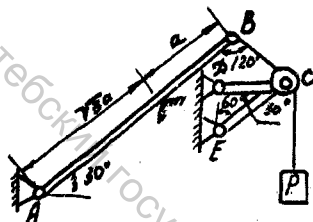
Дано: $P=120\text{H}$ Определить: R_A , S_{CD} , S_{CE}

Задача 11.2.

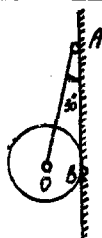
Дано: вес шара 60H Определить: N_A и N_B 

№12

Задача 12.1.

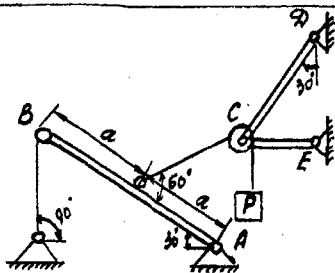
Дано: $P=120\text{H}$ Определить: R_A , S_{CE} , S_{CD} 

Задача 12.2.

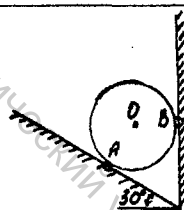
Дано: вес шара 60H Определить: S_{OA} и N_B 

№13

Задача 13.1.

Дано: $P=120\text{H}$ Определить: R_A , S_{CD} , S_{CE} 

Задача 13.2.

Дано: вес шара 60H Определить: N_A и N_B 

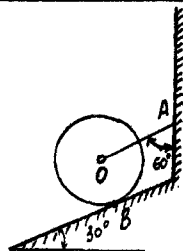
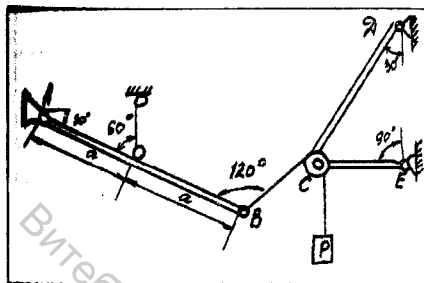
№14

Задача 14.1.

Дано: $P=120\text{H}$ Определить: R_A , S_{CE} , S_{CD}

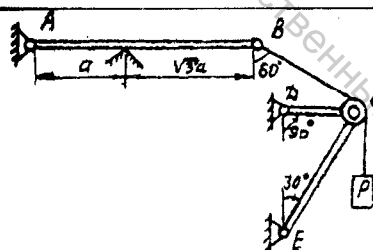
Задача 14.2.

Дано: вес шара 60H Определить: S_{OA} и N_B

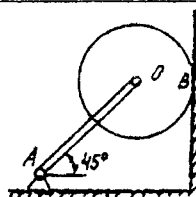


№15

Задача 15.1.

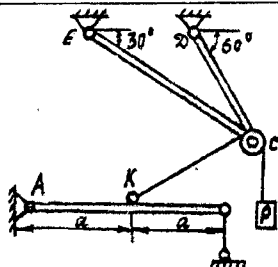
Дано: $P=120\text{H}$ Определить: R_A , S_{CE} , S_{CD} 

Задача 15.2.

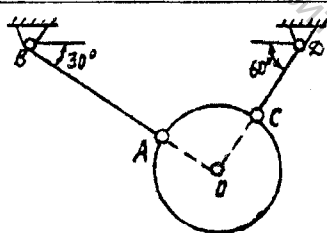
Дано: вес шара 60H Определить: S_{OA} и N_B 

№16

Задача 16.1.

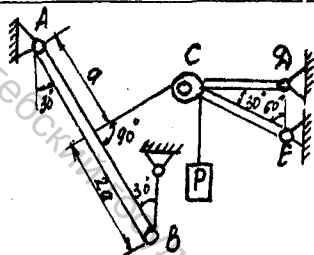
Дано: $P=120\text{H}$ Определить: R_A , S_{CE} , S_{CD} 

Задача 16.2.

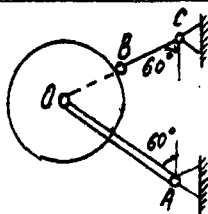
Дано: вес шара 60H Определить: S_{AB} и S_{CD} 

№17

Задача 17.1.

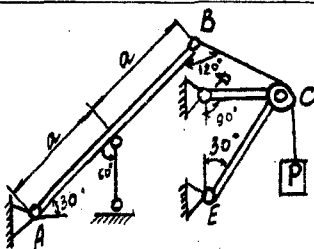
Дано: $P=120\text{H}$ Определить: R_A , S_{CE} , S_{CD} 

Задача 17.2.

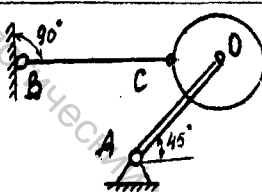
Дано: вес шара 60H Определить: S_{OA} и S_{BC} 

№18

Задача 18.1.

Дано: $P=120\text{H}$ Определить: R_A , S_{CE} , S_{CD} 

Задача 18.2.

Дано: вес шара 60H Определить: S_{OA} и S_{BC} 

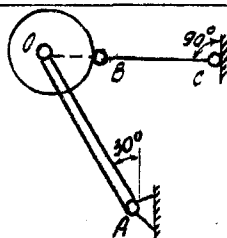
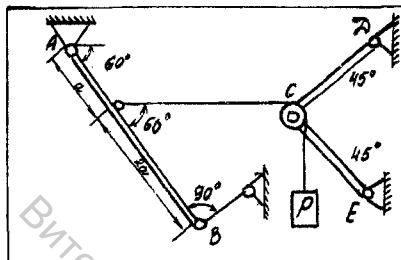
№19

Задача 19.1.

Дано: $P=120\text{H}$ Определить: R_A , S_{CE} , S_{CD}

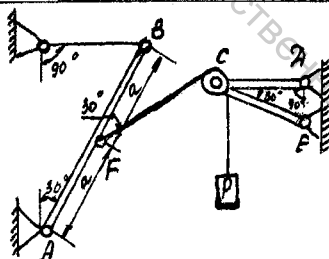
Задача 19.2.

Дано: вес шара 60H Определить: S_{OA} и S_{BC}

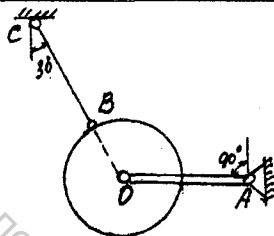


№20

Задача 20.1.

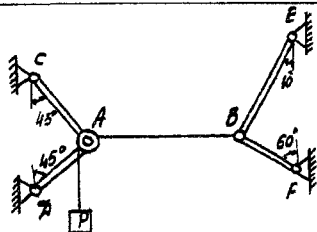
Дано: $P=120\text{H}$ Определить: R_A , S_{CE} , S_{CD} 

Задача 20.2.

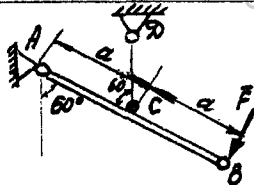
Дано: вес шара 60H Определить: S_{OA} и S_{BC} 

№21

Задача 21.1.

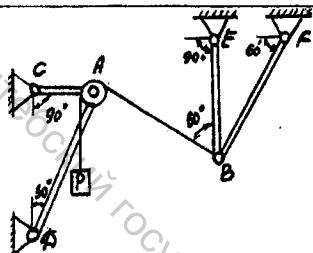
Дано: $P=120\text{H}$ Определить: S_{AC} , S_{AD} , S_{BF} и S_{BE} 

Задача 21.2.

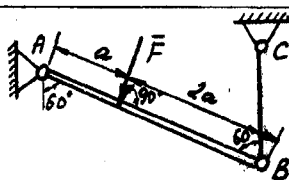
Дано: $F=60\text{H}$ Определить: R_A и S_{CD} 

№22

Задача 22.1.

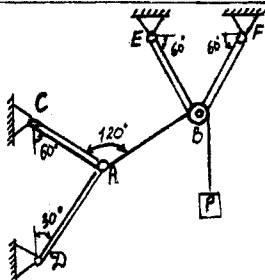
Дано: $P=120\text{H}$ Определить: S_{AC} , S_{AD} , S_{BF} и S_{BE} 

Задача 22.2.

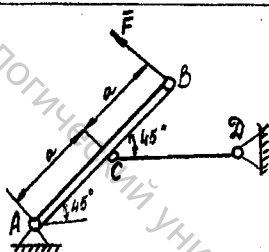
Дано: $F=60\text{H}$ Определить: R_A и S_{BC} 

№23

Задача 23.1.

Дано: $P=120\text{H}$ Определить: S_{AC} , S_{AD} , S_{BF} и S_{BE} 

Задача 23.2.

Дано: $F=60\text{H}$ Определить: R_A и S_{CD} 

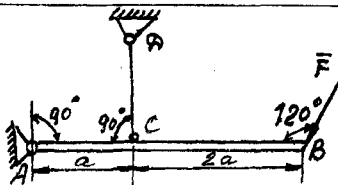
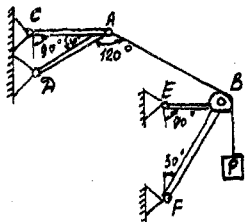
№24

Задача 24.1.

Дано: $P=120\text{H}$ Определить: S_{AC} , S_{AD} , S_{BF} и S_{BE}

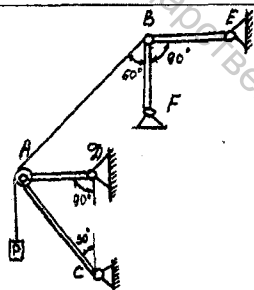
Задача 24.2.

Дано: $F=60\text{H}$ Определить: R_A и S_{CD}

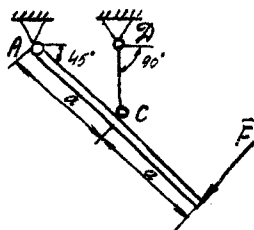


№25

Задача 25.1.

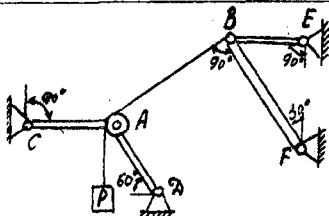
Дано: $P=120\text{H}$ Определить: S_{AC} , S_{AD} , S_{BF} и S_{BE} 

Задача 25.2.

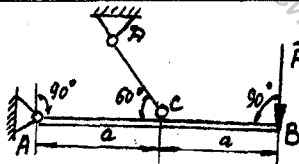
Дано: $F=60\text{H}$ Определить: R_A и S_{CD} 

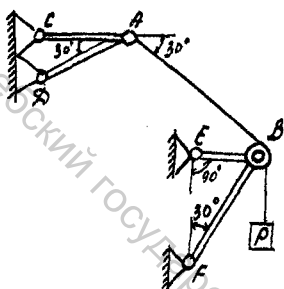
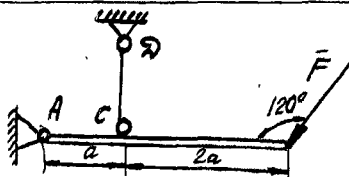
№26

Задача 26.1.

Дано: $P=120\text{H}$ Определить: S_{AC} , S_{AD} , S_{BF} и S_{BE} 

Задача 26.2.

Дано: $F=60\text{H}$ Определить: R_A и S_{CD} 

Задача 27.1.Дано: $P=120\text{H}$ Определить: S_{AC} , S_{AD} , S_{BF} и S_{BE} **Задача 27.2.**Дано: $F=60\text{H}$ Определить: R_A и S_{CD} **1.2. Равновесие произвольной пространственной системы сил**

Пример.

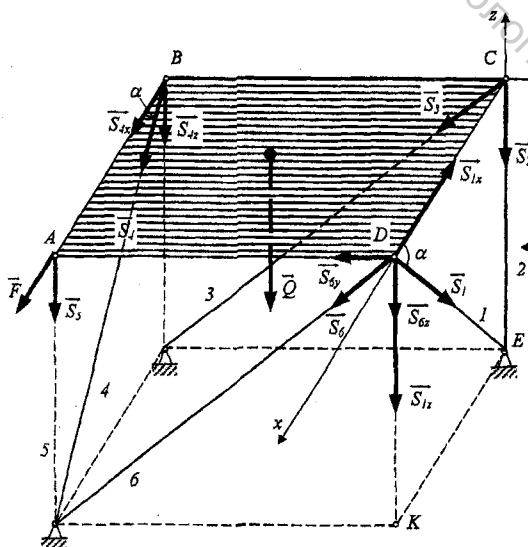


Рис. 1.10

Вид А

Вид А

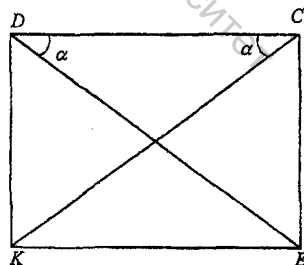


Рис. 1.11

Определить усилия в шести опорных стержнях, поддерживающих квадратную плиту $ABCD$ весом $Q=100\text{н}$, к которой приложена горизонтальная сила $F=50\text{н}$. Считать, что $AB=BC=2a$, $CE=1,5a$.

Решение.

Рассмотрим равновесие плиты, на которую действует сила F , вес Q и реакции $\vec{S}_1, \vec{S}_2, \vec{S}_3, \vec{S}_4, \vec{S}_5, \vec{S}_6$ стержней. Реакции стержней направлены в предположении, что все стержни работают на растяжение (рис.1.10).

Для решения задачи необходимо составить шесть уравнений равновесия:

$$\begin{aligned}\sum F_{kx} &= 0, & \sum m_x(F_k) &= 0, \\ \sum F_{ky} &= 0, & \sum m_y(F_k) &= 0, \\ \sum F_{kz} &= 0, & \sum m_z(F_k) &= 0.\end{aligned}\tag{1.13}$$

Силы $\vec{S}_2$ и $\vec{S}_3$ приложены в начале координат, поэтому моменты этих сил относительно осей x, y, z равны нулю. Для вычисления моментов сил $\vec{S}_1, \vec{S}_4, \vec{S}_6$ относительно осей x, y, z необходимо эти силы разложить на составляющие и применить теорему Вариньона:

$$\begin{aligned}m_x(\vec{S}_4) &= m_x(\vec{S}_{4x}) + m_x(\vec{S}_{4z}) = m_x(\vec{S}_{4z}); \\ m_y(\vec{S}_1) &= m_y(\vec{S}_{1x}) + m_y(\vec{S}_{1z}) = m_y(\vec{S}_{1z}); \\ m_y(\vec{S}_6) &= m_y(\vec{S}_{6y}) + m_y(\vec{S}_{6z}) = m_y(\vec{S}_{6z}); \\ m_z(\vec{S}_4) &= m_z(\vec{S}_{4x}) + m_z(\vec{S}_{4z}) = m_z(\vec{S}_{4x}); \\ m_z(\vec{S}_6) &= m_z(\vec{S}_{6y}) + m_z(\vec{S}_{6z}) = m_z(\vec{S}_{6y}).\end{aligned}$$

Составим уравнения равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad F + S_4 \cos \alpha - S_1 \cos \alpha = 0, \tag{1.14}$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad -S_6 \cos \alpha - S_3 \cos \alpha = 0, \tag{1.15}$$

$$\sum F_{kz} = 0, \quad -Q - S_1 \sin \alpha - S_2 - S_3 \sin \alpha - S_4 \sin \alpha - S_5 - S_6 \sin \alpha = 0, \tag{1.16}$$

$$\sum m_x(F_k) = 0, \quad S_5 \cdot 2a + S_4 \sin \alpha \cdot 2a + Q \cdot a = 0, \tag{1.17}$$

$$\sum m_y(F_k) = 0, \quad S_5 \cdot 2a + Q \cdot a + S_6 \sin \alpha \cdot 2a + S_1 \sin \alpha \cdot 2a = 0, \tag{1.18}$$

$$\sum m_z(F_k) = 0, \quad F \cdot 2a + S_4 \cos \alpha \cdot 2a - S_6 \cos \alpha \cdot 2a. \tag{1.19}$$

Вычислим $\cos \alpha$ и $\sin \alpha$, входящие в данные уравнения. Из рисунка (1.11) видно, что $\cos \alpha = \frac{DC}{DE}$, $\sin \alpha = \frac{CE}{DE}$. Из треугольника CDE имеем, что $DE = 2,5a$. Тогда $\cos \alpha = 0,8$, $\sin \alpha = 0,6$ (рис. 1.11).

Подставляя численные значения Q , F , $\cos \alpha$, $\sin \alpha$ и учитывая, что $S_3 = -S_6$ (см. 1.15), представим уравнения (1.14 — 1.19) в виде:

$$\begin{cases} S_1 - S_4 = 62,5, \\ S_2 + S_3 + (S_1 + S_4) \cdot 0,6 = -100, \\ S_4 \cdot 0,6 + S_5 = -50, \\ S_5 + (S_1 + S_6) \cdot 0,6 = -50, \\ S_4 - S_6 = -62,5. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений, получим:

$$S_1 = -62,5 \text{ н; } S_2 = -12,5 \text{ н; } S_3 = 62,5 \text{ н; } S_4 = -125 \text{ н; } S_5 = 25 \text{ н; } S_6 = -62,5 \text{ н.}$$

Отрицательные значения величин S_1 , S_2 , S_4 , S_6 показывают, что вектора S_1 , S_2 , S_4 , S_6 направлены противоположно изображенным на рисунке, т.е. стержни 1, 2, 4, 6 будут сжаты.

1.2.1. Задачи

Ниже представлены задачи, условия которых соответствуют примеру раздела 1.2. Всего 29 задач.

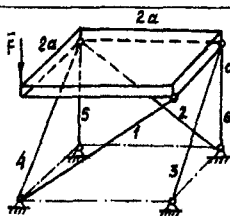
№1

Дано:

$$P = 100 \text{ н, } F = 50 \text{ н}$$

Определить:

$$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$$



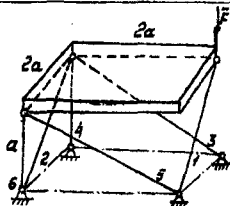
№2

Дано:

$$P=100\text{H}, F=50\text{H}$$

Определить:

$$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$$



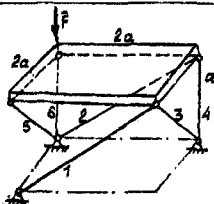
№3

Дано:

$$P=100\text{H}, F=50\text{H}$$

Определить:

$$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$$



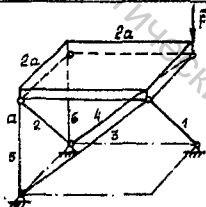
№4

Дано:

$$P=100\text{H}, F=50\text{H}$$

Определить:

$$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$$



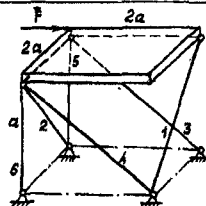
№5

Дано:

$$P=100\text{H}, F=50\text{H}$$

Определить:

$$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$$



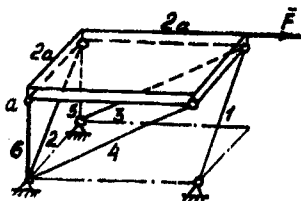
№6

Дано:

$$P=100\text{H}, F=50\text{H}$$

Определить:

$$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$$



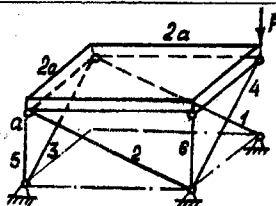
№7

Дано:

$$P=100\text{H}, F=50\text{H}$$

Определить:

$$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$$



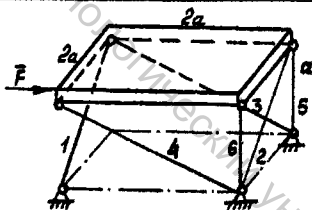
№8

Дано:

$$P=100\text{H}, F=50\text{H}$$

Определить:

$$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$$



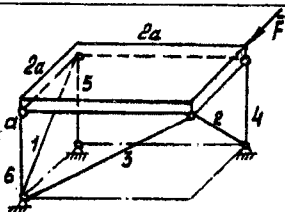
№9

Дано:

$$P=100\text{H}, F=50\text{H}$$

Определить:

$$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$$



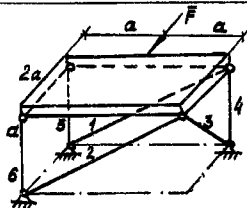
№10

Дано:

$$P = 100 \text{ Н}, F = 50 \text{ Н}$$

Определить:

$$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$$



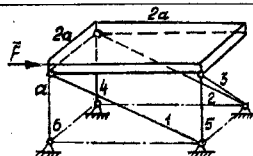
№11

Дано:

$$P = 100 \text{ Н}, F = 50 \text{ Н}$$

Определить:

$$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$$



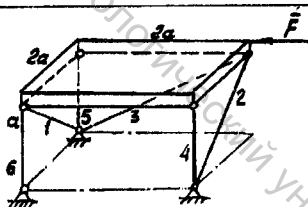
№12

Дано:

$$P = 100 \text{ Н}, F = 50 \text{ Н}$$

Определить:

$$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$$



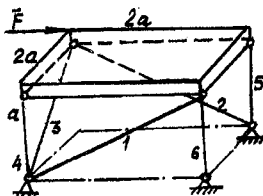
№13

Дано:

$$P = 100 \text{ Н}, F = 50 \text{ Н}$$

Определить:

$$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$$



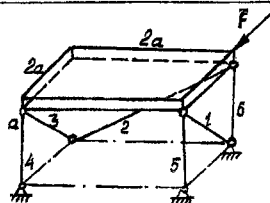
№14

Дано:

$$P=100\text{H}, F=50\text{H}$$

Определить:

$$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$$



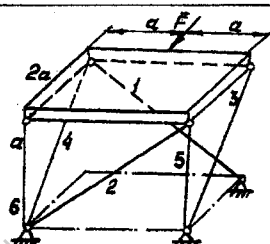
№15

Дано:

$$P=100\text{H}, F=50\text{H}$$

Определить:

$$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$$



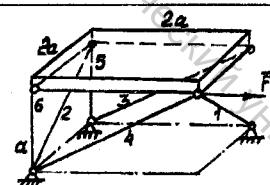
№16

Дано:

$$P=100\text{H}, F=50\text{H}$$

Определить:

$$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$$



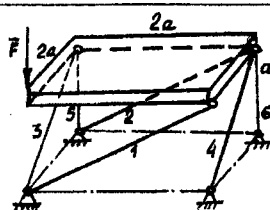
№17

Дано:

$$P=100\text{H}, F=50\text{H}$$

Определить:

$$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$$



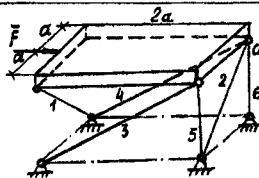
№18

Дано:

$$P=100\text{H}, F=50\text{H}$$

Определить:

$$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$$



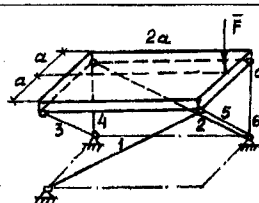
№19

Дано:

$$P=100\text{H}, F=50\text{H}$$

Определить:

$$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$$



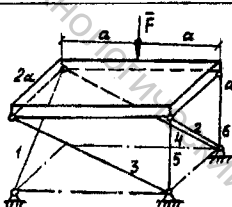
№20

Дано:

$$P=100\text{H}, F=50\text{H}$$

Определить:

$$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$$



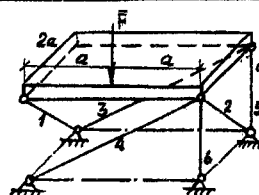
№21

Дано:

$$P=100\text{H}, F=50\text{H}$$

Определить:

$$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$$



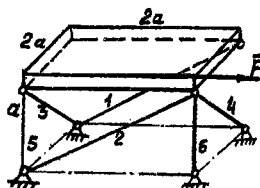
№22

Дано:

$$P=100\text{H}, F=50\text{H}$$

Определить:

$$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$$



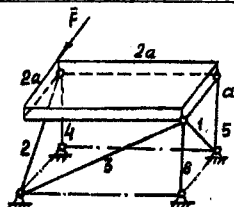
№23

Дано:

$$P=100\text{H}, F=50\text{H}$$

Определить:

$$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$$



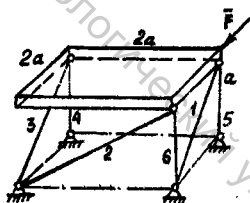
№24

Дано:

$$P=100\text{H}, F=50\text{H}$$

Определить:

$$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$$



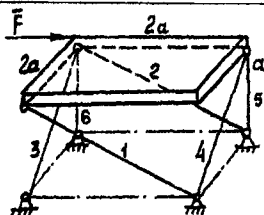
№25

Дано:

$$P=100\text{H}, F=50\text{H}$$

Определить:

$$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$$



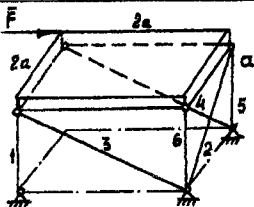
№26

Дано:

$$P=100\text{H}, F=50\text{H}$$

Определить:

$$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$$



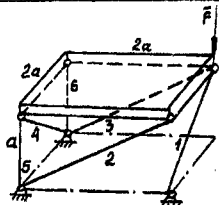
№27

Дано:

$$P=100\text{H}, F=50\text{H}$$

Определить:

$$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$$



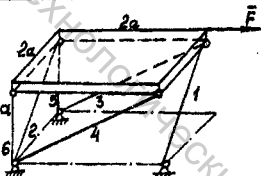
№28

Дано:

$$P=100\text{H}, F=50\text{H}$$

Определить:

$$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$$



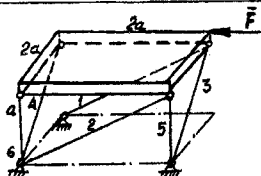
№29

Дано:

$$P=100\text{H}, F=50\text{H}$$

Определить:

$$S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6$$



ГЛАВА 2

Кинематика

2.1. Кинематика точки

Пример 1.

Даны уравнения движения точки в прямоугольных декартовых координатах:

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = t - 2, \end{cases} \quad t \geq 0, \quad (2.1)$$

где x, y — измеряются в метрах, t — в секундах. Найти траекторию точки и для момента времени $t=1$ с определить положение точки на траектории, ее скорость и ускорение, а также касательное и нормальное ускорения и радиус кривизны.

Решение.

Уравнения (2.1) являются уравнениями движения точки в параметрической форме. Для получения уравнения траектории исключим из уравнений (2.1) параметр t . Получим $x = (y + 2)^2$,
т.е. траекторией точки является часть параболы с горизонтальной осью и вершиной в точке A (рис. 2.1).

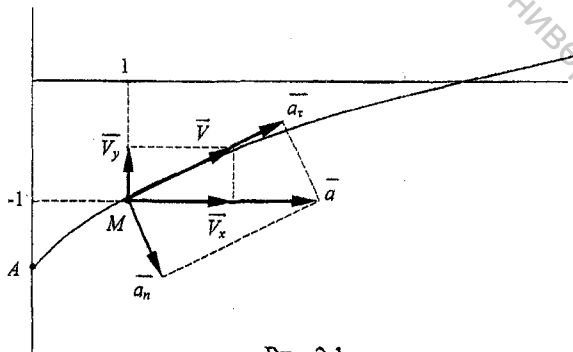


Рис. 2.1

В момент $t = 1 \text{ с}$ $x_1 = 1 \text{ м}$, $y = -1 \text{ м}$.

Скорость точки найдем по ее проекциям на оси координат:

$$V_x = \frac{dx}{dt} = 2t, \quad V_y = 1. \quad (2.3)$$

При $t = 1 \text{ с}$ получим: $V_x = 2 \text{ м/с}$; $V_y = 1 \text{ м/с}$. (2.3')

Тогда скорость точки в данный момент:

$$V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2} = \sqrt{5} = 2,25 \text{ м/с}. \quad (2.4)$$

Ускорение точки определяем по его проекциям на оси:

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = 2; \quad a_y = 0. \quad (2.5)$$

Ускорение точки в данный момент: $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 2 \text{ м/с}^2$. (2.6)

Строим на чертеже (рис. 2.1) вектор скорости по его проекциям на координатные оси. Вектор ускорения направлен параллельно оси X в положительную сторону.

Касательное ускорение точки определим по формуле:

$$a_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{v_x \cdot a_x + v_y \cdot a_y}{v}.$$

При $t = 1 \text{ с}$, воспользовавшись значениями (2.3'), (2.4) и (2.5), получим

$$a_\tau = \frac{2 \cdot 2}{\sqrt{5}} = 1,8 \text{ м/с}^2. \quad (2.7)$$

Положительное значение a_τ показывает, что движение точки ускоренное.

Нормальное ускорение точки: $a_n = \sqrt{a^2 - a_\tau^2} = 0,9 \text{ м/с}^2$. (2.8)

Радиус кривизны определим из выражения $\rho = V^2/a_n$.

В данный момент времени $\rho = 5/0,9 = 5,55 \text{ м}$.

Пример 2.

Проволочная окружность радиуса R вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной точки O , лежащей на той же окружности. На окружность надето колечко M , которое может скользить по неподвижному стержню OA . Определить скорость и ускорение колечка M в зависимости от расстояния $OM=X$ (рис. 2.2).

Решение.

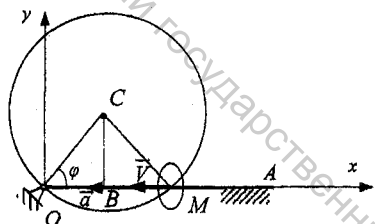


Рис. 2.2

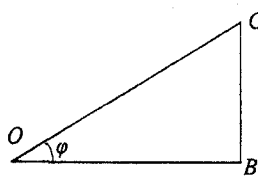
Выберем прямоугольные декартовы оси так, чтобы ось x проходила через неподвижный стержень OA . Определим уравнения движения колечка в координатной форме:

$$x = 2 \cdot R \cdot \cos \varphi, \quad y = 0. \quad (2.9)$$

При равномерном движении окружности вокруг точки O угол $\varphi = \omega t$. Тогда уравнение движения колечка M примет вид: $x = 2 \cdot R \cdot \cos \omega t$. (2.10)

Определим скорость колечка M : $V_M = \frac{dx}{dt} = -2 \cdot R \cdot \omega \cdot \sin \omega t$.

Из треугольника OCB выразим угол φ через R и расстояние x :



$$OC = R, \quad OB = \frac{x}{2}, \quad \text{тогда} \quad \cos \varphi = \frac{OB}{OC} = \frac{x}{2R};$$

$$\sin \varphi = \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{4R^2}} = \frac{1}{2R} \cdot \sqrt{4R^2 - x^2}.$$

Получим, что

$$\cos \omega t = \frac{x}{2R}; \quad \sin \omega t = \frac{1}{2R} \cdot \sqrt{4R^2 - x^2}. \quad (2.11)$$

Тогда получим искомое значение скорости:

$$V = -2R\omega \cdot \frac{1}{2R} \cdot \sqrt{4R^2 - x^2} = -\omega \sqrt{4R^2 - x^2}. \quad (2.12)$$

Найдем ускорение колечка M :

$$a_m = \frac{dv_m}{dt} = -2R\omega^2 \cos \omega t = -2R\omega^2 \frac{x}{2R} = -2R\omega^2. \quad (2.13)$$

Вектора скорости и ускорения колечка M направлены противоположно положительному направлению оси x .

2.1.1. Задачи

№1

Задача 1.1.

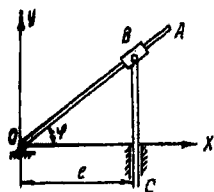
Даны уравнения движения точки: $x=4 \cdot \sin t$; $y=2 \cdot \cos 2t$

(x, y — в метрах, t — в секундах).

1. Найти уравнение траектории точки и построить ее на чертеже.
2. Для момента времени $t=\pi/4$ с определить:
 - а) скорость и ускорение точки,
 - б) касательное, нормальное ускорения и радиус кривизны траектории.
3. Для заданного момента времени указать положение точки на траектории. Построить (по проекциям) скорость и ускорение точки.

Задача 1.2.

Кулиса OA вращается в вертикальной плоскости вокруг точки O так, что угол $\varphi = 10t$.



Определить скорость и ускорение ползуна B , который перемещается прямолинейно по вертикали вместе со стержнем BC на расстоянии $l=20$ см от точки O в момент, когда угол $\varphi=\pi/3$.

№2

Задача 2.1.

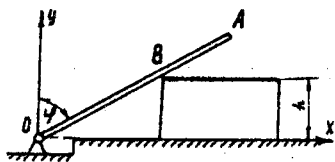
Даны уравнения движения точки: $x=2t+1$; $y=\frac{4}{2t+1}$

(x, y — в метрах, t — в секундах).

1. Найти уравнение траектории точки и построить ее на чертеже.
2. Для момента времени $t=1/2$ с определить:
 - а) скорость и ускорение точки,
 - б) касательное, нормальное ускорения и радиус кривизны траектории.
3. Для заданного момента времени указать положение точки на траектории. Построить (по проекциям) скорость и ускорение точки.

Задача 2.2.

Стержень OA , вращаясь вокруг неподвижной точки O так, что угол $\varphi=10t$, перемещает прямоугольный брус высотой $h=45$ см.



Определить скорость и ускорение бруса в момент, когда угол $\varphi=\pi/6$.

№3

Задача 3.1.

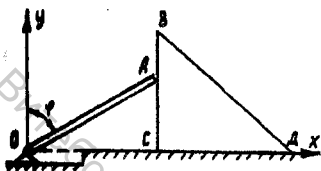
Даны уравнения движения точки: $x=2+3\sin 2t$; $y=4\cos 2t$

(x, y — в метрах, t — в секундах).

1. Найти уравнение траектории точки и построить ее на чертеже.
2. Для момента времени $t=\pi/8$ с определить:
 - а) скорость и ускорение точки,
 - б) касательное, нормальное ускорения и радиус кривизны траектории.
3. Для заданного момента времени указать положение точки на траектории. Построить (по проекциям) скорость и ускорение точки.

Задача 3.2.

Стержень OA длиной 60 см , вращаясь вокруг неподвижной точки O так, что угол $\varphi = 10t$, передвигает по горизонтальной плоскости призму BCD , ребро BC которой вертикально.



Определить скорость и ускорение призмы в момент, когда угол $\varphi = \pi/3$.

№4

Задача 4.1.

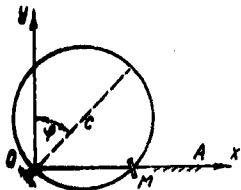
Даны уравнения движения точки: $x = \cos 2t$; $y = 2 \cdot \sin t$

(x, y — в метрах, t — в секундах).

1. Найти уравнение траектории точки и построить ее на чертеже.
2. Для момента времени $t = \pi/4$ с определить:
 - а) скорость и ускорение точки,
 - б) касательное, нормальное ускорения и радиус кривизны траектории.
3. Для заданного момента времени указать положение точки на траектории. Построить (по проекциям) скорость и ускорение точки.

Задача 4.2.

Проволочная окружность радиуса $R = 64\text{ см}$ вращается вокруг точки O так, что угол $\varphi = (\pi/8) \cdot t$. На окружность надето колечко M , которое может скользить по неподвижному стержню OA .



Определить скорость и ускорение колечка M в момент времени $t = 2\text{ с}$.

№5

Задача 5.1.

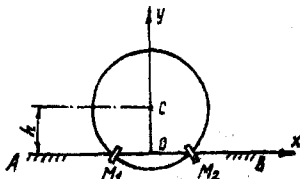
Даны уравнения движения точки: $x=3t$; $y=3+2\sin t$

(x, y — в метрах, t — в секундах).

1. Найти уравнение траектории точки и построить ее на чертеже.
2. Для момента времени $t=\pi/6$ с определить:
 - а) скорость и ускорение точки,
 - б) касательное, нормальное ускорения и радиус кривизны траектории.
3. Для заданного момента времени указать положение точки на траектории. Построить (по проекциям) скорость и ускорение точки.

Задача 5.2.

Окружность радиуса $R=60$ см перемещается в своей плоскости поступательно параллельно оси Oy , передвигая колечки M_1 и M_2 по неподвижному стержню AB так, что $h=15t$ см.



Определить скорость и ускорение колечка M_1 в момент, когда $h=30$ см.

№6

Задача 6.1.

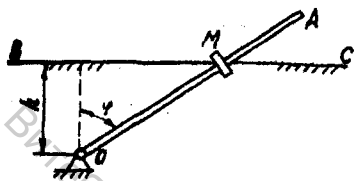
Даны уравнения движения точки: $x=2\cos 4t$; $y=2-\sin 4t$

(x, y — в метрах, t — в секундах).

1. Найти уравнение траектории точки и построить ее на чертеже.
2. Для момента времени $t=\pi/16$ с определить:
 - а) скорость и ускорение точки,
 - б) касательное, нормальное ускорения и радиус кривизны траектории.
3. Для заданного момента времени указать положение точки на траектории. Построить (по проекциям) скорость и ускорение точки.

Задача 6.2.

Стержень OA , вращающийся вокруг точки O , передвигает колечко M по неподвижной прямой BC , отстоящей от точки O на расстоянии $h=60\text{ см}$ так, что угол $\varphi=12t$.



Определить скорость и ускорение колечка M в момент, когда угол $\varphi=\pi/6$.

№7

Задача 7.1.

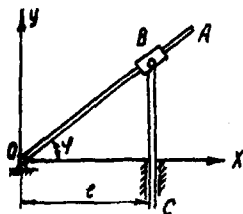
Даны уравнения движения точки: $x=\sin^2 2t$; $y=2\cos 2t$

(x, y — в метрах, t — в секундах).

1. Найти уравнение траектории точки и построить ее на чертеже.
2. Для момента времени $t=\pi/4$ с определить:
 - а) скорость и ускорение точки,
 - б) касательное, нормальное ускорения и радиус кривизны траектории.
3. Для заданного момента времени указать положение точки на траектории. Построить (по проекциям) скорость и ускорение точки.

Задача 7.2.

Кулиса OA вращается в вертикальной плоскости вокруг точки O так, что угол $\varphi=(\pi/6) \cdot t$.



Определить скорость и ускорение ползуна B , который перемещается прямолинейно по вертикали вместе со стержнем BC на расстоянии $l=81\text{ см}$ от точки O , в момент, когда $t=1\text{ с}$.

№8

Задача 8.1.

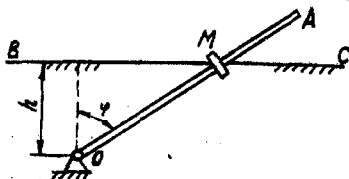
Даны уравнения движения точки: $x=2\cos 4t$; $y=2-\sin 4t$

(x, y — в метрах, t — в секундах).

1. Найти уравнение траектории точки и построить ее на чертеже.
2. Для момента времени $t=\pi/16$ с определить:
 - а) скорость и ускорение точки,
 - б) касательное, нормальное ускорения и радиус кривизны траектории.
3. Для заданного момента времени указать положение точки на траектории. Построить (по проекциям) скорость и ускорение точки.

Задача 8.2.

Стержень OA , вращающийся вокруг точки O , передвигает колечко M по неподвижной прямой BC , отстоящей от точки O на расстоянии $h=60$ см, так, что угол $\varphi=12t$.



Определить скорость и ускорение колечка M в момент, когда угол $\varphi=\pi/6$.

№9

Задача 9.1.

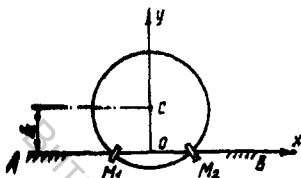
Даны уравнения движения точки: $x=3t$; $y=\sin 2t$

(x, y — в метрах, t — в секундах).

1. Найти уравнение траектории точки и построить ее на чертеже.
2. Для момента времени $t=(3/4)\pi$ с определить:
 - а) скорость и ускорение точки,
 - б) касательное, нормальное ускорения и радиус кривизны траектории.
3. Для заданного момента времени указать положение точки на траектории. Построить (по проекциям) скорость и ускорение точки.

Задача 9.2.

Окружность радиуса $R=80\text{ см}$ перемещается в своей плоскости поступательно параллельно оси Oy , передвигая колечки M_1 и M_2 по неподвижному стержню AB так, что $h=20t\text{ см}$.



Определить скорость и ускорение колечка M_2 в момент, когда $t=2\text{ с}$.

№10

Задача 10.1.

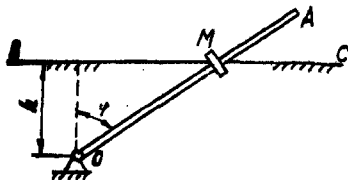
Даны уравнения движения точки: $x=4+2\sin 2t$; $y=4\cos 2t$

(x, y — в метрах, t — в секундах).

1. Найти уравнение траектории точки и построить ее на чертеже.
2. Для момента времени $t=\pi/8\text{ с}$ определить:
 - а) скорость и ускорение точки,
 - б) касательное, нормальное ускорения и радиус кривизны траектории.
3. Для заданного момента времени указать положение точки на траектории. Построить (по проекциям) скорость и ускорение точки.

Задача 10.2.

Стержень OA , вращающийся вокруг точки O , передвигает колечко M по неподвижной прямой BC , отстоящей от точки O на расстоянии $h=60\text{ см}$ так, что угол $\varphi=(\pi/6)t$.



Определить скорость и ускорение колечка M в момент, когда $t=2\text{ с}$.

№11

Задача 11.1.

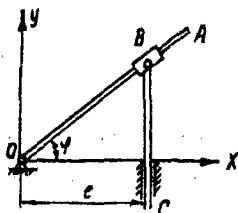
Даны уравнения движения точки: $x=3 \cdot (t-2)$; $y=2 \cdot (t-2)^2$

(x, y — в метрах, t — в секундах).

1. Найти уравнение траектории точки и построить ее на чертеже.
2. Для момента времени $t=1$ с определить:
 - а) скорость и ускорение точки,
 - б) касательное, нормальное ускорения и радиус кривизны траектории.
3. Для заданного момента времени указать положение точки на траектории. Построить (по проекциям) скорость и ускорение точки.

Задача 11.2.

Кулиса OA вращается в вертикальной плоскости вокруг точки O так, что угол $\varphi=10t$.



Определить скорость и ускорение ползуна B , который перемещается прямолинейно по вертикали вместе со стержнем BC на расстоянии $l=20$ см от точки O , в момент, когда угол $\varphi=\pi/4$.

№12

Задача 12.1.

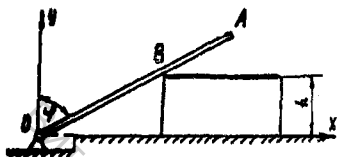
Даны уравнения движения точки: $x=t+2$; $y=\frac{4}{t+2}$

(x, y — в метрах, t — в секундах).

1. Найти уравнение траектории точки и построить ее на чертеже.
2. Для момента времени $t=0$ с определить:
 - а) скорость и ускорение точки,
 - б) касательное, нормальное ускорения и радиус кривизны траектории.
3. Для заданного момента времени указать положение точки на траектории. Построить (по проекциям) скорость и ускорение точки.

Задача 12.2.

Стержень OA , вращаясь вокруг неподвижной точки O так, что угол $\varphi = 10t$,



перемещает прямоугольный брус высотой $h=20\text{ см}$.

Определить скорость и ускорение бруса в момент, когда угол $\varphi = \pi/4$.

№13

Задача 13.1.

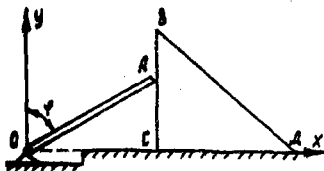
Даны уравнения движения точки: $x=3t$; $y=4+3\cos 2t$

(x, y — в метрах, t — в секундах).

1. Найти уравнение траектории точки и построить ее на чертеже.
2. Для момента времени $t=(2/3)\cdot\pi$ с определить:
 - а) скорость и ускорение точки,
 - б) касательное, нормальное ускорения и радиус кривизны траектории.
3. Для заданного момента времени указать положение точки на траектории. Построить (по проекциям) скорость и ускорение точки.

Задача 13.2.

Стержень OA длиной 60 см , вращаясь вокруг неподвижной точки O так, что угол $\varphi = 10t$, передвигает по горизонтальной плоскости призму BCD , ребро BC которой вертикально.



Определить скорость и ускорение призмы в момент, когда угол $\varphi = \pi/4$.

№14

Задача 14.1.

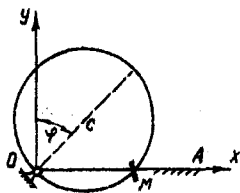
Даны уравнения движения точки: $x = \cos 2t$; $y = 1 + \cos^2 2t$

(x, y — в метрах, t — в секундах).

1. Найти уравнение траектории точки и построить ее на чертеже.
2. Для момента времени $t = \pi/4$ с определить:
 - а) скорость и ускорение точки,
 - б) касательное, нормальное ускорения и радиус кривизны траектории.
3. Для заданного момента времени указать положение точки на траектории. Построить (по проекциям) скорость и ускорение точки.

Задача 14.2.

Проволочная окружность радиуса $R = 10$ см вращается вокруг точки O так, что угол $\varphi = (\pi/6) \cdot t$. На окружность надето колечко M , которое может скользить по неподвижному стержню OA .



Определить скорость и ускорение колечка M в момент времени $t = 2$ с.

№15

Задача 15.1.

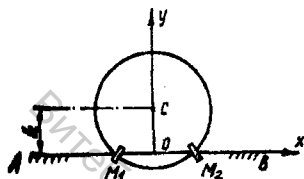
Даны уравнения движения точки: $x = 3t$; $y = -3 \sin 2t$

(x, y — в метрах, t — в секундах).

1. Найти уравнение траектории точки и построить ее на чертеже.
2. Для момента времени $t = \pi/6$ с определить:
 - а) скорость и ускорение точки,
 - б) касательное, нормальное ускорения и радиус кривизны траектории.
3. Для заданного момента времени указать положение точки на траектории. Построить (по проекциям) скорость и ускорение точки.

Задача 15.2.

Окружность радиуса $R=80\text{ см}$ перемещается в своей плоскости поступательно параллельно оси Oy , передвигая колечки M_1 и M_2 по неподвижному стержню AB так, что $h=20t$.



Определить скорость и ускорение колечка M_2 в момент, когда $h=40\sqrt{2}\text{ см}$.

№16

Задача 16.1.

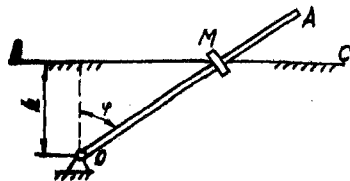
Даны уравнения движения точки: $x=2-3\cos 2t$; $y=4\sin 2t$

(x, y — в метрах, t — в секундах).

1. Найти уравнение траектории точки и построить ее на чертеже.
2. Для момента времени $t=\pi/8\text{ с}$ определить:
 - а) скорость и ускорение точки,
 - б) касательное, нормальное ускорения и радиус кривизны траектории.
3. Для заданного момента времени указать положение точки на траектории. Построить (по проекциям) скорость и ускорение точки.

Задача 16.2.

Стержень OA , вращающийся вокруг точки O , передвигает колечко M по неподвижной прямой BC , отстоящей от точки O на расстоянии $h=60\text{ см}$ так, что угол $\varphi=10t$.



Определить скорость и ускорение колечка M в момент, когда $\varphi=\pi/4$.

№17

Задача 17.1.

Даны уравнения движения точки: $x=2\cos t$; $y=3+\cos^2 t$

(x, y — в метрах, t — в секундах).

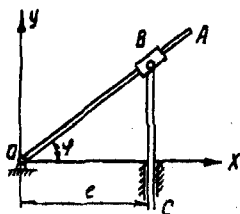
1. Найти уравнение траектории точки и построить ее на чертеже.
2. Для момента времени $t=\pi/2$ с определить:
 - а) скорость и ускорение точки,
 - б) касательное, нормальное ускорения и радиус кривизны траектории.
3. Для заданного момента времени указать положение точки на траектории. Построить (по проекциям) скорость и ускорение точки.

Задача 17.2.

Кулиса OA вращается в вертикальной плоскости вокруг точки O так, что

угол $\varphi=(\pi/6)\cdot t$.

Определить скорость и ускорение ползуна B , который перемещается прямолинейно по вертикали вместе со стержнем BC на расстоянии $l=45$ см от точки O , в момент $t=2$ с.



№18

Задача 18.1.

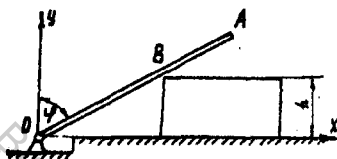
Даны уравнения движения точки: $x=\frac{3}{2t+1}$; $y=2t+t^2$

(x, y — в метрах, t — в секундах).

1. Найти уравнение траектории точки и построить ее на чертеже.
2. Для момента времени $t=1/2$ с определить:
 - а) скорость и ускорение точки,
 - б) касательное, нормальное ускорения и радиус кривизны траектории.
3. Для заданного момента времени указать положение точки на траектории. Построить (по проекциям) скорость и ускорение точки.

Задача 18.2.

Стержень OA , вращаясь вокруг неподвижной точки O так, что угол $\varphi = (\pi/6) \cdot t$, перемещает прямоугольный брус высотой $h = 45 \text{ см}$.



Определить скорость и ускорение бруса в момент $t = 2 \text{ с}$.

№19

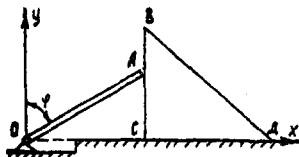
Задача 19.1.

Даны уравнения движения точки: $x = 2 + \cos 2t$; $y = 4t$

(x, y — в метрах, t — в секундах).

1. Найти уравнение траектории точки и построить ее на чертеже.
2. Для момента времени $t = (3/8)\pi \text{ с}$ определить:
 - а) скорость и ускорение точки,
 - б) касательное, нормальное ускорения и радиус кривизны траектории.
3. Для заданного момента времени указать положение точки на траектории. Построить (по проекциям) скорость и ускорение точки.

Задача 19.2.



Стержень OA длиной 100 см , вращаясь вокруг неподвижной точки O так, что угол $\varphi = (\pi/6) \cdot t$, передвигает по горизонтальной плоскости призму BCD , ребро BC которой вертикально.

Определить скорость и ускорение призмы в момент $t = 1 \text{ с}$.

№20

Задача 20.1.

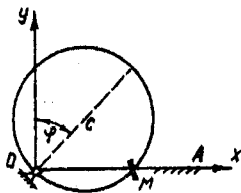
Даны уравнения движения точки: $x = \sin 3t$; $y = 2 + \sin^2 3t$

(x, y — в метрах, t — в секундах).

1. Найти уравнение траектории точки и построить ее на чертеже.
2. Для момента времени $t=0$ с определить:
 - а) скорость и ускорение точки,
 - б) касательное, нормальное ускорения и радиус кривизны траектории.
3. Для заданного момента времени указать положение точки на траектории. Построить (по проекциям) скорость и ускорение точки.

Задача 20.2.

Проволочная окружность радиуса $R=10$ см вращается вокруг точки O так, что угол $\varphi=t$. На окружность надето колечко M , которое может скользить по неподвижному стержню OA .



Определить скорость и ускорение колечка M в момент времени $t=\pi/6$ с.

№21

Задача 21.1.

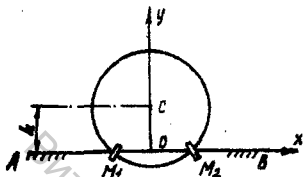
Даны уравнения движения точки: $x = 2 + \sin 3t$; $y = 3t$

(x, y — в метрах, t — в секундах).

1. Найти уравнение траектории точки и построить ее на чертеже.
2. Для момента времени $t=\pi/6$ с определить:
 - а) скорость и ускорение точки,
 - б) касательное, нормальное ускорения и радиус кривизны траектории.
3. Для заданного момента времени указать положение точки на траектории. Построить (по проекциям) скорость и ускорение точки.

Задача 21.2.

Окружность радиуса $R=80\text{ см}$ перемещается в своей плоскости поступательно параллельно оси Oy , передвигая колечки M_1 и M_2 по неподвижному стержню AB так, что $h=20t$.



Определить скорость и ускорение колечка M_2 в момент, когда $t=2\sqrt{2}\text{ с}$.

№22

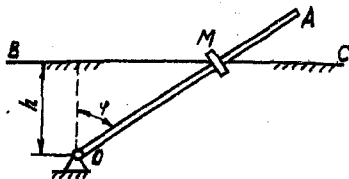
Задача 22.1.

Даны уравнения движения точки: $x=3-4\sin 2t$; $y=2\cos 2t$
(x, y — в метрах, t — в секундах).

1. Найти уравнение траектории точки и построить ее на чертеже.
2. Для момента времени $t=\pi/8\text{ с}$ определить:
 - а) скорость и ускорение точки,
 - б) касательное, нормальное ускорения и радиус кривизны траектории.
3. Для заданного момента времени указать положение точки на траектории. Построить (по проекциям) скорость и ускорение точки.

Задача 22.2.

Стержень OA , вращающийся вокруг точки O , передвигает колечко M по неподвижной прямой BC , отстоящей от точки O на расстоянии $h=81\text{ см}$ так, что угол $\varphi=(\pi/6)\cdot t$.



Определить скорость и ускорение колечка M в момент, когда $t=1\text{ с}$.

№23

Задача 23.1.

Даны уравнения движения точки: $x = \sin(\pi/2) \cdot t$; $y = \cos^2(\pi/2) \cdot t$
(x, y — в метрах, t — в секундах).

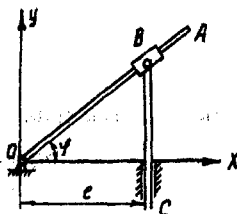
1. Найти уравнение траектории точки и построить ее на чертеже.
2. Для момента времени $t=0$ с определить:
 - а) скорость и ускорение точки,
 - б) касательное, нормальное ускорения и радиус кривизны траектории.
3. Для заданного момента времени указать положение точки на траектории. Построить (по проекциям) скорость и ускорение точки.

Задача 23.2.

Кулиса OA вращается в вертикальной плоскости вокруг точки O так, что

$$\text{угол } \varphi = 12t.$$

Определить скорость и ускорение ползуна B , который перемещается прямолинейно по вертикали вместе со стержнем BC на расстоянии $l=20$ см от точки O , в момент, когда угол $\varphi = \pi/6$.



№24

Задача 24.1.

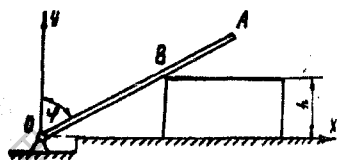
Даны уравнения движения точки: $x = 3t + 1$; $y = \frac{2}{3t + 1}$

(x, y — в метрах, t — в секундах).

1. Найти уравнение траектории точки и построить ее на чертеже.
2. Для момента времени $t=0$ с определить:
 - а) скорость и ускорение точки,
 - б) касательное, нормальное ускорения и радиус кривизны траектории.
3. Для заданного момента времени указать положение точки на траектории. Построить (по проекциям) скорость и ускорение точки.

Задача 24.2.

Стержень OA , вращаясь вокруг неподвижной точки O так, что угол $\varphi = 10t$, перемещает прямоугольный брус высотой $h = 20 \text{ см}$.



Определить скорость и ускорение бруса в момент, когда угол $\varphi = \pi/3$.

№25

Задача 25.1.

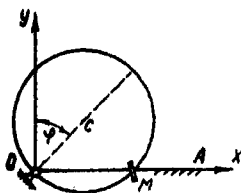
Даны уравнения движения точки: $x = 2 \cdot \cos^2(\pi/2) \cdot t$; $y = 2 \cdot \sin(\pi/2) \cdot t$

(x, y — в метрах, t — в секундах).

1. Найти уравнение траектории точки и построить ее на чертеже.
2. Для момента времени $t = 0 \text{ с}$ определить:
 - а) скорость и ускорение точки,
 - б) касательное, нормальное ускорения и радиус кривизны траектории.
3. Для заданного момента времени указать положение точки на траектории. Построить (по проекциям) скорость и ускорение точки.

Задача 25.2.

Проволочная окружность радиуса $R = 10 \text{ см}$ вращается вокруг точки O так, что угол $\varphi = (\pi/6) \cdot t$. На окружность надето колечко M , которое может скользить по неподвижному стержню OA .



Определить скорость и ускорение колечка M в момент времени $t = 1 \text{ с}$.

Задача 26.1.

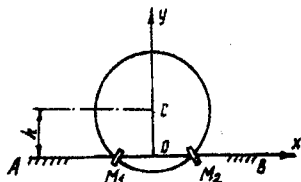
Даны уравнения движения точки: $x = \frac{1}{t+1}$; $y = 2t+2$

(x, y — в метрах, t — в секундах).

1. Найти уравнение траектории точки и построить ее на чертеже.
2. Для момента времени $t=0$ с определить:
 - а) скорость и ускорение точки,
 - б) касательное, нормальное ускорения и радиус кривизны траектории.
3. Для заданного момента времени указать положение точки на траектории. Построить (по проекциям) скорость и ускорение точки.

Задача 26.2.

Окружность радиуса $R=80$ см перемещается в своей плоскости поступательно параллельно оси Oy , передвигая колечки M_1 и M_2 по неподвижному стержню AB так, что $h=20t$ см.



Определить скорость и ускорение колечка M_2 в момент, когда $h=40\sqrt{3}$ см.

Задача 27.1.

Даны уравнения движения точки: $x = 3 - 2 \cdot \sin 4t$; $y = \cos 4t$

(x, y — в метрах, t — в секундах).

1. Найти уравнение траектории точки и построить ее на чертеже.
2. Для момента времени $t = (3/16) \cdot \pi$ с определить:
 - а) скорость и ускорение точки,
 - б) касательное, нормальное ускорения и радиус кривизны траектории.
3. Для заданного момента времени указать положение точки на траектории. Построить (по проекциям) скорость и ускорение точки.

Решение.

1. Определение скоростей точек и угловой скорости шатуна (рис.2.3).

Кривошип OA совершает вращательное движение. Поэтому скорость точки A равна

$$V_A = OA \cdot \omega_{OA} = 200 \text{ см/с} = 2 \text{ м/с} \quad (2.14)$$

Скорость V_A точки A перпендикулярна кривошипу OA и направлена в сторону вращения кривошипа. Шатун AB совершает плоскопараллельное движение. Скорость V_B ползуна B направлена по горизонтали влево. Мгновенный центр скоростей P шатуна AB находится в точке пересечения перпендикуляров, проведенных из точек A и B к их скоростям.

$$\text{Угловая скорость шатуна } AB: \omega_{AB} = \frac{V_A}{AP}.$$

Так как треугольник ABP — равнобедренный и прямоугольный, $AP = AB = 100 \text{ см} = 1 \text{ м}$ и $\omega_{AB} = 2/1 = 2 \text{ с}^{-1}$. (2.15)

Скорость точки B определим по теореме о равенстве проекций скоростей точек A и B на ось, проходящую через эти точки:

$$V_A = V_B \cdot \cos 45^\circ, \text{ откуда } V_B = V_A / \cos 45^\circ = 2,84 \text{ м/с}. \quad (2.16)$$

Проверить правильность определения скорости точки B можно из соотношения: $\frac{V_A}{AP} = \frac{V_B}{BP}$, тогда $V_B = V_A \frac{BP}{AP}$.

Из треугольника ABP имеем, что $BP = AB \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2} \text{ м}$. Получаем, что $V_B = 2 \cdot \frac{2 \cdot \sqrt{2}}{2} = 2,84 \text{ м/с}$.

Скорость точки C можно определить по формуле: $V_C = \omega_{AB} \cdot CP$.

Из треугольника ACP имеем, что $CP = \sqrt{AC^2 + AP^2} = 1,12 \text{ м}$.

$$\text{Тогда } V_C = 1,12 \cdot 2 = 2,24 \text{ м/с}. \quad (2.17)$$

Вектор V_C скорости точки C перпендикулярен отрезку CP .

2. Определение ускорений точек и углового ускорения шатуна (рис. 2.4).

Ускорение точки A во вращательном движении кривошипа равно

$$\vec{a}_A = \vec{a}_A^n + \vec{a}_A^r. \quad (2.18)$$

Так как кривошип вращается равномерно, то $\vec{a}_A^r = 0$ и $\vec{a}_A = \vec{a}_A^n$. Численно

$$a_A^n = \omega_{OA}^2 \cdot OA = 20 \text{ м/с}^2. \quad (2.19)$$

Ускорение $\vec{a}_A$ точки A направлено вдоль OA к центру O . Примем точку A за полюс, тогда по теореме об ускорениях точек плоской фигуры имеем

$$\vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{BA}^n + \vec{a}_{BA}^r. \quad (2.20)$$

Нормальное ускорение точки B при вращении шатуна вокруг полюса A :

$$a_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB = 4 \text{ м/с}^2. \quad (2.21)$$

Вектор $\vec{a}_{BA}^n$ направлен вдоль шатуна от B к полюсу A .

Для векторов $\vec{a}_B$ и $\vec{a}_{BA}^r$ известны только их линии действия. Ускорение точки B направим вдоль горизонтальной направляющей ползуна, ускорение $\vec{a}_{BA}^r$ направим перпендикулярно $\vec{a}_{BA}^n$. Проведем оси X и Y как показано на рис.2.4 и спроектируем векторное равенство (2.20) на эти оси:

$$\begin{cases} a_B \cdot \cos 45^\circ = a_{BA}^n; \\ a_B \cdot \cos 45^\circ = a_A^n - a_{BA}^r. \end{cases} \quad (2.22)$$

$$(2.23)$$

Из уравнения (2.22) получим, что $a_B = 4 \cdot \sqrt{2} \text{ м/с}^2$.

Из уравнения (2.23) имеем: $a_{BA}^r = a_A^n - a_B \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 16 \text{ м/с}^2$.

Положительные значения величин a_B и a_{BA}^r показывают, что направления векторов $\vec{a}_B$ и $\vec{a}_{BA}^r$ соответствуют их истинным направлениям.

$$\text{Угловое ускорение шатуна } \varepsilon_{AB} = \frac{a_{BA}^r}{AB} = 16 \text{ с}^{-2}.$$

Аналогичным образом определим ускорение точки C :

$$\vec{a}_C = \vec{a}_A + \vec{a}_{CA}^n + \vec{a}_{CA}^r. \quad (2.24)$$

Численно

$$a_{CA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AC = 2 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{CA}^r = \varepsilon_{AB} \cdot AC = 8 \text{ м/с}^2.$$

Направления векторов $\vec{a}_{CA}^n$ и $\vec{a}_{CA}^r$ показаны на рис. 2.4. Векторное равенство (2.24) спроектируем на оси x и y :

$$a_{Cx} = a_{CA}^n = 2 \text{ м/с}^2,$$

$$a_{Cy} = a_A^n - a_{CA}^r = 12 \text{ м/с}^2.$$

Окончательно, ускорение точки C : $a_C = \sqrt{a_{Cx}^2 + a_{Cy}^2} = 12,16 \text{ м/с}^2$.

2.2.1. Задачи

№1

Дано: $\omega_{OA} = 3 \text{ } 1/\text{с}$ $\varepsilon_{OA} = 2 \sqrt{3} \text{ } 1/\text{с}^2$ $OA = 20 \text{ см}$ $AC = 10 \sqrt{3} \text{ см}$	
$V_B - ?$ $V_C - ?$ $a_B - ?$ $a_C - ?$ $\omega_{AB} - ?$ $\varepsilon_{AB} - ?$	

№2

Дано: $\omega_{OA} = 1 \text{ с}^{-1}$ $\varepsilon_{OA} = \sqrt{3} \text{ с}^{-2}$ $OA = 40 \text{ см}$ $AC = 20 \sqrt{3} \text{ см}$	
$V_B - ?$ $V_C - ?$ $a_B - ?$ $a_C - ?$ $\omega_{AB} - ?$ $\varepsilon_{AB} - ?$	

№3

Дано:

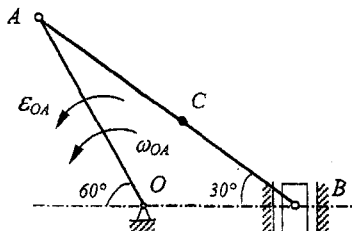
$$\omega_{OA} = 3 \text{ } 1/c$$

$$\varepsilon_{OA} = 4\sqrt{3} \text{ } 1/c^2$$

$$OA = 10 \text{ см}$$

$$AC = 5\sqrt{3} \text{ см}$$

$$V_B - ? \quad V_C - ? \quad a_B - ? \quad a_C - ? \quad \omega_{AB} - ? \quad \varepsilon_{AB} - ?$$



№4

Дано:

$$\omega_{OA} = \sqrt{2} \text{ } 1/c$$

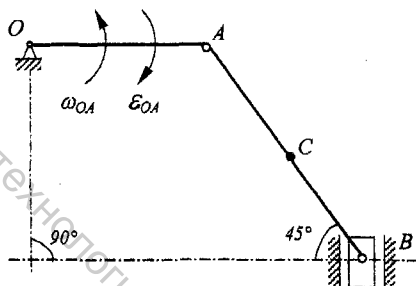
$$\varepsilon_{OA} = 2 \text{ } 1/c^2$$

$$OA = 40 \text{ см}$$

$$AC = 40\sqrt{2} \text{ см}$$

$$AB = 80\sqrt{2} \text{ см}$$

$$V_B - ? \quad V_C - ? \quad a_B - ? \quad a_C - ? \quad \omega_{AB} - ? \quad \varepsilon_{AB} - ?$$



№5

Дано:

$$\omega_{OA} = 2 \text{ } 1/c$$

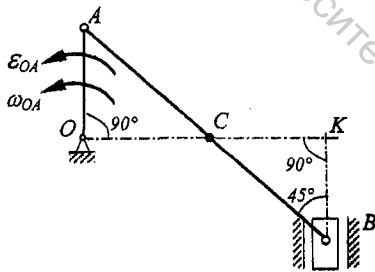
$$\varepsilon_{OA} = 4 \text{ } 1/c^2$$

$$OA = 20 \text{ см}$$

$$AC = 20\sqrt{2} \text{ см}$$

$$OK = 40 \text{ см}$$

$$V_B - ? \quad V_C - ? \quad a_B - ? \quad a_C - ? \quad \omega_{AB} - ? \quad \varepsilon_{AB} - ?$$



№6

Дано:

$$\omega_{OA} = 1 \text{ } 1/c$$

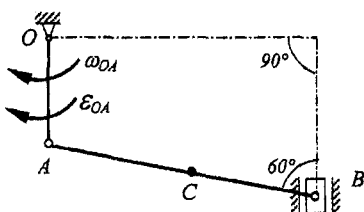
$$\varepsilon_{OA} = \sqrt{3} \text{ } 1/c^2$$

$$OA = 20 \text{ см}$$

$$AC = 20 \text{ см}$$

$$AB = 40 \text{ см}$$

$$V_B - ? \quad V_C - ? \quad a_B - ? \quad a_C - ? \quad \omega_{AB} - ? \quad \varepsilon_{AB} - ?$$



№7

Дано:

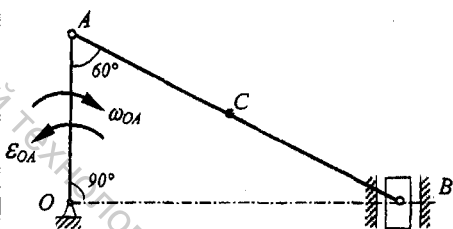
$$\omega_{OA} = 1 \text{ } 1/c$$

$$\varepsilon_{OA} = \sqrt{3} \text{ } 1/c^2$$

$$OA = 40 \text{ см}$$

$$AC = 40 \text{ см}$$

$$V_B - ? \quad V_C - ? \quad a_B - ? \quad a_C - ? \quad \omega_{AB} - ? \quad \varepsilon_{AB} - ?$$



№8

Дано:

$$\omega_{OA} = 3 \text{ } 1/c$$

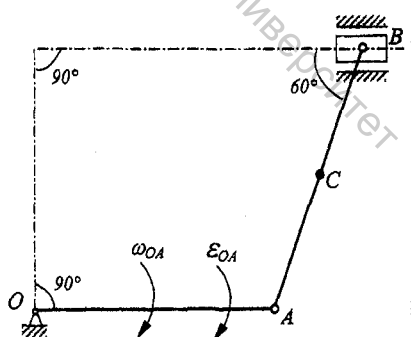
$$\varepsilon_{OA} = 3\sqrt{3} \text{ } 1/c^2$$

$$OA = 20 \text{ см}$$

$$AC = 20 \text{ см}$$

$$AB = 40 \text{ см}$$

$$V_B - ? \quad V_C - ? \quad a_B - ? \quad a_C - ? \quad \omega_{AB} - ? \quad \varepsilon_{AB} - ?$$



№9

Дано:

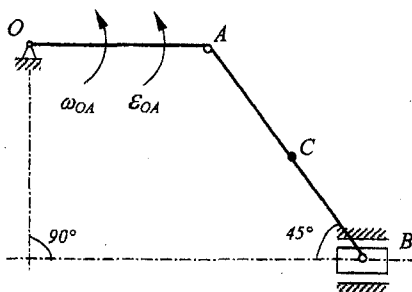
$$\omega_{OA} = \sqrt{2} \text{ } 1/c$$

$$\epsilon_{OA} = 2 \text{ } 1/c^2$$

$$OA = 40 \text{ см}$$

$$AC = 40\sqrt{2} \text{ см}$$

$$AB = 80\sqrt{2} \text{ см}$$

 $V_B - ? \quad V_C - ? \quad a_B - ? \quad a_C - ? \quad \omega_{AB} - ? \quad \epsilon_{AB} - ?$


№10

Дано:

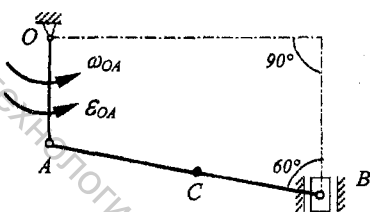
$$\omega_{OA} = 1 \text{ } 1/c$$

$$\epsilon_{OA} = \sqrt{3} \text{ } 1/c^2$$

$$OA = 20 \text{ см}$$

$$AC = 20 \text{ см}$$

$$AB = 40 \text{ см}$$

 $V_B - ? \quad V_C - ? \quad a_B - ? \quad a_C - ? \quad \omega_{AB} - ? \quad \epsilon_{AB} - ?$


№11

Дано:

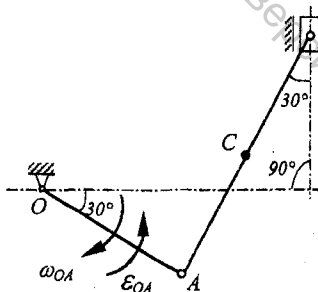
$$\omega_{OA} = 2\sqrt{3} \text{ } 1/c$$

$$\epsilon_{OA} = 6\sqrt{3} \text{ } 1/c^2$$

$$OA = 20\sqrt{3} \text{ см}$$

$$AC = 20 \text{ см}$$

$$AB = 40 \text{ см}$$

 $V_B - ? \quad V_C - ? \quad a_B - ? \quad a_C - ? \quad \omega_{AB} - ? \quad \epsilon_{AB} - ?$


№12

Дано:

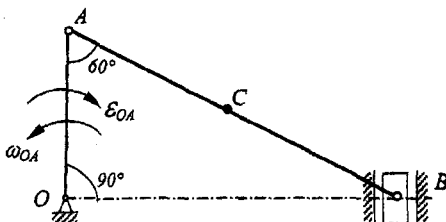
$$\omega_{OA} = 1 \text{ } ^\circ/\text{с}$$

$$\varepsilon_{OA} = \sqrt{3} \text{ } ^\circ/\text{с}^2$$

$$OA = 40 \text{ см}$$

$$AC = 40 \text{ см}$$

$$V_B - ? \quad V_C - ? \quad a_B - ? \quad a_C - ? \quad \omega_{AB} - ? \quad \varepsilon_{AB} - ?$$



№13

Дано:

$$\omega_{OA} = 4 \text{ с}^{-1}$$

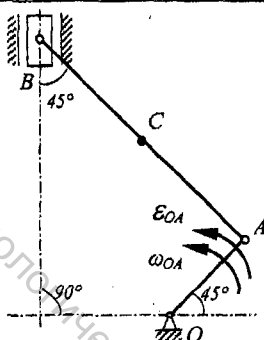
$$\varepsilon_{OA} = 16 \text{ с}^{-2}$$

$$OA = 10 \text{ см}$$

$$AC = 20 \text{ см}$$

$$AB = 40 \text{ см}$$

$$V_B - ? \quad V_C - ? \quad a_B - ? \quad a_C - ? \quad \omega_{AB} - ? \quad \varepsilon_{AB} - ?$$



№14

Дано:

$$\omega_{OA} = \sqrt{3} \text{ } ^\circ/\text{с}$$

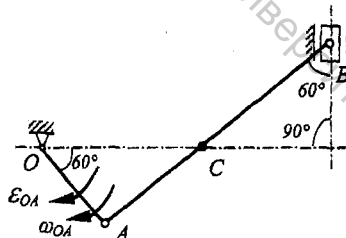
$$\varepsilon_{OA} = 3\sqrt{3} \text{ } ^\circ/\text{с}^2$$

$$OA = 30 \text{ см}$$

$$AC = 30\sqrt{3} \text{ см}$$

$$AB = 60\sqrt{3} \text{ см}$$

$$V_B - ? \quad V_C - ? \quad a_B - ? \quad a_C - ? \quad \omega_{AB} - ? \quad \varepsilon_{AB} - ?$$



№15

Дано:

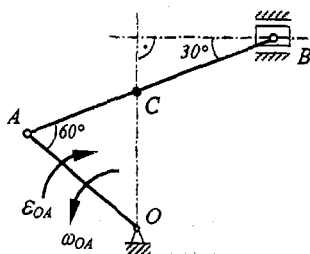
$$\omega_{OA} = 3 \text{ c}^{-1}$$

$$v_{OA} = 3\sqrt{3} \text{ c}^{-2}$$

$$OA = 20 \text{ см}$$

$$AC = 30 \text{ см}$$

$$AB = 60 \text{ см}$$

 $V_B - ? \quad V_C - ? \quad a_B - ? \quad a_C - ? \quad \omega_{AB} - ? \quad \varepsilon_{AB} - ?$


№16

Дано:

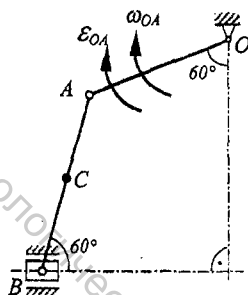
$$\omega_{OA} = 2\sqrt{3} \text{ c}^{-1}$$

$$v_{OA} = 4\sqrt{3} \text{ c}^{-2}$$

$$OA = 10\sqrt{3} \text{ см}$$

$$AC = 30 \text{ см}$$

$$AB = 60 \text{ см}$$

 $V_B - ? \quad V_C - ? \quad a_B - ? \quad a_C - ? \quad \omega_{AB} - ? \quad \varepsilon_{AB} - ?$


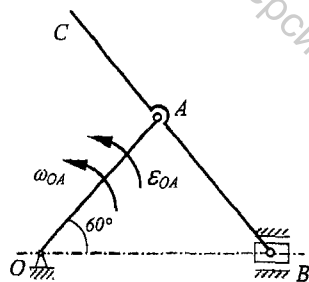
№17

Дано:

$$\omega_{OA} = 2 \text{ c}^{-1}$$

$$v_{OA} = 2\sqrt{3} \text{ c}^{-2}$$

$$OA = AC = AB = 20 \text{ см}$$

 $V_B - ? \quad V_C - ? \quad a_B - ? \quad a_C - ? \quad \omega_{AB} - ? \quad \varepsilon_{AB} - ?$


№18

Дано:

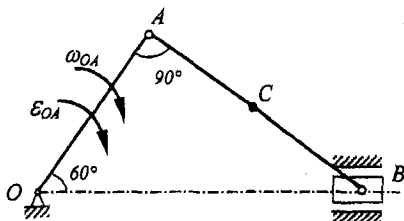
$$\omega_{OA} = 3 \text{ c}^{-1}$$

$$\varepsilon_{OA} = 2\sqrt{3} \text{ c}^{-2}$$

$$OA = 20 \text{ см}$$

$$AC = 10\sqrt{3} \text{ см}$$

$$V_B - ? \quad V_C - ? \quad a_B - ? \quad a_C - ? \quad \omega_{AB} - ? \quad \varepsilon_{AB} - ?$$



№19

Дано:

$$\omega_{OA} = \sqrt{2} \text{ c}^{-1}$$

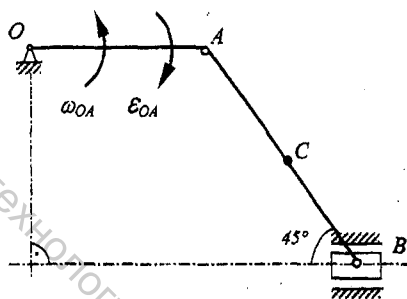
$$\varepsilon_{OA} = 1 \text{ c}^{-2}$$

$$OA = 20 \text{ см}$$

$$AC = 20\sqrt{2} \text{ см}$$

$$AB = 40\sqrt{2} \text{ см}$$

$$V_B - ? \quad V_C - ? \quad a_B - ? \quad a_C - ? \quad \omega_{AB} - ? \quad \varepsilon_{AB} - ?$$



№20

Дано:

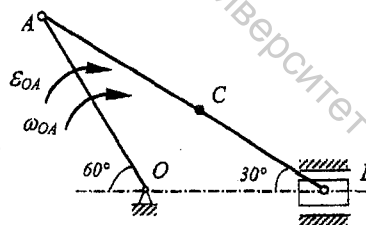
$$\omega_{OA} = 3 \text{ c}^{-1}$$

$$\varepsilon_{OA} = 4\sqrt{3} \text{ c}^{-2}$$

$$OA = 10 \text{ см}$$

$$AC = 5\sqrt{3} \text{ см}$$

$$V_B - ? \quad V_C - ? \quad a_B - ? \quad a_C - ? \quad \omega_{AB} - ? \quad \varepsilon_{AB} - ?$$



№21

Дано:

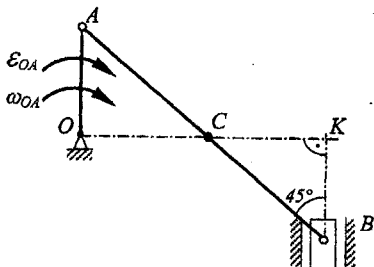
$$\omega_{OA} = 2 \text{ с}^{-1}$$

$$\varepsilon_{OA} = 4 \text{ с}^{-2}$$

$$OA = 20 \text{ см}$$

$$AC = 20\sqrt{2} \text{ см}$$

$$OK = 40 \text{ см}$$

 $V_B - ? \quad V_C - ? \quad a_B - ? \quad a_C - ? \quad \omega_{AB} - ? \quad \varepsilon_{AB} - ?$


№22

Дано:

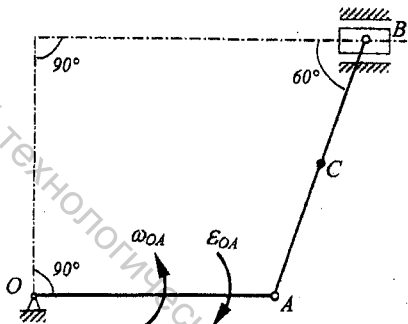
$$\omega_{OA} = 3 \text{ с}^{-1}$$

$$\varepsilon_{OA} = 3\sqrt{3} \text{ с}^{-2}$$

$$OA = 20 \text{ см}$$

$$AC = 20 \text{ см}$$

$$AB = 40 \text{ см}$$

 $V_B - ? \quad V_C - ? \quad a_B - ? \quad a_C - ? \quad \omega_{AB} - ? \quad \varepsilon_{AB} - ?$


№23

Дано:

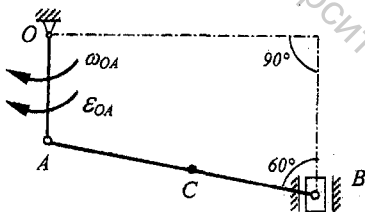
$$\omega_{OA} = 1 \text{ с}^{-1}$$

$$\varepsilon_{OA} = \sqrt{3} \text{ с}^{-2}$$

$$OA = 20 \text{ см}$$

$$AC = 20 \text{ см}$$

$$AB = 40 \text{ см}$$

 $V_B - ? \quad V_C - ? \quad a_B - ? \quad a_C - ? \quad \omega_{AB} - ? \quad \varepsilon_{AB} - ?$


№24

Дано:

$$\omega_{OA} = 2\sqrt{3} \text{ c}^{-1}$$

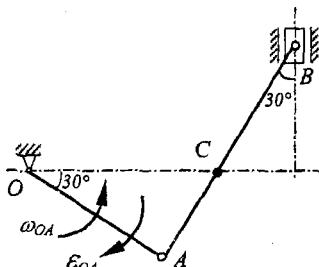
$$\varepsilon_{OA} = 6\sqrt{3} \text{ c}^{-2}$$

$$OA = 20\sqrt{3} \text{ см}$$

$$AC = 20 \text{ см}$$

$$AB = 40 \text{ см}$$

$$V_B - ? \quad V_C - ? \quad a_B - ? \quad a_C - ? \quad \omega_{AB} - ? \quad \varepsilon_{AB} - ?$$



№25

Дано:

$$\omega_{OA} = 4 \text{ c}^{-1}$$

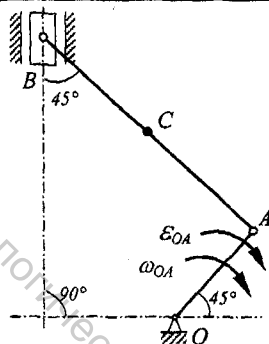
$$\varepsilon_{OA} = 16 \text{ c}^{-2}$$

$$OA = 10 \text{ см}$$

$$AC = 20 \text{ см}$$

$$AB = 40 \text{ см}$$

$$V_B - ? \quad V_C - ? \quad a_B - ? \quad a_C - ? \quad \omega_{AB} - ? \quad \varepsilon_{AB} - ?$$



№26

Дано:

$$\omega_{OA} = \sqrt{3} \text{ c}^{-1}$$

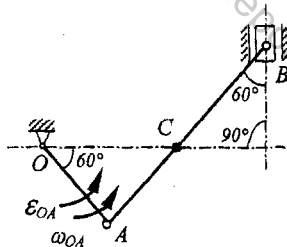
$$\varepsilon_{OA} = 3\sqrt{3} \text{ c}^{-2}$$

$$OA = 30 \text{ см}$$

$$AC = 30\sqrt{3} \text{ см}$$

$$AB = 60\sqrt{3} \text{ см}$$

$$V_B - ? \quad V_C - ? \quad a_B - ? \quad a_C - ? \quad \omega_{AB} - ? \quad \varepsilon_{AB} - ?$$



№27

Дано:

$$\omega_{OA} = 3 \text{ c}^{-1}$$

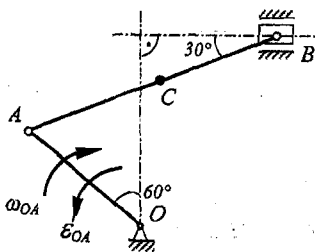
$$\epsilon_{OA} = 3\sqrt{3} \text{ c}^{-2}$$

$$OA = 20 \text{ см}$$

$$AC = 30 \text{ см}$$

$$AB = 60 \text{ см}$$

$$V_B - ? \quad V_C - ? \quad a_B - ? \quad a_C - ? \quad \omega_{AB} - ? \quad \epsilon_{AB} - ?$$



№28

Дано:

$$\omega_{OA} = 2\sqrt{3} \text{ c}^{-1}$$

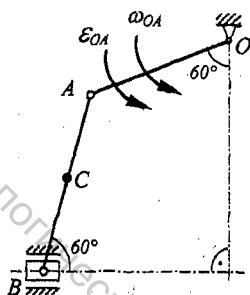
$$\epsilon_{OA} = 4\sqrt{3} \text{ c}^{-2}$$

$$OA = 10\sqrt{3} \text{ см}$$

$$AC = 30 \text{ см}$$

$$AB = 60 \text{ см}$$

$$V_B - ? \quad V_C - ? \quad a_B - ? \quad a_C - ? \quad \omega_{AB} - ? \quad \epsilon_{AB} - ?$$



№29

Дано:

$$\omega_{OA} = 2 \text{ c}^{-1}$$

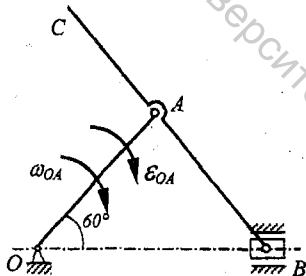
$$\epsilon_{OA} = 2\sqrt{3} \text{ c}^{-2}$$

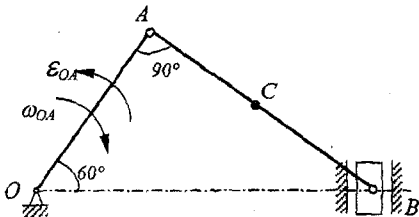
$$OA = 20 \text{ см}$$

$$AC = 20 \text{ см}$$

$$AB = 20 \text{ см}$$

$$V_B - ? \quad V_C - ? \quad a_B - ? \quad a_C - ? \quad \omega_{AB} - ? \quad \epsilon_{AB} - ?$$



Дано: $\omega_{OA} = 1 \text{ с}^{-1}$ $\varepsilon_{OA} = \sqrt{3} \text{ с}^{-2}$ $OA = 40 \text{ см}$ $AC = 20\sqrt{3} \text{ см}$ $V_B - ? \quad V_C - ? \quad a_B - ? \quad a_C - ? \quad \omega_{AB} - ? \quad \varepsilon_{AB} - ?$	
---	---

2.3. Сложное движение точки

Пример 1.

На проволочной окружности радиуса 10 см надето колечко M ; через него проходит стержень OA , который равномерно вращается вокруг точки O , лежащей на той же окружности; угловая скорость стержня такова, что он поворачивается на прямой угол в 5 с . Определить абсолютные, переносные и относительные скорости и ускорения колечка M при $t = 5 \text{ с}$ (рис.2.5).

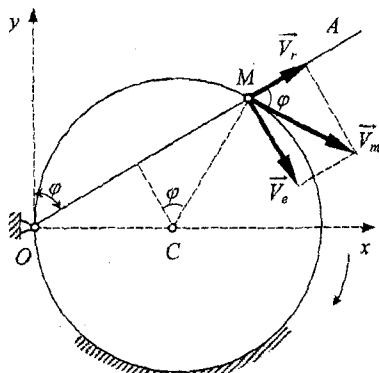


Рис.2.5

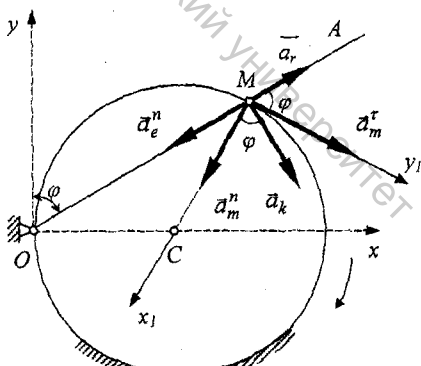


Рис.2.6

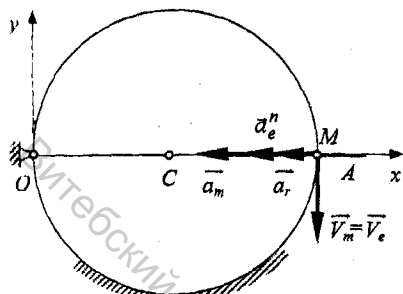


Рис.2.7

является прямолинейное движение колечка M вдоль стержня OA , переносным — вращение стержня OA вокруг оси O с угловой скоростью ω . Абсолютное движение — движение колечка по неподвижной проволочной окружности.

Абсолютная скорость колечка M определяется геометрической суммой переносной и относительной скоростей: $\vec{V}_m = \vec{V}_e + \vec{V}_r$. (2.25)

Переносная скорость $\vec{V}_e$ направлена перпендикулярно OM в сторону вращения стержня, а численно $V_e = OM \cdot \omega$.

Значение OM найдем из равнобедренного треугольника OCM : $OM = 2R \cdot \sin \varphi$. Тогда $V_e = 2R\omega \sin \varphi$.

Вектор $\vec{V}_r$ относительной скорости направлен вдоль стержня OA , вектор $\vec{V}_m$ абсолютной скорости колечка направлен по касательной к окружности радиуса R . Из векторного равенства (2.25) следует, что вектор $\vec{V}_m$ является диагональю параллелограмма, построенного на векторах $\vec{V}_r$ и $\vec{V}_e$ как на сторонах. В данной задаче вектора $\vec{V}_r$ и $\vec{V}_e$ взаимно перпендикулярны. Тогда из полученного прямоугольника получаем, что абсолютная скорость колечка M

$$V_m = \frac{V_e}{\sin \varphi} = 2R\omega, \quad (2.26)$$

$$\text{а относительная скорость колечка } V_r = V_m \cos \varphi = 2R\omega \cos \varphi. \quad (2.27)$$

Решение.

Рассмотрим произвольное положение стержня OA , образующего угол φ с вертикалью. Ось x проведем через диаметр проволочной окружности, направление оси y показано на рис.2.5. Колечко M совершает сложное движение, которое разлагаем на относительное и переносное. Относительным движением

Абсолютное ускорение колечка M равно геометрической сумме относительного, переносного и кориолисова ускорений $\vec{a}_m = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_k$

$$\text{или в развернутом виде } a_m = a_r^n + a_r^r + a_e^n + a_e^r + a_k. \quad (2.28)$$

Учитывая, что траекторией колечка в абсолютном движении является окружность, представим абсолютное ускорение колечка M в виде: $\vec{a}_m = \vec{a}_m^n + \vec{a}_m^r$.

$$\text{Тогда равенство (2.28) примет вид: } \vec{a}_m^n + \vec{a}_m^r = \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^r + \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^r + \vec{a}_k. \quad (2.28')$$

$$\text{Модуль абсолютного нормального ускорения } a_m^n = \frac{V_m^2}{R} = 4R\omega^2. \quad (2.29)$$

Вектор $\vec{a}_m^n$ направлен по радиусу MC к центру окружности (рис. 2.6).

$$\text{Модуль переносного нормального ускорения } a_e^n = \omega^2 \cdot OM = 2R\omega^2 \sin\varphi. \quad (2.30)$$

Вектор $\vec{a}_e^n$ направлен по стержню к оси вращения O . Переносное касательное ускорение равно нулю, т.к. стержень вращается равномерно.

Ускорение Кориолиса определяется векторным выражением

$$\vec{a}_k = 2(\omega_e \times \vec{v}_r).$$

Поскольку вращение стержня OA происходит в плоскости рисунка, то для определения направления ускорения Кориолиса достаточно повернуть вектор $\vec{V}_r$ относительной скорости на 90° в сторону вращения стержня. Направление $\vec{a}_k$ указано на рис. 2.6. Модуль ускорения Кориолиса

$$a_k = 2\omega_e \cdot v_r \sin 90^\circ = 4R\omega^2 \cos\varphi. \quad (2.31)$$

Модули векторов $\vec{a}_m^r$ и $\vec{a}_r^r$ неизвестны, вектор $\vec{a}_m^r$ направлен по касательной к окружности радиуса R , $\vec{a}_r^r$ (относительное ускорение) направлено вдоль стержня. Относительное нормальное ускорение $\vec{a}_r^n$ равно нулю, так как в относительном движении колечко движется по прямой ($\rho = \infty$).

Спроектируем векторное равенство (2.28') на оси x_1 и y_1 :

$$\begin{cases} a_m^n = -a_r \sin\varphi + a_e^n \sin\varphi + a_k \cos\varphi, \\ a_m^r = a_r \cos\varphi - a_e^n \cos\varphi + a_k \sin\varphi. \end{cases} \quad (2.32)$$

$$\quad (2.33)$$

Из уравнения (2.32) определим относительное ускорение:

$$a_r = -2R\omega^2 \sin\varphi. \quad (2.34)$$

Отрицательное значение относительного ускорения говорит о том, что в действительности вектор $\vec{a}_r$ направлен противоположно указанному на рис. 2.6.

Из уравнения 2.33 найдем значение абсолютного касательного ускорения:

$$a_m^t = -2R\omega^2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi - 2R\omega^2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi + 4R\omega^2 \cdot \sin\varphi \cdot \cos\varphi = 0.$$

Отсюда следует, что движение колечка M по окружности равномерное.

$$\text{Абсолютное ускорение колечка } a_m = a_m^n = 4R\omega^2. \quad (2.35)$$

В частном случае, при $t = 5c$, стержень OA занимает горизонтальное положение (рис. 2.7). Так как вращение стержня равномерное, то угловая скорость ω определится из формулы $\omega = \frac{\varphi}{t}$.

Из условия следует, что за $5c$ стержень поворачивается на прямой угол.

Тогда $\omega = \frac{\pi}{10} c^{-1}$. Относительная скорость при $t = 5c$ $V_r = 0$.

Абсолютная скорость численно равна переносной, т.е. $V_m = V_e = 2R\omega$.

Переносное нормальное ускорение при $t = 5c$ $a_e^n = 2R\omega^2$.

Относительное ускорение $a_r = -2R\omega^2$, где направление вектора $\vec{a}_r$ противоположно положительному направлению оси x (рис. 2.7).

Ускорение Кориолиса в данный момент $a_k = 0$. Векторное равенство (2.28) для данного момента времени имеет вид: $\vec{a}_m = \vec{a}_m^n = \vec{a}_r + \vec{a}_e^n$.

Абсолютное ускорение колечка $a_m = 4R\omega^2$.

Пример 2.

Окружность радиуса R вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг неподвижной точки O , лежащей на окружности. Окружность и неподвижный стержень OA соединены подвижным колечком M . Определить абсолютные, относительные и переносные скорости и ускорения колечка M , когда угол $COM = 30^\circ$, $R = 10 \text{ см}$, $\omega = 2c^{-1}$ (рис. 2.8).

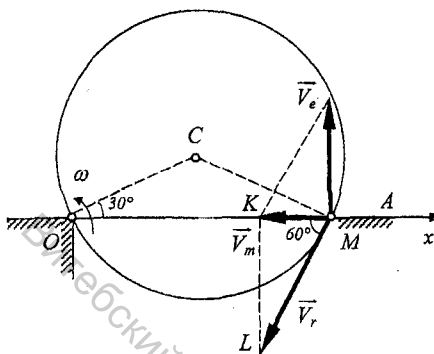


Рис.2.8

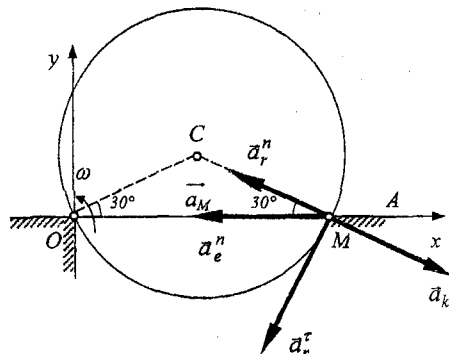


Рис.2.9

Решение.

Колечко M совершает сложное движение, которое разлагаем на относительное и переносное. Относительным движением является движение колечка по окружности радиуса R , переносным — вращение окружности вокруг оси O с угловой скоростью ω . Абсолютным является движение колечка по неподвижному стержню OA .

Абсолютная скорость колечка определяется геометрической суммой переносной и относительной скоростей: $V_m = V_e + V_r$. (2.36)

Переносная скорость V_e направлена перпендикулярно OM в сторону вращения окружности, а численно $V_e = OM \cdot \omega$.

Значение OM найдем из равнобедренного треугольника OCM :

$$OM = 2 \cdot OC \cdot \cos 30^\circ = R \cdot \sqrt{3}. \text{ Тогда } V_e = \omega \cdot R \cdot \sqrt{3} = 20 \cdot \sqrt{3} \text{ см/с.} \quad (2.37)$$

Вектор V_r относительной скорости направлен по касательной к окружности, вектор V_m абсолютной скорости колечка — по стержню OA . Из векторного равенства (2.36) следует, что вектор V_m является диагональю параллелограмма, построенного на векторах V_r и V_e как на сторонах. Рассмотрев треугольник MKL данного параллелограмма, найдем значение относительной и абсолютной скоростей:

$$V_m = V_e \cdot \operatorname{tg} 30^\circ = 20 \text{ см/с;} \quad (2.38)$$

$$V_r = V_e / \cos 30^\circ = 40 \text{ см/с}. \quad (2.39)$$

Абсолютное ускорение колечка равно геометрической сумме относительного, переносного и кориолисова ускорений $\vec{a}_m = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_k$ или в развернутом виде $\vec{a}_m = \vec{a}_r^n + \vec{a}_r^r + \vec{a}_e^n + \vec{a}_e^r + \vec{a}_k$. (2.40)

Относительное нормальное ускорение численно определяется равенством

$$a_r^n = \frac{V_r^2}{R} = 160 \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}_r^n$ направлен по радиусу окружности к центру С (рис. 2.9).

Численно относительное касательное ускорение по данным задачи не определяется, вектор $\vec{a}_r^r$ перпендикулярен вектору $\vec{a}_r^n$.

Переносное нормальное ускорение численно равно

$$a_e^n = \omega^2 \cdot OM = 40\sqrt{3} \text{ см/с}^2.$$

Вектор $\vec{a}_e^n$ направлен от точки М к оси переносного вращения, т.е. к точке О. Переносное касательное ускорение равно нулю, т.к. окружность вращается равномерно.

Ускорение Кориолиса определяется векторным выражением $\vec{a}_k = 2(\vec{\omega}_e \times \vec{V}_r)$.

Поскольку вращение окружности происходит в плоскости рисунка, то для определения направления ускорения Кориолиса достаточно вектор $\vec{V}_r$ относительной скорости повернуть на 90° в сторону вращения окружности. Направление ускорения Кориолиса указано на рис.2.9. Модуль ускорения Кориолиса

$$a_k = 2\omega_e V_r \cdot \sin 90^\circ = 160 \text{ см/с}^2.$$

Так как вектора $\vec{a}_e^n$ и $\vec{a}_k$ равны по модулю и противоположны по направлению, то $\vec{a}_e^n + \vec{a}_k = 0$.

Окончательно равенство (2.40) примет вид:

$$\vec{a}_m = \vec{a}_e^n + \vec{a}_r^r. \quad (2.41)$$

Вектор $\vec{a}_m$ направлен по стержню ОА. Спроектировав векторное равенство (2.41) на ось у, получим, что $a_r^r = 0$. Абсолютное ускорение численно равно

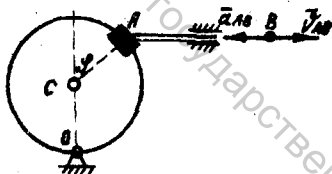
$$a_m = a_e^n = 40\sqrt{3} \text{ см/с}^2. \quad (2.42)$$

Направление вектора абсолютно ускорения совпадает с направлением вектора α_e^n .

2.3.1. Задачи

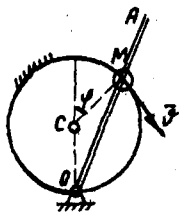
№1

Стержень AB , соединенный шарнирно в точке A с ползуном, приводит во вращение вокруг точки O круглый обруч радиуса $R=30\text{ см}$. Определить угловую скорость и угловое ускорение обруча в момент, когда угол $\varphi=60^\circ$, а скорость и ускорение стержня равны $V_{AB}=60\text{ см/с}$, $a_{AB}=40\sqrt{3}\text{ см/с}^2$.



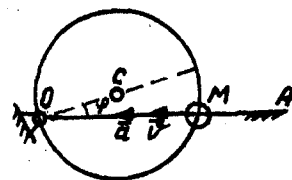
№2

Колечко M движется равномерно по неподвижному обручу радиуса $R=20\text{ см}$, вращая стержень OA вокруг точки O . Определить угловую скорость и угловое ускорение стержня в момент, когда угол $\varphi=60^\circ$, а скорость колечка M равна 120 см/с .



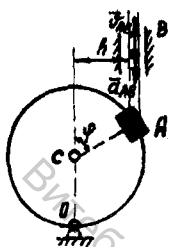
№3

Колечко M движется по неподвижному стержню OA , имея в данный момент скорость $V=60\text{ см/с}$ и ускорение $a=120\sqrt{3}\text{ см/с}^2$, и приводит во вращение вокруг точки O круглый обруч радиуса $R=30\text{ см}$. Определить угловую скорость и



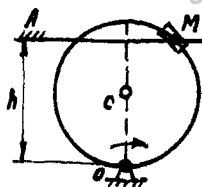
угловое ускорение обруча в момент, когда угол $\varphi=30^\circ$.

№4



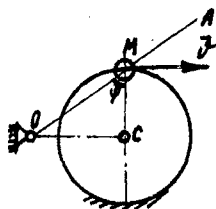
Вертикальный стержень AB , расположенный на расстоянии $h=10\sqrt{3}$ см от точки O и соединенный в точке A шарнирно с ползуном, вызывает вращение круглого обруча радиусом $R=20$ см вокруг точки O . Определить угловую скорость и угловое ускорение обруча в момент, когда $\varphi=60^\circ$, а скорость и ускорение стержня равны: $V_{AB}=40\sqrt{3}$ см/с, $a_{AB}=720$ см/с².

№5



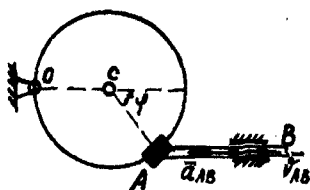
Круглый обруч радиуса $R=10$ см, вращаясь вокруг точки O , перемещает по неподвижному стержню AB , расположенному на расстоянии $h=15$ см от точки O , колечко M . Определить абсолютную и относительную скорость и ускорение колечка M в момент, когда $OC \perp AB$, если угловая скорость обруча постоянна и равна $3\frac{1}{2}$ с.

№6



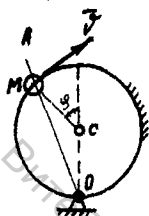
Колечко M движется равномерно по неподвижному круглому обручу радиуса $R=10$ см, вращая стержень OA вокруг точки O . Определить угловую скорость и угловое ускорение стержня в момент, когда угол $\varphi=60^\circ$, $OC=10\sqrt{3}$ см. Скорость колечка M равна $V=80$ см/с.

№7



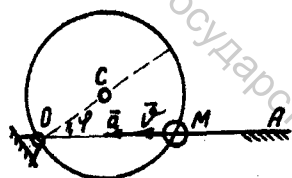
Стержень AB , соединенный шарнирно в точке A с ползуном, приводит во вращение вокруг точки O круглый обруч радиуса $R=10$ см. Определить угловую скорость и угловое ускорение обруча в момент, когда угол $\varphi=60^\circ$, а скорость и ускорение стержня равны: $V_{AB}=20\sqrt{3}$ см/с, $a_{AB}=360$ см/с².

№8



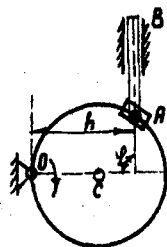
Колечко M движется равномерно по неподвижному круглому обручу радиуса $R=10\text{ см}$, вращая стержень OA вокруг точки O . Определить угловое ускорение стержня в момент, когда угол $\varphi=60^\circ$, а скорость колечка M равна 100 см/с .

№9



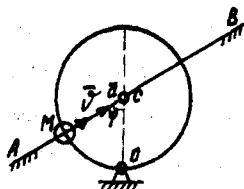
Колечко M движется по неподвижному стержню OA , имея в данный момент скорость $V=60\sqrt{2}\text{ см/с}$ и ускорение $a=180\sqrt{2}\text{ см/с}^2$, и приводит во вращение вокруг точки O круглый обруч радиуса $R=20\text{ см}$. Определить угловую скорость и угловое ускорение обруча в момент, когда угол $\varphi=45^\circ$.

№10



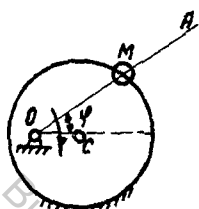
Круглый обруч радиуса $R=10\text{ см}$, вращаясь равномерно вокруг точки O с угловой скоростью $\omega=2\text{ с}^{-1}$, вызывает поступательное прямолинейное перемещение стержня AB , расположенного на расстоянии $h=45\text{ см}$ от точки O . Определить абсолютную, переносную и относительную скорости и ускорения шарнира A в момент, когда угол $\varphi=90^\circ$.

№11



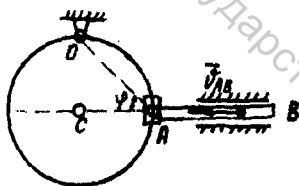
Колечко M движется по неподвижному стержню AB , расположенному на расстоянии $h=10\sqrt{3}\text{ см}$ от точки O , имея в данный момент скорость $V=30\sqrt{3}\text{ см/с}$ и ускорение $a=45\text{ см/с}^2$, и приводит во вращение вокруг точки O круглый обруч радиуса $R=20\text{ см}$. Определить угловую скорость и угловое ускорение обруча в момент, когда угол $\varphi=60^\circ$.

№12



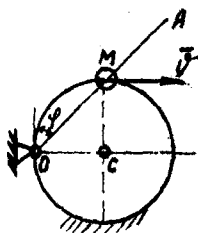
Стержень AO , вращаясь с постоянной угловой скоростью $\omega = 3 \text{ } ^\circ/\text{с}$ вокруг точки O , перемещает по неподвижному круглому обручу радиуса $R = 30 \text{ см}$ колечко M . Определить абсолютную, переносную и относительную скорости и ускорения колечка M в момент, когда угол $\varphi = 60^\circ$, $OC = 10\sqrt{3} \text{ см}$.

№13



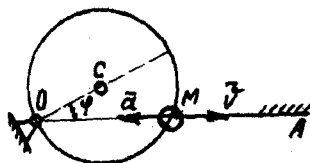
Стержень AB , соединенный шарнирно в точке A с ползуном, движется равномерно и приводит во вращение вокруг точки O круглый обруч радиуса $R = 30 \text{ см}$. Определить угловую скорость и угловое ускорение обруча в момент, когда угол $\varphi = 45^\circ$, а скорость стержня равна $V_{AB} = 30 \text{ см/с}$.

№14



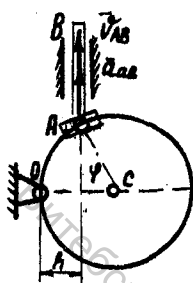
Колечко M движется равномерно по неподвижному круглому обручу радиуса $R = 20 \text{ см}$, вращая стержень OA вокруг точки O . Определить угловую скорость и угловое ускорение стержня в момент, когда угол $\varphi = 45^\circ$, а скорость колечка M равна 120 см/с .

№15



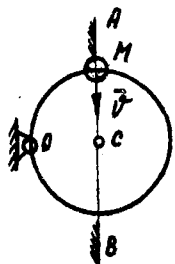
Колечко M движется по неподвижному стержню OA , имея в данный момент скорость $V = 40\sqrt{3} \text{ см/с}$ и ускорение $a = 80\sqrt{3} \text{ см/с}^2$, и приводит во вращение вокруг точки O круглый обруч радиуса $R = 20 \text{ см}$. Определить угловую скорость и угловое ускорение обруча в момент, когда угол $\varphi = 30^\circ$.

№16



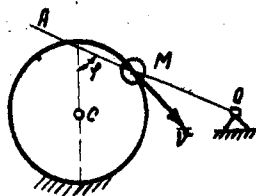
Вертикальный стержень AB , расположенный на расстоянии $h=10\text{см}$ от точки O и соединенный в точке A шарнирно с ползуном, вызывает вращение круглого обруча радиусом $R=20\text{см}$ вокруг точки O . Определить угловую скорость и угловое ускорение обруча в момент, когда $\varphi=60^\circ$, а скорость и ускорение стержня равны: $V_{AB}=60\text{см/с}$, $a_{AB}=60\sqrt{3}\text{см/с}^2$.

№17



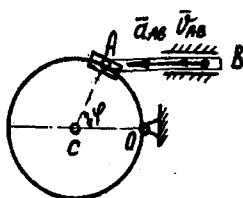
Колечко M движется по неподвижному стержню AB , расположенному на расстоянии $h=10\text{см}$ от точки O , имея в данный момент скорость $V=50\text{см/с}$ и ускорение $a=0$ и приводит во вращение вокруг точки O круглый обруч радиуса $R=10\text{см}$. Определить угловую скорость и угловое ускорение обруча в момент, когда $OC \perp AB$.

№18



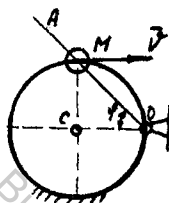
Колечко M движется равномерно по неподвижному обручу радиуса $R=10\text{см}$, вращая стержень OA вокруг точки O . Определить угловую скорость и угловое ускорение стержня в момент, когда угол $\varphi=60^\circ$, $OC=10\sqrt{3}\text{см}$, а скорость колечка M равна $V=40\text{см/с}$.

№19



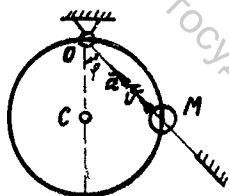
Стержень AB , соединенный шарнирно в точке A с ползуном, приводит во вращение вокруг точки O круглый обруч радиуса $R=10\text{см}$. Определить угловую скорость и угловое ускорение обруча в момент, когда угол $\varphi=60^\circ$, а скорость и ускорение стержня равны $V_{AB}=20\sqrt{3}\text{см/с}$, $a_{AB}=280\text{см/с}^2$.

№20



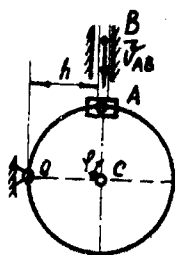
Колечко M движется равномерно по неподвижному круглому обручу радиуса $R=10\text{ см}$, вращая стержень OA вокруг точки O . Определить угловую скорость и угловое ускорение стержня в момент, когда угол $\varphi=45^\circ$, а скорость колечка $M V=100\text{ см/с}$.

№21



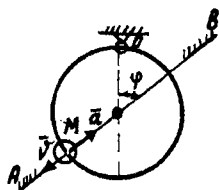
Колечко M движется по неподвижному стержню OA , имея в данный момент скорость $V=60\sqrt{2}\text{ см/с}$ и ускорение $a=120\sqrt{2}\text{ см/с}^2$, и приводит во вращение вокруг точки O круглый обруч радиуса $R=30\text{ см}$. Определить угловую скорость и угловое ускорение обруча в момент, когда угол $\varphi=45^\circ$.

№22



Вертикальный стержень AB , расположенный на расстоянии $h=40\text{ см}$ от точки O и соединенный в точке A шарнирно с ползуном, вызывает вращение круглого обруча радиусом $R=40\text{ см}$ вокруг точки O . Определить угловую скорость и угловое ускорение обруча в момент, когда $\varphi=90^\circ$, а скорость и ускорение стержня равны: $V_{AB}=200\text{ см/с}$, $a_{AB}=0$.

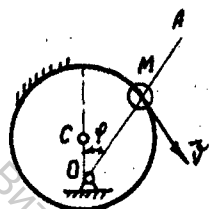
№23



Колечко M движется по неподвижному стержню AB , расположенному на расстоянии $h=10\sqrt{3}\text{ см}$ от точки O , имея в данный момент скорость $V=20\sqrt{3}\text{ см/с}$ и ускорение $a=60\text{ см/с}^2$. Колечко приводит во вращение вокруг точки O круглый обруч радиуса $R=20\text{ см}$. Опре-

делить угловую скорость и угловое ускорение обруча в момент, когда угол $\varphi=60^\circ$.

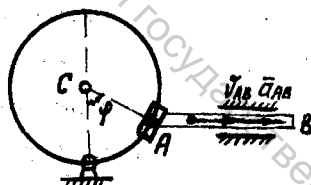
№24



Колечко M движется равномерно по неподвижному круглому обручу радиуса $R=15\text{ см}$, вращая стержень OA вокруг точки O . Определить угловую скорость и угловое ускорение стержня в момент, когда угол $\varphi=60^\circ$, $OC=5\sqrt{3}\text{ см}$, скорость колечка M равна $V=60\text{ см/с}$.

№25

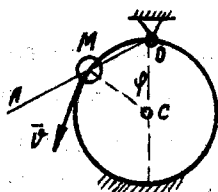
Стержень AB , соединенный шарнирно в точке A с ползуном, приводит во вращение вокруг точки O круглый обруч радиуса $R=10\text{ см}$. Определить угловую скорость и угловое ускорение обруча в момент, когда угол $\varphi=60^\circ$, а скорость и ускорение стержня равны:



$$V_{AB}=30\text{ см/с}, a_{AB}=30\sqrt{3}\text{ см/с}^2.$$

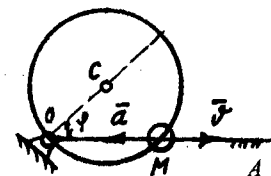
№26

Колечко M движется равномерно по неподвижному круглому обручу радиуса $R=10\text{ см}$, вращая стержень OA вокруг точки O . Определить угловую скорость и угловое ускорение стержня в момент, когда угол $\varphi=60^\circ$, а скорость колечка равна $V=40\text{ см/с}$.



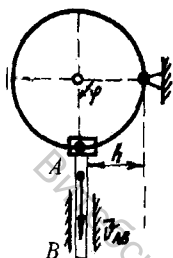
№27

Колечко M движется по неподвижному стержню OA , имея в данный момент скорость $V=60\sqrt{3}\text{ см/с}$ и ускорение $a=180\text{ см/с}^2$, и приводит во вращение вокруг точки O круглый обруч радиуса $R=20\text{ см}$. Определить угловую скорость и угловое



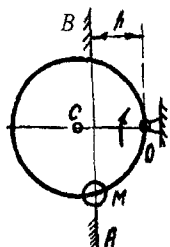
ускорение обруча в момент, когда угол $\varphi=60^\circ$.

№28



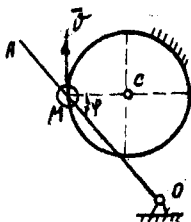
Вертикальный стержень AB , расположенный на расстоянии $h=30\text{ см}$ от точки O и соединенный в точке A шарнирно с ползуном, вызывает вращение круглого обруча радиусом $R=30\text{ см}$ вокруг точки O . Определить угловую скорость и угловое ускорение обруча в момент, когда $\varphi=90^\circ$, а скорость и ускорение стержня равны: $V_{AB}=120\text{ см/с}$, $a_{AB}=0$.

№29



Круглый обруч радиуса $R=20\text{ см}$, вращаясь вокруг точки O , перемещает по неподвижному стержню AB , расположенному на расстоянии $h=10\text{ см}$ от точки O , колечко M . Определить абсолютную, относительную и переносную скорость и ускорение колечка M в момент, когда $OC \perp AB$, если угловая скорость обруча постоянна и равна $3\text{ }^1/\text{с}$.

№30



Колечко M движется равномерно по неподвижному обручу радиуса $R=5\text{ см}$, вращая стержень OA вокруг точки O . Определить угловую скорость и угловое ускорение стержня в момент, когда угол $\varphi=60^\circ$, $OC=5\sqrt{3}\text{ см}$, а скорость колечка $M V=40\text{ см/с}$.

ГЛАВА 3

Динамика

3.1. Дифференциальные уравнения движения материальной точки

3.1.1. Дифференциальные уравнения прямолинейного движения материальной точки

Пример 1. (Случай, когда переменная сила зависит от времени).

Материальная точка массы m совершает прямолинейные колебания под действием горизонтальной силы $F = A \cos kt$, где A и k — постоянные интегрирования. В начальный момент точка имела скорость $\dot{x}_0 = V_0$. Найти уравнение движения точки.

Решение.

Примем прямую, вдоль которой происходит движение точки, за ось x . Изобразим точку в произвольном положении на оси x и силы, действующие на нее (рис. 3.1). Кроме заданной силы, на точку действует сила тяжести P и нормальная реакция N со стороны гладкой поверхности.

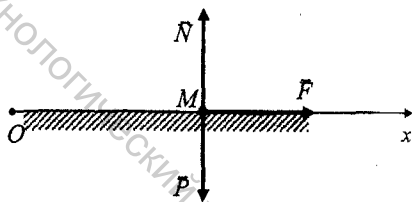


Рис. 3.1

Запишем начальные условия: при $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = V_0$. Составим дифференциальное уравнение движения груза в проекции на ось x в виде:

$$m \frac{dV}{dt} = F = A \cos kt. \quad (3.1)$$

В уравнении (3.1) разделим переменные:

$$dV = \frac{A}{m} \cos kt dt.$$

Проинтегрировав левую часть полученного уравнения в пределах от V_0 до V , а правую от нуля до t , определим скорость движения точки:

$$V = V_0 + \frac{A}{mk} \sin kt. \quad (3.2)$$

Представим $V = \frac{dx}{dt}$ и уравнение (3.2) запишем в виде:

$$\frac{dx}{dt} = V_0 + \frac{A}{mk} \sin kt.$$

В полученном уравнении разделим переменные и проинтегрируем левую часть в пределах от нуля до x , а правую — от нуля до t :

$$dx = V_0 dt + \frac{A}{mk} \sin kt dt, \text{ и окончательно}$$

$$x = V_0 t + \frac{A}{mk^2} (1 - \cos kt). \quad (3.3)$$

Пример 2. (Случай, когда переменная сила зависит от скорости).

Тело массы 2кг , брошенное вертикально вверх со скоростью 20м/с , испытывает сопротивление среды, которое пропорционально первой степени скорости, причем $R=0,4V$. Найти, через сколько секунд тело достигнет наивысшего положения и максимальную высоту подъема (рис. 3.2).

Решение.

Направим ось x по вертикали вверх, т.е. в сторону движения тела. Возьмем начало отчета оси x на поверхности Земли в начальном положении тела. Тогда

начальные условия примут вид: при $t=0$ $x_0=0$, $\dot{x}_0 = V_0 = 20\text{м/с}$.

К телу в произвольном положении приложены следующие силы: $m\vec{g}$ — сила тяжести тела; $\vec{R}$ — сила сопротивления среды, направленная в сторону, противоположную движению тела.

Дифференциальное уравнение движения тела в проекции на ось x будет иметь вид:

$$m \frac{dV}{dt} = -mg - R, \quad \text{или, учитывая, что } R=0,4V, \text{ получим:}$$

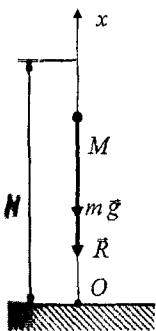


Рис. 3.2

$$m \frac{dV}{dt} = -mg - 0,4V. \quad (3.4)$$

Подставив численные значения и разделив переменные в уравнении (3.4), проинтегрируем полученное выражение. При этом нижний предел интегрирования по скорости соответствует начальному значению V_0 скорости, а верхний предел — значению скорости тела, когда оно достигнет наивысшего положения, т.е. $V=0$. При подсчетах положим $g \approx 10 \text{ м/с}^2$.

$$-\frac{dV}{10+0,2V} = dt \quad \text{или} \quad -\int_{V_0}^0 \frac{dV}{0,2V+10} = \int_0^T dt.$$

Получим, что $T = \frac{1}{0,2} \ln |0,2V+10| \Big|_0^{V_0} = 1,71 \text{ с}.$ (3.5)

Для определения максимальной высоты H подъема тела используем дифференциальное уравнение движения тела:

$$m \frac{dV}{dt} = -(0,4V + mg). \quad (3.6)$$

Для определения зависимости высоты подъема тела от его скорости умножим правую и левую часть дифференциального уравнения (3.6) на dx :

$$m \frac{dV}{dt} dx = -(0,4V + mg) dx.$$

Учитывая, что $\frac{dx}{dt} = V$, разделим переменные в полученном выражении.

Имеем: $-\frac{mVdV}{0,4V+mg} = dx$. Подставим численные значения и проинтегрируем:

$$-\int_{V_0}^0 \frac{VdV}{0,2V+10} = \int_0^H dx \quad \text{или} \quad \frac{1}{0,2} \int_0^{V_0} \frac{VdV}{V+50} = \int_0^H dx. \quad (3.7)$$

При интегрировании левой части равенства (3.7) удобно данный интеграл представить в виде суммы двух интегралов, т.е.

$$5 \int_0^{V_0} \frac{(V+50)dV}{V+50} - 5 \int_0^{V_0} \frac{50dV}{V+50} = H, \quad \text{отсюда}$$

$$H = 5V \left| \frac{V_0}{0} - 250 \ln|V + 50| \right| \frac{V_0}{0}.$$

Подставив пределы интегрирования,

найдем, что $H = 14,5 \text{ м}$.

Пример 3. (Случай прямолинейного движения точки, когда сила зависит от положения точки, т.е. от координаты.)

Материальная точка массы m движется прямолинейно вдоль оси Ox . Точка отталкивается от неподвижного центра O силой F , пропорциональной массе m и расстоянию точки от центра O , причем коэффициент пропорциональности равен

4. Найти закон движения точки, если начальное расстояние ее от центра O равно $x_0 = 5 \text{ м}$, а начальная скорость $V_0 = 2 \text{ м/с}$.



Рис.3.3

Решение. Первый способ.

По условию задачи сила $F = 4mx$, поэтому дифференциальное уравнение движения имеет вид:

$$m\ddot{x} = 4mx \text{ или } \ddot{x} = 4x. \quad (3.8)$$

Так как сила, действующая на точку, зависит от координаты точки, то можно использовать подстановку $\ddot{x} = \frac{VdV}{dx}$. Тогда $\frac{VdV}{dx} = 4x$ или $VdV = 4xdx$.

$$\text{Проинтегрируем это уравнение: } \int_{V_0}^V VdV = 4 \int_{x_0}^x xdx \quad \text{или} \quad \frac{1}{2}(V^2 - V_0^2) = 2(x^2 - x_0^2).$$

$$\text{Из последнего уравнения выразим } V: V = \frac{dx}{dt} = 2\sqrt{x^2 - 24}.$$

$$\text{Разделив переменные, получим: } \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 24}} = 2dt.$$

$$\text{Проинтегрируем полученное выражение: } \int_{x_0}^x \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 24}} = 2 \int_0^t dt.$$

$$\text{Отсюда } 2t = \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 - 24}}{x_0} \right| \quad \text{или} \quad 2t = \ln \left| \frac{x + \sqrt{x^2 - 24}}{6} \right|.$$

$$\text{Следовательно, } x + \sqrt{x^2 - 24} = 6e^{-2t}.$$

$$\text{Преобразуем это выражение: } x^2 - 24 = (6e^{-2t} - x)^2,$$

$$\text{откуда } x = \frac{3e^{4t} + 2}{e^{2t}} = 3e^{2t} + 2e^{-2t}. \quad (3.9)$$

Второй способ.

Так как в данном случае $F = f(x) = 4mx$ является линейной функцией координаты x , то дифференциальное уравнение (3.8) можно привести к линейному однородному дифференциальному уравнению второго порядка с постоянными коэффициентами: $x'' - 4x = 0$. (3.10)

Для решения этого уравнения воспользуемся теорией интегрирования линейных дифференциальных уравнений и составим соответствующее характеристическое уравнение: $\lambda^2 - 4 = 0$, корни которого $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$.

Следовательно, общее решение имеет вид:

$$x = C_1 e^{2t} + C_2 e^{-2t}. \quad (3.11)$$

Постоянные интегрирования C_1 и C_2 находим по начальным условиям движения. Найдем скорость точки, продифференцировав уравнение (3.11) по времени: $V = \frac{dx}{dt} = 2C_1 e^{2t} - 2C_2 e^{-2t}$. (3.12)

При $t = 0$ $x_0 = 5$, $\dot{x} = V_0 = 2$. Следовательно, из уравнения (3.11) и (3.12) после подстановки начальных условий найдем, что $C_1 + C_2 = 5$, $2C_1 - 2C_2 = 2$, откуда $C_1 = 3$, $C_2 = 2$.

Окончательно уравнение движения имеет вид:

$$x = 3e^{2t} + 2e^{-2t}. \quad (3.13)$$

3.1.2. Дифференциальные уравнения криволинейного движения материальной точки

Пример 1. Упругая нить, закрепленная в точке A , проходит через неподвижное гладкое кольцо O ; к свободному концу нити прикреплен шарик M , масса которого равна m . Длина невытянутой нити $l = AO$; для удлинения нити

на $1m$ нужно приложить силу, равную k^2m .

Вытянув нить по прямой AB так, что длина ее увеличилась вдвое, сообщили шарiku скорость $\vec{V}_0$, перпендикулярную прямой AB . Определить траекторию шарика, пренебрегая действием силы тяжести и считая натяжение нити пропорциональным ее удлинению (рис. 3.4).

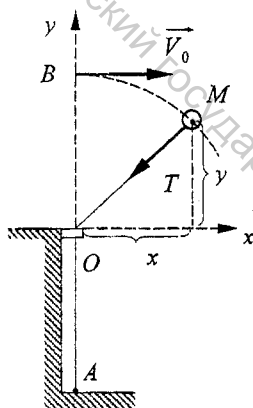


Рис.3.4

Решение. Рассмотрим произвольное положение шарика M , считая его материальной точкой, в первом квадранте выбранной прямоугольной системы координат. Положение точки M в произвольный момент определяется

радиусом-вектором $\vec{OM} = \vec{r}$. Тогда реакция $\vec{T}$ нити с учетом коэффициента пропорциональности k^2m будет иметь векторное выражение

$$\vec{T} = -k^2m \cdot \vec{OM} = -k^2m\vec{r}.$$

Основное уравнение динамики материальной точки для данной задачи в векторном виде запишется так: $m\vec{a} = \vec{T}$. (3.14)

Для проектирования векторного уравнения (3.14) на оси x и y учтем, что в произвольном положении точка M имеет координаты (x, y) , которые представляют проекции радиуса-вектора $\vec{r}$ на оси x и y . Тогда, спроектировав уравнение (3.14) на оси x и y , получим:

$$m\ddot{x} = -k^2mx, \quad (3.15)$$

$$m\ddot{y} = -k^2my. \quad (3.16)$$

Для интегрирования дифференциальных уравнений (3.15) и (3.16) запишем начальные условия:

$$\text{при } t = 0: \quad x_0 = 0, \quad y_0 = l, \quad V_{ox} = \dot{x}_0 = V_0, \quad V_{oy} = \dot{y}_0 = 0.$$

Дифференциальные уравнения (3.15) и (3.16) приведем к линейным однородным дифференциальным уравнениям второго порядка:

$$\ddot{x} + k^2 x = 0, \quad \ddot{y} + k^2 y = 0. \quad (3.17)$$

Составим характеристическое уравнение $\lambda^2 + k^2 = 0$ и найдем его корни

$$\lambda_1 = ik, \quad \lambda_2 = -ik.$$

Тогда общее решение дифференциальных уравнений (3.17) имеет вид:

$$x = C_1 \cos kt + C_2 \sin kt, \quad (3.18)$$

$$y = C_3 \cos kt + C_4 \sin kt. \quad (3.19)$$

Продифференцировав по времени уравнение (3.18) и (3.19), получим:

$$\dot{x} = -C_1 k \sin kt + C_2 k \cos kt, \quad (3.20)$$

$$\dot{y} = -C_3 k \sin kt + C_4 k \cos kt. \quad (3.21)$$

Для определения постоянных интегрирования C_1, C_2, C_3, C_4 подставим начальные условия в уравнения (3.18), (3.19), (3.20), (3.21):

$$x_0 = C_1 = 0, \quad y_0 = C_3 = l,$$

$$\dot{x}_0 = C_2 k = V_0, \quad \dot{y}_0 = C_4 k = 0.$$

Отсюда находим: $C_1 = 0, C_2 = V_0/k, C_3 = l, C_4 = 0$.

Следовательно, уравнения движения точки имеют вид:

$$\begin{cases} x = \frac{V_0}{k} \sin kt, \\ y = l \cos kt. \end{cases}$$

Чтобы найти уравнение траектории, необходимо из этих уравнений исключить параметр t . Перепишем уравнения в виде:

$$\begin{cases} \sin kt = \frac{k}{V_0} x, \\ \cos kt = \frac{y}{l}. \end{cases}$$

Возведя эти уравнения в квадрат и складывая правые и левые части полученных выражений, имеем: $\frac{k^2}{V_0^2} x^2 + \frac{y^2}{l^2} = 1$.

Траекторией точки M является эллипс.

Пример 2. Точка массы m движется под действием силы отталкивания от неподвижного центра O , изменяющейся по закону $\vec{F} = k^2 m \vec{r}$, где $\vec{r}$ — радиус-вектор точки. В начальный момент точка M находилась в положении $M_0(a; 0)$ и имела скорость $\vec{V}_0$, направленную параллельно оси y . Определить уравнения движения точки, учитывая силу тяжести (рис.3.5).

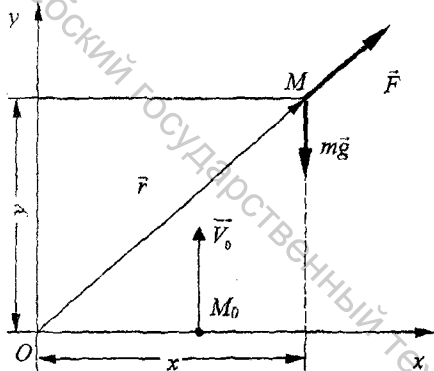


Рис. 3.5

Решение.

К материальной точке M приложены сила тяжести $\vec{P}$ материальной точки и сила отталкивания $\vec{F}$, направленная вдоль OM от центра O . Составим векторное дифференциальное уравнение движения материальной точки:

$$m\ddot{\vec{a}} = \vec{P} + \vec{F} \quad \text{или} \quad \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{g} + k^2 \vec{r}.$$

Спроектируем это векторное уравнение на оси x и y :

$$x - k^2 x = 0, \quad (3.22)$$

$$\ddot{y} - k^2 y = -g. \quad (3.23)$$

Запишем начальные условия движения точки: при $t = 0$ $x_0 = a$, $y_0 = 0$,

$$V_{ax} = \dot{x}_0 = 0, \quad V_{ay} = \dot{y}_0 = V_0.$$

Уравнение (3.22) является однородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка. Составим характеристическое уравнение $\lambda^2 - k^2 = 0$ и найдем его корни $\lambda_1 = k$, $\lambda_2 = -k$. Следовательно, общее решение дифференциального уравнения (3.22) будет иметь вид:

$$x = C_1 e^{kt} + C_2 e^{-kt}. \quad (3.24)$$

Для определения C_1 и C_2 продифференцируем равенство (3.24) по времени:

$$\dot{x} = C_1 k e^{kt} - C_2 k e^{-kt}. \quad (3.25)$$

В уравнения (3.24) и (3.25) подставим $t = 0$, $x_0 = a$, $\dot{x}_0 = 0$:

$$\begin{cases} a = C_1 + C_2, \\ 0 = k(C_1 - C_2). \end{cases}$$

Решив эту систему, получим: $C_1 = C_2 = a/2$.

Тогда получим, что $x = \frac{a}{2}(e^{kt} + e^{-kt})$

Уравнение (3.23) является неоднородным линейным дифференциальным уравнением второго порядка, общее решение которого имеет вид:

$$y = y_1 + y_2,$$

где y_1 — общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения

$$y - k^2 y = 0 \quad (3.26)$$

и y_2 — частное решение уравнения (3.23)

Общее решение уравнения (3.26): $y_1 = C_3 e^{kt} + C_4 e^{-kt}$.

Частное решение уравнения (3.23) определим по виду правой части: так как правая часть этого уравнения постоянна, то частное решение y_2 ищем в виде постоянной величины: $y_2 = A$. Подставляя частное решение $y_2 = A$ в уравнение (3.23), получим: $-k^2 A = -g$, откуда $A = g/k^2$. Тогда общее решение уравнения (3.23) примет вид:

$$y = C_3 e^{kt} + C_4 e^{-kt} + \frac{g}{k^2}. \quad (3.27)$$

Продифференцируем равенство (3.27) по времени:

$$y = C_3 k e^{kt} - C_4 k e^{-kt}. \quad (3.28)$$

В уравнения (3.27), (3.28) подставим при $t = 0$, $y_0 = 0$, $\dot{y}_0 = V_0$:

$$0 = C_3 + C_4 + \frac{g}{k^2};$$

$$V_0 = k(C_3 - C_4).$$

Решив эту систему, получим:

$$C_3 = \frac{1}{2k} \left(V_0 - \frac{g}{k} \right), \quad C_4 = -\frac{1}{2k} \left(V_0 + \frac{g}{k} \right).$$

$$\text{Окончательно,} \quad y = \frac{1}{2k} \left(V_0 - \frac{g}{k} \right) e^{kt} - \frac{1}{2k} \left(V_0 + \frac{g}{k} \right) e^{-kt} + \frac{g}{k^2}.$$

Итак, уравнения движения точки имеют вид:

$$x = \frac{a}{2} (e^{kt} + e^{-kt}),$$

$$y = \frac{V_0}{2k} (e^{kt} - e^{-kt}) - \frac{g}{2k^2} (e^{kt} + e^{-kt}) + \frac{g}{k^2}. \quad (3.29)$$

Для определения уравнения траектории исключим из уравнений (3.29)

$$\text{время } t. \text{ Учтем, что } \frac{e^{kt} + e^{-kt}}{2} = ch t, \quad \frac{e^{kt} - e^{-kt}}{2} = sh t, \quad ch^2 t - sh^2 t = 1.$$

Тогда уравнения (3.29) примут вид:

$$x = ach t,$$

$$y = \frac{V_0}{k} sh t - \frac{g}{k^2} ch t + \frac{g}{k^2},$$

$$\text{а искомое уравнение траектории будет: } y = \frac{V_0}{k} \sqrt{\left(\frac{x}{a} \right)^2 - 1} - \frac{g}{k^2} \left(\frac{x}{a} - 1 \right).$$

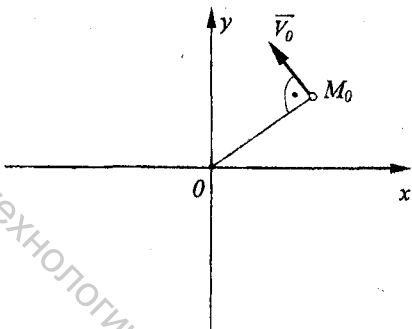
3.1.3. Задачи для механических специальностей

№1

Задача 1.1. Материальная точка массой $m = 3\text{ кг}$, получив начальную скорость $V_0 = 3\text{ м/с}$, движется по горизонтальной прямой под действием силы $F_1 = 18t\text{ н}$ (при $t < 2$), а затем (при $t > 2$) под действием силы $F_2 = 36\text{ н}$.

Определить путь, пройденный точкой за первые 2 с , и скорость точки при $t = 4\text{ с}$.

Задача 1.2. Точка M массой $m = 0,01\text{ кг}$ движется под действием силы отталкивания от неподвижного центра O , изменяющейся по закону $F = 0,25r\text{ н}$, где r — радиус-вектор точки. В начальный момент точка находилась в $M_0(0,8\text{ м}; 0,8\text{ м})$ и имела скорость $V_0 = 4\sqrt{2}\text{ м/с}$, направленную перпендикулярно к OM_0 . Определить уравнения движения точки и ее траекторию.



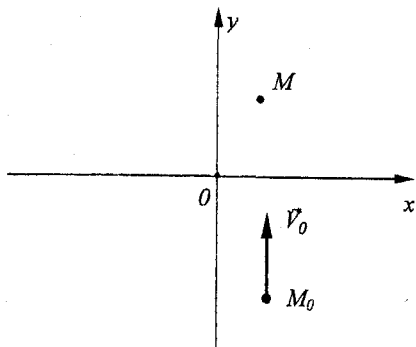
№2

Задача 2.1. Материальная точка M массой $m = 0,2\text{ кг}$ движется по горизонтальной прямой под действием сил притяжения к центрам O_1 и O_2 . Силы пропорциональны расстояниям от точки до этих центров. $F_1 = k_1 \cdot O_1M$ и $F_2 = k_2 \cdot O_2M$

Определить уравнение движения точки M и ее скорость при $t = 0,15\text{ с}$, если $k_1 = 15\text{ н/м}$, $k_2 = 5\text{ н/м}$, $O_1O_2 = 0,4\text{ м}$, $x_0 = 0,2\text{ м}$, $V_0 = 0$. Начало координат точка O_1 .



Задача 2.2. Материальная точка M массы $m=0,2\text{ кг}$ движется под действием силы тяжести и силы притяжения к неподвижному центру O . Величина силы притяжения пропорциональна расстоянию до центра O . Коэффициент пропорциональности $k=0,8\text{ н/м}$. Движение начинается в точке $M_0 (0,5\text{ м}; -2,45\text{ м})$ со скоростью $V_0=4\text{ м/с}$, параллельной оси Oy . Определить уравнения движения точки M и ее траекторию. Ось Oy направлена вертикально вверх.

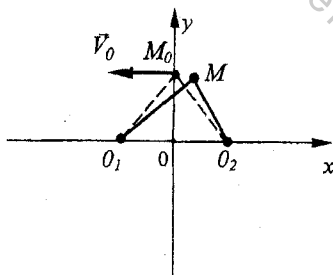


№3

Задача 3.1. Материальная точка M массой $m=0,1\text{ кг}$ движется по горизонтальной прямой под действием силы $F=2,5\text{ н}$ и преодолевает сопротивление среды, пропорциональное скорости ($R=-\mu V$). Определить уравнение движения точки и ее максимальную скорость, если $\mu=0,5\frac{\text{н}\cdot\text{с}}{\text{м}}$; $x_0=0$; $V_0=0$.

Задача 3.2. Материальная точка M массой $m=0,1\text{ кг}$ притягивается к двум центрам O_1 и O_2 с силами $\vec{F}_1 = 2 \cdot \vec{MO}_1$ и $\vec{F}_2 = 2 \cdot \vec{MO}_2$ соответственно (сила в ньютонах, расстояние в метрах).

Определить уравнение движения точки и ее траекторию, если $M_0O=O_1O=O_2O=0,3\text{ м}$ (M_0 — начальное положение точки), а начальная скорость $V_0=0,6\text{ м/с}$ параллельна оси Ox . Размерами точки и силой тяжести пренебречь.

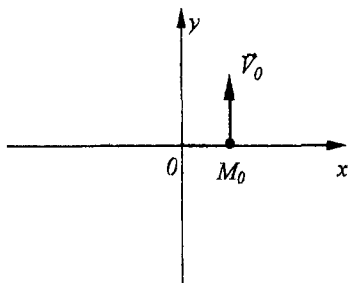


№4

Задача 4.1. Материальная точка массой $m=0,5\text{ кг}$ движется по горизонтальной прямой, испытывая сопротивление среды, которое равно при $t < 1$ $R_1 = k_1 V^2$, при $t > 1$ $R_2 = k_2 \sqrt[3]{V^5}$. Определить скорость точки при $t = 4$ с, если $k_1 = 0,45 \frac{\text{н} \cdot \text{с}^2}{\text{м}^2}$; $k_2 = 0,75 \frac{\text{н} \cdot \text{с}^{5/3}}{\text{м}^{5/3}}$, $V_0 = 10$ м/с.

Задача 4.2. Материальная точка M массой $m=0,001\text{ кг}$ движется в плоскости Oxy под действием силы притяжения к оси Oy , пропорциональной расстоянию точки до этой оси. (Коэффициент пропорциональности $c=10\text{ н/м}$).

В начальный момент точка находилась в $M_0(1; 0)$ и имела начальную скорость $V_0=25\text{ м/с}$, параллельную оси Oy . Определить уравнения движения точки и ее траекторию. Весом точки пренебречь.

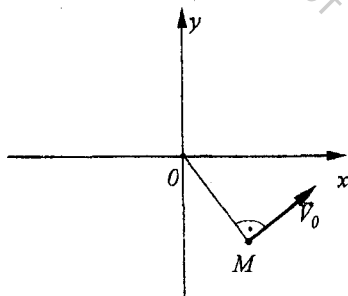


№5

Задача 5.1. Материальная точка массой $m=2\text{ кг}$, получив начальную скорость $V_0=2\text{ м/с}$, движется по горизонтальной прямой под действием силы $F_1=12t$ (при $t < 3$), а затем (при $t > 3$) под действием силы $F_2=36\text{ н}$.

Определить путь, пройденный точкой за первые 3 секунды, и скорость точки при $t=5\text{ с}$.

Задача 5.2. Материальная точка M массой $m=0,02\text{ кг}$ движется под действием силы отталкивания от неподвижного центра O , изменяющейся по закону $F=0,5r$ н, где r — радиус-вектор точки.



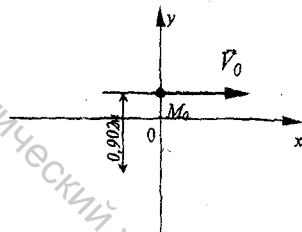
В начальный момент точка находилась в $M_0(0,4\text{ м}; -0,4\text{ м})$ и имела скорость $V_0 = 2\sqrt{2}\text{ м/с}$, направленную перпендикулярно к OM_0 . Определить уравнения движения точки и ее траекторию.

№6

Задача 6.1. Материальная точка M массой $m=0,1\text{ кг}$ движется по горизонтальной прямой под действием сил притяжения к центрам O_1 и O_2 . Силы пропорциональны расстояниям от точки до этих центров. ($F_1=k_1 \cdot O_1M$; $F_2=k_2 \cdot O_2M$). Определить уравнение движения точки M и ее скорость при $t=10\pi\text{ с}$, если $k_1=25\text{ н/м}$, $k_2=15\text{ н/м}$, $O_1O_2=0,4\text{ м}$, $x_0=0,25\text{ м}$, $V_0=0$. Начало координат — точка O_1 .



Задача 6.2. Материальная точка M массой $m=0,4\text{ кг}$ движется под действием силы тяжести и силы притяжения к неподвижному центру O . Величина силы пропорциональна расстоянию до центра O . Коэффициент пропорциональности $k=40\text{ н/м}$. Движение начинается в точке M_0 со скоростью $V_0=5\text{ м/с}$, перпендикулярной к оси Oy .



Определить уравнения движения точки M и ее траекторию. Ось Oy направлена вертикально вверх.

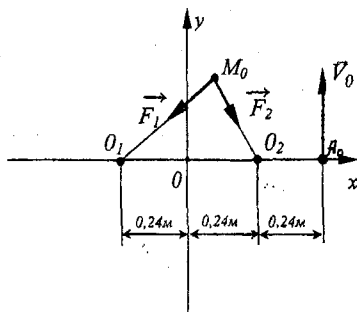
№7

Задача 7.1. Материальная точка M массой $m=0,2\text{ кг}$ движется по горизонтальной прямой под действием силы $F=1,6\text{ н}$ и преодолевает сопротивление среды, пропорциональное скорости ($\vec{R} = -\mu\vec{V}$). Определить

уравнение движения точки и ее максимальную скорость, если $\mu = 0,4 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}}{\text{м}}$; $x_0 = 0$;

$$V_0 = 0$$

Задача 7.2. Материальная точка M массой $m = 0,03 \text{ кг}$ находится под действием двух сил притяжения, направленных к неподвижным центрам O_1 и O_2 . Величина этих сил пропорциональна расстоянию от точки O_1 и O_2 . Коэффициент пропорциональности одинаков и равен $k = 6 \text{ н/м}$. Движение начинается в точке A_0 со скоростью $V_0 = 2,4 \text{ м/с}$, перпендикулярной к линии $O_1 O_2$.

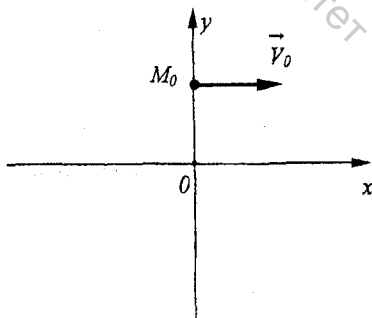


Определить уравнения движения точки и ее траекторию. Силой тяжести пренебречь.

№8

Задача 8.1. Материальная точка массой $m = 0,4 \text{ кг}$ движется по горизонтальной прямой, преодолевая сопротивление среды, которое равно при $t < 1$ $R_1 = k_1 \sqrt[3]{V^5}$, при $t > 1$ $R_2 = k_2 \sqrt[3]{V^3}$. Определить скорость точки при $t = 3 \text{ с}$, если $k_1 = 0,45 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}^{5/3}}{\text{м}^{5/3}}$; $k_2 = 0,40 \frac{\text{Н} \cdot \text{с}^{3/2}}{\text{м}^{3/2}}$, $V_0 = 8 \text{ м/с}$.

Задача 8.2. Материальная точка M массой $m = 0,001 \text{ кг}$ движется в плоскости Oxy под действием силы притяжения к оси Ox , пропорциональной расстоянию точки до данной оси (коэффициент пропорциональности $C = 2,5 \text{ н/м}$). В



начальный момент точка находилась в $M_0(0; 2)$ и имела скорость $V_0=25\text{ м/с}$, параллельную оси Ox .

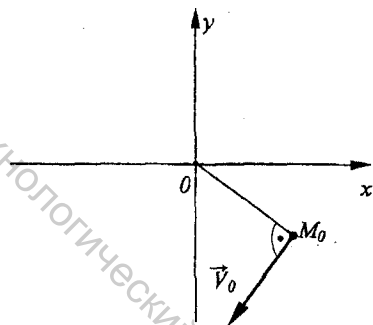
Определить уравнения движения точки и ее траекторию. Весом точки пренебречь.

№9

Задача 9.1. Материальная точка массой $m=2\text{ кг}$, получив начальную скорость $V_0=1\text{ м/с}$, двигается по горизонтальной прямой под действием силы $F=2\pi\sin(\pi/6)t\text{ н}$ (при $t < 6$), а затем (при $t > 6$) под действием силы $F_2=10\text{ н}$.

Определить уравнение движения точки при $0 < t < 6$ и скорость точки при $t=10\text{ с}$.

Задача 9.2. Материальная точка M массой $m=0,03\text{ кг}$ движется под действием силы отталкивания от неподвижного центра O , изменяющейся по закону $F=0,75r\text{ н}$, где r — радиус-вектор точки. В начальный момент точка находилась в $M_0(0,2\text{ м}; -0,2\text{ м})$ и имела скорость $V_0=\sqrt{2}\text{ м/с}$, направленную перпендикулярно к OM_0 .

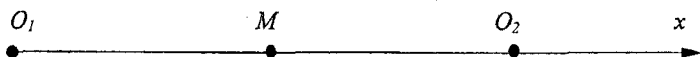


Определить уравнения движения точки и ее траекторию.

№10

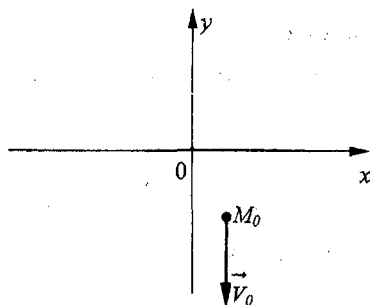
Задача 10.1. Материальная точка M массой $m=0,1\text{ кг}$ движется по горизонтальной прямой под действием сил притяжения к центрам O_1 и O_2 . Силы пропорциональны расстояниям точки до этих центров ($F_1=k_1 \cdot O_1M$; $F_2=k_2 \cdot O_2M$).

Определить уравнение движения точки M и ее скорость при $t=\pi/10$ с, если $k_1=10\text{ н/м}$, $k_2=12,5\text{ н/м}$, $O_1O_2=0,45\text{ м}$, $x_0=4\text{ м}$, $V_0=0$. Начало координат — точка O_1 .



Задача 10.2. Материальная точка M

массой $m=0,3\text{ кг}$ движется под действием силы притяжения к неподвижному центру O . Величина силы притяжения пропорциональна расстоянию до центра O . Коэффициент пропорциональности $k=1,2\text{ н/м}$. Движение начинается в точке $M_0(1\text{ м}; -2,45\text{ м})$ со скоростью $V_0=6\text{ м/с}$,



параллельной оси Oy . Определить уравнения движения точки M и ее траекторию. Ось Oy направлена вертикально вверх.

№11

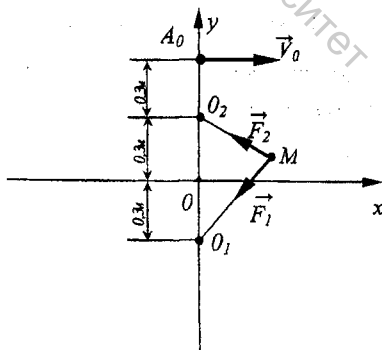
Задача 11.1. Материальная точка M массой $m=0,1\text{ кг}$ движется по горизонтальной прямой под действием силы $F=4,5\text{ м}$ и преодолевает сопротивление среды, пропорциональное скорости ($\vec{R}=-\mu\vec{V}$). Определить

уравнение движения точки и ее максимальную скорость, если $\mu=0,3\frac{\text{н}\cdot\text{с}}{\text{м}}$; $x_0=0$;

$V_0=3\text{ м/с}$.

Задача 11.2. Материальная точка M

массы $m=0,02\text{ кг}$ находится под действием двух сил притяжения, направленных к неподвижным центрам O_1 и O_2 . Величина этих сил пропорциональна расстоянию от точек O_1 и O_2 . Коэффициент пропорцио-

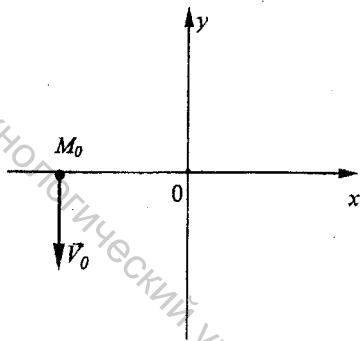


нальности одинаков и равен $k=9\text{ н/м}$. Движение начинается в точке A_0 со скоростью $V_0=1,8\text{ м/с}$, перпендикулярной к линии O_1 и O_2 . Определить уравнения движения точки M и ее траекторию. Силой тяжести пренебречь.

№12

Задача 12.1. Материальная точка M с массой $m=2,4\text{ кг}$ движется по горизонтальной прямой, преодолевая сопротивление среды, которое равно при $t < 2$ $R_1 = k_1 \sqrt{V^3}$, при $t > 2$ $R_2 = k_2 \sqrt[3]{V^4}$. Определить скорость точки при $t=12\text{ с}$, если $k_1 = \frac{\sqrt{2}}{5} \cdot \frac{\text{н} \cdot \text{с}^{3/2}}{\text{м}^{3/2}}$; $k_2 = 0,36 \frac{\text{н} \cdot \text{с}^{4/3}}{\text{м}^{4/3}}$; $V_0=18\text{ м/с}$.

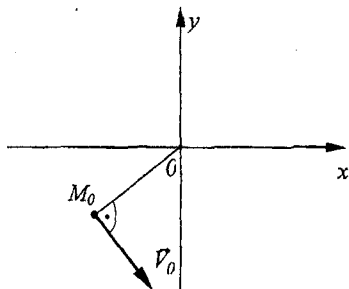
Задача 12.2. Материальная точка M с массой $m=0,001\text{ кг}$ движется в плоскости Oxy под действием силы притяжения к оси Oy , пропорциональной расстоянию точки до данной оси (коэффициент пропорциональности $c=10\text{ н/м}$.) В начальный момент точка находилась в $M_0(-1; 0)$ и имела скорость $V_0=25\text{ м/с}$, параллельную Ox . Определить уравнения движения точки и ее траекторию. Весом точки пренебречь.



№13

Задача 13.1. Материальная точка с массой $m=3\text{ кг}$, получив начальную скорость $V_0=2\text{ м/с}$, движется по горизонтальной прямой под действием силы $F_1=3\pi \sin(\pi/4)t$ н (при $t < 4$), а затем (при $t > 4$) под действием силы $F_2=12\text{ н}$. Определить уравнение движения точки при $0 < t < 4$ и скорость точки при $t=9\text{ с}$.

Задача 13.2. Материальная точка M с массой $m=0,04\text{ кг}$ движется под действием силы отталкивания от неподвижного центра O , изменяющейся по закону $F=16r$ н, где r — радиус-вектор точки. В начальный момент точка находилась в $M_0 (-0,1\text{ м}; -0,1\text{ м})$ и имела начальную скорость $V_0=2\sqrt{2}\text{ м/с}$, направленную перпендикулярно к OM_0 .



Определить уравнения движения точки и ее траекторию.

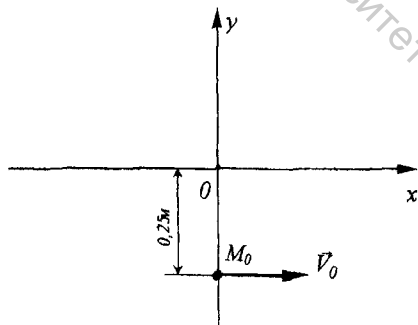
№14

Задача 14.1. Материальная точка M с массой $m=0,15\text{ кг}$ движется по горизонтальной прямой под действием сил притяжения к центрам O_1 и O_2 . Силы пропорциональны расстояниям точки до этих центров. ($F_1=k_1 \cdot O_1M$; $F_2=k_2 \cdot O_2M$).



Определить уравнение движения точки M и ее скорость при $t=12\text{ мс}$, если $k_1=5\text{ н/м}$, $k_2=10\text{ н/м}$, $O_1O_2=0,6\text{ м}$, $x_0=0,4\text{ м}$, $V_{x0}=1,5\text{ м/с}$. Начало координат — точка O_1 .

Задача 14.2. Материальная точка M с массой $m=0,2\text{ кг}$ движется под действием силы тяжести и силы притяжения к неподвижному центру O . Величина силы притяжения пропорциональна расстоянию до центра O . Коэффициент пропорциональности $k=39,2\text{ н/м}$. Движение начинается в точке M_0 со скоростью $V_0=7\text{ м/с}$,



перпендикулярной к оси Oy . Определить уравнения движения точки M и ее траекторию. Ось Oy направлена вертикально вверх.

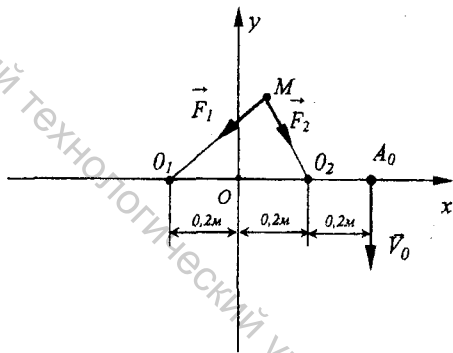
№15

Задача 15.1. Материальная точка с массой $m=0,3\text{кг}$ движется по горизонтальной прямой под действием силы $F=1,8\text{н}$ и преодолевает сопротивление среды, пропорциональное скорости ($\vec{R} = -\mu\vec{V}$).

Определить уравнение движения точки и ее максимальную скорость, если

$$\mu = 0,6 \frac{\text{н} \cdot \text{с}}{\text{м}}; x_0 = 0; V_0 = 1 \text{ м/с}.$$

Задача 15.2. Материальная точка M с массой $m=0,05\text{кг}$ движется под действием двух сил притяжения, направленных к неподвижным центрам O_1 и O_2 . Величина этих сил пропорциональна расстоянию от точек O_1 и O_2 . Коэффициент пропорциональности одинаков и равен $k=40\text{н/м}$. Движение начинается в точке A_0 со скоростью $V_0=0,8\text{м/с}$,



перпендикулярной к линии O_1O_2 . Определить уравнение движения точки M и ее траекторию. Силой тяжести пренебречь.

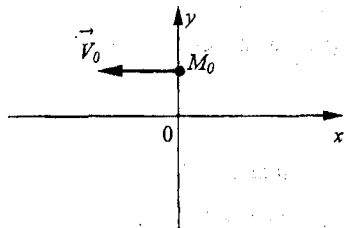
№16

Задача 16.1. Материальная точка с массой $m=2\text{кг}$ движется по горизонтальной прямой, преодолевая сопротивление среды, которое равно: при

$t < 3$ $R_1 = k_1 \sqrt[3]{V^4}$; при $t > 3$ $R_2 = k_2 V$. Определить скорость точки при $t=23\text{с}$, если

$$k_1 = 1 \frac{\text{н} \cdot \text{с}^{4/3}}{\text{м}^{4/3}}; k_2 = \frac{\ln 5}{10} \frac{\text{н} \cdot \text{с}}{\text{м}}; V_0 = 8 \text{ м/с}.$$

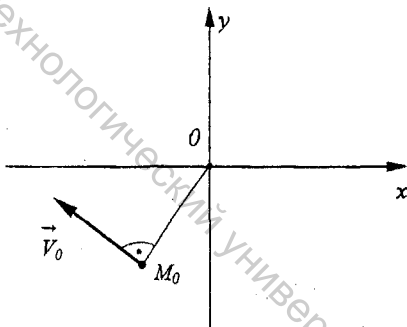
Задача 16.2. Материальная точка M с массой $m=0,002\text{ кг}$ движется в плоскости Oxy под действием силы притяжения к оси Ox , пропорциональной расстоянию точки до данной оси (коэффициент пропорциональности $c=5\text{ н/м}$). В начальный момент точка находилась в $M_0(0; 1)$ и имела скорость $V_0=25\text{ м/с}$, параллельную оси Ox . Определить уравнение движения точки и ее траекторию. Весом точки пренебречь.



№17

Задача 17.1. Материальная точка с массой $m=3\text{ кг}$, получив начальную скорость $V_0=1\text{ м/с}$, движется под действием силы $F_1=3\pi^2 \cos(\pi/3)t\text{ н}$ (при $t<3$), а затем (при $t>3$) под действием силы $F_2=6\text{ н}$. Определить уравнение движения точки при $0<t<3$ и скорость точки при $t=10\text{ с}$.

Задача 17.2. Материальная точка M с массой $m=0,05\text{ кг}$ движется под действием силы отталкивания от неподвижного центра O , изменяющейся по закону $F=20r\text{ н}$, где r — радиус-вектор точки. В начальный момент точка находилась в $M_0(-\sqrt{2}/20\text{ м}; -\sqrt{2}/20\text{ м})$ и имела скорость $V_0=2\text{ м/с}$, направленную перпендикулярно к OM_0 . Определить уравнение движения точки и ее траекторию.



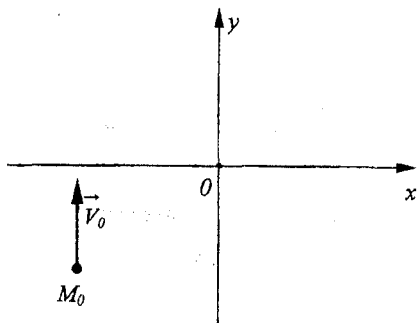
№18

Задача 18.1. Материальная точка M с массой $m=0,15\text{ кг}$ движется по горизонтальной прямой под действием сил притяжения к центрам O_1 и O_2 . Силы пропорциональны расстояниям точки до этих центров. ($F_1=k_1 O_1 M$;

$F_2 = k_2 \cdot O_2 M$). Определить уравнение движения точки M и ее скорость при $t = 6 \pi$ с, если $k_1 = 6 \text{ н/м}$, $k_2 = 9 \text{ н/м}$, $O_1 O_2 = 0,75 \text{ м}$, $x_0 = 0,2 \text{ м}$, $V_{x0} = 3 \text{ м/с}$. Начало координат — точка O_1 .



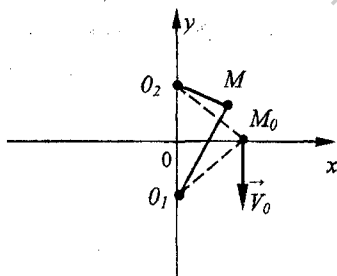
Задача 18.2. Материальная точка M с массой $m = 0,4 \text{ кг}$ движется под действием силы тяжести и силы притяжения к неподвижному центру O . Величина силы притяжения пропорциональна расстоянию до центра O . Коэффициент пропорциональности $k = 1,6 \text{ н/м}$. Движение начинается в точке $M_0(-1 \text{ м}; -2,45 \text{ м})$ со скоростью $V_0 = 8 \text{ м/с}$, параллельной к оси Oy . (Определить уравнения движения точки M и ее траекторию. Ось Oy направлена вертикально вверх.



№19

Задача 19.1. Материальная точка M массой $m = 0,3 \text{ кг}$ движется по горизонтальной прямой под действием силы $F = 7,2 \text{ н}$ и преодолевает сопротивление среды, пропорциональное скорости ($\vec{R} = -\mu \vec{V}$). Определить уравнение движения точки, если $\mu = 0,6 \frac{\text{н} \cdot \text{с}}{\text{м}}$; $x = 0$; $V_0 = 0$.

Задача 19.2. Материальная точка M массой $m = 0,06 \text{ кг}$ притягивается к двум центрам O_1 и O_2 с силами $\vec{F}_1 = 12 \overline{MO_1}$ и $\vec{F}_2 = 12 \overline{MO_2}$ (силы — в ньютонах, расстояние — в метрах) соответственно.

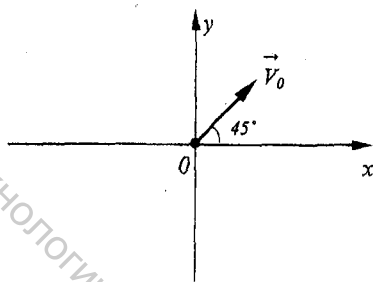


Определить траекторию точки, если $M_0O=O_1O=O_2O=0,15\text{ м}$ (M_0 — начальное положение точки), а начальная скорость $V_0=0,6\text{ м/с}$ параллельна оси Oy . Размерами точки и силой тяжести пренебречь.

№20

Задача 20.1. Материальная точка с массой $m=3,2\text{ кг}$ движется по горизонтальной прямой, преодолевая сопротивление среды, которое равно: при $t<8$ $R_1=k_1V$; при $t>8$ $R_2=k_2\sqrt[3]{V^2}$. Определить скорость точки при $t=13\text{ с}$, если $k_1=1,2 \ln 2 \frac{\text{Н}\cdot\text{с}}{\text{м}}$; $k_2=0,384 \frac{\text{Н}\cdot\text{с}^{2/3}}{\text{м}}$; $V_0=1\text{ м/с}$.

Задача 20.2. Материальная точка M массой $m=0,002\text{ кг}$ движется в плоскости Oxy под действием силы притяжения к оси Oy , пропорциональной расстоянию точки до данной оси (коэффициент пропорциональности $C=20\text{ Н/м}$). В начальный момент точка находилась в начале координат и имела скорость $V_0=25\sqrt{2}\text{ м/с}$, направленную под углом 45° оси Ox .



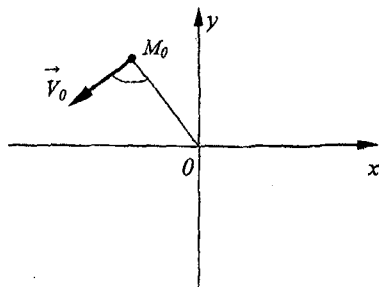
Определить уравнения движения точки и ее траекторию. Весом точки пренебречь.

№21

Задача 21.1. Материальная точка с массой $m=4\text{ кг}$, получив начальную скорость $V_0=2\text{ м/с}$, движется под действием силы $F_1=8\pi^2 \cos(\pi/4)t \text{ Н}$ (при $t<4$), а затем (при $t>4$) под действием силы $F_2=2\text{ Н}$. Определить уравнение движения точки при $0<t<4$ и скорость точки при $t=8\text{ с}$.

Задача 21.2. Материальная точка M с массой $m=0,06\text{ кг}$ движется под действием силы отталкивания от неподвижного центра O , изменяющейся по

закону $F=6r$ н, где r — радиус-вектор точки. В начальный момент точка находилась в $M_0 (-\sqrt{2}/5\text{ м}; \sqrt{2}/5\text{ м})$ и имела скорость $V_0=4\text{ м/с}$, направленную перпендикулярно к OM_0 . Определить уравнение движения точки и ее траекторию.

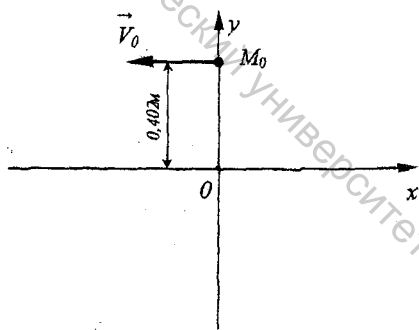


№22

Задача 22.1. Материальная точка M с массой $m=0,2\text{ кг}$ движется по горизонтальной прямой под действием сил притяжения к центрам O_1 и O_2 . Силы пропорциональны расстояниям точки до этих центров. ($F_1=k_1 \cdot O_1M$; $F_2=k_2 \cdot O_2M$). Определить уравнение движения точки M и ее скорость при $t=8\pi\text{ с}$, если $k_1=50\text{ н/м}$, $k_2=30\text{ н/м}$, $O_1O_2=0,4\text{ м}$, $x_0=0,15\text{ м}$, $V_{x0}=2\text{ м/с}$. Начало координат — точка O_1 .



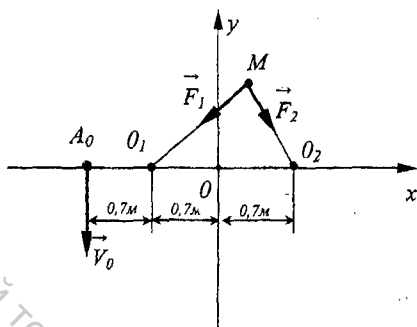
Задача 22.2. Материальная точка M с массой $m=0,3\text{ кг}$ движется под действием силы тяжести и силы притяжения к неподвижному центру O . Величина силы прямо пропорциональна расстоянию до центра O . Коэффициент пропорциональности $k=30\text{ н/м}$. Движение начинается в точке M_0 со скоростью $V_0=2,5\text{ м/с}$, перпендикулярной к оси Oy . Определить уравнения движения точки и ее траекторию. Ось Oy направлена вертикально вверх.



№23

Задача 23.1. Материальная точка M массой $m=0,4\text{ кг}$ движется по горизонтальной прямой под действием силы $F=2t\text{ н}$ и преодолевает сопротивление среды, пропорциональное скорости ($\vec{R} = -\mu\vec{V}$). Определить уравнение движения точки, если $\mu=0,2\frac{\text{н}\cdot\text{с}}{\text{м}}$; $x_0=0$; $V_0=0$.

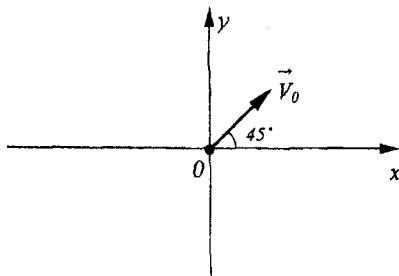
Задача 23.2. Материальная точка M с массой $m=0,07\text{ кг}$ движется под действием двух сил притяжения, направленных к неподвижным центрам O_1 и O_2 . Величина этих сил пропорциональна расстоянию от точек O_1 и O_2 . Коэффициент пропорциональности одинаков и равен $k=56\text{ н/м}$. Движение начинается в точке A_0 со скоростью $V_0=2,8\text{ м/с}$, перпендикулярной к линии O_1O_2 . Определить уравнение движения точки M и ее траекторию. Силой тяжести пренебречь.



№24

Задача 24.1. Материальная точка с массой $m=1,2\text{ кг}$ движется по горизонтальной прямой, преодолевая сопротивление среды, которое равно: при $t < 6$ $R_1 = k_1\sqrt[3]{V^2}$; при $t > 6$ $R_2 = k_2\sqrt{V}$. Определить скорость точки при $t=12\text{ с}$, если $k_1 = 0,3\frac{\text{н}\cdot\text{с}^{2/3}}{\text{м}^{2/3}}$; $k_2 = \frac{\sqrt{2}\cdot\text{н}\cdot\text{с}^{1/2}}{10\cdot\text{м}^{1/2}}$; $V_0 = 1\text{ м/с}$.

Задача 24.2. Материальная точка M с массой $m=0,003\text{ кг}$ движется в плоскости Oxy под действием силы притяжения к оси Ox , пропорциональной расстоянию от этой

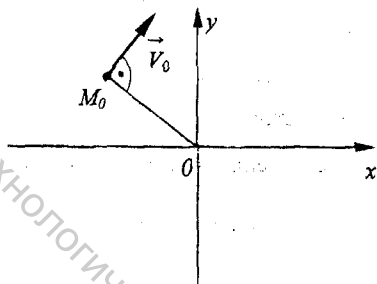


точки до данной оси (коэффициент пропорциональности $c=7,5 \text{ н/м}$). В начальный момент точка находилась в начале координат и имела скорость $V_0=25\sqrt{2} \text{ м/с}$, направленную под углом 45° к оси Ox . Определить уравнения движения точки и ее траекторию. Весом точки пренебречь.

№25

Задача 25.1. Материальная точка с массой $m=4 \text{ кг}$, получив начальную скорость $V_0=1 \text{ м/с}$, движется под действием силы $F_1=12t^2 \text{ н}$ (при $t<2$), а затем (при $t>2$) под действием силы $F_2=48 \text{ н}$. Определить путь, пройденный точкой за первые 2 секунды, и скорость точки при $t=5 \text{ с}$.

Задача 25.2. Материальная точка M с массой $m=0,07 \text{ кг}$ движется под действием силы отталкивания от неподвижного центра O , изменяющейся по закону $F=7r \text{ н}$, где r — радиус-вектор точки. В начальный момент точка находилась в $M_0(-\sqrt{2}/10 \text{ м}; \sqrt{2}/10 \text{ м})$ и имела скорость $V_0=2 \text{ м/с}$, направленную перпендикулярно к OM_0 . Определить уравнения движения точки и ее траекторию.



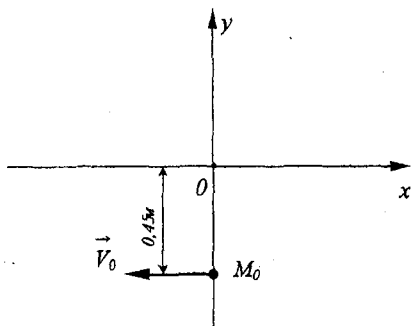
№26

Задача 26.1. Материальная точка M с массой $m=0,1 \text{ кг}$ движется по горизонтальной прямой под действием сил притяжения к центрам O_1 и O_2 . Силы пропорциональны расстояниям точки до этих центров. ($F_1=k_1 \cdot O_1M$; $F_2=k_2 \cdot O_2M$). Определить уравнение движения точки M и ее скорость при $t=12 \text{ π с}$, если $k_1=7,5 \text{ н/м}$, $k_2=2,5 \text{ н/м}$, $O_1O_2=0,6 \text{ м}$, $x_0=0,15 \text{ м}$, $V_{x0}=1,2 \text{ м/с}$. Начало координат — точка O_1 .



Задача 26.2. Материальная

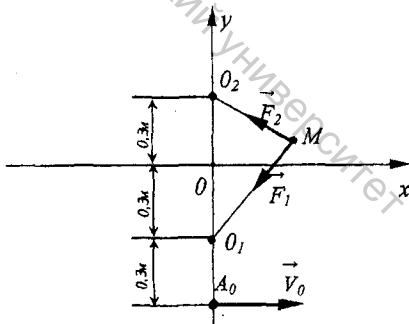
точка M с массой $m=0,1\text{ кг}$ движется под действием силы тяжести и силы притяжения к неподвижному центру O . Величина силы притяжения прямо пропорциональна расстоянию до центра O . Коэффициент пропорциональности $k=19,6\text{ н/м}$. Движение начинается в точке M_0 со скоростью $V_0=3,5\text{ м/с}$, перпендикулярной к оси Oy . Определить уравнения движения точки и ее траекторию. Ось Oy направлена вертикально вверх.

**№27**

Задача 27.1. Материальная точка M массой $m=0,5\text{ кг}$ движется по горизонтальной прямой под действием силы $F=0,8t\text{ н}$ и преодолевает сопротивление среды, пропорциональное скорости ($\vec{R} = -\mu\vec{V}$). Определить уравнение движения точки, если $\mu=0,2\frac{\text{н}\cdot\text{с}}{\text{м}}$; $x_0=0$; $V_0=0$.

Задача 27.2. Материальная

точка M с массой $m=0,04\text{ кг}$ находится под действием двух сил притяжения, направленных к неподвижным центрам O_1 и O_2 . Величина этих сил пропорциональна расстоянию от точек O_1 и O_2 . Коэффициент пропорциональности одинаков и равен $k=18\text{ н/м}$.

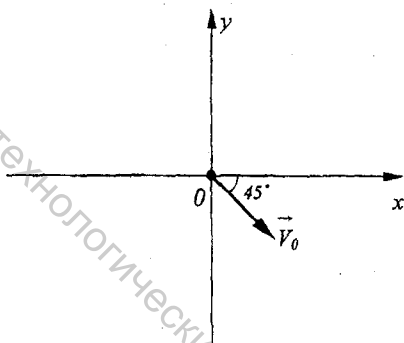


Движение начинается в точке A_0 со скоростью $V_0=1,8\text{ м/с}$, перпендикулярной к линии O_1O_2 . Определить уравнения движения точки M и ее траекторию. Силой тяжести пренебречь.

№28

Задача 28.1. Материальная точка с массой $m=2\text{ кг}$ движется по горизонтальной прямой, преодолевая сопротивление среды, которое равно: при $t < 4$ $R_1 = k_1 \sqrt{V}$; при $t > 4$ $R_2 = k_2 \sqrt[3]{V}$. Определить скорость точки при $t=19\text{ с}$, если $k_1 = 0,5 \frac{\text{н} \cdot \text{с}^{1/2}}{\text{м}^{1/2}}$; $k_2 = \frac{1}{10\sqrt[3]{2}} \frac{\text{н} \cdot \text{с}^{1/3}}{\text{м}^{1/3}}$; $V_0 = 1\text{ м/с}$.

Задача 28.2. Материальная точка M с массой $m=0,003\text{ кг}$ движется в плоскости Oxy под действием силы притяжения к оси Oy , пропорциональной расстоянию точки до данной оси (коэффициент пропорциональности $c=30\text{ н/м}$). В начальный момент точка находилась в начале координат и имела скорость $V_0=25\sqrt{2}\text{ м/с}$, направленную под углом 45° к оси Ox . Определить уравнения движения точки и ее траекторию. Весом точки пренебречь.



3.1.4. Задачи для немеханических специальностей

№1

Задача 1.1. Материальная точка движется прямолинейно по оси Ox , притягиваемая к неподвижному центру O силой $F=4mx$ кН, где m – масса точки, x – ее координата. В начальный момент точка находилась на расстоянии 5 м от центра O . Определить уравнения движения точки, если $V_0=0$.

Задача 1.2. Определить уравнения криволинейного движения заряженной частицы массы m в однородном электрическом поле с переменным напряжением. Сила поля, действующая на частицу, равна $F=A \cdot \sin(kt)$ кН (A и k – заданные постоянные, t – время в с); сила всегда направлена параллельно оси y . В начальный момент $x_0=a$; $y_0=0$; $\dot{x}_0=v_0$; $\dot{y}_0=0$. Весом точки пренебречь.

№2

Задача 2.1. Материальная точка движется прямолинейно по оси x , притягиваемая к центру O силой $F=0,2m/x^2$, где m – масса точки, x – ее координата. В начальный момент $x_0=10$ мм, $v_0=0$. Определить скорость точки, когда она пройдет половину расстояния до центра O .

Задача 2.2. Заряженная частица, находясь в однородном электрическом поле переменного напряжения, движется в вертикальной плоскости под действием собственного веса P и силы поля $F=A \cdot \cos(kt)$ кН (A и k – заданные постоянные, t – время в с), сила поля всегда параллельна горизонтальной оси. Определить уравнения движения частицы, если в начальный момент $x_0=a$; $y_0=b$; $v_0=0$.

№3

Задача 3.1. Материальная точка движется прямолинейно по оси ox , отталкиваемая от неподвижного центра O силой $F=3mx$, где m – масса точки, x – ее

координата. Определить скорость, которую будет иметь точка, пройдя с момента начала движения расстояние 2 м, если при $t=0$ $x_0=2$ м; $v_0=0$.

Задача 3.2. Определить уравнения криволинейного движения заряженной частицы массой m в однородном электрическом поле с переменным напряжением. Сила поля, действующая на частицу, равна $F=A \cdot \cos(kt)$ кН (A и k – заданные постоянные, t – время в с). Сила всегда направлена параллельно оси ox .

В начальный момент $x_0=0$; $y_0=0$; $\dot{x}_0=0$; $\dot{y}_0=v_0$. Весом точки пренебречь.

№4

Задача 4.1. Тело весом $P=4,9$ н движется по горизонтальной прямой под действием силы $F=5(1-t)$ н (t – в с). Определить, через сколько времени тело остановится, если в начальный момент скорость тела была равна 2,2 м/с и направлена в сторону действующей силы.

Задача 4.2. Точка весом P движется в вертикальной плоскости под действием силы отталкивания от оси y (ось y – вертикальна); величина силы прямо пропорциональна расстоянию точки от этой оси, коэффициент пропорциональности равен $k^2 m$. Определить уравнения криволинейного движения точки, если в начальный момент $x_0=a$; $y_0=0$; $\dot{x}_0=0$; $\dot{y}_0=v_0$.

№5

Задача 5.1. Тело весом 4,9 н движется горизонтально, начиная движение со скоростью $v_0=9$ м/с, в среде, сила сопротивления которой $R=3\sqrt{v}$ н, v – скорость точки. Найти путь, пройденный точкой до остановки.

Задача 5.2 Заряженная частица, находясь в однородном электрическом поле переменного напряжения, движется в вертикальной плоскости под действием собственного веса P и силы поля $F=A \cdot \sin(kt)$ кН (A и k – заданные постоянные, t – время в с). Сила поля всегда параллельна горизонтальной оси x .

Определить уравнения движения частицы, если при $t=0$ точка находилась в начале координат, ее начальная скорость равна нулю.

№6

Задача 6.1. Тело весом $P=10\text{ н}$, брошенное вертикально вверх с начальной скоростью $v_0=10\text{ м/с}$, испытывает сопротивление воздуха, определяемое формулой $R=0,2v^2\text{ н}$, где v — скорость тела. Определить, на какую наибольшую высоту поднимется тело.

Задача 6.2. Определить уравнения криволинейного движения точки массы m , на которую действует сила отталкивания от начала координат, пропорциональная расстоянию от него. Коэффициент пропорциональности равен $k^2 m$. В начальный момент $x_0=0$; $y_0=a$; $\dot{x}_0=v_0$; $\dot{y}_0=0$. Весом точки пренебречь.

№7

Задача 7.1. Тело весом $P=4,9\text{ н}$ движется по горизонтальной прямой под действием силы $F=(2-t)\text{ н}$. Определить скорость точки через 6 с после начала движения, если $v_0=0$.

Задача 7.2. Тяжелая точка массой m движется в вертикальной плоскости под действием силы отталкивания от оси y (ось y — вертикальна), величина силы пропорциональна расстоянию точки от этой оси, коэффициент пропорциональности равен $k^2 m$.

Определить уравнения криволинейного движения точки, если в начальный момент $x_0=a$; $y_0=b$; $v_0=0$.

№8

Задача 8.1. Тело весом $9,8\text{ кг}$ движется по горизонтальной прямой, испытывая сопротивление среды, пропорциональное квадрату скорости, коэффици-

ент пропорциональности $\mu=0,2 \frac{H}{m^2/c^2}$. Определить расстояние, которое пройдет точка прежде, чем ее скорость станет в три раза меньше начальной.

Задача 8.2. Тяжелая точка весом P движется в вертикальной плоскости под действием силы притяжения к оси y (ось y — вертикальна), величина силы пропорциональна расстоянию точки от этой оси, коэффициент пропорциональности равен C . Определить уравнения криволинейного движения точки, если в начальный момент $x_0=a$; $y_0=b$; $v_0=0$.

№9

Задача 9.1. Тело весом $P=10H$ падает с некоторой высоты H на землю без начальной скорости. Сопротивление воздуха определяется по формуле $R=\mu v^2$,

где $\mu=0,2 \frac{H}{m^2/c^2}$ — коэффициент пропорциональности, v — скорость тела.

Определить высоту H , с которой падало тело, если в момент падения на землю скорость тела была равна $7m/c$.

Задача 9.2. Определить уравнения криволинейного движения точки массы m , на которую действует сила притяжения к началу координат, пропорциональная расстоянию от него. Коэффициент пропорциональности равен $k^2 m$. В начальный момент $x_0=a$; $y_0=0$; $\dot{x}_0=0$; $\dot{y}_0=v_0$. Весом точки пренебречь.

№ 10

Задача 10.1. Тело весом $P=9,8H$ находится на горизонтальной плоскости. В некоторый момент ему сообщена скорость v_0 . При движении тело испытывает сопротивление среды, пропорциональное первой степени скорости, коэффициент пропорциональности $\mu=0,5 \frac{H}{m/c}$. Определить, через сколько времени скорость тела будет в два раза меньше начальной.

Задача 10.2. Тяжелая точка весом P движется в вертикальной плоскости под действием силы притяжения к оси y (ось y – вертикальна). Величина силы пропорциональна расстоянию точки от этой оси, коэффициент пропорциональности равен C .

Определить уравнения криволинейного движения точки, если в начальный момент $x_0=a$; $y_0=0$; $\dot{x}_0=0$; $\dot{y}_0=v_0$.

№11

Задача 11.1. Материальная точка движется прямолинейно по оси ox , притягиваемая к неподвижному центру O силой $F=3mx$ н, где m – масса точки, x – ее координата. В начальный момент точка находилась на расстоянии 5 м от центра O . Определить скорость точки в момент, когда она достигает центра O , если $v_0=0$.

Задача 11.2. Определить уравнения криволинейного движения заряженной частицы массой m в однородном электрическом поле с переменным напряжением. Сила поля, действующая на частицу, равна $F=A \cdot \sin(kt)$ н (A и k – заданные постоянные, t – время в с). Сила всегда направлена параллельно оси y . В начальный момент $x_0=a$; $y_0=0$; $\dot{x}_0=v_0$; $\dot{y}_0=0$. Весом точки пренебречь.

№12

Задача 12.1. Материальная точка движется прямолинейно по оси x , притягиваемая к центру O силой $F=0,2m/x^2$ н, где m – масса точки, x – ее координата. В начальный момент $x_0=10\text{ м}$; $v_0=0$. Определить скорость точки в момент, когда она пройдет половину расстояния до центра O .

Задача 12.2. Заряженная частица, находясь в однородном электрическом поле переменного напряжения, движется в вертикальной плоскости под дей-

нием собственного веса P и силы поля $F=A \cdot \cos(kt)n$ (A и k – заданные постоянные, t – время в с). Сила поля всегда параллельна горизонтальной оси x .

Определить уравнения движения частицы, если в начальный момент $x_0=a$; $y_0=b$; $v_0=0$.

№13

Задача 13.1. Материальная точка движется прямолинейно по оси ox , отталкиваемая от неподвижного центра O силой $F=3mx$ н, где m – масса точки, x – ее координата.

Определить скорость, которую будет иметь точка, пройдя с момента начала движения расстояние $2m$, если $t=0$; $x_0=2m$; $v_0=0$.

Задача 13.2. Определить уравнение криволинейного движения заряженной частицы массой m в однородном поле с переменным напряжением. Сила поля, действующая на частицу, равна $F=A \cdot \cos(kt)n$ (A и k – заданные постоянные, t – время в с). Сила поля всегда направлена параллельно оси ox .

В начальный момент $x_0=a$; $y_0=0$; $\dot{x}_0=0$; $\dot{y}_0=v_0$.

№14

Задача 14.1. Тело весом $P=4,9$ н движется по горизонтальной прямой под действием силы $F=5(1-t)$ Н (t – в с). Определить, через сколько времени тело остановится, если в начальный момент скорость тела была равна $2,2$ м/с и направлена в сторону действующей силы.

Задача 14.2. Точка весом P движется в вертикальной плоскости под действием силы отталкивания от оси y (ось y – вертикальна); величина силы прямо пропорциональна расстоянию точки от этой оси, коэффициент пропорциональности равен k^2m . Определить уравнения криволинейного движения точки, если в начальный момент $x_0=a$; $y_0=a$; $\dot{x}_0=0$; $\dot{y}_0=v_0$.

№15

Задача 15.1. Тело весом $4,9$ н движется горизонтально, начиная движение со скоростью $v_0 = 9$ м/с в среде, сила сопротивления которой $R = 3\sqrt{v}$ н, где v — скорость точки. Найти путь, пройденный точкой до остановки.

Задача 15.2. Заряженная частица, находясь в однородном электрическом поле переменного напряжения, движется в вертикальной плоскости под действием собственного веса P и силы поля $F = A \sin(kt)$ кН (A и k — заданные постоянные, t — время в с), сила поля всегда параллельна горизонтальной оси X .

Определить уравнения движения частицы, если при $t=0$ точка находилась в начале координат, ее начальная скорость равна нулю.

№16

Задача 16.1. Тело весом $P = 10$ н, брошенное вертикально вверх с начальной скоростью $v = 10$ м/с, испытывает сопротивление воздуха, определяемое формулой $R = 0,2v^2$ н, где v — скорость тела. Определить, на какую наибольшую высоту поднимется тело.

Задача 16.2. Определить уравнения криволинейного движения точки массы m , на которую действует сила отталкивания от начала координат, пропорциональная расстоянию от него. Коэффициент пропорциональности равен $k^2 m$. В начальный момент $x_0 = 0$; $y_0 = a$; $\dot{x}_0 = v_0$; $\dot{y}_0 = 0$. Весом точки пренебречь.

№17

Задача 17.1. Тело весом $P = 4,9$ н движется по горизонтальной прямой под действием силы $F = (2-t)$ н. Определить скорость точки через 6 с после начала движения, если $v_0 = 0$.

Задача 17.2. Тяжелая точка массой m движется в вертикальной плоскости под действием силы отталкивания от оси y (ось y — вертикальна). Величина

силы пропорциональна расстоянию точки от этой оси, коэффициент пропорциональности равен $k^2 m$.

Определить уравнения криволинейного движения точки, если в начальный момент $x_0=a$; $y_0=b$; $v_0=0$.

№18

Задача 18.1. Тело весом $9,8 \text{ н}$ движется по горизонтальной прямой, испытывая сопротивление среды, пропорциональное квадрату скорости, коэффициент пропорциональности $\mu=0,2 \frac{\text{н}}{\text{м}^2/\text{с}^2}$. Определить расстояние, которое пройдет точка прежде, чем ее скорость станет в три раза меньше начальной.

Задача 18.2. Тяжелая точка весом P движется в вертикальной плоскости под действием силы притяжения к оси y (ось y — вертикальна), величина силы пропорциональна расстоянию от этой оси, коэффициент пропорциональности равен C . Определить уравнения криволинейного движения точки, если в начальный момент $x_0=a$; $y_0=b$; $v_0=0$.

№19

Задача 19.1. Тело весом $P=10 \text{ н}$ падает с некоторой высоты H на землю без начальной скорости. Сопротивление воздуха определяется по формуле $R=\mu v^2$, где $\mu=0,2 \frac{\text{н}}{\text{м}^2/\text{с}^2}$ — коэффициент пропорциональности, v — скорость тела.

Определить высоту H , с которой падало тело, если в момент падения на землю скорость тела была равна 7 м/с .

Задача 19.2. Определить уравнения криволинейного движения точки массы m , на которую действует сила притяжения к началу координат, пропор-

циональная расстоянию от него. Коэффициент пропорциональности равен $k^2 m$. В начальный момент $x_0=a$; $y_0=0$; $\dot{x}_0=0$; $\dot{y}_0=v_0$. Весом точки пренебречь.

№ 20

Задача 20.1. Тело весом $P=9,8$ н находится на горизонтальной плоскости. В некоторый момент ему сообщена скорость v_0 . При движении тело испытывает сопротивление среды, пропорциональное первой степени скорости, коэффициент пропорциональности $\mu=0,5 \frac{\text{н}}{\text{м/с}}$.

Определить, через сколько времени скорость тела будет в два раза меньше начальной.

Задача 20.2. Тяжелая точка весом P движется в вертикальной плоскости под действием силы притяжения к оси y (ось y – вертикальна). Величина силы пропорциональна расстоянию точки от этой оси, коэффициент пропорциональности равен c .

Определить уравнения криволинейного движения точки, если в начальный момент $x_0=a$; $y_0=0$; $\dot{x}_0=0$; $\dot{y}_0=v_0$.

№ 21

Задача 21.1 Материальная точка движется прямолинейно по оси ox , притягиваемая к неподвижному центру O силой $F=4mx$ н, где m – масса точки, x – ее координата. В начальный момент точка находилась на расстоянии $5m$ от центра O . Определить скорость точки в момент, когда она достигает центра O , если $v_0=0$.

Задача 21.2. Определить уравнения криволинейного движения заряженной частицы массой m в однородном электрическом поле с переменным напряжением. Сила поля, действующая на частицу, равна $F=A \cdot \sin(kt)$ н (A и k – заданные постоянные, t – время в с). Сила всегда направлена

параллельно оси y . В начальный момент $x_0=a$; $y_0=0$; $\dot{x}_0=v_0$; $\dot{y}_0=0$. Весом точки пренебречь.

№22

Задача 22.1. Материальная точка движется прямолинейно по оси x , притягиваемая к центру O силой $F=0,2m/x^2$ н, где m – масса точки, x – ее координата. В начальный момент точка находилась на расстоянии $5m$ от центра O . Определить скорость точки в момент, когда она достигнет центра O , если $v_0=0$.

Задача 22.2. Определить уравнения криволинейного движения заряженной частицы массой m в однородном электрическом поле с переменным напряжением. Сила поля, действующая на частицу, равна $F=A \cdot \sin(kt)$ н (A и k – заданные постоянные, t – время в с). Сила всегда направлена параллельно оси y . В начальный момент $x_0=a$; $y_0=0$; $\dot{x}_0=v_0$; $\dot{y}_0=0$. Весом точки пренебречь.

№23

Задача 23.1. Материальная точка движется по оси ox , отталкиваемая от неподвижного центра O силой $F=3mx$ н, где m – масса точки, x – ее координата.

Определить скорость, которую будет иметь точка, пройдя с момента начала движения расстояние $2m$, если при $t=0$ $x_0=2m$; $v_0=0$.

Задача 23.2. Определить уравнения криволинейного движения заряженной частицы массой m в однородном электрическом поле с переменным напряжением. Сила поля, действующая на частицу, равна $F=A \cdot \cos(kt)$ н (A и k – заданные постоянные, t – время в с). Сила поля всегда направлена параллельно оси x .

В начальный момент $x_0=a$; $y_0=0$; $\dot{x}_0=0$; $\dot{y}_0=v_0$. Весом точки пренебречь.

№24

Задача 24.1. Тело весом $P=4,9\text{ н}$ движется по горизонтальной прямой под действием силы $F=5(1-t)\text{ н}$ (t — в с). Определить, через сколько времени тело остановится, если в начальный момент скорость тела была равна $2,2\text{ м/с}$ и направлена в сторону действующей силы.

Задача 24.2. Точка весом P движется в вертикальной плоскости под действием силы отталкивания от оси y (ось y — вертикальна); величина силы прямо пропорциональна расстоянию точки от оси, коэффициент пропорциональности равен $k^2\text{ м}$.

Определить уравнения криволинейного движения точки, если в начальный момент $x_0=a$; $y_0=0$; $\dot{x}_0=0$; $\dot{y}_0=v_0$.

№25

Задача 25.1. Тело весом $4,9\text{ н}$ движется горизонтально, начиная движение со скоростью $v_0=9\text{ м/с}$, в среде, сила сопротивления которой $R=3\sqrt{v}\text{ н}$, где v — скорость точки. Найти путь, пройденный точкой до остановки.

Задача 25.2. Заряженная частица, находясь в однородном электрическом поле переменного напряжения, движется в вертикальной плоскости под действием собственного веса P и силы поля $F=A\sin(kt)\text{ кн}$ (A и k — заданные постоянные, t — время в с). Сила поля всегда параллельна горизонтальной оси X .

Определить уравнения движения частицы, если при $t=0$ точка находилась в начале координат, ее начальная скорость равна нулю.

№26

Задача 26.1. Тело весом $P=10\text{ н}$, брошенное вертикально вверх с начальной скоростью $v_0=10\text{ м/с}$, испытывает сопротивление воздуха, определяемое формулой $R=0,2v^2\text{ н}$, где v — скорость тела. Определить, на какую наибольшую высоту поднимется тело.

Задача 26.2. Определить уравнения криволинейного движения точки массы m , на которую действует сила отталкивания от начала координат, пропорциональная расстоянию от него. Коэффициент пропорциональности равен $k^2 m$. При $t=0$ $x_0=0$; $y_0=a$; $\dot{x}_0=v_0$; $\dot{y}_0=0$. Весом точки пренебречь.

№27

Задача 27.1. Тело весом $P=4,9\text{ н}$ движется по горизонтальной прямой под действием силы $F=(2-t)\text{ н}$ (t — время в с). Определить скорость точки через b с после начала движения, если $v_0=0$.

Задача 27.2. Тяжелая точка массой m движется в вертикальной плоскости под действием силы отталкивания от оси y (ось y — вертикальна). Величина силы пропорциональна расстоянию точки от этой оси, коэффициент пропорциональности равен $k^2 m$. Определить уравнения криволинейного движения точки, если в начальный момент $x_0=a$; $y_0=b$; $v_0=0$.

№28

Задача 28.1. Тело весом $9,8\text{ н}$ движется по горизонтальной прямой, испытывая сопротивление среды, пропорциональное квадрату скорости, коэффициент пропорциональности $\mu=0,2 \frac{\text{н}}{\text{м}^2/\text{с}^2}$.

Определить расстояние, которое пройдет точка прежде, чем ее скорость станет в три раза меньше начальной.

Задача 28.2. Тяжелая точка весом P движется в вертикальной плоскости под действием силы притяжения к оси y (ось y — вертикальна). Величина силы пропорциональна расстоянию от этой оси, коэффициент пропорциональности равен c .

Определить уравнения криволинейного движения точки, если в начальный момент $x_0=a$; $y_0=b$; $v_0=0$.

3.2. Общие теоремы динамики механической системы

3.2.1. Теорема об изменении кинетической энергии механической системы

Пример. К грузу 1 массы m_1 прикреплена нерастяжимая нить, переброшенная через блок 2 массы m_2 , радиуса r_2 и намотанная на боковую поверхность катка 3 массы m_3 и радиуса r_3 . При движении груза 1 вниз по наклонной плоскости, расположенной под углом α к горизонту, вращается блок 2, а каток 3 катится без скольжения вверх по наклонной плоскости, образующей с горизонтом угол β . К блоку 2 приложен постоянный вращательный момент L , коэффициент трения качения катка 3 равен k , коэффициент трения скольжения груза 1 по наклонной плоскости равен f . Определить скорость груза 1 в зависимости от пройденного им пути S , если в начальный момент система находилась в покое.

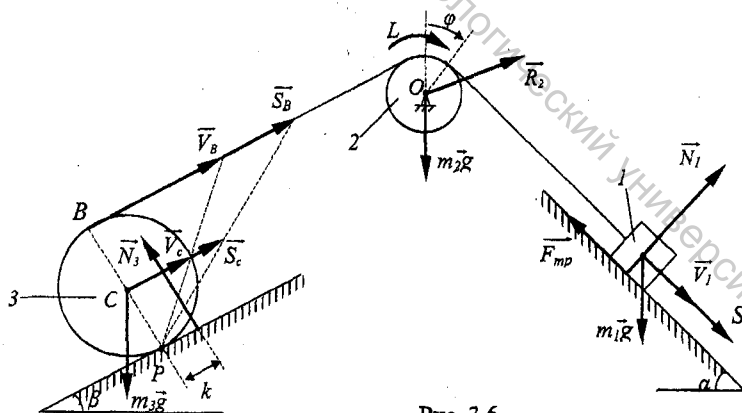


Рис. 3.6

Решение.

Так как требуется определить скорость груза, то к решению задачи применим теорему об изменении кинетической энергии механической системы в ко-

$$\text{нечной форме: } T - T_0 = \sum A_k^e. \quad (3.30)$$

Изобразим внешние силы, приложенные к системе: силы тяжести $m_1 \vec{g}$, $m_2 \vec{g}$, $m_3 \vec{g}$ груза, блока и катка, нормальная реакция $\vec{N}_1$ наклонной плоскости, вращающий момент L , сила трения скольжения $\vec{F}_{\text{тр}}$ груза о наклонную плоскость, реакция $\vec{R}_2$ оси блока 2, $\vec{N}_3$ — нормальная реакция наклонной плоскости, смещенная относительно центра инерции C катка на величину коэффициента трения качения k в сторону движения (рис. 3.6).

$$\text{Кинетическая энергия системы равна } T = T_1 + T_2 + T_3, \quad (3.31)$$

где T_1 , T_2 , T_3 — соответственно, кинетическая энергия груза, блока и катка.

Так как груз 1 движется поступательно, то $T_1 = m_1 V_1^2 / 2$.

Кинетическую энергию блока 2, вращающегося вокруг неподвижной оси O , найдем по формуле $T_2 = J_2 \omega_2^2 / 2$, где момент инерции блока $J_2 = m_2 r_2^2 / 2$, угловая скорость блока $\omega_2 = V_1 / r_2$. Тогда $T_2 = m_2 V_1^2 / 4$.

Каток 3 совершает плоскопараллельное движение, его кинетическая энергия равна $T_3 = m_3 V_c^2 / 2 + J_3 \omega_3^2 / 2$, где $J_3 = m_3 r_3^2 / 2$.

Так как каток катится без скольжения, то скорость точки касания его с неподвижной плоскостью равна нулю, т.е. эта точка P является мгновенным центром скоростей катка. Тогда имеем, что $\omega_3 = \frac{V_B}{BP} = \frac{V_1}{2r_3}$, $V_c = \frac{V_1}{2}$.

$$\text{Получим, что } T_3 = \frac{m_3}{2} \cdot \left(\frac{V_1}{2} \right)^2 + \frac{m_3 r_3^2}{4} \cdot \left(\frac{V_1}{2r_3} \right)^2 = \frac{3}{16} m_3 V_1^2.$$

Окончательно, кинетическая энергия системы

$$T = \frac{m_1 V_1^2}{2} + \frac{m_2 V_1^2}{4} + \frac{3}{16} m_3 V_1^2 = \frac{8m_1 + 4m_2 + 3m_3}{16} V_1^2. \quad (3.32)$$

В начальный момент система находилась в покое, поэтому $T_0 = 0$.

Найдем сумму работ внешних сил, приложенных к данной системе, при перемещении груза 1 на расстояние S . При этом необходимо перемещения точек приложения этих сил выразить через S .

Работа силы тяжести груза 1: $A(m_1 \vec{g}) = m_1 g S \cos(90^\circ - \alpha) = m_1 g S \sin \alpha$.

Работа силы трения скольжения: $A(\vec{F}_{mp}) = -F_{mp}S$.

Так как $F_{mp} = fN_1 = f m_1 g S \cos \alpha$, то $A(\vec{F}_{mp}) = -f m_1 g S \cos \alpha$.

Работа пары сил с вращающим моментом L : $A(L) = L \cdot \varphi$, где $\varphi = S/r_2$.

Тогда $A(L) = L \frac{S}{r_2}$.

Работа силы тяжести катка 3: $A(m_3 \vec{g}) = m_3 g S_c \cos(90^\circ + \beta)$.

Перемещение S_c центра масс катка: $S_c = S/2$.

Получим, что $A(m_3 \vec{g}) = -m_3 g (S/2) \sin \beta$.

Работа пары сил сопротивления качению катка 3:

$$A(M_c) = -M_c \cdot \varphi_3,$$

где M_c — момент пары сил сопротивления качению катка 3, причем

$M_c = N_3 \cdot k = m_3 g k \cos \beta$, φ_3 — угол поворота катка 3. Так как каток катится без скольжения, то его угол поворота $\varphi_3 = S_c / CP$, или $\varphi_3 = S / (2r_3)$.

Тогда $A(M_c) = -m_3 g k \frac{S}{2r_3} \cos \beta$

Окончательно, сумма работ внешних сил

$$\begin{aligned} \sum A_k^e &= m_1 g S \sin \alpha - f m_1 g S \cos \alpha + L \frac{S}{r_2} - m_3 g \frac{S}{2} \sin \beta - m_3 g k \frac{S}{2r_3} \cos \beta = \\ &= \left[m_1 (\sin \alpha - f \cos \alpha) + \frac{L}{gr_2} - \frac{m_3}{2} \left(\sin \beta + \frac{k}{r_3} \cos \beta \right) \right] gS. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Учитывая, что в начальный момент система находилась в покое, имеем $T_0 = 0$. Тогда, с учетом значений (3.32) и (3.33), равенство (3.30) примет вид:

$$\frac{8m_1 + 4m_2 + 3m_3}{4} V_1^2 = \left[m_1 (\sin \alpha - f \cos \alpha) + \frac{L}{gr_2} - \frac{m_3}{2} \left(\sin \beta + \frac{k}{r_3} \cos \beta \right) \right] gS.$$

Окончательно получим:

$$V_1 = 2 \sqrt{\frac{\left[m_1 (\sin \alpha - f \cos \alpha) + \frac{L}{gr_2} - \frac{m_3}{2} \left(\sin \beta + \frac{k}{r_3} \cos \beta \right) \right] gS}{8m_1 + 4m_2 + 3m_3}}.$$

3.2.2. Теорема об изменении кинетического момента

Пример 1.

По диаметру KL диска радиуса R , вращающегося вокруг вертикальной оси, движется груз с постоянной относительной скоростью U . В момент времени, когда груз находится в крайних положениях K и L , его относительная скорость равна нулю, а угловая скорость диска равна ω_1 . Определить угловую скорость диска в момент прохождения грузом центра C диска, если масса груза в четыре раза меньше массы диска. Груз считать точечной массой.

Решение.

Проведем координатные оси так, чтобы начало координат совпадало с опорой A , а ось Z совпадала с осью вращения. Изобразим внешние силы, действующие на рассматриваемую механическую систему (рис. 3.7):

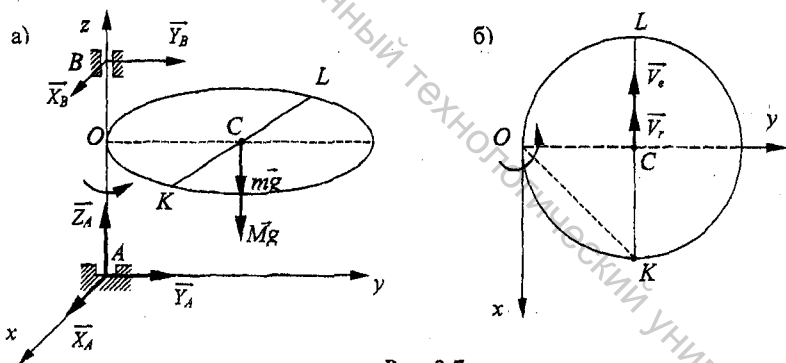


Рис. 3.7

$M\vec{g}$ — сила тяжести диска, $m\vec{g}$ — сила тяжести груза, $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B$ — составляющие реакций подпятника A и подшипника B . Применим теорему об изменении кинетического момента относительно оси Z :

$$\frac{dK_Z}{dt} = \sum m_k (F_k^e). \quad (3.34)$$

Так как силы $M\vec{g}$ и $m\vec{g}$ параллельны оси Z , а составляющие $\vec{X}_A, \vec{Y}_A, \vec{Z}_A, \vec{X}_B, \vec{Y}_B$ пересекают эту ось, то главный момент внешних сил относительно оси

Z равен нулю. Имеем, что кинетический момент системы относительно оси Z остается неизменным, т.е. $K_{Z1} = K_{Z2}$.

Определим кинетический момент данной системы в момент времени, когда груз занимает крайнее положение (находится, например, в точке K). Кинетический момент данной системы относительно оси Z равен:

$$K_{Z1} = K_{Z1}^g + K_{Z1}^{zp}, \quad (3.35)$$

где K_{Z1}^g — кинетический момент диска, K_{Z1}^{zp} — кинетический момент груза.

Кинетический момент диска, вращающегося вокруг оси Z :

$K_{Z1}^g = J_{Z1}^g \cdot \omega_1$, где J_{Z1}^g — момент инерции диска, который следует определить по теореме Гюйгенса-Штейнера.

$$J_{Z1}^g = \frac{MR^2}{2} + MR^2 = \frac{3}{2} MR^2. \quad \text{Тогда } K_{Z1}^g = 3/2 MR^2 \omega_1.$$

В рассматриваемый момент времени относительная скорость груза равна нулю, поэтому кинетический момент груза $K_{Z1}^{zp} = J_{Z1}^{zp} \cdot \omega_1$.

$$\text{Момент инерции груза } J_{Z1}^{zp} = m(OK)^2 = \frac{M}{4} (R\sqrt{2})^2 = \frac{MR^2}{2}.$$

$$\text{Получим, что } K_{Z1}^{zp} = \frac{MR^2}{2} \omega_1.$$

Кинетический момент системы в этот момент времени

$$K_{Z1} = \frac{3}{2} MR^2 \omega_1 + \frac{MR^2}{2} \omega_1 = 2MR^2 \omega_1. \quad (3.36)$$

Кинетический момент системы относительно оси Z при среднем положении груза равен алгебраической сумме кинетических моментов диска и груза, т.е. $K_{Z2} = K_{Z2}^g + K_{Z2}^{zp}$.

$$\text{Кинетический момент диска } K_{Z2}^g = J_{Z2}^g \omega_2 = \frac{3}{2} MR^2 \omega_2.$$

Груз совершает сложное движение: движение груза по диаметру KL диска — относительное, вращение диска вокруг оси Z — переносное.

Кинетический момент груза относительно оси Z : $K_{Z2}^{sp} = mV_a h$, где V_a — абсолютная скорость груза, h — кратчайшее расстояние от точки O до вектора абсолютной скорости груза. Вектор $\vec{V}_e$ переносной скорости груза направлен в сторону вращения диска перпендикулярно OC , по модулю $|V_e| = \omega_2 OC = R\omega_2$. Вектор $\vec{V}_r$ относительной скорости груза направлен вдоль диаметра KL . Применяя теорему о сложении скоростей точки $\vec{V}_a = \vec{V}_e + \vec{V}_r$, получим, что для данного положения груза абсолютная скорость равна алгебраической сумме переносной и относительной скоростей груза, т.е. $V_a = V_e + V_r = R\omega_2 + U$, а вектор $\vec{V}_a$ направлен вдоль радиуса CL , совпадая по направлению с векторами $\vec{V}_e$ и $\vec{V}_r$.

$$\text{Тогда } K_{Z2}^{sp} = m(R\omega_2 + U)R = \frac{M}{4}R^2\omega_2 + \frac{M}{4}RU.$$

Окончательно, кинетический момент системы при среднем положении груза равен

$$K_{Z2} = \frac{3}{2}MR^2\omega_2 + \frac{M}{4}R^2\omega_2 + \frac{M}{4}RU = \frac{7}{4}MR^2\omega_2 + \frac{M}{4}RU. \quad (3.37)$$

Приравняв значения (3.36) и (3.37), определим искомые значения угловой скорости диска: $2MR^2\omega_1 = \frac{7}{4}MR^2\omega_2 + \frac{M}{4}RU$, откуда $\omega_2 = \frac{8}{7}\omega_1 - \frac{U}{7R}$.

Пример 2.

Шарик A , находящийся в сосуде с жидкостью и прикрепленный с концом стержня AB длины a , приводится во вращение вокруг вертикальной оси MN с начальной угловой скоростью ω_0 . Сила сопротивления жидкости пропорциональна угловой скорости вращения $R = a\alpha\omega$, где m — масса шарика, α — коэффициент пропорциональности. Определить, через какой промежуток времени угловая скорость вращения станет в два раза меньше начальной, а также число оборотов N , которое сделает стержень с шариком за этот промежуток времени. Массу шарика считать сосредоточенной в его центре, M — масса стержня.

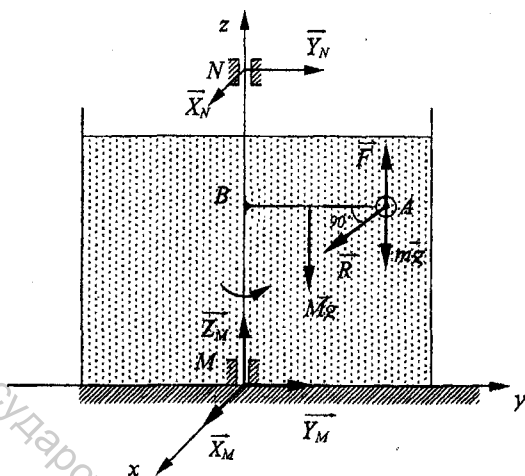


Рис. 3.8

Решение.

На данную механическую систему, состоящую из стержня AB и шарика A , действуют силы тяжести стержня $M\vec{g}$ и шарика $m\vec{g}$, архимедова сила $\vec{F}$, сила сопротивления $\vec{R}$, составляющие $\vec{X}_N$, $\vec{Y}_N$ подшипника N и составляющие $\vec{X}_M$, $\vec{Y}_M$, $\vec{Z}_M$ подпятника M . К решению задачи применим теорему об изменении кинетического момента механической системы относительно оси Z :

$$\frac{dK_Z}{dt} = \sum m_k (F_k^e). \quad (3.38)$$

Моменты внешних сил $M\vec{g}$, $m\vec{g}$, $\vec{F}$, $\vec{X}_N$, $\vec{Y}_N$, $\vec{X}_M$, $\vec{Y}_M$, $\vec{Z}_M$ относительно оси Z равны нулю (как силы либо параллельные, либо пересекающие ось Z). Получим, что $\sum m_k (F_k^e) = -R \cdot a = -\alpha m \omega \cdot a$.

$$(3.39)$$

Определим кинетический момент механической системы относительно оси

$$Z: K_Z = K_Z^{AB} + K_Z^A, \quad (3.40)$$

где K_Z^{AB} — кинетический момент стержня AB относительно оси Z , K_Z^A — кинетический момент шарика A .

Кинетический момент стержня AB во вращательном движении вокруг оси

$$Z: K_Z^{AB} = J_Z^{AB} \cdot \omega = \frac{Ma^2}{3} \cdot \omega.$$

Кинетический момент шарика A : $K_Z^A = J_Z^A \cdot \omega = ma^2 \cdot \omega.$

$$\text{Тогда получим, что } K_Z = \frac{Ma^2}{3} \omega + ma^2 \omega = \frac{M+3m}{3} a^2 \omega. \quad (3.41)$$

Подставив выражения (3.39) и (3.41) в (3.38), имеем:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{M+3m}{3} a^2 \omega \right) = -\alpha m a \omega \quad \text{или} \quad \frac{M+3m}{3} a \frac{d\omega}{dt} = -\alpha m \omega. \quad (3.42)$$

В дифференциальном уравнении (3.42) разделим переменные и проинтегрируем полученное выражение:

$$\frac{M+3m}{3} a \frac{d\omega}{\omega} = -\alpha m dt \quad \text{или} \quad \frac{M+3m}{3} a \int_{\omega_0}^{\omega} \frac{d\omega}{\omega} = -\alpha m \int_0^T dt.$$

В результате интегрирования последнего выражения найдем искомое значение времени T :
$$T = \frac{(M+3m)a}{3\alpha m} \ln 2. \quad (3.43)$$

Для определения числа N оборотов стержня умножим правую и левую

$$\text{часть уравнения (3.42) на } d\varphi: \frac{M+3m}{3} a \frac{d\omega}{dt} d\varphi = -\alpha m \omega d\varphi.$$

$$\text{Учитывая, что } \frac{d\varphi}{dt} = \omega, \text{ получим: } \frac{M+3m}{3} a d\omega = -\alpha m d\varphi. \quad (3.44)$$

Проинтегрировав выражение (3.44), найдем значение угла поворота φ стержня за тот промежуток времени, когда угловая скорость вращения умень-

$$\text{шится вдвое: } \frac{M+3m}{3} a \int_{\omega_0}^{\omega_0/2} d\omega = -\alpha m \int_0^{\varphi} d\varphi, \quad \text{откуда } \varphi = \frac{(M+3m)a}{6\alpha m} \omega_0.$$

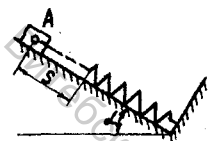
Из формулы $\varphi = 2\pi N$ найдем искомое значение числа оборотов:

$$N = \frac{(M+3m)a}{12\pi\alpha m} \omega_0.$$

3.2.3. Задачи для механических специальностей

№ 1

Задача 1.1. Тело A весом P , положенное на гладкую наклонную плоскость,



начинает скользить вниз без начальной скорости. Пройдя расстояние, равное S , ударяется о пружину с коэффициентом жесткости C . Определить, пренебрегая массой пружины, наибольшее сжатие ее, если угол наклона плоскости

к горизонту равен α .

Задача 1.2. Однородный горизонтальный диск радиуса R и весом P может вращаться вокруг неподвижной оси, проходящей через его центр. С какой угловой скоростью будет вращаться диск, если по его ободу будет двигаться точка

по закону $S = \frac{at^2}{2}$. В начальный момент система была в покое. Вес точки равен

Q .

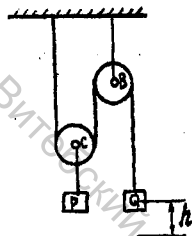
№ 2

Задача 2.1. На тело массы m , скользящее по горизонтальной прямой, действует сила притяжения к центру O , расположенному на этой прямой. Сила притяжения пропорциональна расстоянию тела от центра, коэффициент пропорциональности k^2m . Считая, что движение тела началось из пункта M_0 , удаленного от центра O на расстояние l , с начальной скоростью v_0 , определить, пренебрегая трением, скорость тела в момент, когда оно находится на расстоянии S от центра O .

Задача 2.2. Однородная платформа весом P и радиуса R вращается в горизонтальной плоскости вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр O , с угловой скоростью ω_0 . На краю платформы стоят два человека весом Q_1 и Q_2 ($Q_2 = 2Q_1$). Как изменится угловая скорость платформы, если люди будут двигаться по краю платформы навстречу друг другу со скоростью v относительно

платформы, полагая при этом, что человек весом Q_1 идет в сторону вращения платформы?

№ 3

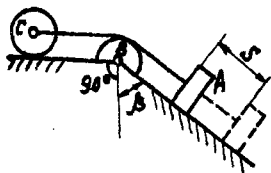


Задача 3.1. К системе блоков, изображенной на чертеже, подвешены грузы P и Q , причем $P < 2Q$. Определить скорость груза Q в зависимости от расстояния h , если в начальный момент система находилась в покое и $h=0$. Массой блоков пренебречь.

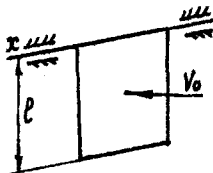
Задача 3.2. Тело весом P качается около оси O , проходящей через это тело на расстоянии $OC=l$ от центра тяжести C . Определить момент инерции тела относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр тяжести тела. Известно, что период малых колебаний тела равен T .

№ 4

Задача 4.1. Механическая система, состоящая из груза A весом $2p$, катка C и блока B одинакового веса P и радиуса r , приходит в движение из состояния покоя под действием сил тяжести. Считая известным угол β , коэффициент трения скольжения f груза A по плоскости, коэффициент K трения качения катка и пренебрегая массой нитей, определить скорость груза A , когда он переместится на расстояние S в положение, изображенное на схеме штриховыми линиями. Каток и блок считать однородными круглыми дисками.



Задача 4.2. Деревянная доска длиной l и весом P может вращаться без трения вокруг горизонтальной оси X . В некоторый момент в середину неподвижной доски попадает пуля весом P , летевшая перпендикулярно к ней со скоростью v_0 .

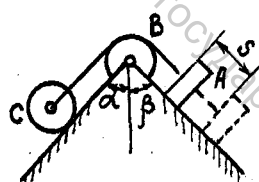


Определить угловую скорость, которую приобретает доска в момент попадания

пули. Момент инерции доски $J_x = \frac{Pl^2}{3q}$.

№ 5

Задача 5.1. Механическая система, состоящая из груза A весом $2p$, катка C и блока B одинакового веса P и радиуса r , приходит в движение из состояния покоя под действием сил тяжести. Считая, что коэффициент трения скольжения груза A по плоскости равен f , коэффициент трения качения катка C равен K , и

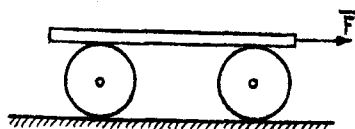


пренебрегая массой нитей, определить скорость груза A , когда он переместится на расстояние S в положение, изображенное на схеме штриховыми линиями, $\beta = \alpha$. Каток и блок считать однородными круглыми дисками.

Задача 5.2. Кольцо радиуса R вращается вокруг вертикального диаметра с угловой скоростью ω_0 . В некоторый момент из наивысшей точки по кольцу начинает двигаться точка массы m . Найти отношение наибольшей угловой скорости вращения кольца к наименьшей. Момент инерции кольца относительно оси вращения равен J .

№ 6

Задача 6.1. Доска весом P положена на два однородных катка весом Q каждый.

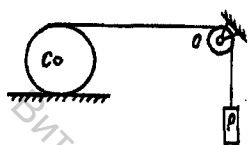


На доску действует горизонтальная сила $\vec{F}$. Считая, что в начальный момент доска находится в покое, определить скорость в момент, когда она переместится на расстояние S .

Задача 6.2. Однородный диск радиуса r совершает колебания вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной к плоскости диска и отстоящей от центра диска на расстоянии $r/2$. Найти период малых колебаний диска.

№ 7

Задача 7.1. Груз весом P , привязанный к веревке, перекинутой через блок



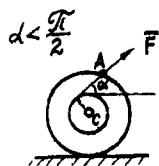
O , опускаясь под действием собственного веса, приводит в движение однородный цилиндр весом Q , который катится без скольжения по горизонтальной плоскости. Найти скорость центра тяжести C

цилиндра в тот момент, когда груз P опустится на расстояние h . Вначале система находилась в покое. Весом блока пренебречь.

Задача 7.2. Момент инерции цилиндра относительно его геометрической оси равен J_z , радиус основания r . Известно, что цилиндр совершает N оборотов в минуту. Определить постоянную тормозящую силу, которую нужно приложить к окружности цилиндра, чтобы остановить его через промежуток времени, равный t секунд.

№ 8

Задача 8.1 Катущка весом P и радиуса r перекатывается по горизонтальной



ной плоскости посредством силы F , приложенной к концу A нити, намотанной на барабан радиуса r_1 . Считая известным угол α , определить скорость центра масс катущки, когда он пройдет из состояния покоя расстояние S . Радиус инерции катущки относительно оси, проходящей через центр C , равен ρ . Коэффициент трения качения равен K .

тушки относительно оси, проходящей через центр C , равен ρ . Коэффициент трения качения равен K .

Задача 8.2. Барабан весом Q , радиуса r приводится во вращение вокруг горизонтальной оси постоянным крутящим моментом. На барабан наматывается трос, к свободному концу которого подвешен груз весом P . Пренебрегая массой троса, его растяжением и сопротивлением среды, определить скорость подъема

груза через t секунд после начала движения из состояния покоя. Масса барабана равномерно распределена по его ободу.

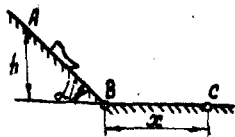
№ 9

Задача 9.1. Перемещение катка A обеспечивается тросом лебедки, который наматывается на барабан B , жестко связанный с зубчатым колесом II . Колесо II находится в зацеплении с приводным колесом I . Система приводится в движение из состояния покоя постоянным крутящим моментом M , приложенным к колесу I . Однородный сплошной каток радиуса r весит $4P$. Общий вес барабана и колеса II равен $4P$, радиус инерции их относительно оси вращения $\rho=r$. Колесо I – однородный сплошной диск весом P радиуса r . Определить скорость центра масс катка A , когда приводное колесо I сделает N оборотов. Учесть сопротивление качения катка A , коэффициент которого равен K .

Задача 9.2. Однородный диск радиуса R и весом Q может вращаться без трения вокруг вертикального диаметра. В некоторый момент в точку неподвижного диска, отстоящую на расстоянии $R/2$ от вертикального диаметра, попадает пуля, летящая перпендикулярно плоскости диска со скоростью v . Вес пули равен P . Определить угловую скорость диска, которую он приобретает в момент попадания пули.

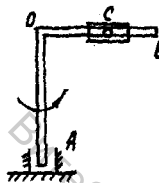
№ 10

Задача 10.1. Сани скатываются с наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом, причем начальная высота саней равна h . Найти скорость саней



в конце наклонной плоскости, а также расстояние x , которое сани пройдут до остановки по горизонтальной плоскости, если коэффициент трения по всему пути одинаков и равен f .

Задача 10.2. Стержень, имеющий форму прямого угла AOB , может вращаться вокруг своей вертикальной стороны AO . На горизонтальную его сторону OB насажен груз C массы m . В начальный момент груз находится на расстоянии l от точки O и системе сообщают угловую скорость ω_0 вокруг оси AO . Найти зависимость между угловой скоростью ω и расстоянием $OC=X$, если момент инерции стержня относительно оси AO равен J_z .



№ 11

Задача 11.1. Однородный цилиндрический каток радиуса R вкатывается на наклонную плоскость. Скорость центра катка в начальный момент параллельна линии наибольшего ската наклонной плоскости и равна v_0 . Угол наклона плоскости к горизонту α , коэффициент трения качения равен K . Определить путь, пройденный осью катка до остановки, предполагая, что каток катится без скольжения.

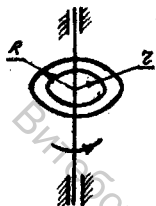
Задача 11.2. Однородная платформа радиуса R и весом P вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр платформы, с угловой скоростью ω_0 . В начальный момент от центра платформы по диаметру в противоположные стороны начинают двигаться материальные точки весом Q_1 и Q_2 с одинаковой скоростью U относительно платформы. Определить угловую скорость платформы через t секунд после начала движения этих точек.

№ 12

Задача 12.1. Груз A весом P_1 , опускаясь вниз по гладкой наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом, приводит в движение посредством невесомой и нерастяжимой нити, переброшенной через однородный блок C весом Q , груз B весом P_2 . Определить, какое расстояние пройдет из состояния покоя груз A к моменту времени, когда скорость груза B станет равной v .



Задача 12.2. Однородная круглая горизонтальная пластина радиуса R и весом Q вращается с угловой скоростью ω_0 вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр, вместе с человеком весом P , находящимся на расстоянии r от оси вращения. С какой скоростью будет вращаться платформа, если человек пойдет по окружности радиуса r с постоянной относительной скоростью v в сторону, противоположную вращению платформы?



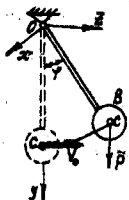
№ 13

Задача 13.1. Два цилиндра одинакового веса и радиуса скатываются независимо один от другого без проскальзывания по наклонной плоскости. Первый цилиндр — сплошной, масса второго равномерно распределена по ободу. Найти зависимость между скоростями центров тяжести цилиндров при опускании их на одну и ту же высоту, считая, что в начальный момент цилиндры находились в покое. Трение качения не учитывать.

Задача 13.2. Два человека весом P каждый стоят на концах горизонтальной балки длиной $2l$ весом P_1 , вращающейся вокруг вертикальной оси, проходящей через ее середину с угловой скоростью ω_0 . Как изменится угловая скорость балки, если оба человека переместятся по балке к оси вращения на равные отрезки длиной $l/2$? Сопротивлением движению пренебречь.

№ 14

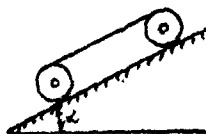
Задача 14.1. Маятник, подвешенный к оси OX , состоит из однородного диска весом P радиуса r и невесомого стержня OB длиной $2r$. В положении равновесия центру тяжести C диска сообщили скорость v_0 . На какой угол отклонится маятник?



Задача 14.2. Горизонтальная балка AB весом P и длиной $2l$ вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через середину балки, с угловой скоростью ω_0 . В некоторый момент по балке от оси вращения начинают двигаться два человека в противоположные стороны с постоянной скоростью U относительно балки. Вес людей: $P_1 = 1/4P$; $P_2 = 1/2P$. Определить угловую скорость балки через t секунд после начала движения людей. Сопротивлением движению пренебречь.

№ 15

Задача 15.1. Гусеничная тележка, состоящая из двух однородных катков весом Q каждый и гусеницы весом P , скатывается без начальной скорости с наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом. Какое расстояние S пройдет тележка по наклонной плоскости к моменту времени, когда ее скорость станет равной V ?

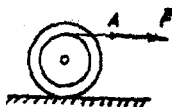


Задача 15.2. На шкив радиуса r намотана нить, к концу которой привязан груз весом P . Опускаясь, груз вращает шкив с угловым ускорением ε . Пренебрегая весом нити, определить момент инерции шкива относительно оси O .



№ 16

Задача 16.1. катушка весом P и радиуса r перекачивается по плоскости посредством горизонтальной силы $\vec{F}$, приложенной к концу A нити, намотанной на барабан радиуса r_1 . Определить скорость центра масс катушки, когда она пройдет из состояния покоя расстояние S . Радиус инерции катушки относительно оси, проходящей через центр C , равен ρ . Коэффициент трения качения равен K .



Задача 16.2. На барабан весом Q , радиуса r намотана невесомая нерастя-

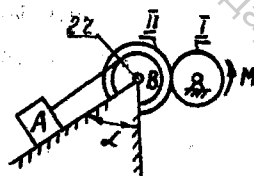


жимая нить, к концу которой подвешен груз весом P . Система движется под действием силы тяжести груза. Учитывая момент сил сопротивления среды, пропорциональный угловой скорости барабана

($M_s = k\omega$), определить угловую скорость барабана через t секунд после начала движения из состояния покоя. Масса барабана равномерно распределена по ободу.

№ 17

Задача 17.1 Перемещение тела A обеспечивается тросом лебедки, который



наматывается на барабан B , жестко связанный с зубчатым колесом II . Колесо II находится в зацеплении с приводным колесом I . Система приводится в движение из состояния покоя постоянным крутящим моментом M , приложенным к колесу I . Вес груза A

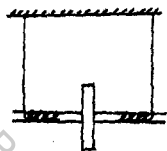
равен $4P$. Общий вес барабана и колеса II равен $2P$, радиус инерции их относительно оси вращения $\rho = r$. Колесо I — однородный диск весом P радиуса r . Определить скорость центра масс тела A , когда приводное колесо I сделает N оборотов, считая известным угол α . Трением пренебречь.

Задача 17.2. Однородный шар радиуса R и веса Q может вращаться вокруг вертикального диаметра. С какой угловой скоростью будет вращаться шар, если по большому горизонтальному кругу начинает движение материальная точка весом P с относительной скоростью U ? В начальный момент шар и точка находятся в покое. Момент инерции шара относительно оси, направленной вдоль диаметра, $J_z = \frac{2QR^2}{5q}$.

$$J_z = \frac{2QR^2}{5q}$$

№ 18

Задача 18.1. Однородный диск радиусом R и весом P жестко насажен на цилиндрический вал радиусом r и поддерживается двумя нитями, намотанными на вал. Определить скорость центра диска, когда он опустится на расстояние S . Весом вала пренебречь.

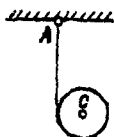


Задача 18.2. Шкив радиуса r и весом Q приводится во вращение с помощью ременной передачи, натяжения ветвей которой равны T_1 и T_2 ($T_1 > T_2$). Момент сил сопротивления равен M . Определить угловое ускорение шкива ϵ , считая, что масса его равномерно распределена по ободу.

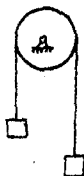


№ 19

Задача 19.1. Однородный цилиндр радиуса R и весом P посередине обмотан гибким невесомым тросом, конец которого закреплен в неподвижной точке A . Определить скорость v оси цилиндра в зависимости от пройденного при падении расстояния S . Кроме того, определить ускорение оси и натяжение троса.



Задача 19.2. Через блок весом Q перекинута гибкая нить, к концам которой прикреплены грузы весом P_1 и P_2 ($P_1 > P_2$). Пренебрегая весом нити, определить ускорение грузов, считая, что масса блока равномерно распределена по его ободу.



№ 20

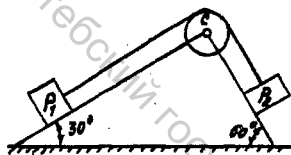
Задача 20.1. Тяжелый канат длиной L , обвивающий блок радиуса r , свешивается одним концом на длину l_0 . Какую угловую скорость ω приобретет блок, когда длина свешивающейся части станет равной X ? Момент инерции блока относительно оси вращения J , вес единицы длины каната q .



Задача 20.2. Определить период малых колебаний физического маятника, представляющего собой однородный диск радиуса r , колеблющийся вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной плоскости диска и проходящей через точку на ободе диска?

№ 21

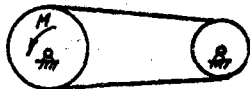
Задача 21.1. Два груза весом P_1 и P_2 , соединенные тросом, перекинуты через блок C и находятся на шероховатых наклонных плоскостях, образующих углы 30° и 60° с горизонтом. Пренебрегая весом троса и блока, определить скорость грузов к моменту, когда груз P_1 опустится на высоту h . Коэффициент трения груза о плоскость равен f .



Задача 21.2. Шкив радиуса R и весом Q вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр шкива, перпендикулярно его плоскости с угловой скоростью ω_0 . Через сколько времени угловая скорость шкива уменьшится вдвое, если момент торможения равен $M = k\omega^3$. Массу шкива считать равномерно распределенной по его ободу.

№ 22

Задача 22.1. Два однородных цилиндра весом P_1 и P_2 соединены бесконечным ремнем. К ведущему цилиндру весом P_1 и радиусом R_1 прикладывается вращающий момент M . Пренебрегая весом ремня, определить, сколько оборотов N сделает ведущий цилиндр, когда его угловая скорость станет равной ω .

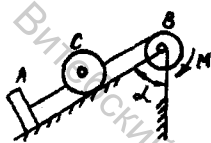


Задача 22.2. Шкив радиуса R и весом P вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр шкива перпендикулярно к его плоскости с угловой скоростью ω_0 . Через сколько оборотов угловая скорость шкива

уменьшится в 4 раза, если момент сил торможения равен $M=k\omega^2$? Массу шкива считать равномерно распределенной по ободу.

№ 23

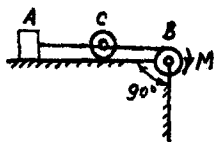
Задача 23.1. Механическая система, состоящая из груза A весом $2P$, катка C весом P и радиуса r , приводится в движение из состояния покоя крутящим моментом $M=6P^2$, приложенным к барабану. Определить угловую скорость барабана, когда он делает N оборотов. Известны угол α и коэффициент трения качения K катка. Трением скольжения груза о плоскость и массой канатов пренебречь. Барабан и каток — однородные круглые диски.



Задача 23.2. Два человека равного веса P стоят на горизонтальной балке длиной $2l$ и весом Q . Один человек стоит в центре балки, а другой — на ее конце. Балка вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через середину балки, с угловой скоростью ω_0 . Затем люди начинают движение навстречу друг другу с одинаковой скоростью относительно балки. Определить угловую скорость балки в момент встречи людей. Сопротивлением движению пренебречь.

№24

Задача 24.1. Механическая система, состоящая из груза A весом $2P$, катка C весом P радиуса r и барабана B весом P радиуса r , приводится в движение из состояния покоя крутящим моментом $M=6P^2$, приложенным к барабану. Определить угловую скорость барабана, когда он делает N оборотов, если известны коэффициент трения скольжения f груза A и коэффициент трения качения K катка C . Массой канатов пренебречь, каток и барабан считать однородными круглыми дисками.



Задача 24.2 Горизонтальная трубка весом Q и длиной $2l$ вращается вместе с находящимся внутри шариком весом P вокруг вертикальной оси, проходящей через конец трубки, с угловой скоростью ω_0 . В начальный момент шарик находится на расстоянии l от оси вращения и его относительная скорость равна нулю. Определить угловую скорость вращения точки в момент, когда шарик вылетит из него.

№25

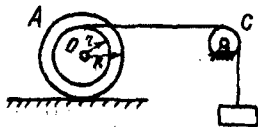
Задача 25.1. Колесо A весом Q , скатываясь по наклонной плоскости под углом α к горизонту, посредством невесомой нити, переброшенной через блок C , поднимает груз B весом P . Какое расстояние S пройдет груз B по наклонной плоскости, наклоненной под углом β к горизонту, когда центр O колеса A приобретет скорость v ? Колесо и блок считать дисками одинакового веса и радиуса. Трением пренебречь.



Задача 25.2. Стержень длиной l и весом P вращается в горизонтальной плоскости вокруг оси, проходящей через его середину. Момент сил сопротивления при вращении стержня $M_{сопр} = k\omega^3$. В начальный момент стержню была сообщена угловая скорость ω_0 . Через сколько оборотов N угловая скорость уменьшится вчетверо?

№26

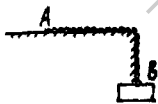
Задача 26.1. Груз весом P , спускаясь вниз посредством нерастяжимой нити, перекинутой через блок C , приводит в движение ступенчатый диск A , момент инерции которого относительно центра O равен I_0 , вес Q , а радиус R . Определить скорость груза к моменту, когда он пройдет из состояния покоя расстояние S , если радиус барабана, на который намотана нить, равен r . Весом блока пренебречь.



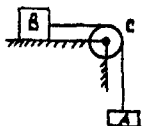
Задача 26.2. Стержень длиной l и весом P может вращаться в горизонтальной плоскости вокруг оси, проходящей через середину. К неподвижному вначале стержню приложен постоянный момент M . Через сколько времени T стержень приобретет заданную угловую скорость ω_T , если момент сил сопротивления $M_{\text{сопр}} = k\omega$ ($M > k\omega$)?

№27

Задача 27.1. Цепочка длиной l и весом Q лежит на горизонтальном гладком столе. К концу цепочки привязан груз весом P . Вначале система находится в покое, а конец B цепочки — на краю стола. Определить скорость v цепочки в момент, когда конец A ее окажется на краю стола.

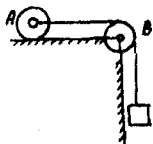


Задача 27.2. Груз A весом P_1 , опускаясь вниз, приводит в движение посредством невесомой нити, переброшенной через однородный блок C весом Q , груз B весом P_2 . Определить ускорение грузов, пренебрегая трением скольжения.



№28

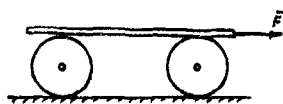
Задача 28.1. Груз весом P , опускаясь вниз, приводит в движение каток A радиуса r и весом Q посредством невесомой и нерастяжимой нити, перекинутой через блок B . Какую скорость приобретет груз из состояния покоя, когда он опустится на высоту h , если коэффициент трения качения равен k ? Каток и блок считать однородными дисками одинакового веса и радиуса.



Задача 28.2. Однородному полному цилиндру, имеющему внешний радиус R и вес P , насаженному на вал радиуса r , сообщена начальная угловая скорость ω_0 . Через сколько времени цилиндр остановится, если коэффициент трения равен f ?

№ 29

Задача 29.1. Доска весом P положена на два однородных катка весом Q



каждый. На доску действует горизонтальная сила $\vec{F}$. Считая, что в начальный момент доска находится в покое, определить ее скорость в

момент, когда она переместится на расстояние S .

Задача 29.2. Однородный диск радиуса r совершает колебания вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной к плоскости диска и отстоящей от центра диска на расстоянии $r/2$. Найти период малых колебаний диска.

№30

Задача 30.1. На какое расстояние может вкатиться по наклонной плоскости однородный диск, центр которого в начальный момент обладает скоростью v_0 , параллельной наклонной плоскости? Угол наклона плоскости к горизонту равен α , трения качения не учитывать.

Задача 30.2. Стержень длиной l и весом P вращается в горизонтальной плоскости вокруг оси, проходящей через его конец. Стержень испытывает при этом сопротивление воздуха. Момент сил сопротивления относительно оси вращения прямо пропорционален квадрату угловой скорости стержня, коэффициент пропорциональности равен k . В начальный момент стержню была сообщена угловая скорость ω_0 . Определить, через какой промежуток времени скорость стержня уменьшится вдвое.

3.2.4. Задачи для немеханических специальностей

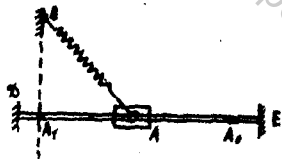
№ 1

Задача 1.1 Горизонтальной круглой платформе радиуса R весом P , име-



ющей вертикальную ось вращения, проходящую через центр платформы O , сообщается скорость ω_0 . Человек A весом Q , находившийся в начальный момент в центре платформы, идет вдоль радиуса OB . Найти угловую скорость платформы как функцию расстояния $OA = X$, принимая платформу за однородный диск.

Задача 1.2. Ползун A весом P может двигаться без трения по горизонталь-



ной направляющей ED под действием пружины жесткостью C , закрепленной в точке B . Определить, с какой скоростью ползун придет в точку A_1 , если в начальный момент времени он находился в покое в

точке A_0 , причем $A_0A_1 = S$. Принять, что когда ползун находился в положении A_0 , пружина не деформирована и ее длина равна l .

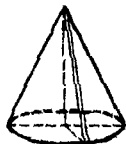
№ 2

Задача 2.1. На однородный шкив радиуса r весом Q , вращающийся вокруг



горизонтальной оси O , накинута веревка, к которой привязана гиря весом P . В начале система находилась в покое. Найти угловую скорость шкива в тот момент, когда гиря опустится на расстояние h . Весом веревки и трением на оси пренебречь.

Задача 2.2. Вдоль образующей однородного круглого конуса массой M ,

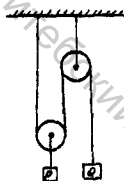


ось которого вертикальна и вершина обращена вверх, просверлен канал. Конусу сообщают угловую скорость ω_0 вокруг его оси и одновременно с этим опускают в верхнее отверстие канала шарик массой m , не сообщая ему начальной скорости. Какова будет уг-

ловая скорость конуса в момент, когда шарик вылетает из канала? Момент инерции конуса относительно оси вращения $J = \frac{3}{10} Mr^2$, где r — радиус основания конуса.

№ 3

Задача 3.1. К системе блоков, изображенной на чертеже, подвешены грузы P и Q , причем $P < 2Q$. Определить скорость груза Q в зависимости от расстояния h , если в начальный момент система находилась в покое и $h=0$. Массой блоков пренебречь.



Задача 3.2. Тело весом P качается около оси O , проходящей через это тело на расстоянии $OC=l$ от центра тяжести C . Определить момент инерции тела относительно оси, параллельной данной и проходящей через центр тяжести тела. Известно, что период малых колебаний тела равен T .

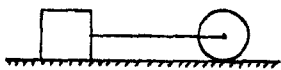
№ 4

Задача 4.1. Горизонтальная трубка OA весом P и длиной $2l$ вместе с шариком, находящимся в ней на расстоянии l от конца O и привязанным нитью к этому концу, сначала вращается по инерции вокруг вертикальной оси, проходящей через точку O , с постоянной угловой скоростью ω_0 . Затем нить пережигается. Определить угловую скорость вращения трубки в тот момент, когда шарик вылетает из нее. Вес шарика Q . При определении момента инерции трубку можно считать однородным стержнем.

Задача 4.2. Однородный каток радиуса R катится без скольжения по горизонтальной плоскости. Начальная скорость его центра равна v_0 . Какое расстояние S каток пройдет до остановки, если коэффициент трения качения равен k ?

№ 5

Задача 5.1. Однородный цилиндрический каток веса P катится без скольжения по горизонтальной поверхности, перемещая за собой груз весом Q , связанный с осью катка веревкой. В начальный момент оси катка сообщается скорость v_0 . Найти, на каком расстоянии остановится каток, если коэффициент трения между грузом Q и землей равен f . Трением качения пренебречь.

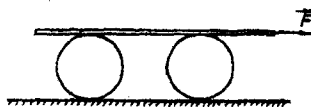


Задача 5.2. На неподвижное вначале маховое колесо весом P и радиуса R действует пара сил с моментом M , плоскость которой перпендикулярна к оси колеса. Через сколько времени колесо приобретет угловую скорость в n оборотов в минуту, считая, что масса колеса равномерно распределена по ободу?

№ 6

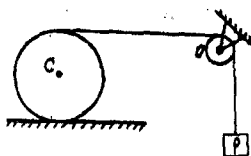
Задача 6.1. Однородный диск радиуса R совершает малые колебания вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной к плоскости диска и отстоящей от центра диска на расстоянии $R/2$. Найти период малых колебаний диска.

Задача 6.2. Доска весом P положена на два однородных катка весом Q каждый. На доску действует горизонтальная сила F . Считая, что в начальный момент доска находится в покое, определить ее скорость в момент, когда она переместится на расстояние S . Скольжение между доской и катками, а также между катками и горизонтальной плоскостью отсутствует.



№ 7

Задача 7.1. Груз весом P , привязанный к веревке, перекинутой через блок O , опускаясь под действием собственного веса, приводит в движение однородный цилиндр весом Q , который катится без скольжения по горизонтальной



плоскости. Найти скорость центра тяжести C цилиндра в тот момент, когда груз P опустится на расстояние h . Вначале система находилась в покое. Весом блока пренебречь.

Задача 7.2. Момент инерции цилиндра относительно его геометрической оси равен J_z , радиус основания r . Известно, что цилиндр совершает n оборотов в минуту. Определить постоянную тормозящую силу, которую нужно приложить к окружности цилиндра, чтобы остановить его через промежуток времени, равный t секунд.

№ 8

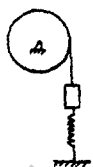
Задача 8.1. На какое расстояние S может вкатиться по наклонной плоскости однородный диск, центр которого в начальный момент обладает параллельной наклонной плоскости скоростью v_0 ? Угол наклона плоскости к горизонту равен α . Трения качения не учитывать.

Задача 8.2. Стержень длиной l и весом P вращается в горизонтальной плоскости вокруг оси, проходящей через его конец. Стержень испытывает при этом сопротивление воздуха. Момент сил сопротивления относительно оси вращения прямо пропорционален квадрату угловой скорости стержня, коэффициент пропорциональности равен k . В начальный момент стержню была сообщена угловая скорость ω_0 . Определить, через какой промежуток времени угловая скорость стержня уменьшится вдвое.

№ 9

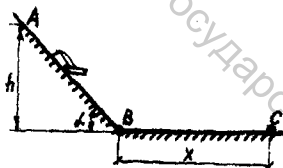
Задача 9.1. Определить период малых колебаний физического маятника, представляющего собой однородный диск радиуса R , колеблющийся около горизонтальной оси, перпендикулярной плоскости диска. Ось проходит через точку на ободе диска.

Задача 9.2. На однородный сплошной цилиндр с массой m_1 навит трос, к концу которого подвешен груз с массой m_2 . Груз соединен с неподвижным основанием пружиной с жесткостью C . Поворачивая цилиндр, груз поднимают до положения, при котором пружина растянута на длину S , и отпускают без начальной скорости. Определить скорость груза в положении, при котором упругое усилие в пружине отсутствует.

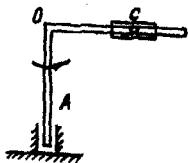


№ 10

Задача 10.1. Сани скатываются с наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом, причем начальная высота саней равна h . Найти скорость саней в конце наклонной плоскости, а также расстояние x , которое сани пройдут до остановки по горизонтальной плоскости, если коэффициент трения по всему пути одинаков и равен f .

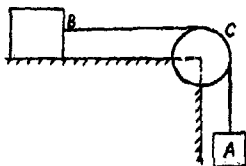


Задача 10.2. Стержень, имеющий форму прямого угла AOB , может вращаться вокруг своей вертикальной стороны AO . На горизонтальную его сторону OB насажен груз C массы m . В начальный момент груз находится на расстоянии l от точки O , и системе сообщают угловую скорость ω_0 вокруг оси AO . Найти зависимость между угловой скоростью ω и расстоянием $OC = x$, если момент инерции стержня относительно оси AO равен J_z .



№ 11

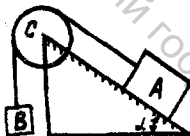
Задача 11.1. Груз весом P_1 , спускаясь вниз, приводит в движение груз B весом P_2 посредством невесомой и нерастяжимой нити, переброшенной через однородный блок C весом Q . Определить скорость движения грузов, когда груз A опустится на расстояние h . Вначале система была неподвижной.



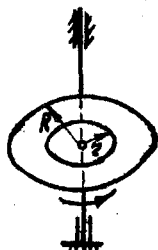
Задача 11.2. Однородный диск радиуса R совершает малые колебания вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной плоскости диска и отстоящей от центра диска на расстоянии $l = \frac{3}{4}R$. Определить период колебаний диска.

№ 12

Задача 12.1. Груз A весом P_1 , опускаясь вниз по гладкой наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом, приводит в движение посредством невесомой и нерастяжимой нити, переброшенной через однородный блок C весом Q , груз B весом P_2 . Определить, какое расстояние пройдет из состояния покоя груз A к моменту времени, когда скорость груза B станет равной v .



Задача 12.2. Однородная круглая горизонтальная пластина радиуса R и весом Q вращается с угловой скоростью ω_0 вокруг вертикальной оси, проходящей через ее центр, вместе с человеком весом P , находящимся на расстоянии r от оси вращения. С какой скоростью будет вращаться платформа, если человек пойдет по окружности радиуса r с постоянной относительной скоростью v в сторону, противоположную вращению платформы?



№ 13

Задача 13.1. Однородный диск радиуса R совершает малые колебания вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной плоскости диска и отстоящей от центра диска на расстоянии $l = \frac{1}{4}R$. Найти период малых колебаний диска.

Задача 13.2. Стержень весом Q лежит на трех однородных катках весом P



каждый. К стержню приложена сила $\vec{F}$, приводящая в движение стержни и катки. Определить

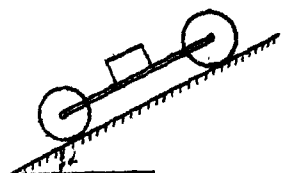
перемещение стержня за промежуток времени, когда его скорость возрастет от 0 до v . Скольжение между стержнем и катками, а также между катками и горизонтальной плоскостью отсутствует.

№ 14

Задача 14.1. Однородный диск радиуса R совершает малые колебания вокруг горизонтальной оси, перпендикулярной плоскости диска, с периодом

$T = 3\pi\sqrt{R/g}$. Определить расстояние OC между центром диска C и точкой подвеса O , которая находится на горизонтальной оси.

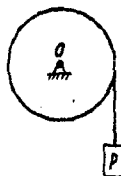
Задача 14.2. На тележке, состоящей из двух однородных катков весом Q



каждый и платформы, лежит груз весом P . Пренебрегая весом платформы, определить, с какой начальной скоростью v_0 нужно толкнуть тележку, чтобы она прошла расстояние S вверх по наклонной

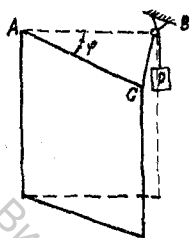
плоскости, образующей с горизонтом угол α .

№ 15



Задача 15.1. На шкив радиуса R намотана нить, к концу которой привязан груз весом P . Опускаясь, груз вращает шкив с угловым ускорением ε . Пренебрегая весом нити, определить момент инерции шкива относительно горизонтальной оси O .

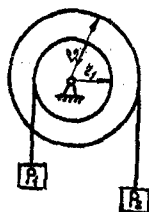
Задача 15.2. Прямоугольная дверь шириной l закрывается при помощи груза весом P , веревки и идеального блока. Определить угловую скорость двери в момент закрытия, если в момент, когда она была открыта на угол



$\varphi = 60^\circ$, груз был отпущен без начальной скорости. Принять $AB = AC$, трением пренебречь. Момент инерции двери относительно ее оси вращения равен J .

№ 16

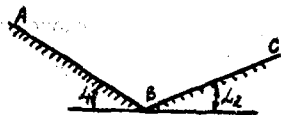
Задача 16.1. Тележка, имеющая четыре колеса массой m каждое, находится под действием постоянной силы $\vec{F}$, направленной параллельно рельсам. Найти скорость тележки после того, как она пройдет путь S . Колеса считать однородными дисками, катящимися без скольжения. Масса тележки (без колес) равна M . Трением качения пренебречь.



Задача 16.2. Два груза весом P_1 и P_2 подвешены на двух гибких нерастяжимых нитях, которые накручены, как указано на чертеже, на барабаны, имеющие радиусы r_1 и r_2 , и насажены на общую ось. Определить ускорение груза весом P_2 , пренебрегая массой нитей и барабанов. $P_2 > P_1$.

№ 17

Задача 17.1. Груз A весом P_1 , опускаясь вниз, приводит в движение посредством невесомой нити, переброшенной через однородный блок C весом Q , груз B весом P_2 . Определить ускорение грузов, пренебрегая трением скольжения.



Задача 17.2. Тело скользит по наклонной плоскости AB , начав движение без начальной скорости, пройдя путь S_1 до точки B , поднимается по наклонной поверхности BC . Считая, что в точке B вследствие небольшого закругле-

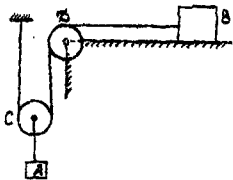
ния не происходит потери скорости, определить, какое расстояние пройдет тело до остановки, если углы наклона плоскостей равны α_1 и α_2 , а коэффициент трения f .

№ 18

Задача 18.1. Шкив радиуса R и весом Q приводится во вращение с помощью ременной передачи, натяжения ветвей которой равны T_1 и T_2 ($T_1 > T_2$). Момент сил сопротивления равен M . Определить угловое ускорение шкива ε , считая, что масса его равномерно распределена по ободу.

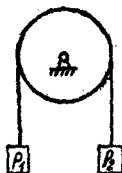


Задача 18.2. Груз A с массой m_1 , падая, приводит в движение по горизонтальной плоскости груз B с массой m посредством блоков C и D и нити, охватывающей блок C и переброшенной через блок D . Пренебрегая массой нити и блоков, определить скорость груза A в зависимости от перемещения S груза B , коэффициент трения которого о плоскость равен f .

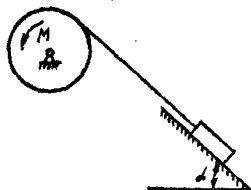


№ 19

Задача 19.1. Через блок весом Q перекинута гибкая нить, к концам которой прикреплены грузы весом P_1 и P_2 . Пренебрегая весом нити, определить ускорение грузов, считая, что масса блока равномерно распределена по его ободу. $P_2 > P_1$.



Задача 19.2. К шкиву радиуса R и массой m_1 приложена пара сил с моментом M . Шкив с помощью нити, параллельной гладкой наклонной плоскости, составляющей угол α с горизонтом, перемещает груз массой m_2 . Определить, сколько оборотов сделает шкив из состояния покоя до



приобретения угловой скорости ω . Массу шкива считать равномерно распределенной по его ободу. Массой нити пренебречь.

№ 20

Задача 20.1. Груз весом P поднимается с помощью троса, намотанного на барабан радиуса r и весом Q . Сколько оборотов сделает барабан к моменту, когда скорость груза станет равной v . Барабан считать однородным круглым цилиндром. Весом троса пренебречь. К барабану приложен постоянный вращающий момент M .



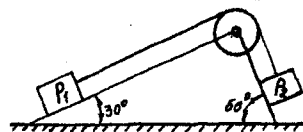
Задача 20.2. С помощью лебедки, к валу которой приложен вращающий момент M , передвигается груз весом P по горизонтальной шероховатой поверхности. Трос параллелен плоскости. Определить угловое ускорение ε вала, если его



масса равномерно распределена по ободу радиуса R , а коэффициент трения груза о плоскость равен f . Весом троса и его расстоянием от плоскости пренебречь. Вес вала равен Q .

№ 21

Задача 21.1. Два груза весом P_1 и P_2 , соединенные тросом, перекинутым через блок C , находятся на шероховатых наклонных плоскостях, образующих углы 30° и 60° с горизонтом. Пренебрегая весом троса и блока, определить скорость грузов к моменту, когда груз P_1 опустится на высоту h . Коэффициент трения грузов о плоскость равен f .



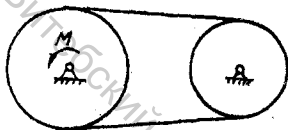
Коэффициент трения грузов о плоскость равен f .

Задача 21.2. Шкив радиуса R и весом Q вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр шкива перпендикулярно его плоскости, с угловой скоростью ω_0 . Через сколько времени угловая скорость шкива уменьшится

вдвое, если момент сил торможения равен $M=k\omega^3$? Массу шкива считать равномерно распределенной по его ободу.

№ 22

Задача 22.1. Два однородных цилиндра весом P_1 и P_2 соединены бесконечным ремнем. К ведущему цилиндру весом P_1 и радиусом R_1 прикладывается вращающий момент M . Пренебрегая весом ремня, определить, сколько оборотов N сделает ведущий цилиндр, когда его угловая скорость станет равной ω .



Задача 22.2. Шкив радиуса R и весом P вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр шкива перпендикулярно к его плоскости, с угловой скоростью ω_0 . Через сколько оборотов угловая скорость шкива уменьшится в 4 раза, если момент сил торможения равен $M=k\omega^2$? Массу шкива считать равномерно распределенной по ободу.

№ 23

Задача 23.1. Однородный диск радиуса R и весом P вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр диска, перпендикулярной к его плоскости, с угловой скоростью ω_0 . Через сколько оборотов его угловая скорость уменьшится вдвое, если момент сил торможения равен $M=k\omega$?

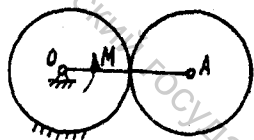
Задача 23.2. Тяжелый однородный стержень OA длиной l , надетый своим концом O на ось, вокруг которой он может вращаться в вертикальной плоскости, находится в положении устойчивого равновесия. Какую скорость надо сообщить другому концу A стержня для того, чтобы он сделал четверть оборота?



№ 24

Задача 24.1. Однородный диск радиуса R и массой m вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр диска перпендикулярно к его плоскости, с угловой скоростью ω_0 . Через какой промежуток времени угловая скорость диска уменьшится в три раза, если момент сил торможения равен $M = k\omega^2$?

Задача 24.2. Эпициклический механизм, расположенный в горизонтальной

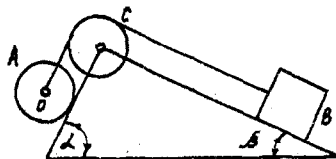


плоскости, состоящий из двух дисков одинакового радиуса R и веса P , приводится в движение кривошипом OA . Какой постоянный вращающий момент M нужно приложить к кривошипу OA для того, чтобы

он, сделав N оборотов, имел угловую скорость ω ? Весом кривошипа пренебречь.

№ 25

Задача 25.1. Колесо A весом Q , скатываясь по наклонной плоскости под



углом α к горизонту посредством невесомой и нерастяжимой нити, переброшенной через блок C , поднимает груз B весом P . Какое расстояние S пройдет груз B по наклонной плос-

кости, наклоненной под углом β к горизонту, когда центр O колеса A приобретет скорость v ? Колесо и блок считать дисками одинакового веса и радиуса. Трением пренебречь.

Задача 25.2. Стержень длиной l и весом P вращается в горизонтальной плоскости вокруг оси, проходящей через его середину. Момент сил сопротивления при вращении стержня $M_{\text{сопр}} = k\omega^3$. В начальный момент стержню была сообщена угловая скорость ω_0 . Через сколько оборотов N угловая скорость уменьшится вчетверо?

№ 26

Задача 26.1. Груз весом P , опускаясь вниз посредством нерастяжимой нити,



перекинутой через блок C , приводит в движение ступенчатый диск A , момент инерции которого относительно центра O равен J_0 , вес Q , радиус R .

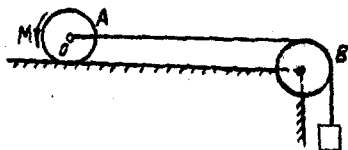
Определить скорость груза к моменту, когда он пройдет из состояния покоя расстояние S , если радиус барабана, на который намотана нить, равен r . Весом блока пренебречь.

Задача 26.2 Стержень длиной l и весом P может вращаться в горизонтальной плоскости вокруг оси, проходящей через его середину. К неподвижному вначале стержню приложен постоянный момент M . Через сколько времени t стержень приобретет заданную угловую скорость ω , если момент сил сопротивления $M_{\text{сопр}} = k\omega$ ($M > k\omega$).

№ 27

Задача 27.1. Диск радиуса R и весом P вращается вокруг вертикальной оси, проходящей через центр диска перпендикулярно к его плоскости, с угловой скоростью ω_0 . Через сколько времени угловая скорость диска уменьшится втрое, если момент сил торможения равен $M = k\omega$? Массу диска считать равномерно распределенной по его ободу.

Задача 27.2. К катушке A приложен постоянный вращающий момент M . При



качении катушек посредством невесомой нерастяжимой нити, переброшенной через блок B , поднимает груз весом P . Определить, какое расстояние пройдет груз из состояния

покоя к моменту времени, когда его скорость станет равной v . Катушки — однородный диск радиуса R и весом Q , масса блока распределена по его ободу. Вес блока Q .

Задача 28.1. Стержень длиной l и весом P может вращаться в горизонтальной плоскости вокруг оси, проходящей через его конец. К неподвижному вначале стержню приложен вращающий момент $M = \text{const}$. Определить, через сколько оборотов N стержень приобретет заданную угловую скорость ω_N , если момент сил сопротивления $M_c = k\omega^2$?

Задача 28.2. Два шкива с массами m_1 и m_2 соединены бесконечным ремнем. К ведущему шкиву с массой m_1 и радиусом R_1 приложена пара сил с моментом M . Пренебрегая массой ремня, определить, какую скорость приобретет ведущий шкив после того, как сделает N оборотов. Массы обоих шкивов распределены по их ободьям.



3.3. Принцип возможных перемещений. Принцип Даламбера

3.3.1. Принцип возможных перемещений

Пример.

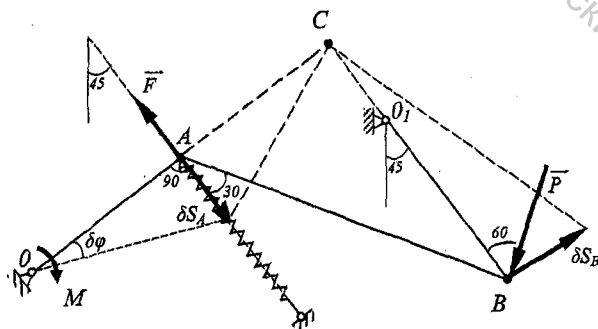


Рис. 3.9

Механизм

находится под действием взаимно уравновешивающихся сил. Определить коэффициент упругости пружины, если $OA = 25 \text{ см}$, $P = 400 \text{ н}$, $M = 200 \text{ нм}$, деформация пружины $\lambda = 2 \text{ см}$.

Решение.

Данный механизм находится в равновесии под действием пары сил с заданным моментом M , силы $\bar{P}$ и силы упругости $\bar{F}$ пружины. Предполагая, что пружина сжата, сообщим системе возможное перемещение. Кривошип OA получит возможное угловое перемещение $\delta\varphi$, возможное перемещение точки δS_A точки A направлено перпендикулярно кривошипу OA , возможное перемещение δS_B точки B перпендикулярно стержню O_1B . Уравнение работ, выражающее принцип возможных перемещений, имеет вид:

$$\sum \delta A = M \cdot \delta\varphi - F \cdot \delta S_A - P \cos 30^\circ \cdot \delta S_B = 0. \quad (3.45)$$

Найдем зависимость между возможными перемещениями, учитывая, что зависимость между возможными перемещениями точек системы такая же, как между соответствующими скоростями точек.

$$\text{Возможное перемещение } \delta S_A = OA \cdot \delta\varphi. \quad (3.46)$$

Проекции возможных перемещений δS_A и δS_B точек A и B на прямую AB равны между собой:

$$\delta S_A \cdot \cos 30^\circ = \delta S_B \cdot \cos 60^\circ, \text{ откуда } \delta S_B = \delta S_A \sqrt{3} = OA \delta\varphi \sqrt{3}. \quad (3.47)$$

Зависимость между δS_A и δS_B можно найти, построив мгновенный центр вращения C звена AB , который лежит на пересечении перпендикуляров, восстановленных из точек A и B к направлениям δS_A и δS_B . Тогда возможные перемещения точек A и B пропорциональны расстояниям этих точек от

мгновенного центра вращения звена AB . Следовательно, $\frac{\delta S_A}{\delta S_B} = \frac{AC}{BC}$.

Из треугольника ABC имеем $AC = AB \sin 30^\circ$, $BC = AB \cos 30^\circ$.

$$\text{Тогда } \delta S_B = \delta S_A \sqrt{3} = OA \delta\varphi \sqrt{3}.$$

$$\text{Сила упругости пружины пропорциональна ее деформации: } F = c\lambda. \quad (3.48)$$

Подставив выражения (3.46), (3.47), (3.48) в уравнение (3.45), получим:

$$M \cdot \delta\varphi - c\lambda \cdot OA \cdot \delta\varphi - P \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot OA \cdot \delta\varphi \sqrt{3} = 0 \quad \text{или}$$

$$\left(M - c\lambda \cdot OA - \frac{3}{2} P \cdot OA \right) \cdot \delta\varphi = 0. \quad (3.49)$$

Так как $\delta\varphi \neq 0$, то отсюда следует, что $M - c\lambda \cdot OA - \frac{3}{2}P \cdot OA = 0$. (3.50)

Из уравнения (3.50) находим искомое значение коэффициента упругости:

$$c = \frac{M}{\lambda \cdot OA} - \frac{3}{2\lambda}P.$$

Подставив числовые значения, окончательно имеем $c = 100 \text{ н/см} = 10000 \text{ н/м}$. Положительное значение c указывает на то, что пружина действительно сжата.

3.3.2. Принцип Даламбера

Пример.

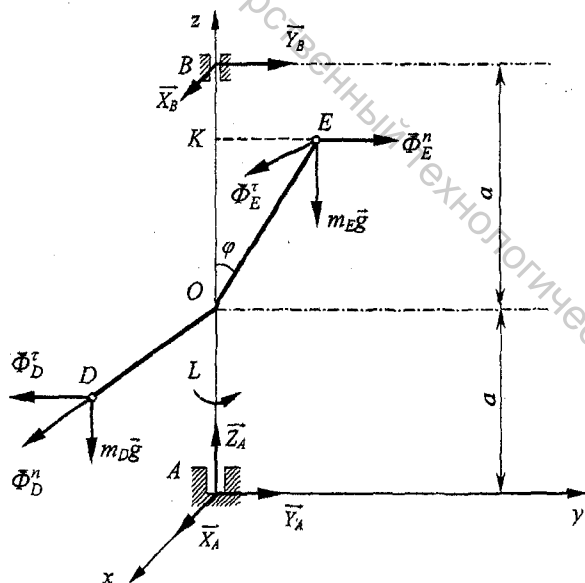


Рис. 3.10

К вертикальному валу AB , вращающемуся равноускоренно, жестко прикреплены два стержня. Стержень OE образует с валом AB угол φ , стержень OD перпендикулярен плоскости, содержащей вал AB и стержень OE . Даны размеры: $OE = OD = l$, $AB = 2a$. К концам стержней прикреплены два шара E и D

массы m каждый. К валу AB приложен постоянный вращательный момент L . Пренебрегая массой стержня и считая грузы точечными массами, определить реакции подпятника A и подшипника B в тот момент, когда стержень OE находится в плоскости Ayz . В начальный момент система находилась в покое.

Решение.

На данную механическую систему действуют силы тяжести грузов $m_D g$ и $m_E g$, составляющие X_A, Y_A, Z_A реакции подпятника A и составляющие X_B, Y_B реакции подшипника B . Для определения искомых реакций применим принцип Даламбера, согласно которому к этим силам присоединим силы инерции грузов D и E (рис 3.10). Так как вал вращается неравномерно, то

$$\Phi_D = \Phi_D^n + \Phi_D^r, \quad \Phi_E = \Phi_E^n + \Phi_E^r.$$

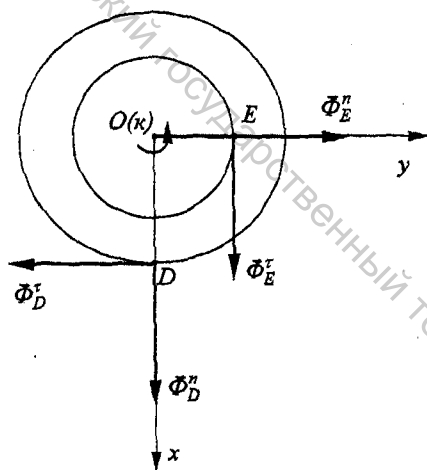


Рис. 3.11

Нормальные составляющие сил инерции Φ_D^n и Φ_E^n направлены противоположно нормальным ускорениям точек D и E , а касательные составляющие сил инерции Φ_D^r и Φ_E^r противоположны касательным ускорениям этих точек (рис 3.11).

Численно эти силы инерции равны: $\Phi_D^n = m\omega^2 \cdot OD = ml\omega^2$;

$$\Phi_D^r = m\varepsilon \cdot OD = ml\varepsilon;$$

$$\Phi_E^n = m\omega^2 \cdot KE = ml\omega^2 \sin \varphi;$$

$$\Phi_E^r = m\varepsilon \cdot KE = ml\varepsilon \sin \varphi.$$

Согласно принципу Даламбера, приложенные внешние силы и силы инерции грузов D и E образуют уравновешенную пространственную систему сил. Составим шесть уравнений равновесия:

$$\sum F_{kx} = 0, \quad X_A + X_B + \Phi_E^r + \Phi_D^n = 0, \quad (3.51)$$

$$\sum F_{ky} = 0, \quad Y_A + Y_B + \Phi_E^n - \Phi_D^r = 0, \quad (3.52)$$

$$\sum F_{kz} = 0, \quad Z_A - m_D g - m_E g = 0, \quad (3.53)$$

$$\sum m_x(F_k) = 0, \quad \Phi_D^r \cdot a - Y_B \cdot 2a - \Phi_E^n \cdot (a + l \cos \varphi) - m_E g \cdot l \sin \varphi = 0, \quad (3.54)$$

$$\sum m_y(F_k) = 0, \quad \Phi_D^n \cdot a + X_B \cdot 2a + \Phi_E^r \cdot (a + l \cos \varphi) + m_D g \cdot l = 0, \quad (3.55)$$

$$\sum m_z(F_k) = 0, \quad L - \Phi_D^r \cdot l - \Phi_E^r \cdot l \sin \varphi = 0. \quad (3.56)$$

$$\text{Из уравнения (3.53) найдем значение } Z_A: \quad Z_A = (m_D + m_E)g = 2mg. \quad (3.57)$$

Из уравнения (3.54), подставив значения составляющих сил инерции Φ_D^r и

$$\Phi_E^r, \text{ получим: } Y_B = \frac{mal\varepsilon - mgl \sin \varphi - ml\omega^2 \sin \varphi (a + l \cos \varphi)}{2a}. \quad (3.58)$$

Аналогично, из уравнения (3.55) найдем X_B :

$$X_B = - \frac{mgl + mal\omega^2 + ml\varepsilon \sin \varphi (a + l \cos \varphi)}{2a}. \quad (3.59)$$

Тогда из уравнений (3.51) и (3.52) определим X_A и Y_A :

$$X_A = \frac{mgl - mal\omega^2 - ml\varepsilon \sin \varphi (a - l \cos \varphi)}{2a}, \quad (3.60)$$

$$Y_A = \frac{mgl \sin \varphi + mal\varepsilon - ml\omega^2 \sin \varphi (a - l \cos \varphi)}{2a}. \quad (3.61)$$

Для определения углового ускорения ε используем уравнение (3.56):

$$L = ml^2\varepsilon + ml^2\varepsilon \sin^2 \varphi \quad \text{или} \quad \varepsilon = \frac{L}{ml^2(1 + \sin^2 \varphi)}. \quad (3.62)$$

Угловое ускорение ε можно определить, используя дифференциальное уравнение вращательного движения стержней с грузами вокруг оси z (заменяя уравнение (3.56)): $J_Z \cdot \varepsilon = \sum m_z(F_k^e)$ или $(J_D + J_E) \cdot \varepsilon = L$,

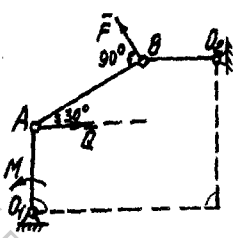
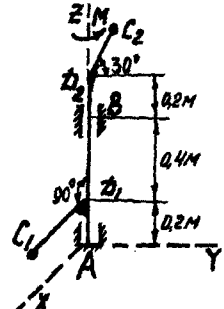
$$\text{откуда } \varepsilon = \frac{L}{J_D + J_E} = \frac{L}{ml^2(1 + \sin^2 \varphi)}.$$

$$\text{Угловая скорость } \omega \text{ вращения вала: } \omega = \omega_0 + \varepsilon t = \frac{L t}{ml^2(1 + \sin^2 \varphi)}. \quad (3.63)$$

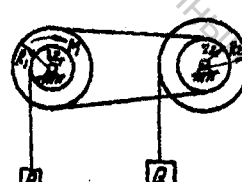
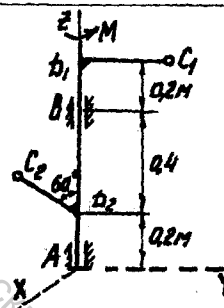
Подставив (3.62) и (3.63) в выражения (3.58), (3.59), (3.60), (3.61), определяем искомые реакции.

3.3.3. Задачи

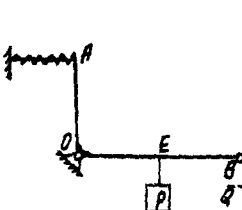
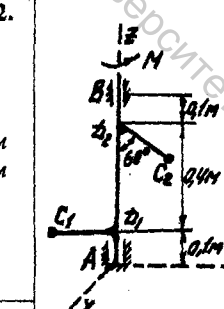
№1

Задача 1.1. Дано: $O_1A=0,2\text{ м}$ $F=100\text{ н}$ $Q=50\text{ н}$ $M=?$		Задача 1.2. Дано: $M=1,9\text{ нм}$ $m_1=4\text{ кг}$ $C_1D_1=0,2\text{ м}$ $C_2D_2=0,2\text{ м}$ $t=0,5\text{ с}$ $C_1D_1 \in A_{xz}$ $C_2D_2 \in A_{yz}$ $m_2=1\text{ кг}$ $R_A=? R_B=?$	
---	---	---	---

№2

Задача 2.1. Дано: $P=100\text{ н}$ $Q=200\text{ н}$ $r_1=0,2\text{ м}$ $R_1=0,4\text{ м}$ $r_2=0,3\text{ м}$ $R_2=0,6\text{ м}$ $M=?$		Задача 2.2. Дано: $M=2,5\text{ нм}$ $m_1=2\text{ кг}$ $C_1D_1=0,1\text{ м}$ $C_2D_2=0,2\text{ м}$ $t=1\text{ с}$ $C_1D_1 \in A_{yz}$ $C_2D_2 \in A_{xz}$ $m_2=1\text{ кг}$ $R_A=? R_B=?$	
--	---	---	---

№3

Задача 3.1. Дано: $C=3000\text{ н/м}$ $\Delta=0,04\text{ м}$ $OA=0,4\text{ м}$ $OB=0,6\text{ м}$ $OE=0,3\text{ м}$ $P=360\text{ н}$ $Q=?$	 Пружина растянута	Задача 3.2. Дано: $M=7\text{ нм}$ $m_1=2\text{ кг}$ $C_1D_1=0,4\text{ м}$ $C_2D_2=0,2\text{ м}$ $t=0,2\text{ с}$ $C_1D_1 \in A_{yz}$ $C_2D_2 \in A_{yz}$ $m_2=1\text{ кг}$ $R_A=? R_B=?$	
--	--	---	---

№4

Задача 4.1.

Дано:

$Q=1000\text{н}$

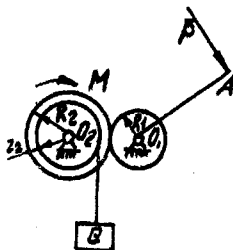
$M=150\text{нм}$

$R_1=0,1\text{м}$

$r_2=0,15\text{м}$

$R_2=0,3\text{м}$

$O_1A=1\text{м}$

 $P=?$ 

Задача 4.2.

Дано:

$M=1,3\text{нм}$

$m_1=5\text{кг}$

$C_1D_1=0,2\text{м}$

$C_2D_2=0,2\text{м}$

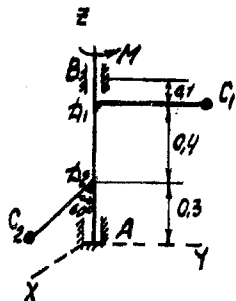
$t=1\text{с}$

$C_1D_1 \in A_{yz}$

$C_2D_2 \in A_{xz}$

$m_2=2\text{кг}$

$R_A=? R_B=?$



№5

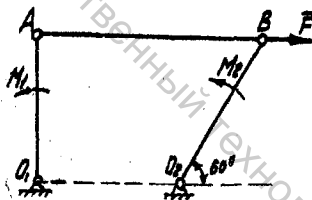
Задача 5.1.

Дано:

$O_1A=0,2\text{м}$

$M_1=100\text{нм}$

$M_2=200\text{нм}$

 $F=?$ 

Задача 5.2.

Дано:

$M=1,2\text{нм}$

$m_1=1\text{кг}$

$C_1D_1=0,3\text{м}$

$C_2D_2=0,1\text{м}$

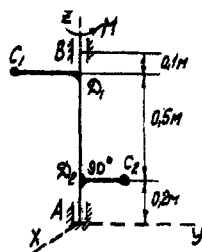
$t=0,5\text{с}$

$C_1D_1 \in A_{yz}$

$C_2D_2 \in A_{yz}$

$m_2=3\text{кг}$

$R_A=? R_B=?$



№6

Задача 6.1.

Дано:

$OB=0,6\text{м}$

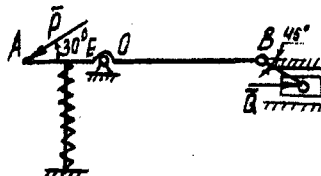
$OE=0,15\text{м}$

$OA=0,3\text{м}$

$C=5000\text{н/м}$

$\Delta=0,01\text{м}$

$P=10\text{н}$

 $Q=?$ 

Пружина растянута

Задача 6.2.

Дано:

$C_1D_1 \in A_{xz}$

$C_1D_1=0,3\text{м}$

$C_2D_2=0,2\text{м}$

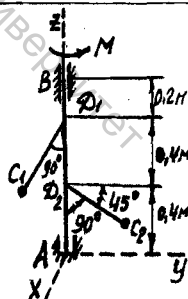
$M=1,7\text{нм}$

$t=0,5\text{с}$

$m_1=1\text{кг}$

$m_2=2\text{кг}$

$R_A=? R_B=?$

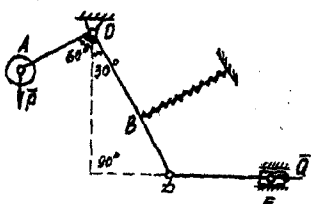


№7

Задача 7.1.

Дано:
 $P=30\text{H}$
 $C=250\text{H/м}$
 $\Delta=2\text{см}$
 $OA=10\text{см}$
 $OD=20\text{см}$
 $Q=20\text{H}$

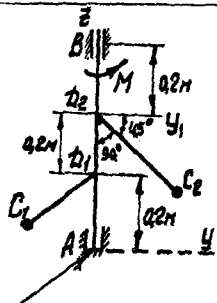
$OB=?$



Пружина растянута

Задача 7.2.

Дано:
 $C_1 D_1 \parallel Ax$
 $C_1 D_1 = 0,2\text{м}$
 $C_2 D_2 = 0,4\text{м}$
 $M = 4,8\text{Hм}$
 $t = 0,5\text{с}$
 $m_1 = 4\text{кг}$
 $m_2 = 2\text{кг}$
 $R_A=? R_B=?$

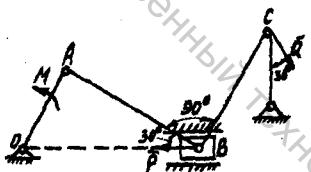


№8

Задача 8.1.

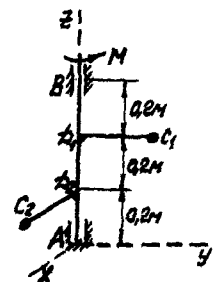
Дано:
 $AB=0,3\text{м}$
 $P=20\text{H}$
 $M=6\text{Hм}$

$Q=?$



Задача 8.2.

Дано:
 $C_1 D_1 \parallel Ay$
 $C_2 D_2 \parallel Ax$
 $C_1 D_1 = 0,2\text{м}$
 $C_2 D_2 = 0,1\text{м}$
 $M = 0,6\text{Hм}$
 $t = 0,2\text{с}$
 $m_1 = 1\text{кг}$
 $m_2 = 2\text{кг}$
 $R_A=? R_B=?$

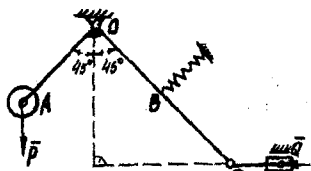


№9

Задача 9.1.

Дано:
 $OB=0,1\text{м}$
 $OD=0,2\text{м}$
 $OA=0,1\text{м}$
 $C=1000\text{H/м}$
 $P=10\text{H}$
 $Q=15\text{H}$

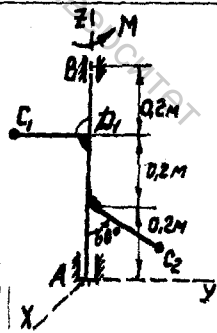
$\Delta=?$



Пружина растянута

Задача 9.2.

Дано:
 $C_1 D_1 \parallel Ay$
 $C_2 D_2 \in A_{yz}$
 $C_1 D_1 = 0,2\text{м}$
 $C_2 D_2 = 0,2\text{м}$
 $M = 0,75\text{Hм}$
 $t = 1\text{с}$
 $m_1 = 3\text{кг}$
 $m_2 = 1\text{кг}$
 $R_A=? R_B=?$



№10

Задача 10.1.

Дано:

$r_1 = 5 \text{ см}$

$R_1 = 20 \text{ см}$

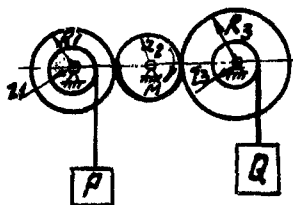
$r_2 = 10 \text{ см}$

$R_3 = 25 \text{ см}$

$r_3 = 5 \text{ см}$

$Q = 1500 \text{ н}$

$P = 2000 \text{ н}$

 $M = ?$ 

Задача 10.2.

Дано:

$C_1 D_1 \parallel Ay$

$C_2 D_2 \parallel Ay$

$C_1 D_1 = 0,2 \text{ м}$

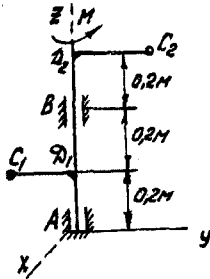
$C_2 D_2 = 0,1 \text{ м}$

$m_1 = 3 \text{ кг}$

$m_2 = 1 \text{ кг}$

$M = 2,6 \text{ нм}$

$t = 0,1 \text{ с}$

 $R_A = ? R_B = ?$ 

№11

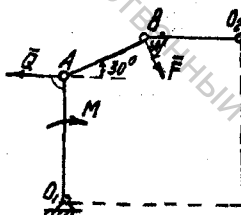
Задача 11.1.

Дано:

$M = 48 \text{ нм}$

$F = 40 \text{ н}$

$O_1 A = 0,3 \text{ м}$

 $Q = ?$ 

Задача 11.2.

Дано:

$D_2 C_2 \in A_{yz}$

$D_2 C_2 = 0,2 \text{ м}$

$C_1 D_1 \parallel Ax$

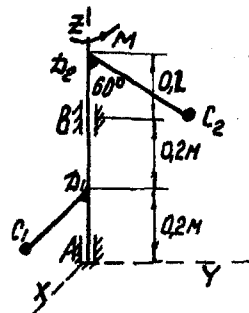
$C_1 D_1 = 0,2 \text{ м}$

$m_1 = 5 \text{ кг}$

$m_2 = 1 \text{ кг}$

$M = 4,6 \text{ нм}$

$t = 0,2 \text{ с}$

 $R_A = ? R_B = ?$ 

№12

Задача 12.1.

Дано:

$P = 150 \text{ н}$

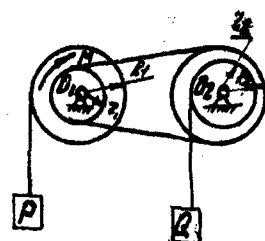
$Q = 400 \text{ н}$

$r_1 = 0,15 \text{ м}$

$R_1 = 0,2 \text{ м}$

$r_2 = 0,25 \text{ м}$

$R_2 = 0,3 \text{ м}$

 $M = ?$ 

Задача 12.2.

Дано:

$C_1 D_1 \parallel Ax$

$C_1 D_1 = 0,4 \text{ м}$

$C_2 D_2 \in A_{yz}$

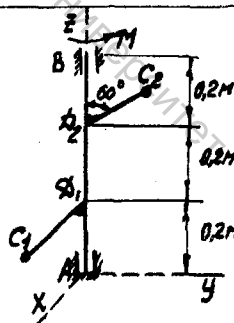
$C_2 D_2 = 0,2 \text{ м}$

$m_1 = 2 \text{ кг}$

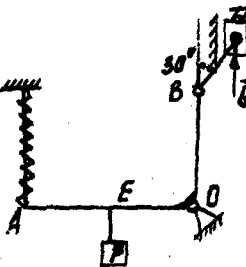
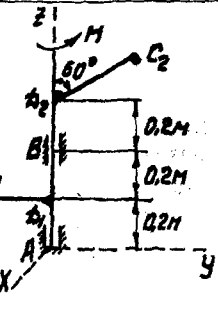
$m_2 = 1 \text{ кг}$

$M = 7 \text{ нм}$

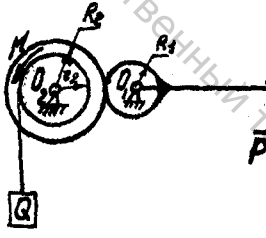
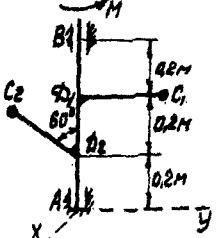
$t = 0,2 \text{ с}$

 $R_A = ? R_B = ?$ 

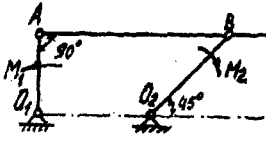
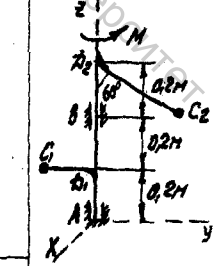
№13

Задача 13.1. Дано: $P=200\text{H}$ $C=1000\text{H/м}$ $\Delta=2\text{см}$ $OA=50\text{см}$ $OC=25\text{см}$ $OB=40\text{см}$ $P=200\text{H}$ $Q=?$		Задача 13.2. Дано: $C_1 D_1 \parallel Ay$ $C_1 D_1 = 0,3\text{м}$ $C_2 D_2 \in Ay_z$ $C_2 D_2 = 0,2\text{м}$ $m_1 = 4\text{кг}$ $m_2 = 1\text{кг}$ $M = 3,9\text{Hм}$ $t = 0,5\text{с}$ $R_A=? R_B=?$	
---	---	--	---

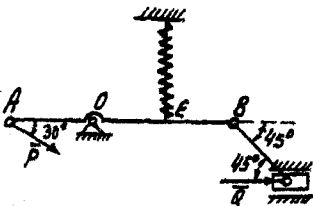
№14

Задача 14.1. Дано: $R_1=8\text{см}$ $r_2=10\text{см}$ $R_2=40\text{см}$ $O_1 A=100\text{см}$ $P=100\text{H}$ $M=100\text{Hм}$ $Q=?$		Задача 14.2. Дано: $C_1 D_1 \parallel Ay$ $C_1 D_1 = 0,3\text{м}$ $C_2 D_2 \in Ay_z$ $C_2 D_2 = 0,2\text{м}$ $m_1 = 4\text{кг}$ $m_2 = 1\text{кг}$ $M = 3,9\text{Hм}$ $t = 0,5\text{с}$ $R_A=? R_B=?$	
--	---	--	---

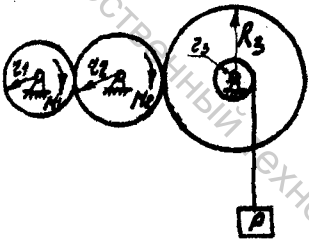
№15

Задача 15.1. Дано: $O_1 A=15\text{см}$ $F=200\text{H}$ $M_2=100\text{Hм}$ $M_1=?$		Задача 15.2. Дано: $C_1 D_1 \parallel Ay$ $C_1 D_1 = 0,4\text{м}$ $C_2 D_2 \in Ay_z$ $C_2 D_2 = 0,2\text{м}$ $m_1 = 2\text{кг}$ $m_2 = 1\text{кг}$ $M = 3,5\text{Hм}$ $t = 0,5\text{с}$ $R_A=? R_B=?$	
--	---	--	---

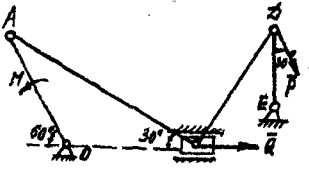
№16

Задача 16.1. Дано: $OE=10\text{см}$ $OA=20\text{см}$ $OB=40\text{см}$ $C=250\text{Н/см}$ $\Delta=4\text{см}$ $Q=500\text{Н}$ $P=?$	 Пружина растянута	Задача 16.2. Дано: $C_1D_1 \parallel Ay$ $C_1D_1=0,1\text{м}$ $C_2D_2=0,4\text{м}$ $m_1=2\text{кг}$ $m_2=3\text{кг}$ $M=5\text{Нм}$ $t=0,5\text{с}$ $R_A=? R_B=?$
---	--	--

№17

Задача 17.1. Дано: $r_1=10\text{см}$ $r_2=20\text{см}$ $r_3=5\text{см}$ $R_3=30\text{см}$ $M_1=5\text{Нм}$ $P=1500\text{Н}$ $M_2=?$		Задача 17.2. Дано: $C_1D_1=0,1\text{м}$ $C_2D_2=0,4\text{м}$ $C_2D_2 \parallel Ay$ $m_1=5\text{кг}$ $m_2=1\text{кг}$ $M=4,2\text{Нм}$ $t=0,5\text{с}$ $R_A=? R_B=?$
--	---	--

№18

Задача 18.1. Дано: $OA=10\text{см}$ $Q=150\text{Н}$ $P=300\text{Н}$ $M=?$		Задача 18.2. Дано: $C_1D_1 \parallel Ax$ $C_1D_1=0,2\text{м}$ $C_2D_2 \parallel Ay$ $C_2D_2=0,1\text{м}$ $m_1=2\text{кг}$ $m_2=3\text{кг}$ $M=2,2\text{Нм}$ $t=0,5\text{с}$ $R_A=? R_B=?$
--	---	--

№19

Задача 19.1.

Дано:

$OA=10\text{ см}$

$OB=10\text{ см}$

$OD=20\text{ см}$

$CD=1000\text{ н/см}$

$\Delta=1\text{ см}$

$P=20\text{ н}$



Пружина растянута

Q-?

Задача 19.2.

Дано:

$C_1D_1 \parallel Ay$

$C_1D_1=0,1\text{ м}$

$C_2D_2 \parallel Ay$

$C_2D_2=0,2\text{ м}$

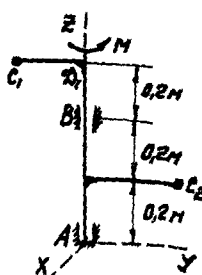
$m_1=1\text{ кг}$

$m_2=4\text{ кг}$

$M=1,7\text{ нм}$

$t=0,2\text{ с}$

$R_A-? R_B-?$



№20

Задача 20.1.

Дано:

$r_1=5\text{ см}$

$R_1=30\text{ см}$

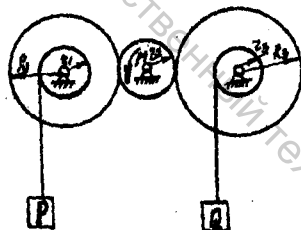
$r_2=15\text{ см}$

$r_3=5\text{ см}$

$R_3=25\text{ см}$

$M=50\text{ нм}$

$Q=1600\text{ н}$



P-?

Задача 20.2.

Дано:

$C_1D_1 \parallel Ay$

$C_1D_1=0,4\text{ м}$

$C_2D_2 \in A_{yz}$

$C_2D_2=0,2\text{ м}$

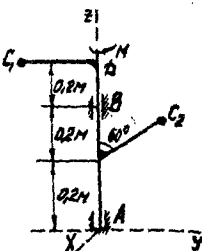
$m_1=2\text{ кг}$

$m_2=1\text{ кг}$

$M=3,5\text{ нм}$

$t=0,5\text{ с}$

$R_A-? R_B-?$



№21

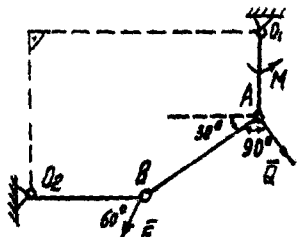
Задача 21.1.

Дано:

$O_1A=10\text{ см}$

$M=30\text{ нм}$

$Q=150\text{ н}$



F-?

Задача 21.2.

Дано:

$C_1D_1 \parallel Ay$

$C_1D_1=0,2\text{ м}$

$C_2D_2 \in A_{xz}$

$C_2D_2=0,2\text{ м}$

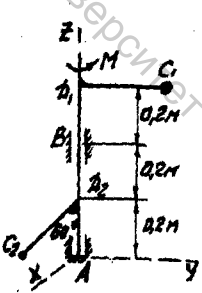
$m_1=2\text{ кг}$

$m_2=1\text{ кг}$

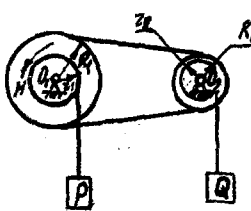
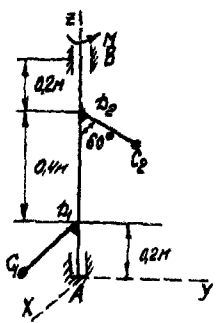
$M=5,5\text{ нм}$

$t=1\text{ с}$

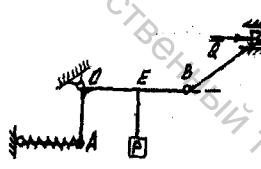
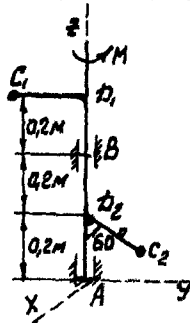
$R_A-? R_B-?$



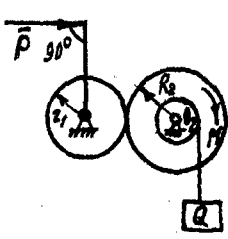
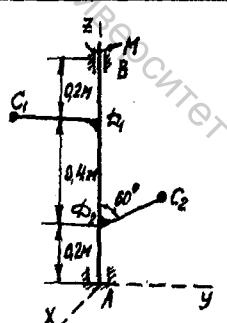
№22

Задача 22.1. Дано: $P=100\text{н}$ $Q=400\text{н}$ $r_1=20\text{см}$ $R_1=40\text{см}$ $r_2=15\text{см}$ $R_2=30\text{см}$ $M=?$	 Задача 22.2. Дано: $C_1 D_1 \parallel Ax$ $C_1 D_1 = 0,4\text{м}$ $C_2 D_2 \in Ay_z$ $C_2 D_2 = 0,2\text{м}$ $m_1 = 3\text{кг}$ $m_2 = 2\text{кг}$ $M = 2,7\text{нм}$ $t = 1\text{с}$ $R_A - ? R_B - ?$	
---	--	---

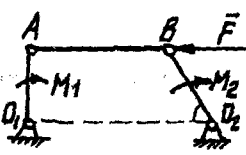
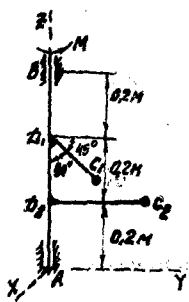
№23

Задача 23.1. Дано: $\Delta = 3\text{см}$ $C = 2000\text{н/см}$ $OA = 30\text{см}$ $OE = 20\text{см}$ $OB = 60\text{см}$ $P = 210\text{н}$ $Q=?$	 <i>Пружина растянута</i> Задача 23.2. Дано: $C_1 D_1 \parallel Ay$ $C_1 D_1 = 0,3\text{м}$ $C_2 D_2 \in Ay_z$ $C_2 D_2 = 0,2\text{м}$ $m_1 = 2\text{кг}$ $m_2 = 1\text{кг}$ $M = 4,2\text{нм}$ $t = 0,2\text{с}$ $R_A - ? R_B - ?$	
--	--	---

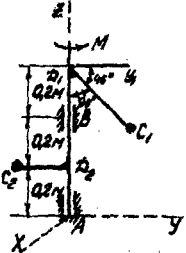
№24

Задача 24.1. Дано: $Q=2000\text{н}$ $r_2=10\text{см}$ $R_2=40\text{см}$ $r_1=15\text{см}$ $O_1 A = 100\text{см}$ $P=90\text{н}$ $M=?$	 Задача 24.2. Дано: $C_1 D_1 \parallel Ay$ $C_1 D_1 = 0,5\text{м}$ $C_2 D_2 \in Ay_z$ $C_2 D_2 = 0,2\text{м}$ $m_1 = 2\text{кг}$ $m_2 = 1\text{кг}$ $M = 5,3\text{нм}$ $t = 0,5\text{с}$ $R_A - ? R_B - ?$	
--	--	---

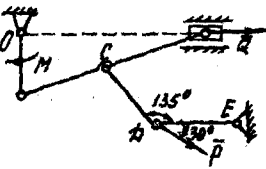
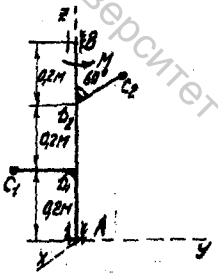
№25

Задача 25.1. Дано: $O_1A = 10\text{ см}$ $F = 200\text{ Н}$ $M_1 = 15\text{ Нм}$ $M_2 = ?$		Задача 25.2. Дано: $C_1D_1 = 0,2\text{ м}$ $C_2D_2 \parallel Ay$ $C_2D_2 = 0,3\text{ м}$ $m_1 = 2\text{ кг}$ $m_2 = 3\text{ кг}$ $M = 7\text{ Нм}$ $t = 0,2\text{ с}$ $R_A = ?$ $R_B = ?$	
---	---	---	---

№26

Задача 26.1. Дано: $OA = 50\text{ см}$ $OE = 25\text{ см}$ $OB = 20\text{ см}$ $C = 50\text{ Н/см}$ $\Delta = 4\text{ см}$ $Q = 500\text{ Н}$ $P = ?$	 Пружина растянута	Задача 26.2. Дано: $C_2D_2 \parallel Ay$ $C_2D_2 = 0,4\text{ м}$ $C_1D_1 = 0,2\text{ м}$ $m_1 = 1\text{ кг}$ $m_2 = 2\text{ кг}$ $M = 7,2\text{ Нм}$ $t = 0,2\text{ с}$ $R_A = ?$ $R_B = ?$	
--	--	---	---

№27

Задача 27.1. Дано: $OA = 10\text{ см}$ $M = 150\text{ Нм}$ $Q = 500\text{ Н}$ $P = ?$		Задача 27.2. Дано: $C_1D_1 \parallel Ay$ $C_1D_1 = 0,2\text{ м}$ $C_2D_2 \in Ay$ $C_2D_2 = 0,2\text{ м}$ $m_1 = 3\text{ кг}$ $m_2 = 1\text{ кг}$ $M = 1,5\text{ Нм}$ $t = 0,2\text{ с}$ $R_A = ?$ $R_B = ?$	
--	---	---	---

3.4. Применение принципа возможных перемещений к определению реакций связей. Общее уравнение динамики

3.4.1. Применение принципа возможных перемещений к определению реакций связей

С помощью принципа возможных перемещений достаточно просто решаются задачи о равновесии твердого тела или систем твердых тел.

Если требуется определить реакцию какой-либо идеальной связи, то следует, применяя принцип освобождения от связей, отбросить эту связь и заменить ее искомой реакцией. При этом система, освобожденная от одной связи, получает одну степень свободы. Системе сообщают возможное перемещение, соответствующее этой степени свободы, и составляют уравнение работ:

$$\sum F_k \cdot \delta S_k \cdot \cos(\hat{F}_k, \hat{\delta S}_k) = 0,$$

в которое входят задаваемые силы и реакция отброшенной связи. Этот метод является весьма эффективным, так как искомая реакция связи непосредственно определяется из этого уравнения.

Пример.

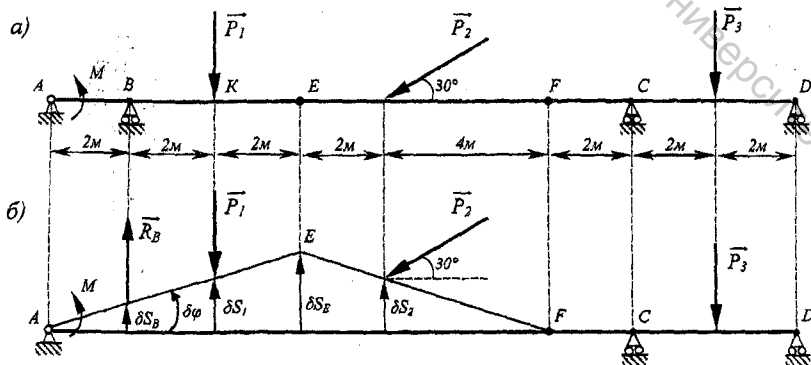


Рис. 3.12 (а, б)

Определить реакцию опоры B составной балки AD , изображенной на рис.

3.12 (а), если $M=10\text{ нм}$, $P_1=10\text{ н}$, $P_2=8\text{ н}$, $P_3=15\text{ н}$.

Решение.

Для определения реакции R_B опоры B мысленно отбросим опору, компенсируя отсутствие этой опоры реакцией R_B . Дадим точке B возможное перемещение δS_B , направленное по вертикали вверх. Тогда балка примет вид, изображенный на рис. 3.12 (б). Балка AE получит угловое перемещение $\delta\varphi$, возможные перемещения точек приложения сил обозначим δS_1 и δS_2 , возможное перемещение точки E — δS_E .

Уравнение работ для определения реакции R_B имеет вид:

$$M \cdot \delta\varphi + R_B \cdot \delta S_B - P_1 \cdot \delta S_1 - P_2 \cdot \cos 60^\circ \cdot \delta S_2 = 0. \quad (3.64)$$

Выразим возможные перемещения δS_B , δS_1 и δS_2 через $\delta\varphi$. Используя подобие треугольников, получим зависимость между линейными возможными перемещениями: $\delta S_B = AB \cdot \delta\varphi$, $\delta S_1 = AK \cdot \delta\varphi$, $\delta S_2 = \delta S_1$.

Тогда уравнение работ примет вид:

$$M \cdot \delta\varphi + R_B \cdot 2 \delta\varphi - P_1 \cdot 4\delta\varphi - P_2 \cdot \cos 60^\circ \cdot 4\delta\varphi = 0 \quad \text{или}$$

$$M + 2R_B - 4P_1 - 2P_2 = 0.$$

Подставив численные значения, находим R_B :

$$R_B = \frac{4P_1 + 2P_2 - M}{2} = 23\text{ н}.$$

3.4.2. Общее уравнение динамики

Общее уравнение динамики является аналогом принципа возможных перемещений для случая движения механической системы. Общее уравнение динамики получается при совместном применении принципа Даламбера и принципа возможных перемещений. В результате получаем следующую формулировку:

Для каждого заданного положения механической системы с геометрическими идеальными связями сумма работ всех активных сил и сил инерции на любом ее возможном перемещении из данного положения равна нулю, т.е.

$$\sum \delta A_k + \sum \delta A_k^\Phi = 0,$$

где $\sum \delta A_k$ — сумма элементарных работ активных сил, $\sum \delta A_k^\Phi$ — сумма элементарных работ сил инерции.

Пример.

Стержень AB массы M_1 лежит на двух катках массы M_2 каждый. Стержень перемещается вдоль горизонтальной плоскости посредством нити, переброшенной через блок массой M_3 . При этом к блоку приложен постоянный вращающий момент L . Определить ускорение стержня и натяжение троса, считая катки и блок однородными круглыми цилиндрами, причем $M_1 = M_2 = M_3 = M$, $r_2 = r_3 = r$ (рис.3.13).

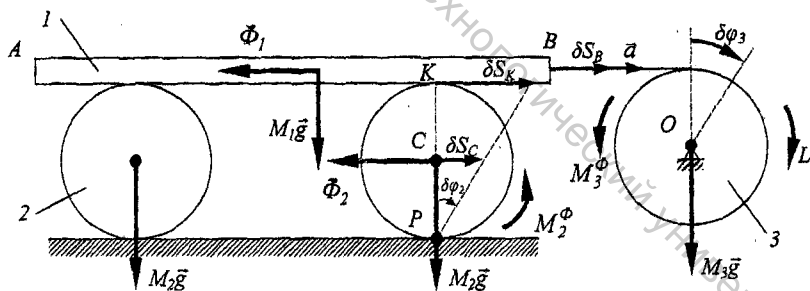


Рис. 3.13

Решение.

Рассматриваемая система имеет одну степень свободы, так как положение блока 3, заданное посредством угла его поворота, определяет положение стержня и катков. На данную систему действуют силы тяжести $M_1\vec{g}$, $M_2\vec{g}$, $M_3\vec{g}$ стержня, двух катков и блока, соответственно, и вращающий момент L , приложенный к блоку.

Определим силы инерции системы. Силы инерции стержня, движущегося поступательно, приводятся к равнодействующей Φ_1 , приложенной в центре масс стержня. Сила инерции Φ_1 направлена противоположно ускорению a стержня AB . Модуль силы инерции $|\Phi_1| = M_1 a$.

Так как каток 2 движется плоскопараллельно, то силы инерции его точек приводятся к главному вектору Φ_2 сил инерции и главному моменту сил инерции M_2^Φ .

Главный вектор Φ_2 сил инерции катка по модулю равен $\Phi_2 = M_2 a_c$. Вектор Φ_2 направлен противоположно центру масс C катка.

Величина главного момента M_2^Φ сил инерции катка равна:

$$M_2^\Phi = J_C \varepsilon_2 = \frac{M_2 r_2^2}{2} \varepsilon_2,$$

где J_C — момент инерции катка относительно оси Cz , проходящей через точку C перпендикулярно плоскости рисунка.

Силы инерции блока 3, вращающегося вокруг неподвижной оси O , приведутся к главному моменту сил инерции M_3^Φ , модуль которого равен:

$$M_3^\Phi = J_O \varepsilon_3 = \frac{M_3 r_3^2}{2} \cdot \varepsilon_3.$$

Сообщим блоку возможное угловое перемещение $\delta\varphi_3$. Тогда все точки стержня AB получают возможное перемещение δS_B , центр масс C катка переместится на величину δS_C , а сам каток повернется на угол $\delta\varphi_2$.

Составим общее уравнение динамики для системы:

$$L \cdot \delta\varphi_3 - M_3^\Phi \cdot \delta\varphi_3 - \Phi_1 \cdot \delta S_B - 2\Phi_2 \cdot \delta S_C - 2M_2^\Phi \cdot \delta\varphi_2 = 0. \quad (3.65)$$

Работа силы тяжести $M_3 g$ равна нулю, так как эта сила приложена в неподвижной точке, а работа сил $M_1 g$, $M_2 g$ равна нулю, так как эти силы перпендикулярны перемещениям точек приложения этих сил.

Выразим $\delta\varphi_2$, $\delta\varphi_3$, δS_C через δS_B , угловые ускорения ε_1 , ε_2 и ускорение a , выразим через искомое ускорение a . Так как точка P является мгновенным центром скоростей катка, то имеем:

$$\delta S_C = \frac{\delta S_K}{2} = \frac{\delta S_B}{2}; \quad \delta\varphi_2 = \frac{\delta S_K}{2r_2} = \frac{\delta S_B}{2r}; \quad \varepsilon_2 = \frac{a}{2r_2} = \frac{a}{2r}; \quad a_c = \frac{a}{2}.$$

$$\text{Возможное перемещение} \quad \delta\varphi_3 = \frac{\delta S_B}{r_3} = \frac{\delta S_B}{r}.$$

$$\text{Угловое ускорение блока} \quad \varepsilon_3 = \frac{a}{r_3} = \frac{a}{r}.$$

Таким образом, подставляя значения сил инерции, моментов сил инерции и зависимости возможных перемещений в общее уравнение, получим:

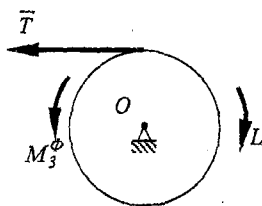
$$L \cdot \frac{\delta S_B}{r_3} - \frac{M_3 r_3^2}{2} \cdot \frac{a}{r_3} \cdot \frac{\delta S_B}{r_3} - M_1 a \delta S_B - 2M_2 \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{\delta S_B}{2} - 2 \cdot \frac{M_2 r_2^2}{2} \cdot \frac{a}{2r_2} \cdot \frac{\delta S_B}{2r_2}, \quad (3.66)$$

или, учитывая, что $M_1 = M_2 = M_3 = M$, имеем

$$\left(\frac{L}{r} - \frac{M}{2} a - Ma - \frac{M}{2} a - \frac{M}{4} a \right) \delta S_B = 0.$$

Сократив почленно на δS_B , определим искомое ускорение: $\frac{9}{4} Ma = \frac{L}{r}$, от-

$$\text{куда } a = \frac{4L}{9Mr}.$$



Для определения натяжения нити рассмотрим вращение блока 3 вокруг оси O .

$$\text{Тогда } L - T \cdot r - M_3^\phi = 0 \quad \text{или} \quad L - T \cdot r - \frac{Mr^2}{2} \cdot \frac{4L}{9Mr^2} = 0. \quad \text{Откуда получаем } T = \frac{7L}{9r}.$$

3.4.3. Задачи

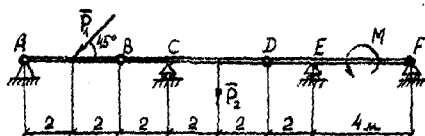
№1

Задача 1.1.

Дано:

 A, B, D и F — шарниры

$$P_1 = 4\sqrt{2} \text{ н}, P_2 = 8 \text{ н}, M = 6 \text{ нм}$$

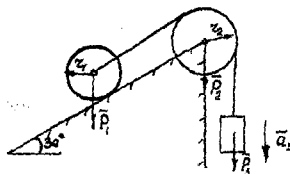
Определить R_F 

Задача 1.2.

Дано:

$$P_1 = P_2 = P_3 = P$$

$$r_1 = r_2 = r$$

Определить a_3 и натяжения в обеих ветвях троса

№2

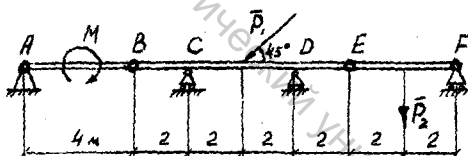
Задача 2.1.

Дано:

 A, B, E и F — шарниры

$$P_1 = 2\sqrt{2} \text{ н}, P_2 = 4 \text{ н},$$

$$M = 12 \text{ нм}$$

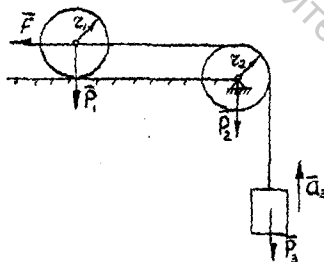
Определить R_D 

Задача 2.2.

Дано:

$$P_1 = P_2 = P_3 = P, r_1 = r_2 = r$$

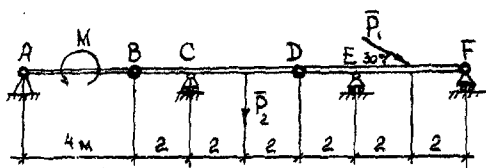
$$a_3 = \text{const} = g$$

 g — ускорение свободного паденияОпределить F и натяжения в обеих ветвях троса

№3

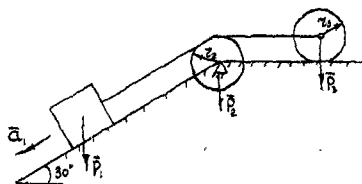
Задача 3.1.

Дано:

 A, B, D и F — шарниры $P_1 = 6 \text{ Н}, P_2 = 8 \text{ Н}, M = 8 \text{ Нм}$ Определить R_E 

Задача 3.2.

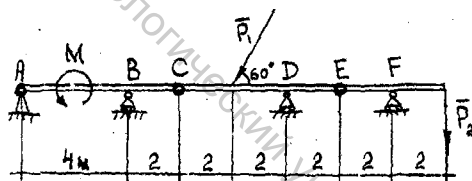
Дано:

 $P_1 = P_2 = P_3 = P$ $r_2 = r_3 = r$ Определить a_1 и натяжения в
обеих ветвях троса

№4

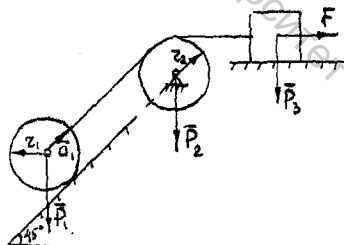
Задача 4.1.

Дано:

 A, C и E — шарниры $P_1 = 2 \sqrt{3} \text{ Н}, P_2 = 3 \text{ Н}, M = 6 \text{ Нм}$ Определить R_B 

Задача 4.2.

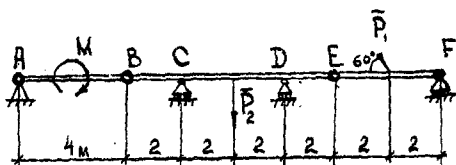
Дано:

 $P_1 = P_2 = P_3 = P$ $r_1 = r_2 = r$ $a_1 = \text{const} = \sqrt{2}g$ g — ускорение свободного паденияОпределить F и натяжения в обеих
ветвях троса

№5

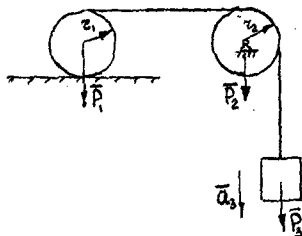
Задача 5.1.

Дано:

 A, B, E и F — шарниры $P_1 = 4\sqrt{3}\text{ н}, P_2 = 6\text{ н}, M = 4\text{ нм}$ Определить R_C 

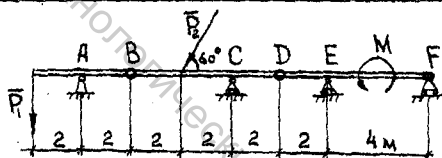
Задача 5.2.

Дано:

 $P_1 = P_2 = P_3 = P$ $r_1 = r_2 = r$ Определить a_3 и натяжения в обеих ветвях троса

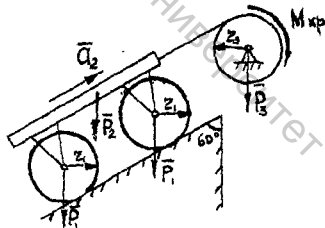
№6

Задача 6.1.

Дано: B, D и F — шарниры $P_1 = 6\text{ н}, P_2 = 4\sqrt{3}\text{ н}, M = 12\text{ нм}$ Определить R_E 

Задача 6.2.

Дано:

 $P_1 = P_2 = P_3 = P$ $r_1 = r_3 = r$ $a_2 = \text{const} = g$ g — ускорение свободного паденияОпределить $M_{кр}$ и натяжение троса

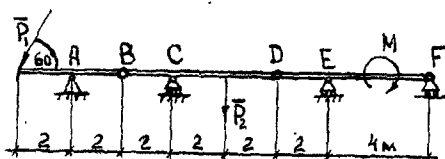
№7

Задача 7.1.

Дано:

 B, D и F — шарниры

$$P_1 = 4\sqrt{3}\text{ Н}, P_2 = 10\text{ Н}, M = 6\text{ Нм}$$

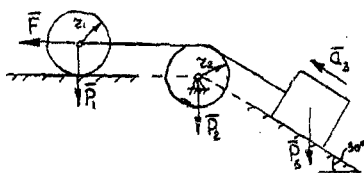
Определить R_F 

Задача 7.2.

Дано:

$$P_1 = P_2 = P_3 = P, F = 2P, r_1 = r_2 = r$$

Определить a_3 и натяжения в обоих
ветвях троса



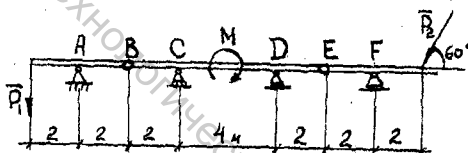
№8

Задача 8.1.

Дано:

 B и E — шарниры

$$P_1 = 8\text{ Н}, P_2 = 8\sqrt{3}\text{ Н}, M = 6\text{ Нм}$$

Определить R_D 

Задача 8.2.

Дано:

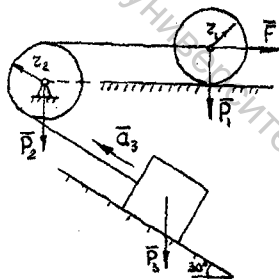
$$P_1 = P_2 = P_3 = P$$

$$r_1 = r_2 = r$$

$$a_3 = \text{const} = g$$

 g — ускорение свободного падения

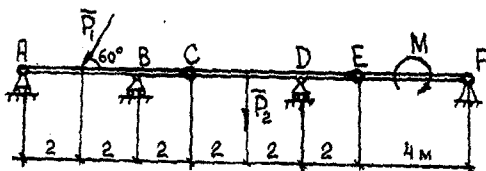
Определить F и натяжения в обоих
ветвях троса



№9

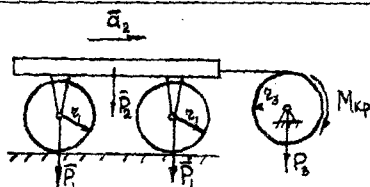
Задача 9.1.

Дано:

 A, C, E и F — шарниры $P_1 = 4\sqrt{3}\text{ н}, P_2 = 8\text{ н}, M = 8\text{ нм}$ Определить R_A 

Задача 9.2.

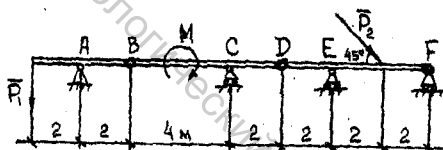
Дано:

 $P_1 = P_2 = P_3 = P, r_1 = r_3 = r$ $M_{кр} = 3P \cdot r$ Определить a_2 и натяжение троса

№10

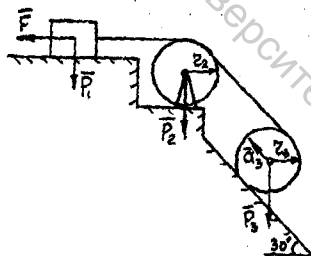
Задача 10.1.

Дано:

 B, D и F — шарниры $P_1 = 2\text{ н}, P_2 = 2\sqrt{2}\text{ н}, M = 4\text{ нм}$ Определить R_F 

Задача 10.2.

Дано:

 $P_1 = P_2 = P_3 = P$ $r_2 = r_3 = r$ $a_3 = \text{const} = g$ g — ускорение свободного паденияОпределить F и натяжения обеих частей троса

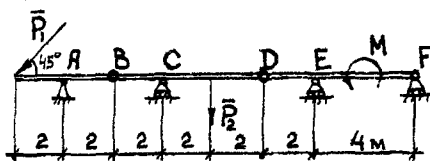
№11

Задача 11.1.

Дано:

 B, D и F — шарниры

$$P_1 = 4\sqrt{2}\text{ н}, P_2 = 8\text{ н}, M = 6\text{ нм}$$

Определить R_E 

Задача 11.2.

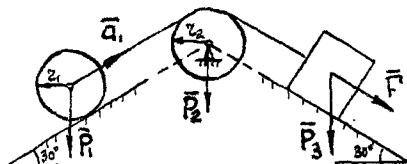
Дано:

$$P_1 = P_2 = P_3 = P$$

$$r_1 = r_2 = r, F = P$$

Определить a_1 и натяжения в

обеих ветвях троса



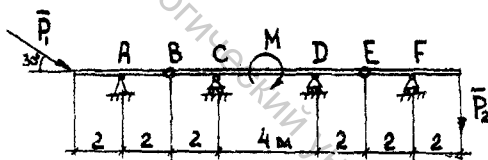
№12

Задача 12.1.

Дано:

 B и E — шарниры

$$P_1 = 4\text{ н}, P_2 = 4\text{ н}, M = 4\text{ нм}$$

Определить R_C 

Задача 12.2.

Дано:

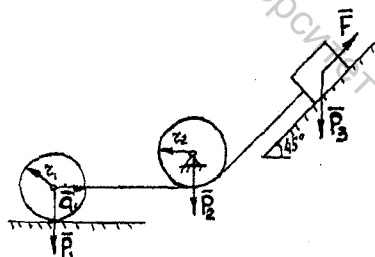
$$P_1 = P_2 = P_3 = P$$

$$r_1 = r_2 = r$$

$$a_1 = \text{const} = \sqrt{2}g$$

 g — ускорение свободного паденияОпределить F и натяжения в обеих

ветвях троса



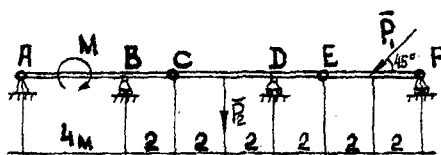
№13

Задача 13.1.

Дано:

 A, C, E и F — шарниры

$$P_1 = 4\sqrt{2}\text{Н}, P_2 = 4\text{Н}, M = 2\text{нм}$$

Определить R_B 

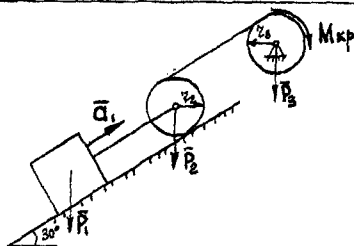
Задача 13.2.

Дано:

$$P_1 = P_2 = P_3 = P$$

$$r_2 = r_3 = r$$

$$M_{кр} = 5Pr$$

Определить a_1 и натяжение тросов

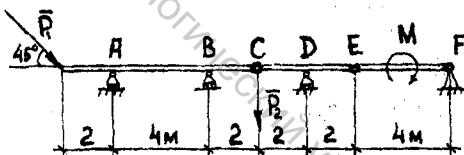
№14

Задача 14.1.

Дано:

 C, E и F — шарниры

$$P_1 = 4\sqrt{2}\text{Н}, P_2 = 6\text{Н}, M = 8\text{нм}$$

Определить R_B 

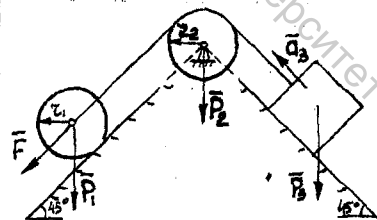
Задача 14.2.

Дано:

$$P_1 = P_2 = P_3 = P$$

$$r_1 = r_2 = r$$

$$a_3 = \text{const} = \sqrt{2}g$$

 g — ускорение свободного паденияОпределить F и натяжения в обеих ветвях троса

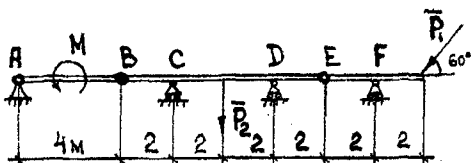
№15

Задача 15.1.

Дано:

 A, B и E — шарниры

$$P_1 = 4\sqrt{3}\text{н}, P_2 = 4\text{н}, M = 8\text{нм}$$

Определить R_D 

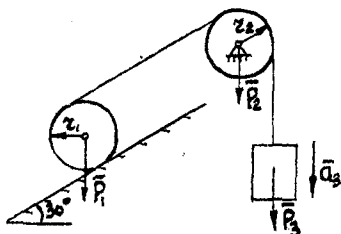
Задача 15.2.

Дано:

$$P_1 = P_2 = P_3 = P$$

$$r_1 = r_2 = r$$

Определить a_3 и натяжения в обеих ветвях троса



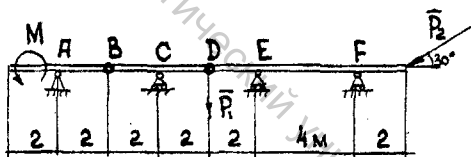
№16

Задача 16.1.

Дано:

 B и D — шарниры

$$P_1 = 4\text{н}, P_2 = 8\text{н}, M = 2\text{нм}$$

Определить R_F 

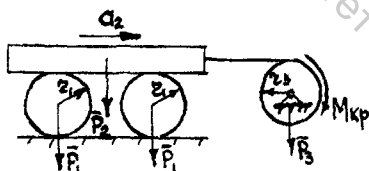
Задача 16.2.

Дано:

$$P_1 = P_2 = P_3 = P$$

$$r_1 = r_3 = r$$

$$a_2 = \text{const} = g$$

 g — ускорение свободного паденияОпределить $M_{кр}$ и натяжение троса

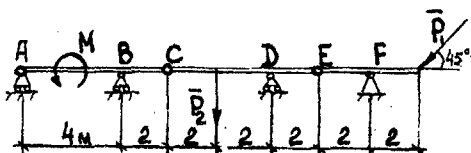
№17

Задача 17.1.

Дано:

 A, C и E — шарниры

$$P_1 = 2\sqrt{2} \text{ н}, P_2 = 4 \text{ н}, M = 2 \text{ нм}$$

Определить R_A 

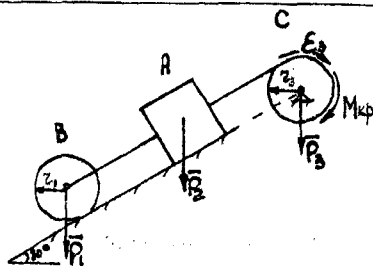
Задача 17.2.

Дано:

$$P_1 = P_2 = P_3 = P$$

$$r_1 = r_3 = r$$

$$M_{кр} = 4Pr$$

Определить ε_3 и натяжения тросов

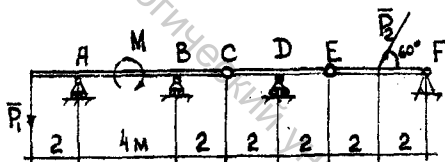
№18

Задача 18.1.

Дано:

 C, E и F — шарниры

$$P_1 = 6 \text{ н}, P_2 = 4\sqrt{3} \text{ н}, M = 2 \text{ нм}$$

Определить R_A 

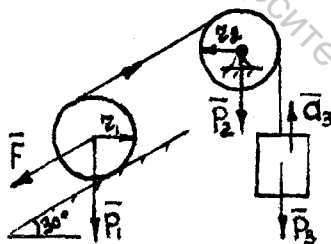
Задача 18.2.

Дано:

$$P_1 = P_2 = P_3 = P$$

$$r_1 = r_2 = r$$

$$a_3 = \text{const} = g$$

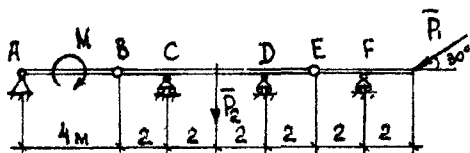
 g — ускорение свободного паденияОпределить F и натяжения в обеих ветвях троса

Задача 19.1.

Дано:

 A, B и E — шарниры

$P_1 = 8 \text{ н}, P_2 = 8 \text{ н}, M = 8 \text{ нм}$

Определить R_C 

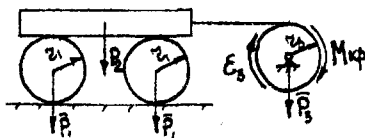
Задача 19.2.

Дано:

$P_1 = P_2 = P_3 = P$

$r_1 = r_3 = r$

$M_{кр} = 9Pr$

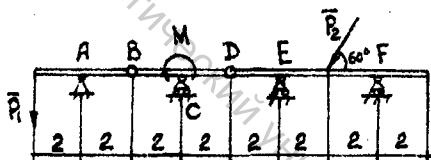
Определить ε_3 и натяжение троса

Задача 20.1.

Дано:

 B и D — шарниры

$P_1 = 2 \text{ н}, P_2 = 4 \cdot \sqrt{3} \text{ н}, M = 4 \text{ нм}$

Определить R_E 

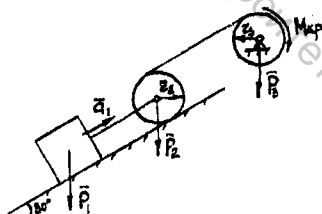
Задача 20.2.

Дано:

$P_1 = P_2 = P_3 = P$

$r_2 = r_3 = r$

$a_1 = \text{const} = g$

 g — ускорение свободного паденияОпределить $M_{кр}$ и натяжение тросов

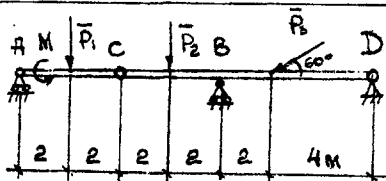
№21

Задача 21.1.

Дано:

$$P_1 = 2 \text{ н}, P_2 = 4 \text{ н}, P_3 = 3 \text{ н}$$

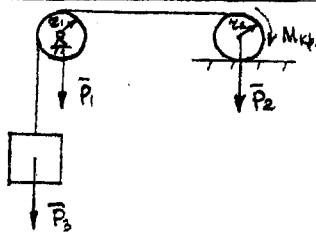
$$M = 5 \text{ нм}$$

Определить R_D 

Задача 21.2.

Дано:

$$P_1 = P_2 = P_3 = P, M_{\text{кр}}$$

Определить a_3 и натяжения в обеих ветвях троса

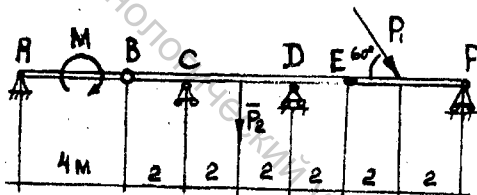
№22

Задача 22.1.

Дано:

A, B, E и F — шарниры

$$P_1 = 4\sqrt{3} \text{ н}, P_2 = 6 \text{ н}, M = 4 \text{ нм}$$

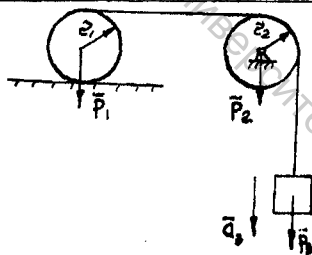
Определить R_C 

Задача 22.2.

Дано:

$$P_1 = P_2 = P_3 = P$$

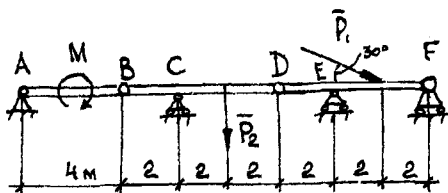
$$r_1 = r_2 = r$$

Определить a_3 и натяжения в обеих ветвях троса

№23

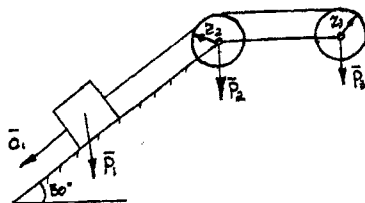
Задача 23.1.

Дано:

 A, B, D и F — шарниры $P_1 = 6 \text{ н}, P_2 = 8 \text{ н}, M = 8 \text{ нм}$ Определить R_E 

Задача 23.2.

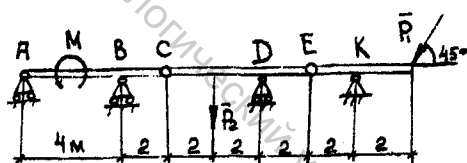
Дано:

 $P_1 = P_2 = P_3 = P$ $r_2 = r_3 = r$ Определить a_1 и натяжения в обеих ветвях троса

№24

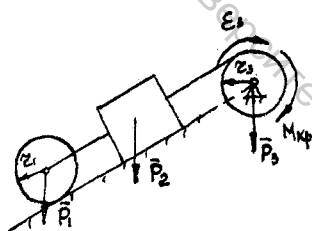
Задача 24.1.

Дано:

 A, C и E — шарниры $P_1 = 2\sqrt{2} \text{ н}, P_2 = 4 \text{ н}, M = 2 \text{ нм}$ Определить R_A 

Задача 24.2.

Дано:

 $P_1 = P_2 = P_3 = P$ $r_1 = r_3 = r$ $M_{кр} = 4Pr$ Определить E_3 и натяжение тросов

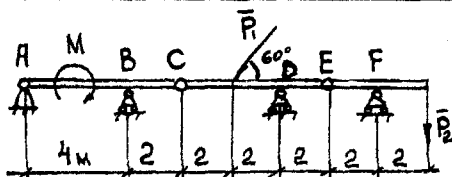
№25

Задача 25.1.

Дано:

 A, C и E — шарниры

$$P_1 = 2 \sqrt{3} \text{ н}, P_2 = 3 \text{ н}, M = 6 \text{ нм}$$

Определить R_B 

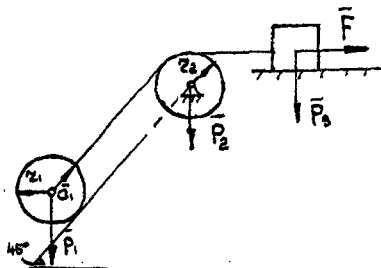
Задача 25.2.

Дано:

$$P_1 = P_2 = P_3 = P$$

$$r_1 = r_2 = r$$

$$a_1 = \text{const} = \sqrt{2} g$$

 g — ускорение свободного паденияОпределить F и натяжения в обеих ветвях троса

Библиотека ВГТУ



00017659