МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ СТАТИЧЕСКОЙ ДЕФОРМАЦИИ МИКРОПОЛЯРНОГО УПРУГОГО СТЕРЖНЯ С КРУГОВОЙ ОСЬЮ И МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Саркисян С.О., Хачатрян М.В.
Ширакский государственный университет, Гюмри, Армения,
khachatryanmeline@mail.ru

В данной работе формулируются гипотезы, и на основе этих гипотез построена общая прикладная модель статической деформации микрополярного упругого стержня с круговой осью. Для изучения конкретных граничных задач, на основе применения законов перемещений и функционала полной потенциальной энергии системы, разработаны соответствующие алгоритмы метода конечных элементов. Определяются жесткостные характеристики конечного элемента и выполняется процедура формирования разрешающей системы алгебраических линейных уравнений.

1.Формулируем допущения (гипотезы), используемые при построении прикладной модели микрополярного упругого тонкого стержня с круговой осью:

А) В качестве исходной кинематической гипотезы для перемещений, примем гипотезу прямой линии, т.е. гипотезу Тимошенко, это означает, что линейный элемент первоначально перпендикулярный к средней линии срединной плоскости стержня до деформации, остается после деформации прямолинейным, но уже не перпендикулярным к деформированной средней линии, а поворачивается на некоторый угол, не изменяя при этом своей длины. Кроме того, для свободного поворота ω_2 будем считать, что эта функция по координате z- постоянная. Вследствие указанных допущений будем иметь следующий линейный закон изменения перемещений и свободного поворота по толщине срединной плоскости кругового стержня с независимыми полями перемещений и вращений:

$$V_1 = u(\varphi) + z\psi(\varphi), \quad V_2 = w(\varphi), \quad \omega_3 = \Omega_3(\varphi) \,, \tag{1}$$

где $u(\varphi)$ и $w(\varphi)$– перемещения точек средней линии в направлениях по ее касательной и по нормали (т.е. $w(\varphi)$– это прогиб стержня); $\psi(\varphi)$- угол поворота первоначально нормального элемента; $\Omega_3(\varphi)$- свободный поворот этого элемента (здесь φ- угловая координаты оси стержня).

Кинематические гипотезы (1) в целом, как в работах [1,2] – назовем обобщенные кинематические гипотезы Тимошенко на случай микрополярного тонкого стержня (в данном случае, для стержня с круговой осью).

Б) Гипотеза о тонкостенности стержня, при которой будем принимать следующие приближенные равенства (здесь r_0- радиус оси стержня):

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0 + z} = \frac{1}{r_0\left(1 + \dfrac{z}{r_0}\right)} \approx \frac{1}{r_0} \,. \tag{2}$$

В) Предположения о малости в соответствующем уравнении закона Гука нормального напряжения σ_{22}, относительно нормального напряжения σ_{11}.

Г) При определении деформаций, изгибов-кручений, силовых и моментных напряжений, сначала для касательного напряжения σ_{21} примем

$$\sigma_{21} = \overset{0}{\sigma}_{21}(\varphi) \tag{3}$$

После определения указанных выше величин, формулу для σ_{21} будем уточнять следующим образом. Интегрируем по z второе из уравнений равновесия и, при определении постоянного интегрирования (вернее функции от φ), будем потребовать равенство нулю интеграла от $-h$ до h от полученного выражения. После указанного интегрирования полученное окончательное выражение будем прибавлять к формуле (3).

С целью приведения двумерной задачи микрополярной теории упругости к одномерной, вводим статически эквивалентные напряжениям усилия: N, Q_1, Q_2 и моменты: M_{11}, L_{13}, которые выражаются следующими формулами:

$$\mathrm{N} = \int_{-h}^{h} \sigma_{11} dz\,, \quad Q_1 = \int_{-h}^{h} \sigma_{12} dz, \quad Q_2 = \int_{-h}^{h} \sigma_{21} dz, \quad \mathrm{M}_{11} = \int_{-h}^{h} \sigma_{11} z dz, \quad L_{13} = \int_{-h}^{h} \mu_{13} dz. \tag{4}$$

В результате приходим к системе уравнений равновесия прикладной модели микрополярного упругого стержня с круговой осью:

Уравнения равновесия

$$\frac{1}{r_0}\mathrm{N} - \frac{1}{r_0}\frac{dQ_1}{d\varphi} = q_2^+ - q_2^-\,, \qquad \frac{1}{r_0}Q_1 + \frac{1}{r_0}\frac{d\mathrm{N}}{d\varphi} = -\left(q_1^+ - q_1^-\right)$$

$$Q_2 - \frac{1}{r_0}\frac{d\mathrm{M}_{11}}{d\varphi} = h\left(q_1^+ + q_1^-\right)\,, \qquad Q_2 - Q_1 - \frac{1}{r_0}\frac{dL_{13}}{d\varphi} = m^+ - m^-\,. \tag{5}$$

Соотношения упругости

$$\mathrm{N} = 2\mathrm{E}h\Gamma_{11},\ \ Q_1 = 2h(\mu+\alpha)\Gamma_{12} + 2h(\mu-\alpha)\Gamma_{21},\ \ Q_2 = 2h(\mu+\alpha)\Gamma_{21} + 2h(\mu-\alpha)\Gamma_{12},$$

$$\mathrm{M}_{11} = \frac{2\mathrm{E}h^3}{3}\mathrm{K}_{11},\ L_{13} = 2Bhk_{13}. \tag{6}$$

Геометрические соотношения

$$\Gamma_{11} = \frac{1}{r_0}\frac{du}{d\varphi} + \frac{1}{r_0}w,\ \ \Gamma_{12} = \frac{1}{r_0}\frac{dw}{d\varphi} - \frac{1}{r_0}u - \Omega_3\,,\ \ \Gamma_{21} = \psi + \Omega_3\,,\ \ \mathrm{K}_{11} = \frac{1}{r_0}\frac{d\psi}{d\varphi}\,,\ \ k_{13} = \frac{1}{r_0}\frac{d\Omega_3}{d\varphi}\,. \tag{7}$$

Общий вид функционала потенциальной энергии деформации при изгибе упругого стержня с круговой осью выражается так:

$$U = \int_0^a Э_0 dx_1\,,$$

$$Э_0 = \mathrm{E}h\Gamma_{11}^2 + \frac{\mathrm{E}h^3}{3}\mathrm{K}_{11}^2 + (\mu+\alpha)h\Gamma_{12}^2 + (\mu+\alpha)h\Gamma_{21}^2 + 2(\mu-\alpha)h\Gamma_{12}\Gamma_{21} + (\gamma+\varepsilon)hk_{13}^2\,, \tag{8}$$

$Э_0$-линейная плотность потенциальной энергии деформации. Основными кинематическими параметрами в задаче изгиба микрополярного упругого тонкого стержня с круговой осью являются: прогиб оси стержня - $w(s)$; осевое перемещение - $u(s)$; угол поворота нормального элемента - $\psi(s)$; $\Omega_3(s)$- свободный поворот этого элемента. Распределение принятых основных кинематических переменных вдоль элемента дуги оси стержня будем аппроксимировать полиномами.

Для прогиба $w(s)$, осевого перемещения $u(s)$, угла поворота нормального элемента $\psi(s)$ и свободного поворота $\Omega_3(s)$- примем:

$$\begin{aligned}
w(s) &= a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + a_3 s^3 + a_4 s^4 + a_5 s^5 + a_6 s^6 + a_7 s^7,\\
u(s) &= b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + b_3 s^3 + b_4 s^4 + b_5 s^5 + b_6 s^6 + b_7 s^7,\\
\psi(s) &= c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + c_3 s^3 + c_4 s^4 + c_5 s^5 + c_6 s^6 + c_7 s^7,\\
\Omega_3(s) &= d_0 + d_1 s + d_2 s^2 + d_3 s^3 + d_4 s^4 + d_5 s^5 + d_6 s^6 + d_7 s^7, s = r_0\varphi
\end{aligned} \tag{9}$$

Здесь a_i, b_i, c_i-коэффициенты, которые выражаются через узловые перемещения и повороты.

Применяя процедуру метода конечного элемента приходим к следующей системе алгебраических уравнений:

$$[K]\cdot\{\delta\}=[P]. \qquad (10)$$

Здесь $[K]$-матрица жесткости элемента размером 32×32, а $[P]$- вектор столбец усилий в узлах (вектор столбец нагрузки), $\{\delta\}^T=\{\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4,...,\delta_{32}\}$-вектор узловых перемещений и поворотов; Рассмотрим численный пример:

$$\frac{h}{a}=\frac{1}{40},\quad \nu=0.33,\quad B^*=\frac{B}{a^2\mu}=1.5,\quad \bar{r}_0=\frac{r_0}{a}=0.64,\quad \frac{P}{a\mu}=9.5\times 10^{-8}.$$

Здесь все величины безразмерные; μ-модуль сдвига $\left(\mu=\dfrac{E}{2(1+\nu)}\right)$, α и B - новые упругие постоянные микрополярного материала стержня.

Таблица 1 - Прогибы микрополярного упругого тонкого стержня с круговой осью в зависимости от отношения $\frac{\alpha}{\mu}$ и классического стержня.

$\frac{\alpha}{\mu}$	микрополярная модель $\bar{w}_{\max}\times 10^{-4}$	классическая модель $\bar{w}_{\max}\times 10^{-4}$	$\frac{w_{\max}^{мик.}}{w_{\max}^{кл.}}$
10^{-5}	1.05	1.08	0.97
10^{-4}	0.85	1.08	0.78
2×10^{-4}	0.72	1.08	0.66
10^{-3}	0.44	1.08	0.41
10^{-2}	0.31	1.08	0.29
10^{-1}	0.28	1.08	0.26

Как убедимся, при увеличении постоянной упругости α (микрополярной постоянной), жесткость стержня сильно увеличивается.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 15T-2C138.

Литература

1. Sargsyan S. H. Effective Manifestations of Characteristics of Strength and Rigidity of Micropolar Elastic Thin Bars / Journal of Materials Science and Engineering, Vol.2. №1. 2012. P.98-108.
2. Sargsyan S.H. Energy balance equation, energetic theorems and variation equation for the general theory of micropolar elastic isotropic thin shells / International Journal of Mechanics, Vol.8. 2014. P. 93-10.