МОДЕЛЬ ТЕРМОУПРУГОСТИ МИКРОПОЛЯРНЫХ ПЛАСТИН И БАЛОК СО СТЕСНЕННЫМ ВРАЩЕНИЕМ

[1]Асланян Н.С., [1]Саркисян С.О.
[1]*Ширакский государственный университет, Гюмри, Армения, asnaira73@mail.ru*

Развивая подход работы [1-4] построены математические модели термоупругости микрополярных тонких балок и пластин со стесненным вращением и на их основе рассматриваются решения некоторых прикладных задач. При помощи численного анализа этих задач, устанавливаются эффективные свойства учета микрополярности материала балки или пластинки по сравнению с классическим случаем в смысле их жесткости и прочности.

Модель термоупругости микрополярных тонких балок со стесненным вращением.

Построенная модель термоупругости микрополярных тонких балок со стесненным вращением выражается следующей системой уравнений:

Уравнения равновесия

$$\frac{dN_{12}}{dx_1} = -q_{x_2}, \qquad N_{21} - \frac{dM_{11}}{dx_1} = hq_{x_1}, \qquad \frac{dL_{13}}{dx_1} + N_{12} - N_{21} = -m; \tag{1}$$

Физические соотношения термоупругости

$$N_{12} + N_{21} = 4\mu h\widetilde{\Gamma}_{12}, \quad M_{11} = \frac{2Eh^3}{3}\left(K_{11} - \alpha_t\chi_t\right), \quad L_{13} = 2hBk_{13}, \quad \chi_t = \frac{\widetilde{T}}{2h}. \tag{2}$$

Геометрические соотношения

$$K_{11} = \frac{d\psi}{dx_1}, \ \widetilde{\Gamma}_{12} = \frac{dw}{dx_1} + \psi, \ k_{13} = \frac{d\Omega_3}{dx_1}, \ \Omega_3(x_1) = \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dx_1} - \psi\right). \tag{3}$$

Здесь N_{12}, N_{21} –усилия, M_{11}, L_{13}-моменты от силового и моментного напряжений; K_{11} и k_{13}-изгибание оси балки от соответствующих напряжений; $\widetilde{\Gamma}_{12}$ -сдвиговая деформация; w-прогиб балки; ψ-угол поворота нормального сечения; Ω_3-угол свободного его поборота; E, μ- классические упругие постоянные; B-микрополярная постоянная материала балки; $T = x_2\frac{\widetilde{T}}{2h}$, где T-температура, x_2-координата перпендикулярная к оси балки x_1, $2h$-толщина балки; $\widetilde{T}$ - функция от x_1 (в частности может быть $\widetilde{T} = const$), α_t- коэффициент линейного расширения. На каждом краю балки $\left(x_1 = 0, x_2 = a\right)$ должны выполняться по три граничные условия.

Приведем численные результаты: когда обе края балки шарнирно оперты;

когда $\delta = \frac{h}{a} = \frac{1}{40}$, $T_0 = 60^\circ\,C$, $\alpha_t = 125\times10^{-7}\ {}^{1}\!/_{\text{гр}}$, получим $\frac{\overline{w}^{мик.}_{\max}}{\overline{w}^{кл.}_{\max}} = 0.97$ при $B^* = 1.5\times10^{-5}$,

$\frac{\overline{w}^{мик.}_{\max}}{\overline{w}^{кл.}_{\max}} = 0.79$ при $B^* = 1.5\times10^{-4}$, $\frac{\overline{w}^{мик.}_{\max}}{\overline{w}^{кл.}_{\max}} = 0.27$ при $B^* = 1.5\times10^{-3}$.

Как видно из приведенных результатов, при увеличении безразмерной микрополярной постоянной B^* жесткость балки сильно увеличивается. Если будем считать максимальное значение основного силового напряжения, то убедимся, что когда увеличиваем B^* по микрополярной теории балки это значение сильно уменьшается, по сравнению с классической теорией.

Модель термоупругости микрополярных прямоугольных пластин со стесненным вращением.

Построенная модель термоупругости микрополярных тонких пластин со стесненным вращением в декартовой системе координат выражается следующий системой уравнений:

Уравнения равновесия

$$\frac{\partial N_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial N_{23}}{\partial x_2}=-\widetilde{p}_3, \qquad N_{3i}-\left(\frac{\partial M_{ii}}{\partial x_i}+\frac{\partial M_{ji}}{\partial x_j}\right)=h\widetilde{p}_i$$
$$\frac{\partial L_{ii}}{\partial x_i}+\frac{\partial L_{ji}}{\partial x_j}+(-1)^j\left(N_{j3}-N_{3j}\right)=-\widetilde{m}_i, \quad \frac{\partial \Lambda_{13}}{\partial x_1}+\frac{\partial \Lambda_{23}}{\partial x_2}+(M_{12}-M_{21})=0, \quad i,j=1;2, \tag{4}$$

Физические соотношения термоупругости

$$N_{i3}+N_{3j}=4\mu h\left(\Gamma_{i3}+\Gamma_{3j}\right) \qquad L_{ij}=2h\left[(\gamma+\varepsilon)k_{ij}+(\gamma-\varepsilon)k_{ji}\right],$$
$$M_{11}=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left[K_{ii}+\nu K_{jj}-(1+\nu)\alpha_t\chi_t\right], \quad M_{12}+M_{12}=\frac{2\mu h^3}{3}\left[K_{12}+K_{21}\right], \tag{5}$$
$$L_{ii}=4\gamma h k_{ii},\ \Lambda_{i3}=\frac{2h^3}{3}\frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma+\varepsilon}l_{i3}. \quad i,j=1;2,$$

Геометрические соотношения

$$\Gamma_{i3}+\Gamma_{3j}=\frac{\partial w}{\partial x_1}+\psi_i,\ K_{ii}=\frac{\partial \psi_i}{\partial x_i}, \quad K_{12}+K_{21}=\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}+\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1},\ k_{ii}=\frac{\partial \Omega_i}{\partial x_i}, \quad k_{ij}=\frac{\partial \Omega_j}{\partial x_i},$$
$$\Omega_i=-\frac{1}{2}(-1)^j\left(\psi_j-\frac{\partial w}{\partial x_j}\right), \iota=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1}-\frac{\partial \psi_1}{\partial x_2}\right), l_{i3}=\frac{\partial \iota}{\partial x_i}. \quad i,j=1;2. \tag{6}$$

На каждом краю пластинки должны выполняться по пять граничных условий.

Система уравнений (4)-(6) можно привести к системе относительно w,ψ_1,ψ_2.

Модель термоупругости микрополярных круглых пластин со стесненным вращением.

Для осесимметричной задачи, когда имеем изгибное деформирование, основная система уравнений такая:

Уравнения равновесия

$$\frac{dN_{13}}{dr}+\frac{1}{r}N_{13}=-\widetilde{p}_3, \quad N_{31}-\frac{dM_{11}}{dr}-\frac{1}{r}\left(M_{11}-M_{22}\right)=h\widetilde{p}_1,$$
$$\frac{dL_{12}}{dr}+\frac{1}{r}\left(L_{12}+L_{21}\right)+\left(N_{31}-N_{13}\right)=-\widetilde{m}_2 \tag{7}$$

Физические соотношения термоупругости

$$N_{13}+N_{31}=4\mu h\widetilde{\Gamma}_{13},$$
$$M_{11}=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left[K_{11}+\nu K_{22}-(1+\nu)\alpha_t\chi_t\right], \quad M_{22}=\frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}\left[\nu K_{11}+K_{22}-(1+\nu)\alpha_t\chi_t\right], \tag{8}$$
$$L_{12}=2h\left[(\gamma+\varepsilon)k_{12}+(\gamma-\varepsilon)k_{21}\right], \quad L_{21}=2h\left[(\gamma+\varepsilon)k_{21}+(\gamma-\varepsilon)k_{12}\right]$$

Геометрические соотношения

$$\widetilde{\Gamma}_{13}=\frac{\partial w}{\partial r}+\psi_1,\ K_{11}=\frac{\partial \psi_1}{\partial r},\ K_{22}=\frac{1}{r}\psi_1,\ k_{12}=\frac{\partial \Omega_2}{\partial r},\ k_{21}=-\frac{1}{r}\Omega_2,\ \Omega_2=\frac{1}{2}\left(\psi_1-\frac{\partial w}{\partial r}\right), \tag{9}$$

Если пластика сплошная, то на границе $r=a$ должна выполнятся три граничные условия.

Система уравнений (7)-(9) можем привести к системе относительно функций $w,\ \psi_1$:

$$\begin{cases} 2\mu h\nabla^2 w + 2\mu h\left(\dfrac{d\psi_1}{dr}+\dfrac{1}{r}\psi_1\right) - \dfrac{h(\gamma+\varepsilon)}{2}\nabla^2\nabla^2 w + \dfrac{h(\gamma+\varepsilon)}{2}\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}\left(r\dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{d\psi_1}{dr}+\dfrac{1}{r}\psi_1\right)\right) = -\widetilde{p}_3 \\ 2\mu\left(\dfrac{dw}{dr}+\psi_1\right) + \dfrac{\gamma+\varepsilon}{2}\dfrac{d}{dr}\left(\nabla^2 w\right) - \left(\dfrac{\gamma+\varepsilon}{2}+\dfrac{2Eh^2}{3\left(1-\nu^2\right)}\right)\dfrac{d}{dr}\left(\dfrac{d\psi_1}{dr}+\dfrac{1}{r}\psi_1\right) + \dfrac{2Eh^2}{3(1-\nu)}\alpha_t\dfrac{d\chi_t}{dr} = \widetilde{p}_1 \end{cases} \qquad (10)$$

где $\nabla^2 w = \left(\dfrac{d^2 w}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{dw}{dr}\right)$.

Приведем численные результаты:

1) прямоугольная пластинка, когда края пластинки шарнирно оперты;

когда $\delta = \dfrac{h}{a} = \dfrac{1}{40}$, $T_0 = 60^\circ C$, $\nu = 0.33$, $\alpha_t = 125\times10^{-7}\ {}^{1}\!/_{\text{гр}}$, получим $\dfrac{\overline{w}_{\max}^{мик.}}{\overline{w}_{\max}^{кл.}} = 0.49$ при $\bar\gamma = \bar\varepsilon = 10^{-5}$, $\dfrac{\overline{w}_{\max}^{мик.}}{\overline{w}_{\max}^{кл.}} = 0.31$ при $\bar\gamma = \bar\varepsilon = 10^{-3}$, $\dfrac{\overline{w}_{\max}^{мик.}}{\overline{w}_{\max}^{кл.}} = 0.25$ при $\bar\gamma = \bar\varepsilon = 10^{-1}$,

2) когда пластинка сплошная круглая, контур которой шарнирно-оперта (при тех же данных предыдушей задзчи); получим $\dfrac{\overline{w}_{\max}^{мик.}}{\overline{w}_{\max}^{кл.}} = 0.97$ при $\bar\gamma = \bar\varepsilon = 10^{-5}$, $\dfrac{\overline{w}_{\max}^{мик.}}{\overline{w}_{\max}^{кл.}} = 0.78$ при $\bar\gamma = \bar\varepsilon = 10^{-4}$, $\dfrac{\overline{w}_{\max}^{мик.}}{\overline{w}_{\max}^{кл.}} = 0.40$ при $\bar\gamma = \bar\varepsilon = 5\times10^{-4}$, $\dfrac{\overline{w}_{\max}^{мик.}}{\overline{w}_{\max}^{кл.}} = 0.26$ при $\bar\gamma = \bar\varepsilon = 10^{-3}$.

Как видно из приведенных результатов, при увеличении микрополярных физических безразмерных постоянных, жесткость пластинки сильно увеличивается.

Заключение:

Построены прикладные математические модели термоупругости микрополярных тонких балок и пластин со стесненным вращением. Решены конкретные задачи термоупругого изгиба микрополярных тонких балок и пластин. Анализ численных результатов устанавливает эффективные свойства микрополярного материала с точки зрения жесткости и прочности этих тонких тел по сравнению с классической моделью.

Работа выполнена при финансовой поддержке ГКН МОН РА в рамках научного проекта № SCS 15T-2C138.

Литература

1. S.H. Sargsyan, Effective Manifestations of Characteristics of Strength and Rigidity of Micropolar Elastic Thin Bars// Journal of Materials Science and Engineering, vol.2, 2012, № 1. pp.98-108.
2. Саркисян С. О. Математическая модель микрополярных упругих тонких пластин и особенности их прочностных и жесткостных характеристик.// Прикладная механика и техническая физика. 2012. Т.53. Вып. 2. С. 148-156.
3. S.H. Sargsyan, Mathematical Model of Micropolar Termo-Elasticiti of Thin Shells. // Journal of Thermal Stresses, vol. 36, 2013, Number 11. pp.1200-1216.
4. Саркисян С. О.Некоторые общие вопросы теории термоупругости микрополярных тонких оболочек //Известия НАН Армении.2014.Т.67.№ 2. С.52-68.