

ИЗГИБ СВОБОДНОЙ БИМЕТАЛЛИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЫ

Андронов И.Н.¹, Демина М.Ю.²

¹Ухтинский государственный технический университет, Ухта, Россия
iandronov@mail.ru

²Сыктывкарский лесной институт (филиал) Санкт-Петербургского государственного лесотехнического университета, Сыктывкар, Россия

Биметаллические пластины применяют в различных устройствах, используя их способность изменять кривизну при нагревании вследствие различного теплового расширения составляющих пластину металлов или сплавов [1]. Слой металла, имеющий больший коэффициент теплового расширения α_1 , называется активным, меньший коэффициент $\alpha_2 < \alpha_1$ – пассивным. Биметаллические пластины могут применяться в качестве элементов приборов и автоматических устройств, чувствительных к изменению температуры: тепловые реле, термометры, термокомпенсаторы для уменьшения погрешности показаний приборов при колебаниях температуры. Введем характеристику чувствительности биметаллической пластины к изменению температуры

$$k = \frac{fl}{i\Delta t}, \quad (1)$$

где f – изгиб свободного конца пластины длиной l и толщиной h , имеющей радиус инерции $i = \sqrt{J_x/F} = \sqrt{bh^3/12bh} = h/2\sqrt{3}$, разность температур Δt . Представим (1) как

$$k = \frac{2\sqrt{3}fl}{h\Delta t}. \quad (2)$$

Рассмотрим свободный нагрев прямой биметаллической пластины. Выделим из пластины шириной b бесконечно малый элемент dx (рис. 1), обозначим толщину слоев h_1 и h_2 , коэффициенты линейного расширения $\alpha_1 > \alpha_2$. При нагреве несаянных слоев они независимо удлиняются, приобретая относительные деформации ε_1 и ε_2

$$\varepsilon_1 dx = \Delta t \cdot \alpha_1 dx$$

$$\varepsilon_2 dx = \Delta t \cdot \alpha_2 dx.$$

При совместном расширении саянных слоев, на основе гипотезы плоских сечений, происходит искривление, концевые сечения элемента поворачиваются на угол $d\varphi$. Волокна, расположенные на расстоянии y от сая металлов, удлиняются на

$$\varepsilon_y dx = \varepsilon_0 dx + y d\varphi,$$

где ε_0 – относительное удлинение поверхности сая, а относительная деформация рассматриваемого слоя

$$\varepsilon_y = \varepsilon_0 + y \frac{d\varphi}{dx}. \quad (3)$$

Согласно рис. 1 $\rho d\varphi = dx(1 + \varepsilon_0)$, считая $\varepsilon_0 \ll 1$, получим кривизну пластины при температуре t

$$\aleph_t = \frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{\rho}, \quad (4)$$

тогда

$$\varepsilon_y = \varepsilon_0 + y \aleph_t. \quad (5)$$

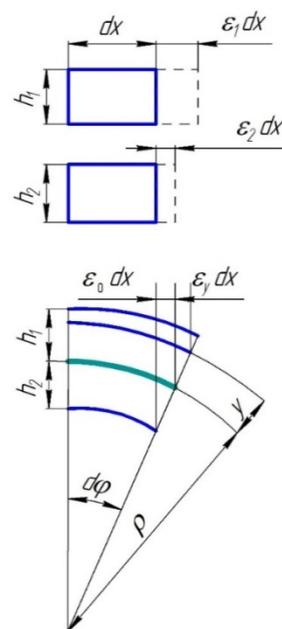


Рисунок 1

Представим линейную деформацию как сумму деформаций от внутренних сил N и совместного удлинения слоев пластины при нагреве

$$\varepsilon_y = \varepsilon_N + \varepsilon_t = \frac{\sigma}{E} + \alpha\Delta t, \quad (6)$$

где E – модуль продольной упругости материала. Приравняв (5) и (6), получим

$$\frac{\sigma}{E} + \alpha\Delta t = \varepsilon_0 + y\aleph_t, \quad (7)$$

тогда напряжение в слое с координатой y будет

$$\sigma = E(\varepsilon_0 + y\aleph_t - \alpha\Delta t). \quad (8)$$

Напряжение в активном слое $\sigma_1 = E_1(\varepsilon_0 + y\aleph_t - \alpha_1\Delta t)$ при $0 \leq y \leq h_1$; в пассивном слое $\sigma_2 = E_2(\varepsilon_0 + y\aleph_t - \alpha_2\Delta t)$ при $h_2 \leq y \leq 0$, где E_1 – модуль упругости активного слоя, E_2 – модуль упругости материала пассивного слоя.

Условие равновесия для произвольного поперечного сечения элемента биметаллической пластины, представленной на рис. 1, запишется в виде $\sum N = 0$, $\sum M = 0$,

$$\begin{aligned} \sum N &= \int_{F_1} \sigma_1 dF + \int_{F_2} \sigma_2 dF = E_1 b \int_0^{h_1} (\varepsilon_0 + y\aleph_t - \alpha_1\Delta t) dy + E_2 b \int_{-h_2}^0 (\varepsilon_0 + y\aleph_t - \alpha_2\Delta t) dy = \\ &= E_1 b \left(\varepsilon_0 h_1 + \aleph_t \frac{h_1^2}{2} - \alpha_1 h_1 \Delta t \right) + E_2 b \left(\varepsilon_0 h_2 - \aleph_t \frac{h_2^2}{2} - \alpha_2 h_2 \Delta t \right) = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \sum M &= \int_{F_1} \sigma_1 y dF + \int_{F_2} \sigma_2 y dF = E_1 b \int_0^{h_1} (\varepsilon_0 + y\aleph_t - \alpha_1\Delta t) y dy + E_2 b \int_{-h_2}^0 (\varepsilon_0 + y\aleph_t - \alpha_2\Delta t) y dy = \\ &= E_1 b \left(\varepsilon_0 \frac{h_1^2}{2} + \aleph_t \frac{h_1^3}{3} - \alpha_1 \Delta t \frac{h_1^2}{2} \right) - E_2 b \left(\varepsilon_0 \frac{h_2^2}{2} - \aleph_t \frac{h_2^3}{3} - \alpha_2 \Delta t \frac{h_2^2}{2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Решая уравнения (9) и (10) относительно кривизны \aleph_t , получим:

$$\aleph_t = \frac{6(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta t}{\frac{(E_1 h_1^2 - E_2 h_2^2)^2}{E_1 E_2 h_1 h_2 (h_1 + h_2)} + 4(h_1 + h_2)}. \quad (11)$$

Максимальная чувствительность k достигается при максимальной кривизне пластины, т.е. при $E_1 h_1^2 - E_2 h_2^2 = 0$, отсюда

$$E_1 h_1^2 = E_2 h_2^2 \quad \text{или} \quad \frac{h_1}{h_2} = \sqrt{\frac{E_2}{E_1}}, \quad (12)$$

при этом наибольшая кривизна пластины

$$\aleph_{t \max} = \frac{6(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta t}{4(h_1 + h_2)} = \frac{3(\alpha_1 - \alpha_2)\Delta t}{2h}, \quad (13)$$

и деформация поверхности спая

$$\varepsilon_0 = \frac{(\alpha_1 h_2 + \alpha_2 h_1)\Delta t}{h}, \quad (14)$$

где $h = h_1 + h_2$ – толщина пластины.

Напряжения, возникающие в слоях пластины, согласно (8)

$$\sigma = E(\varepsilon_0 + y\aleph_{t \max} - \alpha\Delta t) = E \left(\frac{\alpha_1 h_2 + \alpha_2 h_1}{h} \Delta t + \frac{3(\alpha_1 - \alpha_2)y}{2h} \Delta t - \alpha\Delta t \right), \quad (15)$$

для активного и пассивного слоев определяются как: $\sigma_{1t} = E_1 \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) \Delta t}{h} \left(\frac{3}{2} y - h_1 \right)$ при $0 \leq y \leq h_1$ и $\sigma_{2t} = E_2 \frac{(\alpha_1 - \alpha_2) \Delta t}{h} \left(\frac{3}{2} y + h_2 \right)$ при $h_2 \leq y \leq 0$.

Изотермическое перемещение сечений пластины определяется при помощи интеграла Мора

$$f = \int_l \frac{M_p M_1}{EJ} dl, \quad (16)$$

где M_p – момент в текущем сечении; $\frac{M_p}{EJ} = \frac{1}{\rho} = \kappa_{tmax}$ – кривизна изогнутой

пластины; M_1 – момент от единичной силы, равный $M_1 = 1 \cdot z$, где $0 \leq z \leq l$.

Для прямой консольно закрепленной пластины (рис. 2) прогиб свободного конца согласно (16) равен,

$$f = \frac{3(\alpha_1 - \alpha_2) \Delta t}{2h} l^2,$$

а угол поворота конечного сечения при единичном моменте $M_1 = 1$ будет равен

$$\varphi = \frac{3(\alpha_1 - \alpha_2) \Delta t}{2h} \int_0^l M_1 dl = \frac{3(\alpha_1 - \alpha_2) l \Delta t}{2h}.$$

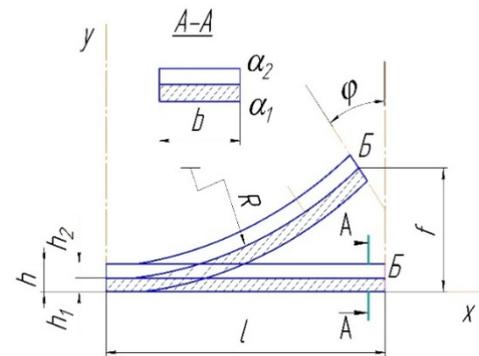


Рисунок 2.

Для металлов, которые традиционно входят в состав биметаллических пластин, например, таких как медь, никель, упругие и тепловые константы незначительно изменяются с температурой. Однако при использовании в качестве активного слоя металла с памятью формы [2] можно добиться повышенной чувствительности биметалла к температурным изменениям, причем в расчетах подобных термоэлементов необходимо учитывать изменение упругого модуля активного металла с температурой [3–5].

Список литературы

1. Андронов И.Н., Демина М.Ю. Напряжения и деформации в биметаллической балке // LIX Международная конференция «Актуальные проблемы прочности», Тольятти, 5–7 сентября 2017 г. - С. 179 – 181.
2. Belyaev S., Evard M., Lomakin I., Resnina N., Volkov A., Rubanik V. Functional properties of shape memory bimetal plate // Materials Today: Proceedings 2S. 2015. - P.723-726.
3. Андронов И.Н., Тарсин А.В., Богданов Н.П. Численное описание зависимости модуля Юнга никелида титана от температуры // Вестник ТГУ. -2013.- Т.18, Вып.4. - С. 2067 – 2068.
4. Андронов И.Н., Богданов Н.П., Северова Н.А., Тарсин А.В. Влияние фактора термоциклирования и знака нагружения на величину фазовых модулей никелида титана // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. -2009. -Т. 75, №4. -С. 42 – 44.
5. Цхай Э.Б., Волокитин Г.Г., Клопотов А.А. Особенности работы тарельчатых пружин из сплавов с эффектами памяти формы // Международная научно-практическая конференция «Актуальные проблемы современного машиностроения», Юрга, 11-12 декабря 2014 г. -С.397 – 40