УДК 517.925

# ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

***Е.Г. Садовников***



ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается уравнение, которое при $x \neq 0$ можно записать в виде

1) $y' = f(x,y)\,p\left(\dfrac{y}{x}\right)$. Предполагается, что выполнены условия А:

а) функция $f(x,y)$ всюду непрерывно дифференцируема и $f(x,y) > 0$;

б) функция $p(t)$ имеет конечное множество точек разрыва с бесконечными пределами, а во всех остальных точках функция $p(t)$ непрерывна вместе с производной $p'(t)$;

в) уравнение 2) $f(0,0)p(u) - u = 0$ имеет конечное множество корней: $U_1, U_2 \ldots U_n,\ n \geq 2$; если $U_i$ есть корень уравнения 2), то выполняется тождество 3) $f(x,u_i x) \equiv f(0,0) > 0$; если $\vartheta_i$ не является корнем уравнения 2), то $\lim\limits_{x \to \infty} f(x,\vartheta_i x) = +\infty$;

г) если $U_i$ есть корень уравнения 2), то при достаточно малых значениях $x$ выполняется неравенство 4) $\left(f(x,ux)p(u) - u\right)\left(f(0,0)p(u) - u\right) > 0$ при $0 < (u - u_i) < \varepsilon$;

д) начало координат является единственной особой точкой уравнения 1).

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

Исследование проводим при $x \geq 0$ и $y \geq 0$. Рассмотрим ограниченный лучами $y = ax\,(AO)$ и $y = bx\,(BO)$ сектор $AOB$, $0 \leq a < b < +\infty$, $x \geq 0$.

Теорема 1. Если интегральная кривая (и.к.) $L$ уравнения 1) входит в начало координат в секторе $AOB$, то там она касается луча $y = u_0 x,\ a \leq u_0 \leq b$, причем $u_0$ является корнем уравнения 2).

Доказательство. Если и.к. $L$ входит в начало координат в секторе $AOB$ и не имеет там определенной касательной, то не существует $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{y(x)}{x}$ для этой и.к., но существует нижний предел $\varliminf\limits_{x \to 0} \dfrac{y(x)}{x} = \alpha$ и верхний предел $\varlimsup\limits_{x \to 0} \dfrac{y(x)}{x} = \beta$, где $a < \alpha < \beta \leq b$. Возьмем произвольное значение $c$, где $\alpha < c < \beta$. Функция $\dfrac{y(x)}{x}$ непрерывна на и.к. $L$ при $x \neq 0$ и поэтому и.к. $L$ будет пересекать луч

$y = cx$ в бесконечном множестве точек $N_i$ с предельной точкой $O(0,0)$, и на этом луче найдется бесконечное множество точек $M_i$ с предельной точкой $O(0,0)$, где правая часть уравнения 1) равна $c$. Тогда при стремлении к началу координат по этим точкам предельное значение будет равно $c$. Из условий $A$ вытекает, что при $\frac{y(x)}{x} \to C$ предельное значение правой части уравнения 1) равно $f(0,0)p(c)$. Поэтому $f(0,0)p(c) = c$, т.е. $f(0,0)p(c) - c = 0$ и число $c$ есть корень уравнения 2). Число $c$ взято произвольно из интервала $(a,b)$, и поэтому уравнение 2) должно иметь бесконечное множество корней, что противоречит условиям $A$. Если $\lim\limits_{x \to 0} \frac{y(x)}{x} = u_0$, то $f(0,0)p(u_0) = u_0$, т.е. $f(0,0)p(u_0) - u_0 = 0$ и число $u_0$ является корнем уравнения 2). Теорема доказана.

Рассмотрим два соседних корня $a_1$ и $a_2$ уравнения 2) $a_1$ и $a_2$, $0 \le a_1 < a_2 < +\infty$. Построим сектор $A_1OA_2$, ограниченный лучом $A_1O$ с уравнением $y = a_1 x$ и лучом $A_2O$ с уравнением $y = a_2 x, x \ge 0$. Пусть $q(u) \equiv f(0,0)p(u) - u$. Будем рассматривать интервалы $(a_1, a_1 + e)$ и $(a_2 - e, a_2)$, в которых функция $q(u)$ сохраняет знак, $e > 0$.

Теорема 2. Пусть $q(u) < 0$ в интервале $(a_1, a_1 + e)$, $q(u) > 0$ в интервале $(a_2 - e, a_2)$. Тогда все проходящие внутри сектора $A_1OA_2$ и.к. двумя концами удаляются в бесконечность в этом секторе, а лучи $A_1O$ и $A_2O$ являются и.к., т.е. сектор $A_1OA_2$ является гиперболическим.

Доказательство. Из условий $A$ следует, что $f(x, a_1 x)p(a_1) \equiv f(0,0)p(a_1) = a_1$, $f(x, a_2 x)p(a_2) \equiv f(0,0)p(a_2) = u_2$, т.е. лучи $y = a_1 x$ и $y = a_2 x$ являются и.к. при $x \ne 0$. Из условий $A$ следует существование такого числа $c_1$, что $p(c_1) = 0, p(u) > 0$ в интервале $(a_1, c_1)$ и такого числа $c_2$, что $q(u) > 0$ в интервале $(c_2, a_2)$, $\lim\limits_{u \to c_2} p(u) = +\infty$ $(u > c_2)$, $a_1 < c_1 < c_2 < a_2$. Луч $C_1O$ с уравнением $y = c_1 x$ является изоклиной нуля, а луч $C_2O$ с уравнением $y = c_2 x$ является изоклиной бесконечности. Все пересекающие изоклину бесконечности $C_2O$ одним концом уходят в бесконечность в секторе $A_2OC_2$, а другим концом входят в сектор $C_2OC_1$ и при дальнейшем продолжении или уходят в бесконечность в секторе $C_1OC_2$ или пересекают луч $C_1O$ и удаляются в бесконечность в секторе $C_1OA_1$. Отрезок $[c_1, c_2]$ не содержит корней уравнения 2) и поэтому в секторе $C_1OC_2$ и.к. не могут входить в начало координат. При выполнении условий $A$ лучи $A_1O$ и

$A_2O$ будут параболическими и.к., а все проходящие через внутренние точки сектора $A_1OA_2$ и.к. являются гиперболическими, т.е. теорема 2 доказана.

Аналогично можно доказать следующие теоремы.

Теорема 3. Пусть $q(u) > 0$ в интервале $(a_1, a_1 + \varepsilon)$, $q(u) < 0$ в интервале $(a_2 - \varepsilon, a_2)$. Тогда в секторе $A_1OA_2$ имеется бесконечное множество эллиптических и.к. (э.и.к.) и бесконечное множество параболических и.к. (п.и.к.), но нет в секторе $A_1OA_2$ гиперболических и.к. (г.и.к.).

Теорема 4. Пусть $q(u) > 0$ в интервалах $(a_1, a_1 + \varepsilon)$ и $(a_2 - \varepsilon, a_2)$. Тогда в секторе $A_1OA_2$ имеется бесконечное множество параболических и.к. и могут находиться гиперболические и.к. (г.и.к.). Необходимым и достаточным условием существования г.и.к. в секторе $A_1OA_2$ является существование такого отрезка $[\alpha, \beta]$, что $p(\alpha) = p(\beta) = 0,\ p(u) > 0$ в интервале $(\alpha, \beta)$, $a_1 < \alpha < \beta < a_2$.

Теорема 5. Пусть $q(u) < 0$ в интервалах $(a_1, a_1 + \varepsilon)$ и $(a_2 - \varepsilon, a_2)$. Тогда в секторе $A_1OA_2$ все и.к. являются параболическими.

Рассмотрим теперь сектор $AOB$, ограниченный лучами $AO(BO)$, где $AO$ определяется уравнением $y = a_1x_1$, а $BO$ есть положительная полуось ординат, причем эта полуось является и.к. уравнения.

Теорема 6. Пусть $q(u) > 0$ в некотором интервале $(m, +\infty)$, где $m > a_1$. Тогда все проходящие через внутренние точки сектора $AOB$ и.к. одним концом уходят в бесконечность в секторе $AOB$, а другим концом пересекают луч $AO$ при $x > 0$.

Теорема 7. Если $q(u) < 0$ в некотором интервале $(m, +\infty)$, то на луче $OA$ существуют такие точки $M_1$ и $M_2$, что все проходящие через внутренние точки отрезка $OM_1$ и.к. входят в начало координат в секторе $AOB$ и касаются там оси ординат. Все проходящие через внутренние точки отрезка $M_2A$ одним концом уходят в бесконечность в секторе $AOB$. Все проходящие через внутренние точки отрезка $M_1M_2$ и.к. двумя концами выходят из сектора $AOB$.

Рассмотрим сектор $AOB$, ограниченный лучом $AO$ с уравнением $y = \alpha x$ и положительной полуосью ординат $BO$.

Теорема 8. Пусть $u \geq \alpha$ нет корней уравнения 2), существует конечный предел $p(u)$ при $u \to \infty$. Тогда все проходящие через внутренние точки сектора $AOB$ и.к. пересекают стороны $AO$ и $BO$ при $y \neq 0$ и не входят в начало координат в секторе $AOB$.

Теорема будет справедливой, если $BO$ является отрицательной полуосью ординат, а при $u \leq \alpha$ нет корней уравнения 2).

Теперь рассмотрим случай, когда в секторе $AOB$ $BO$ есть положительная полуось ординат, $AO$ определяется уравнением $y = \alpha x$, где $\alpha$ есть корень уравнения 2).

Теорема 9. Пусть при $u > a$ нет корней уравнения 2), существует конечный предел $p(u)$ при $u \to \infty$, $q(u) < 0$ при $a < u < a + e$. Тогда все проходящие через внутренние точки сектора $AOB$ и.к. будут одним концом уходить в бесконечность в секторе $AOB$, а другим концом будут пересекать положительную полуось ординат.

Теорема 10. Пусть при $u > a$ нет корней уравнения 2), $q(u) > 0$ при $a < u < a + e$. Тогда в секторе $AOB$ бесконечное множество и.к. одним концом входят в начало координат и касаются там луча $y = ax$, а другим концом уходят в бесконечность в секторе $AOB$. Бесконечное множество и.к. одним концом уходят в бесконечность в секторе $AOB$, а другим концом пересекают положительную полуось ординат. Аналогично рассматривается случай, когда $BO$ есть отрицательная полуось ординат.

На основании указанных теорем можно определить поведение и.к. уравнения 1) на всей плоскости $xoy$, т.е. в целом.

ВЫВОДЫ

Если найдены все действительные корни уравнения 2), то строим соответствующие секторы и проверяем знак у функции $q(u)$ вблизи этих корней. Тогда к каждому такому сектору применяем одну из указанных теорем и определяем поведение и.к. уравнения 1) в данном секторе. Все гиперболические секторы определяются теоремой 2. Теоремой 5 определяются все параболические секторы. При выполнении условий $A$ уравнение 1) не имеет чисто эллиптических секторов, а содержит совместно эллиптические и параболические и.к. с бесконечным их множеством. При выполнении условий теоремы 4 вдали от начала координат будут находиться гиперболические и.к. (г.и.к.).

Список использованных источников

1. Федорюк М.В. Обыкновенные дифференциальные уравнения.- Издательство Москва: Наука, 2000г.- 350 стр.

SUMMARY

The article proposes the new method for the study of differential equations.