МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Учреждение образования
«Витебский государственный технологический университет»

МАТЕМАТИКА.
АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА И ПРОГРЕССИИ

Методические указания к решению задач централизованного тестирования

Витебск
2018

УДК 51:373.5

Составители:

А. В. Коваленко, А. П. Дмитриев, Ю. А. Завацкий

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом
УО «ВГТУ», протокол № 5 от 28.05.2018.

Математика. Арифметические преобразования, уравнения, неравенства и прогрессии : методические указания к решению задач централизованного тестирования / сост. А. В. Коваленко, А. П. Дмитриев, Ю. А. Завацкий. – Витебск : УО «ВГТУ», 2018. – 51 с.

Учебное издание является первой частью пособия по подготовке к централизованному тестированию по математике и содержит задачи практически всех типов алгебраических уравнений и неравенств, задачи на прогрессии и последовательности, а также на преобразование алгебраических выражений. Отдельные группы задач содержат примерное их решение. В издании приведён справочный материал, включающий в себя основные формулы школьного курса математики.

Пособие предназначено для учащихся общеобразовательных учреждений и слушателей курсов по подготовке к централизованному тестированию.

УДК 51:373.5

СОДЕРЖАНИЕ

Введение………………………………………………………………… 4

1 Арифметические и алгебраические преобразования... ....…......... 5
2 Линейные уравнения и системы.. 14
3 Рациональные уравнения...................... ……………...…………......... 17
4 Системы рациональных уравнений...................................….........… 22
5 Квадратичная функция и теорема Виета.. 25
6 Рациональные неравенства...................................... 29
7 Уравнения и неравенства, содержащие переменную с модулем 33
8 Иррациональные уравнения, неравенства и системы........................... 37
9 Прогрессии.. 42

Литература ……………………………………………………………… 50

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания к решению задач централизованного тестирования составлены на основе практических занятий, которые авторы проводили на протяжении многих лет преподавания дисциплины «Математика» в Витебском государственном технологическом университете на подготовительных курсах для поступления в высшие учебные заведения. Приведѐнный материал проверен на нескольких поколениях абитуриентов и содержит необходимые сведения для решения экзаменационных задач.

В настоящее время традиционные формы проведения вступительных экзаменов по математике заменены тестированием. Предлагаемые методические материалы предназначены учащимся для подготовки к централизованному тестированию по математике, а также могут быть использованы при изучении соответствующих разделов курса математики средней общеобразовательной школы.

Работа включает тестовые задания различной степени сложности, которые представляют все виды задач, встречающихся на централизованном тестировании. Разнообразие тестовых заданий позволяет использовать методические указания при проведении групповых и индивидуальных занятий и для самоподготовки.

Данные учебно-методические материалы предназначены для слушателей подготовительных курсов факультета довузовской подготовки и профориентации УО «ВГТУ». Методические указания написаны в соответствии с учебной программой вступительных испытаний по дисциплине «Математика».

В данной методической работе рассмотрены девять разделов дисциплины «Математика» для средней общеобразовательной школы: арифметические и алгебраические преобразования, линейные уравнения и системы линейных уравнений, рациональные уравнения, системы рациональных уравнений, квадратичная функция и теорема Виета, рациональные неравенства, уравнения и неравенства, содержащие переменную с модулем, иррациональные уравнения, неравенства и системы, арифметическая и геометрическая прогрессии.

Каждая тема работы представляет собой методический материал для проведения практических занятий, содержит решения типовых примеров и подборку рекомендуемых к решению задач по темам занятий, а также задания для выполнения домашних работ. В начале каждого раздела приведѐн краткий теоретический материал, который необходимо знать слушателю подготовительных курсов при подготовке к аудиторной и самостоятельной работе по заданной теме. Прежде чем приступать к решению задач домашнего задания, слушателю необходимо изучить теоретический и практический материал пройденного аудиторного занятия. После выполнения домашнего задания слушатель подготовительных курсов может обратиться к преподавателю за консультацией.

Предложенная методическая разработка поможет слушателям подготовительных курсов к сдаче централизованного тестирования по «Математике».

1 АРИФМЕТИЧЕСКИЕ И АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Содержание: формулы сокращѐнного умножения, разложение многочленов на множители, модуль действительного числа, численное вычисление значений выражений, сопряжѐнные числа, наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное, упрощение рациональных и иррациональных выражений.

1.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Свойства степеней

Для любых чисел x и y любых положительных чисел a и b справедливы следующие равенства:

1) $a^0 = 1$; **2)** $a^1 = a$;

3) $a^x \cdot a^y = a^{x+y}$; **4)** $a^x : a^y = a^{x-y}$;

5) $\left(a^x\right)^y = a^{xy}$; **6)** $\left(a \cdot b\right)^x = a^x \cdot b^x$;

7) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$; **8)** $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$.

Формулы сокращѐнного умножения

Для любых a, b и c справедливы равенства:

1) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

2) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

3) $(a-b)\cdot(a+b) = a^2 - b^2$;

4) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;

5) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;

6) $(a-b)\cdot(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$;

7) $(a+b)\cdot(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$.

Разложение многочленов на множители

Рассмотрим квадратный трѐхчлен $P_2(x) = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$.

Если дискриминант $D = b^2 - 4ac$ квадратного трѐхчлена положителен, то трѐхчлен имеет два различных действительных корня $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$. При этом квадратный трѐхчлен разложим на множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

Если дискриминант D квадратного трѐхчлена равен нулю, то трѐхчлен имеет два равных действительных корня $x_{1,2} = \frac{-b}{2a}$. При этом квадратный трѐхчлен разложим на множители:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2.$$

Если дискриминант D квадратного трѐхчлена меньше нуля, то трѐхчлен не разложим на множители. При этом квадратный трѐхчлен $ax^2 + bx + c > 0$, при значении $a > 0$ и $ax^2 + bx + c < 0$, если $a < 0$.

Рассмотрим многочлен n-ой степени $P_n(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$, где $a_0 \neq 0$. Если многочлен имеет рациональные корни, то они содержатся среди делителей числа $\frac{a_n}{a_0}$. Подбором можно найти этот корень $x = x_0$. Тогда многочлен разложим на множители: $P_n(x) = (x - x_0) \cdot Q_{n-1}(x)$. Для определения $Q_{n-1}(x)$ делим многочлен $P_n(x)$ на $x - x_0$ «уголком».

Свойства арифметических корней

Для любых натуральных n и k, больших 1, и любых неотрицательных a и b верны следующие равенства:

1) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$;

2) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b \neq 0)$;

3) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^k = \sqrt[n]{a^k}$;

4) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$;

5) $\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k}$;

6) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$;

7) $\sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}$, если $a < b$;

8) $\sqrt{a^2} = |a| = \left[\begin{array}{ll} a, & a \geq 0, \\ -a, & a < 0; \end{array}\right.$

9) $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$;

10) $\sqrt[2n+1]{a^{2n+1}} = a$.

1.2 Примеры решения типовых задач

1.2.1 Упростить выражение $\frac{\sqrt{a^2 - 4ab + 4b^2}}{\sqrt{a^2 + 4ab + 4b^2}} - \frac{8ab}{a^2 - 4b^2} + \frac{2b}{a - 2b}$, $0 < a < 2b$.

Решение. $\frac{\sqrt{(a-2b)^2}}{\sqrt{(a+2b)^2}} - \frac{8ab}{a^2 - 4b^2} + \frac{2b}{a - 2b} = \frac{|a-2b|}{|a+2b|} - \frac{8ab}{a^2 - 4b^2} + \frac{2b}{a - 2b} =$

$$= \frac{2b - a}{2b + a} + \frac{8ab}{(2b-a)(2b+a)} - \frac{2b}{2b - a} = \frac{4b^2 - 4ab + a^2 + 8ab - 4b^2 - 2ab}{(2b-a)(2b+a)} = \frac{a}{2b - a}.$$

1.2.2 Вычислить $\dfrac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}\sqrt{19-8\sqrt{3}}}{4-\sqrt{3}}-\sqrt{3}$.

Решение. $\dfrac{\sqrt{7+4\sqrt{3}}\sqrt{19-8\sqrt{3}}}{4-\sqrt{3}}-\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}\sqrt{\left(4-\sqrt{3}\right)^2}}{4-\sqrt{3}}-\sqrt{3}=$

$=\dfrac{\left|2+\sqrt{3}\right|\cdot\left|4-\sqrt{3}\right|}{4-\sqrt{3}}-\sqrt{3}=\dfrac{(2+\sqrt{3})\cdot(4-\sqrt{3})}{4-\sqrt{3}}-\sqrt{3}=2+\sqrt{3}-\sqrt{3}=2$.

1.3 Задания для решения на практическом занятии

1.3.1 Разложить на множители указанное выражение:

1) a^4-1; **2)** b^6-1; **3)** c^3-27;
4) x^4-16; **5)** $125+x^3$; **6)** c^6-b^6
7) x^8-256; **8)** $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{y^2}$; **9)** $\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}$.

1.3.2 Результат разложения выражения $x-y$ на множители, равен

а) $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$; **б)** $\left(\sqrt{x}-\sqrt{y}\right)^2$;

в) $\left(\sqrt[4]{x}-\sqrt[4]{y}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}\right)\cdot\left(\sqrt{x}+\sqrt{y}\right)$; **г)** $\left(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x\cdot y}+\sqrt[3]{y^2}\right)$;

д) $\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right)\cdot\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x\cdot y}+\sqrt[3]{y^2}\right)$.

1.3.3 Разложить на множители указанные выражения.

1) a^4+324; **2)** a^8+256
3) $z^{16}+6561$; **4)** x^4+1;
5) c^4+25; **6)** d^6+49;
7) $h^{10}+81$; **8)** p^8+625;
9) $l^{12}+1296$; **10)** $a^4+a^2b^2+b^4$;
11) $x^6-7x^3y^3+y^6$; **12)** $4\cdot p^{10}-4\cdot p^5\cdot t^5+9\cdot t^{10}$;
13) $16m^4+36m^2n^2+25n^4$; **14)** $9\cdot r^8+15\cdot r^4\cdot t^2+16\cdot t^4$.

1.3.4 Сократить дроби.

1) $\dfrac{a^8-256}{a^2-4}$; **2)** $\dfrac{x^{1/2}-16}{x^{1/8}-2}$; **3)** $\dfrac{b^{0,75}-a^{0,75}}{b^{1/8}-a^{1/8}}$; **4)** $\dfrac{a+b}{a-a^{2/3}\cdot b^{2/3}+b}$.

1.3.5 Указать формулу сокращённого умножения для указанных выражений:

1) $x^2-2xy+y^2$; **2)** $s^3+3s^2g+3sg^2+g^3$;

3) $x^2-2\cdot x\cdot 5+5^2$;

4) $y^2-2\cdot y\cdot 7+7^2$;

5) $x^2+2\cdot x\cdot 9+9^2$;

6) $a^2-10\cdot a+25$;

7) $b^2-6\cdot x+9$;

8) $\left(\sqrt{2}\,x\right)^2+2\cdot\sqrt{2}\,x\cdot 4+16$;

9) $\left(\sqrt{3}\,x\right)^2+2\cdot\sqrt{3}\,x\cdot\sqrt{5}+5$;

10) $\left(\sqrt{5}\,x\right)^2-2\cdot\sqrt{5}\,x\cdot 5+25$;

11) $25b^6-30b^3+9$;

12) $3x^4+2\sqrt{3}x^2+1$.

1.3.6 Разложить квадратный трехчлен или приводящийся к нему многочлен на множители.

1) $P_2(a)=2a^2-5a+2$;

2) $P_2(b)=3b^2+8b-3$;

3) $P_2(c)=16c^2-8c+1$;

4) $P_2(a)=a^2+5a+1$;

5) $P_2(x)=2x^2+2\sqrt{6}x+3$;

6) $P_2(x)=7x^2-2\sqrt{35}\,x+5$;

7) $P_4(a)=a^4+4a^2-5$;

8) $P_8(n)=n^8-162n^4+6561$;

9) $P_2(a,b)=4a^2-12ab+5b^2$;

10) $P_2(x,y)=4x^2-14xy-8y^2$;

11) $P_2(p,t)=9p^2-12pt+4t^2$;

12) $P_2(a,b)=30a^2+21ab-36b^2$.

1.3.7 Разложить многочлены на множители.

1) $P_3(x)=x^3-6x^2+11x-6$;

2) $P_3(x)=x^3+3x^2-6x-8$;

3) $P_3(x)=x^3+2x-3$;

4) $P_3(x)=x^3+4x^2-24$;

5) $P_3(x)=x^3-3x^2+4$;

6) $P_3(x)=4x^3-3x-1$;

7) $P_3(x)=15x^3+23x^2+9x+1$;

8) $P_3(x)=21x^3+x^2-5x-17$;

9) $P_3(x)=36x^3-61x-30$;

10) $P_3(x)=2x^3+3x^2+2x+1$;

11) $P_4(x)=2x^4-21x^3+74x^2-105x+50$;

12) $P_4(x)=4x^4+3x^3-23x^2-12x+28$;

13) $P_4(x)=3x^4-4x^3-14x^2-4x+3$;

14) $P_7(x)=x^3\left(x^2-5\right)^2-16x$.

1.3.8 Упростить указанные выражения:

1) $\sqrt{4b^2+4b+1}$;

2) $\sqrt{2a^2+2\sqrt{6}a+3}$;

3) $\sqrt{n^2+n\sqrt{12}+3}+\sqrt{n^2-n\sqrt{12}+3}$;

4) $\sqrt{x^2+x\sqrt{24}+6}-\sqrt{x^2-x\sqrt{24}+6}$;

5) $\dfrac{a^2-3}{\sqrt{\left(\dfrac{a^2+3}{2a}\right)^2-3}}$;

6) $\dfrac{a^2-4}{\sqrt{\left(\dfrac{a^2+4}{2a}\right)^2-4}}$;

7) $\dfrac{a^2+10}{a\cdot\sqrt{\left(\dfrac{a^2-10}{2a}\right)^2+10}}$, если $a\in(-10;-8)$;

8) $\dfrac{a^2+12}{a\cdot\sqrt{\left(\dfrac{a^2-12}{2a}\right)^2+12}}-4$, если $a\in(2017;2018)$.

1.3.9 Вычислить значения выражений.

1) $\sqrt{9-4\sqrt{5}}+\sqrt{14-6\sqrt{5}}$; **2)** $\sqrt{11-4\sqrt{7}}+\sqrt{16-6\sqrt{7}}$;

3) $\sqrt{13-4\sqrt{3}}+2\sqrt{12-6\sqrt{3}}$;

4) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}+\sqrt{\left(1-2\sqrt{3}\right)^2}+\sqrt[3]{\left(1-\sqrt{3}\right)^3}$;

5) $\sqrt{\left|10\sqrt{5}-30\right|}-\sqrt{\left(1-2\sqrt{5}\right)^2}-\sqrt[3]{\left(3-3\sqrt{5}\right)^3}$;

6) $\sqrt{\left|40\sqrt{2}-57\right|}-\sqrt{40\sqrt{2}+57}$; **7)** $\sqrt{\left|48\sqrt{5}-116\right|}+\sqrt{48\sqrt{5}+116}$;

8) $\sqrt{\left|60\sqrt{3}-111\right|}-\sqrt{60\sqrt{3}+111}$; **9)** $\sqrt{\left|144-72\sqrt{3}\right|}+\sqrt{72\sqrt{3}+144}$;

10) $3\cdot\sqrt{49-8\sqrt{3}}-2\cdot\sqrt{109-12\sqrt{3}}$; **11)** $25\left(\sqrt{64+6\sqrt{7}}+\sqrt{64-6\sqrt{7}}\right)^2$;

12) $3\left(\sqrt{5+2\sqrt{6}}+\sqrt{5-2\sqrt{6}}\right)^2$; **12)** $\sqrt[3]{135+78\sqrt{3}}+2\cdot\sqrt[3]{10-6\sqrt{3}}$.

1.3.10 Освободиться от иррациональности в знаменателе.

1) $\dfrac{1}{\sqrt{8}-\sqrt{3}}$; **2)** $\dfrac{25}{\sqrt{7}+\sqrt{2}}$; **3)** $\dfrac{5}{\sqrt[4]{7}-\sqrt[4]{2}}$;

4) $\dfrac{5}{\sqrt[4]{6}-\sqrt[4]{3}}$; **5)** $\dfrac{1}{2+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$; **6)** $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{6}}$;

7) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$; **8)** $\dfrac{22}{\sqrt[3]{7}+\sqrt[3]{4}}$; **9)** $\dfrac{3}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{2}}$;

10) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{4}}$; **11)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{36}+\sqrt[3]{30}+\sqrt[3]{25}}$; **12)** $\dfrac{45}{\sqrt[3]{23}+\sqrt[3]{22}}$.

1.3.11 Упростить выражение:

$$\left(\frac{2}{\sqrt{3}-1}+\frac{3}{\sqrt{3}-2}+\frac{15}{3-\sqrt{3}}\right)\cdot\left(\sqrt{3}+5\right)^{-1}.$$

1.3.12 Упростить выражение:

$$\left(\frac{10}{\sqrt{14}+3}-\frac{6}{4-\sqrt{14}}+\frac{22}{5-\sqrt{14}}\right)\cdot\left(\sqrt{14}+8\right).$$

1.3.13 Найти сумму наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного чисел 882, 1008 и 1134.

1.3.14 Найти разность наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного чисел 594, 7920 и 22374.

1.3.15 Найти $НОК(4;6;9)+2\cdot НОД(4;6;9)$.

1.3.16 Найти $НОД(18;45;288)-НОК(18;45;288)$.

1.3.17 Найти $2\cdot НОД(24;56;96)-3\cdot НОК(24;56;96)$.

1.3.18 Упростить: $\left(a+\dfrac{ab}{a-b}\right)\cdot\left(\dfrac{ab}{a+b}-a\right):\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$.

1.3.19 Упростить: $\left(\dfrac{a+3b}{(a-b)^2}+\dfrac{a-3b}{a^2-b^2}\right):\dfrac{a^2+3b^2}{(a-b)^2}$.

1.3.20 Упростить: $\left(m+n-\dfrac{4mn}{m+n}\right):\left(\dfrac{m}{m+n}-\dfrac{n}{n-m}-\dfrac{2mn}{m^2-n^2}\right)$.

1.3.21 Упростить: $\left(\dfrac{a\sqrt{2}}{\left(1+a^2\right)^{-1}}-\dfrac{2\sqrt{2}}{a^{-1}}\right)\cdot\dfrac{a^{-3}}{1-a^{-2}}$.

1.3.22 Упростить: $\left(\dfrac{a}{a^2-4}-\dfrac{8}{a^2+2a}\right)\cdot\dfrac{a^2-2a}{4-a}+\dfrac{a+8}{a+2}$.

1.3.23 Упростить: $a-\left(\dfrac{(16-a)a}{a^2-4}+\dfrac{3+2a}{2-a}+\dfrac{3a-2}{a+2}\right):\dfrac{a-1}{a(a^2+4a+4)}$.

1.3.24 Упростить: $\left(6a^2+5a-1+\dfrac{a+4}{a+1}\right):\left(3a-2+\dfrac{3}{a+1}\right)$.

1.3.25 Упростить: $\left(\dfrac{1}{a-\sqrt{2}}-\dfrac{a^2+4}{a^3-\sqrt{8}}\right)\cdot\left(\dfrac{a}{\sqrt{2}}+1+\dfrac{\sqrt{2}}{a}\right)$.

1.3.26 Упростить: $\left(\dfrac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{ab}\right)\cdot\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{a-b}\right)^2$.

1.3.27 Упростить: $\dfrac{a+b}{a^{2/3}-a^{1/3}\cdot b^{1/3}+b^{2/3}}-\dfrac{a-b}{a^{2/3}+a^{1/3}\cdot b^{1/3}+b^{2/3}}-\dfrac{a^{2/3}-b^{2/3}}{a^{1/3}-b^{1/3}}$.

1.3.28 Упростить: $\left(\dfrac{x^{1/2}-y^{1/2}}{x\cdot y^{1/2}+x^{1/2}y}+\dfrac{x^{1/2}+y^{1/2}}{x\cdot y^{1/2}-x^{1/2}y}\right)\cdot\dfrac{y^{1/2}\cdot x^{3/2}}{x+y}-\dfrac{2y}{x-y}$.

1.3.29 Упростить: $\dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\left(\dfrac{a^{3/2}+b^{3/2}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\dfrac{1}{(ab)^{-1/2}}\right)(a-b)^{-1}$.

1.3.30 Упростить: $\dfrac{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}}{\sqrt[3]{a^2(a-b)^2}}\cdot\dfrac{a^{2/3}\left(\sqrt{a^3}-\sqrt{b^3}\right)}{(a-b)^{1/3}}$

1.4 Задания для выполнения самостоятельной работы

1.4.1 Разложить на множители указанные выражения:

1) c^8-1; **2)** x^6-64; **3)** y^3-64;

4) a^4+81; **5)** a^6+729; **6)** $a^6+a^3b^3+b^6$;

7) $x-2$; **8)** $\sqrt[3]{x^4}-\sqrt[3]{y^4}$; **9)** $\sqrt{x^3}-\sqrt{y^3}$;

10) $3a^2-2a-1$; **11)** $4b^2-7b+3$; **12)** $9c^2-6c+1$;

13) $36x^2-60x+25$; **14)** b^4+3b^2-4; **15)** y^6-9y^3+8.

1.4.2 Разложить на множители указанные выражения:

1) $6a^2+7ab-20b^2$; **2)** $5a^2+3ab-8b^2$.

3) $15a^2+4ab-4b^2$; **4)** $21a^2+13ab+2b^2$;

1.4.3 Разложить на множители указанные многочлены:

1) $P_3(x)=x^3-9x^2+26x-24$; **2)** $P_3(x)=x^3+2x^2-7x+4$;

3) $P_3(x)=2x^3-3x^2-3x+2$; **4)** $P_3(x)=x^3+5x-6$;

5) $P_3(x)=5x^3-3x^2-2$; **6)** $P_3(x)=2x^3+5x-7$;

7) $P_3(x)=2x^3+3x^2-4x-1$; **8)** $P_3(x)=4x^3+2x^2-15x-10$;

9) $P_4(x)=3x^4+x^3-31x^2-9x+36$; **10)** $P_4(x)=x^4+5x^3+4x^2-24x-24$;

11) $P_4(x)=x^4-8x^3+22x^2-23x+6$ **12)** $P_7(x)=x^3(x^2-7)^2-36x$;

13) $P_3(x)=49x^3-85x-42$.

1.4.4 Упростить указанные выражения:

1) $\sqrt{9b^2-6b+1}$; **2)** $\sqrt{25a^2+20a+4}$;

3) $\sqrt{9x^2+3x\sqrt{20}+5}+\sqrt{9x^2-3x\sqrt{20}+5}$;

4) $\sqrt{a^2+a\sqrt{28}+7}-\sqrt{a^2-a\sqrt{28}+7}$;

5) $\dfrac{a^2-7}{\sqrt{\left(\dfrac{a^2+7}{2a}\right)^2-7}}$; **6)** $\dfrac{a^2-5}{\sqrt{\left(\dfrac{a^2+5}{2a}\right)^2-5}}$;

7) $\dfrac{a^2+14}{a\cdot\sqrt{\left(\dfrac{a^2-14}{2a}\right)^2+14}}-3$, если $a>0$; 8) $\dfrac{a^2+9}{a\cdot\sqrt{\left(\dfrac{a^2-9}{2a}\right)^2+9}}$, если $a<-1$.

1.4.5 Вычислить значения указанных выражений:

1) $\sqrt{19-8\sqrt{3}}-\sqrt{7-4\sqrt{3}}$; **2)** $\sqrt{18-8\sqrt{2}}-\sqrt{6-4\sqrt{2}}$;

3) $\sqrt{\left|41-24\sqrt{2}\right|}+\sqrt{24\sqrt{2}+41}$; **4)** $\sqrt{\left|33-8\sqrt{17}\right|}+\sqrt{26-6\sqrt{17}}$;

5) $\sqrt{51-10\sqrt{26}}-\sqrt{51+10\sqrt{26}}$; **6)** $\sqrt{\left|29-12\sqrt{5}\right|}+\sqrt{29+12\sqrt{5}}$;

7) $\sqrt{\left|93-36\sqrt{3}\right|}+\sqrt{93+36\sqrt{3}}$; **8)** $250\cdot\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^2$;

9) $\sqrt{\left|2\sqrt{5}-6\right|}+\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2}-\sqrt[3]{\left(2\sqrt{5}-\sqrt{3}\right)^3}$.

1.4.6 Освободиться от иррациональности в знаменателе.

1) $\dfrac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{7}}$; **2)** $\dfrac{5}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2}}$; **3)** $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{7}}$;

4) $\dfrac{4}{\sqrt[4]{11}-\sqrt[4]{7}}$; **5)** $\dfrac{1}{\sqrt[3]{144}+\sqrt[3]{60}+\sqrt[3]{25}}$; **6)** $\dfrac{3}{\sqrt{6}-\sqrt{3}}$;

7) $\dfrac{8}{\sqrt[3]{11}-\sqrt[3]{7}}$; **8)** $\dfrac{1}{\sqrt{13}+\sqrt{12}-\sqrt{11}}$; **9)** $\dfrac{6}{\sqrt[4]{14}-\sqrt[4]{11}}$;

10) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{81}-\sqrt[3]{63}+\sqrt[3]{49}}$; **11)** $\dfrac{56}{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{3}}$; **12)** $\dfrac{1}{\sqrt{13}+\sqrt{12}-\sqrt{11}}$.

1.4.7 Упростить выражение: $\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}-2}+\dfrac{8}{\sqrt{5}-3}+\dfrac{8}{\sqrt{5}-1}\right)\cdot\left(\sqrt{5}-2\right)^{-1}$.

1.4.8 Упростить выражение: $\left(\dfrac{15}{\sqrt{6}+1}+\dfrac{4}{\sqrt{6}-2}-\dfrac{12}{3-\sqrt{6}}\right)\cdot\left(\sqrt{6}+11\right)$.

1.4.9 Найти наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел 36 и 162.

1.4.10 Найти наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел 12600 и 26460.

1.4.11 Найти наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное чисел 36, 45 и 108.

1.4.12 Найти сумму наибольшего общего делителя чисел 48 и 108 и наименьшего общего кратного чисел 8 и 27.

1.4.13 Найти разность наибольшего общего делителя чисел 18 и 76 и наименьшего общего кратного чисел 19 и 23.

1.4.14 Упростить указанные рациональные выражения:

1) $\left(\frac{4(a+b)^2}{ab}-16\right)\cdot\left(\frac{(a+b)^2-ab}{ab}\right):\frac{a^2-b^2}{ab}$;

2) $\left[\left(\left(\frac{a+1}{a-1}\right)^2+3\right):\left(\left(\frac{a-1}{a+1}\right)^2+3\right)\right]:\frac{a^3+1}{a^3-1}-\frac{2a}{a-1}$;

3) $\left(\frac{1}{(m+n)^2}\left(\frac{1}{m^2}+\frac{1}{n^2}\right)+\frac{2}{(m+n)^3}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{n}\right)\right)\cdot m^2n^2$;

4) $\left(\frac{1}{2+2\sqrt{a}}+\frac{1}{2-2\sqrt{a}}-\frac{a^2+1}{1-a^2}\right)\cdot\left(1+\frac{1}{a}\right)$;

5) $\dfrac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b+c}}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b+c}}\cdot\left(1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right):\frac{a-b-c}{abc}$;

6) $\left(\frac{\sqrt{2}}{(1-x^2)^{-1}}+\frac{2^{3/2}}{x^{-2}}\right):\left(\frac{x^{-2}}{1+x^{-2}}\right)^{-1}$.

1.4.15 Упростить указанные иррациональные выражения:

1) $\dfrac{\frac{x-y}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}-\frac{x-y}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}}{\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{x-y}+\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{x-y}}\cdot\frac{2\sqrt{xy}}{y-x}$;

2) $\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})\cdot(a-b)}+\frac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\frac{\sqrt{ab}}{a-b}$;

3) $\left[\frac{1}{\left(a^{1/2}+b^{1/2}\right)^{-2}}-\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{a^{3/2}-b^{3/2}}\right)^{-1}\right]\cdot(ab)^{-1/2}$;

4) $\dfrac{\frac{1}{\sqrt{a-1}}+\sqrt{a+1}}{\frac{1}{\sqrt{a+1}}-\frac{1}{\sqrt{a-1}}}:\frac{\sqrt{a+1}}{(a-1)\sqrt{a+1}-(a+1)\sqrt{a-1}}$;

5) $\left(\frac{a\sqrt{a}+b\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right):(a-b)+\frac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$;

б) $\left(\dfrac{a^3-8}{a^2-5a+6}-\dfrac{(a+1)^2+3}{a-3}+\dfrac{a^2+a}{\sqrt[4]{a}}\right):\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt[4]{a^{-3}b^2}}$.

2 ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ

Содержание: линейные уравнения, системы линейных уравнений, линейная функция и её свойства, расстояние между двумя точками, деление отрезка пополам, уравнение окружности.

2.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Уравнение вида $ax=b$ называется линейным.

Линейное уравнение при значении $a\neq 0$ имеет единственное решение $x=\dfrac{b}{a}$; при значениях $a=0, b\neq 0$ – не имеет решений; при значениях $a=0, b=0$ – бесконечное множество решений.

Рассмотрим линейную функцию $y=kx+b$. При значении $k>0$ линейная функция возрастает; при значении $k<0$ линейная функция убывает; при значении $k=0$ линейная функция постоянна.

Рассмотрим на плоскости две точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$.

Уравнение прямой, проходящей через эти две точки, имеет вид

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}.$$

Расстояние между этими точками вычисляем по формуле

$$M_1M_2=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Пусть точка $M(x;y)$ делит отрезок M_1M_2 пополам. Тогда координаты этой точки вычисляются по формулам: $x=\dfrac{x_1+x_2}{2}$, $y=\dfrac{y_1+y_2}{2}$.

Уравнение окружности с центром в точке $C(x_0;y_0)$ и радиусом R:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2.$$

2.2 Примеры решения типовых задач

2.2.1 Найти значение выражения $2x_0+5$, где x_0 – корень уравнения $\dfrac{2x-3}{5}+x=\dfrac{3x-2}{2}$.

Решение. Умножим обе части уравнения на 10. Приходим к уравнению, равносильному данному: $4x-6+10x=15x-10$. Откуда $x=4$. Тогда $2x_0+5=2\cdot 4+5=13$.

2.2.2 Найти расстояние от точки, которая является решением системы $\begin{cases} 2x+y=10, \\ 3x-2y=1, \end{cases}$ до начала координат.

Решение. Найдѐм решение системы.

$$\begin{cases} 2x+y=10, \\ 3x-2y=1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=10-2x, \\ 3x-20+4x=1, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=10-2x, \\ 7x=21, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=10-2\cdot 3=4, \\ x=3. \end{cases}$$

Найдѐм расстояние от точки $M(3;4)$ до начала координат.

$$OM=\sqrt{(3-0)^2+(4-0)^2}=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5.$$

2.3 Задания для решения на практическом занятии

2.3.1 Решить линейные уравнения:

1) $\dfrac{2x-1}{3}+\dfrac{4x+5}{4}=\dfrac{7x-2}{5}+4x$; **2)** $\dfrac{5x+2}{7}-3x+\dfrac{6x-4}{5}-\dfrac{4x+3}{6}+4x=0$;

3) $\dfrac{3x-2}{3}+\dfrac{4x-1}{11}=6x+5$; **4)** $\dfrac{5x-4}{2}+\dfrac{3x-1}{3}=\dfrac{4x+2}{5}+\dfrac{1}{5}x$;

5) $\dfrac{3x-2}{4}+\dfrac{2x+3}{5}=\dfrac{13x+2}{20}+\dfrac{x}{2}$; **6)** $\dfrac{5x+3}{3}-\dfrac{x-4}{5}=\dfrac{22x-6}{15}$.

2.3.2 Решить уравнения:

1) $\dfrac{3x+1}{|x-2|}=\dfrac{9-x}{|x-2|}$; **2)** $\dfrac{2x+3}{3x-1}=\dfrac{4x+6}{6x-2}$;

3) $\dfrac{3x-5}{2x+3}=\dfrac{5x-2}{2x+3}$; **4)** $\dfrac{2x^3}{x^2-x}=2x$.

2.3.3 Решить системы уравнений:

1) $\begin{cases} 3x+4y=29, \\ 9x-2y=17; \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} 9x+8y-21=0, \\ 6x+4y-13=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x+y=9, \\ x-2y=6; \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} 5x+3y=10, \\ 10x+6y=-5; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x-y=3, \\ 6x-3y=9; \end{cases}$ **6)** $\begin{cases} 2x+y=0, \\ 4x+2y=0; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 3x-2y=-1, \\ -15x+10y=5; \end{cases}$ **8)** $\begin{cases} \dfrac{x+y+1}{3}+\dfrac{x-y+4}{2}=3, \\ \dfrac{x+y+1}{3}-\dfrac{x-y+4}{2}=-1; \end{cases}$

9) $\begin{cases} \dfrac{1}{x-y+2}+\dfrac{1}{1-x-y}=0,1, \\ \dfrac{1}{x-y+2}+\dfrac{1}{x+y-1}=0,3; \end{cases}$

10) $\begin{cases} \dfrac{11}{2x-3y}+\dfrac{18}{3x-2y}=13, \\ \dfrac{27}{3x-2y}-\dfrac{2}{2x-3y}=1. \end{cases}$

2.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

2.4.1 Решить линейные уравнения:

1) $\dfrac{4x+3}{2}-\dfrac{5x-6}{6}=\dfrac{2x-1}{3}+3x$;

2) $\dfrac{7x+2}{3}+\dfrac{4x-5}{4}=-\dfrac{7x-2}{9}+\dfrac{5x}{3}$;

3) $\dfrac{x-2}{3}+\dfrac{x-3}{11}=2x+5$;

4) $\dfrac{2x-4}{3}-\dfrac{x+1}{6}=\dfrac{x+2}{5}+\dfrac{1}{2}x$;

5) $\dfrac{2x-4}{3}-\dfrac{x+1}{6}=\dfrac{x+2}{5}+\dfrac{1}{2}x$;

6) $\dfrac{4x+5}{3}+\dfrac{3x+2}{4}=\dfrac{25x-6}{12}$.

2.4.2 Решить уравнения:

1) $\dfrac{6x+1}{|x-5|}=\dfrac{7x+2}{|x-5|}$;

2) $\dfrac{5x-4}{x+3}=\dfrac{2x-13}{x+3}$;

3) $\dfrac{5x-3}{x+1}=\dfrac{10x-6}{2x+2}$.

2.4.3 Решить системы уравнений:

1) $\begin{cases} 3x+5y+9=0, \\ 2x-y=7; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x-2y=-1, \\ 3x+6y=9; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2x-3y=4, \\ 6x-9y=2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x+2y=1, \\ 12x+8y=4; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x-y=2, \\ 6x-7y=11; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x-2y=3, \\ -\dfrac{1}{2}x+y=-\dfrac{3}{2}; \end{cases}$

7) $\begin{cases} 9x-15y=-3, \\ -3x+5y=1; \end{cases}$

8) $\begin{cases} \dfrac{1}{x}=\dfrac{3}{11y-27}, \\ \dfrac{x+3}{5}=\dfrac{y+8}{11}; \end{cases}$

9) $\begin{cases} \dfrac{1}{x-y+4}+\dfrac{1}{6-3\cdot x-y}=0,75, \\ \dfrac{1}{x-y+4}+\dfrac{1}{3\cdot x+y-6}=-0,25; \end{cases}$

10) $\begin{cases} \dfrac{4}{x-1}-\dfrac{2}{y+1}=3, \\ \dfrac{6}{x-1}-\dfrac{2}{y+1}=5. \end{cases}$

3 РАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Содержание: квадратные уравнения, уравнения, приводящиеся к квадратным, однородные уравнения, симметрические уравнения.

3.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Рассмотрим квадратное уравнение $ax^2+bx+c=0$, где $a\neq 0$.

Если дискриминант $D=b^2-4ac$ квадратного уравнения положителен, то оно имеет два различных действительных корня $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$.

Если дискриминант D квадратного уравнения равен нулю, то оно имеет два равных действительных корня $x_{1,2}=\dfrac{-b}{2a}$.

Если дискриминант D квадратного уравнения меньше нуля, то уравнение не имеет действительных корней.

В данном разделе рассматриваются уравнения вида $P(x)=0$, $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=0$, где $P(x)$ и $Q(x)$ – многочлены, а также уравнения вида $f(x)=\varphi(x)$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ – рациональные выражения.

Отметим, что при решении целых рациональных уравнений преобразования, выполняемые в процессе решения, приводят только к уравнениям, равносильным заданному уравнению. Поэтому найденные корни не проверяют. При решении же дробно-рациональных уравнений выполняется умножение обеих частей уравнения на одно и то же выражение $Q(x)$, что может привести к появлению посторонних корней. Поэтому в начале решения необходимо найти область допустимых решений или выполнить проверку.

При решении рациональных уравнений основными являются следующие методы: 1) разложение на множители; 2) введение новых (вспомогательных) переменных.

3.2 Примеры решения типовых задач

3.2.1 Пусть x_0 – наименьший корень уравнения $x^4-34x^2+225=0$, а k – количество его корней. Найти значение kx_0.

Решение. Найдём решение уравнения $x^4-34x^2+225=0$, для чего сделаем замену $x^2=t$. Получаем квадратное уравнение $t^2-34t+225=0$. Дискриминант квадратного уравнения равен $D=34^2-4\cdot 1\cdot 225=256$. Находим корни уравнения: $t_1=\dfrac{34-16}{2}=9$, $t_2=\dfrac{34+16}{2}=25$.

Выполняем обратную замену: $x^2 = 9$ или $x^2 = 25$. Находим корни этих уравнений: $x = \pm 3$ или $x = \pm 5$. Наименьший корень равен -5, а число корней равно 4. Следовательно, $kx_0 = 4 \cdot (-5) = -20$.

3.2.2 Найти сумму квадратов корней уравнения $\dfrac{x}{x+1} + \dfrac{x+1}{x} = \dfrac{5}{2}$.

Решение. Определим область допустимых значений: $x \neq -1, x \neq 0$.

Найдѐм решение уравнения, сделав предварительно замену $\dfrac{x}{x+1} = t$. Приходим к уравнению:

$$t + \frac{1}{t} = \frac{5}{2} \Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 2 = 0, t \neq 0 \Leftrightarrow t = 2 \vee t = \frac{1}{2}.$$

Выполним обратную замену: $\dfrac{x}{x+1} = 2 \vee \dfrac{x}{x+1} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$.

Находим сумму квадратов корней: $(-2)^2 + 1^2 = 5$.

3.3 Задания для решения на практическом занятии

3.3.1 Решить рациональные уравнения:

1) $3x^2 + 5x - 8 = 0$; **2)** $2x^4 - 5x^2 + 2 = 0$;

3) $243x^{10} - 7777x^5 + 32 = 0$; **4)** $3x^6 - 7x^3 + 4 = 0$;

5) $3(x-5)^8 - 10(x-5)^4 + 3 = 0$; **6)** $x^4 - \dfrac{50}{2x^4 - 7} = 14$.

3.3.2 Решить рациональные уравнения:

1) $\dfrac{x^2+1}{x} + \dfrac{x}{x^2+1} = \dfrac{29}{10}$; **2)** $\dfrac{x^2+x-5}{x} + \dfrac{3x}{x^2+x-5} + 4 = 0$;

3) $\dfrac{2x^2-2}{x} + \dfrac{2x}{x^2-1} + 5 = 0$; **4)** $\dfrac{5x+10}{x-3} + \dfrac{5x-15}{x+2} - 26 = 0$.

3.3.3 Решить рациональные уравнения:

1) $\dfrac{21}{x^2-4x+10} - x \cdot (x-4) = 6$; **2)** $(x^2-6x)^2 - 2 \cdot (x-3)^2 = 81$;

3) $\dfrac{6}{(x+1)(x+2)} + \dfrac{8}{(x-1)(x+4)} = 1$; **4)** $\dfrac{1}{x(x+2)} - \dfrac{1}{(x+1)^2} = \dfrac{1}{12}$.

3.3.4 Решить рациональные уравнения:

1) $x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) = 15$; **2)** $(x+1) \cdot (x+2) \cdot (x+3) \cdot (x+4) = 3$;

3) $(6x+5)^2 \cdot (3x+2) \cdot (x+1) = 35$; **4)** $x^2 - 5x + 4 = \dfrac{-2}{x^2-7x+10}$.

3.3.5 Решить рациональные уравнения:

1) $(x+6)\cdot(x+4)\cdot(x+2)\cdot(x+3)=42x^2$;

2) $4\cdot(x+5)\cdot(x+10)\cdot(x+12)\cdot(x+6)=3x^2$;

3) $(2x-1)\cdot(x-1)\cdot(2x^2+5x+1)=9x^2$;

4) $(x+5)\cdot(x-4)\cdot(x-2)\cdot(x+10)=18x^2$;

5) $\dfrac{4x}{x^2+x+3}+\dfrac{5x}{x^2-5x+3}=-\dfrac{3}{2}$;

6) $\dfrac{2x}{3x^2+x+2}-\dfrac{7x}{3x^2+5x+2}=1$.

3.3.6 Решить рациональные уравнения:

1) $x^2+\dfrac{81x^2}{(9+x)^2}=40$;

2) $\left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2+\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2=90$;

3) $\dfrac{36x^2}{(x+6)^2}+x^2=13$;

4) $x^2(x+2)^2+4x^2=5(x+2)^2$.

3.3.7 Решить рациональные уравнения:

1) $(x^2+x+1)^2+3\cdot x\cdot(x^2+x+1)+2\cdot x^2=0$;

2) $(x^2+2x+5)^2-3\cdot\left(x^2+1\right)\cdot(x^2+2x+1)+2\cdot\left(x^2+1\right)=0$;

3) $(x^2-x+1)^4-6\cdot x^2\cdot(x^2-x+1)^2+5\cdot x^4=0$;

4) $-44\cdot\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2+5\cdot\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2+12\cdot\dfrac{x^2-4}{x^2-1}=0$.

3.3.8 Решить рациональные уравнения:

1) $x^3-4x^2+x+6=0$;

2) $x^3+9x^2+23x+15=0$;

3) $2x^3-x^2-12=0$;

4) $3x^3+4x-7=0$;

5) $2x^4-21x^3+74x^2-105x+50=0$;

6) $x^3+x^2-\dfrac{8}{x^3+x^2}=-2$.

3.3.9 Решить рациональные уравнения:

1) $3x^3+2x^2+2x+3=0$;

2) $x^4-2x^3-x^2-2x+1=0$;

3) $x^4+x^3-4x^2+x+1=0$;

4) $2x^4+3x^3-4x^2-3x+2=0$;

5) $15x^5+34x^4+15x^3-15x^2-34x-15=0$;

6) $x^7+2x^6-5x^5-13x^4-13x^3-5x^2+2x+1=0$;

7) $\dfrac{1+x^5}{(1+x)^5}=\dfrac{11}{125}$;

8) $\dfrac{x^2}{3}+\dfrac{48}{x^2}=5\cdot\left(\dfrac{x}{3}+\dfrac{4}{x}\right)$;

9) $2x^4+3x^3-7x^2-6x+8=0$;

10) $16x^4+8x^3-7x^2+2x+1=0$.

3.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

3.4.1 Решить рациональные уравнения:

1) $\dfrac{\left(x^2+x-2\right)\cdot\left(x^2+4x-5\right)}{x-1}=0$; 2) $x^8-15x^4-16=0$;

3) $x^6-65x^3+64=0$; 4) $(x-2)^6-19(x-2)^3=216$;

5) $(2x-3)^{12}+7(2x-3)^6-8=0$; 6) $(2x-3)^{12}+7(2x-3)^6-8=0$.

3.4.2 Решить рациональные уравнения:

1) $\dfrac{4x^2-8}{x}-\dfrac{7x}{x^2-2}=-3$; 2) $\dfrac{3x+3}{x+2}+\dfrac{3x+6}{x+1}=10$;

3) $\dfrac{x^2+5x+2}{x+1}+\dfrac{3x+3}{x^2+5x+2}=4$; 4) $\dfrac{x^2+x}{x+4}+\dfrac{5x+20}{x^2+x}=6$.

3.4.3 Решить рациональные уравнения:

1) $(x^2-2x)^2-(x-1)^2=55$; 2) $(x^2-5x+7)^2-(x-2)\cdot(x-3)=1$;

3) $\dfrac{3}{1+x+x^2}=3-x-x^2$; 4) $\dfrac{1}{x\cdot(x-3)+3}+\dfrac{2}{x^2-3x+4}=\dfrac{6}{x^2-3x+5}$.

3.4.4 Решить рациональные уравнения:

1) $(x-1)\cdot(x+1)\cdot(x+2)\cdot x=24$; 2) $\left(x+1\right)\cdot(x+2)\cdot(x+4)\cdot(x+5)=504$;

3) $(8x+7)^2\cdot(4x+3)\cdot(x+1)=\dfrac{9}{2}$; 4) $x^2+3x+2=\dfrac{3}{x^2+7x+12}$.

3.4.5 Решить рациональные уравнения:

1) $(x-3)\cdot(x+6)\cdot(x-4)\cdot(x+2)=16x^2$;

2) $(x+1)\cdot(x+2)\cdot(x+3)\cdot(x+6)-168x^2=0$;

3) $(x+3)\cdot(x+6)\cdot(x-1)\cdot(x-2)=12x^2$;

4) $(5x+3)\cdot(x-1)\cdot(5x^2-x-3)=6x^2$;

5) $\dfrac{x^2-6x-9}{x}=\dfrac{x^2-4x-9}{x^2-6x-9}$;

6) $\dfrac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15}=\dfrac{4x}{x^2-12x+15}$.

3.4.6 Решить рациональные уравнения:

1) $x^2+\dfrac{9x^2}{(3+x)^2}=27$;

2) $x^2+\dfrac{x^2}{(x-1)^2}=8$;

3) $\dfrac{49x^2}{\left(x+7\right)^2}+x^2=15$;

4) $\left(\dfrac{x-5}{x}\right)^2+\left(\dfrac{x+5}{x}\right)^2=52$.

3.4.7 Решить рациональные уравнения:

1) $(x^2+x-2)^2-3\cdot x\cdot(x^2+x-2)+2\cdot x^2=0$;

2) $(x^2+x+4)^2+8\cdot x\cdot(x^2+x+4)=-15\cdot x^2$;

3) $(x^2-x+1)^4-6\cdot(x^2+1)^2\cdot(x^2-x+1)^2+5\cdot(x^2+1)^4=0$;

4) $20\cdot\left(\dfrac{x-2}{x+1}\right)^2-5\cdot\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^2+48\cdot\dfrac{(x-2)\cdot(x+2)}{x^2-1}=0$.

3.4.8 Решить рациональные уравнения:

1) $x^3+5x^2-2x-24=0$;

2) $x^3+2x^2+7x+6=0$;

3) $3x^3-5x+2=0$;

4) $2x^3+3x^2-28=0$;

5) $x^4+2x^3-2x^2-6x+5=0$;

6) $x^3-x^2-\dfrac{8}{x^3-x^2}=2$.

3.4.9 Решить рациональные уравнения:

1) $x^3-5x^2-5x+1=0$;

2) $4x^4+12x^3-47x^2+12x+4=0$;

3) $x^4-7x^3+14x^2-7x+1=0$;

4) $6x^4+7x^3-36x^2-7x+6=0$;

5) $x^5+2x^4-3x^3-3x^2+2x+1=0$;

6) $x^6-6x^4-6x^2+1=0$;

7) $2x^5+3x^4-5x^3-5x^2+3x+2=0$;

8) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{9}{x^2}=3\cdot\left(\dfrac{x}{2}-\dfrac{3}{x}\right)+1$;

9) $5x^4-13x^3-30x^2-39x+45=0$;

10) $3x^4-2x^3+4x^2-4x+12=0$.

4 СИСТЕМЫ РАЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Содержание: системы рациональных уравнений, однородные системы, симметрические системы.

4.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Несколько уравнений с двумя переменными x и y образуют систему, если ставится задача об отыскании всех таких пар $(x; y)$, которые удовлетворяют каждому из заданных уравнений. Каждая такая пара называется решением системы. Решить систему уравнений означает найти все её решения. Множество решений системы может быть пустым, в этом случае говорят, что система не имеет решений.

При решении систем алгебраических уравнений используют три метода: 1) метод линейного преобразования системы (или метод алгебраического сложения); 2) метод подстановки; 3) метод замены переменных.

4.2 Примеры решения типовых задач

4.2.1 Найти квадрат расстояния меду точками, которые являются решением системы $\begin{cases} x - y = 1, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$

Решение. Найдём решение системы.

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1, \\ (y+1)^2 + y^2 = 5. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1, \\ y^2 + 2y + 1 + y^2 = 5. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1, \\ 2y^2 + 2y - 4 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1, \\ y^2 + y - 2 = 0. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 1, \\ y = 1 \vee y = -2. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 1, \end{cases} \vee \begin{cases} x = -1, \\ y = -2. \end{cases}$$

Таким образом, получили две точки $A(2;1)$ и $B(-1;-2)$, которые являются решением системы. Найдём квадрат расстояния между ними:

$$AB^2 = (-1-2)^2 + (-2-1)^2 = (-3)^2 + (-3)^2 = 9 + 9 = 18.$$

4.2.2 Найти количество решений системы $\begin{cases} (x+y)^2 + x + y = 20, \\ x - y = 2. \end{cases}$

Решение. Для решения системы сделаем замену $x + y = t$. Тогда первое уравнение системы принимает вид $t^2 + t - 20 = 0$. Решая уравнение, получаем его корни $t = 4 \vee t = -5$. Сделав обратную замену, приходим к двум системам:

$$\begin{cases} x + y = 4, \\ x - y = 2, \end{cases} \vee \begin{cases} x + y = -5, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

Решая полученные системы, получаем $\begin{cases} x = 3, \\ y = 1, \end{cases} \vee \begin{cases} x = -3/2, \\ y = -7/2. \end{cases}$

Таким образом, количество решений системы равно двум.

4.3 Задания для решения на практическом занятии

4.3.1 Решить системы рациональных уравнений:

1) $\begin{cases} (x-y)\cdot(x^2-y^2)=45, \\ x+y=5; \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} 2x-y=-1, \\ x^2+y^3=28; \end{cases}$

3) $\begin{cases} (x+0{,}2)^2+(y+0{,}3)^2=1, \\ x+y=0{,}9; \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} \dfrac{1}{y-1}-\dfrac{1}{y+1}=\dfrac{1}{x}, \\ -x-5+y^2=0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y}+\dfrac{x-y}{x+y}=\dfrac{5}{2}, \\ x^2+y^2=40; \end{cases}$ **6)** $\begin{cases} x\cdot y-\dfrac{x}{y}=\dfrac{16}{3}, \\ x\cdot y-\dfrac{y}{x}=\dfrac{9}{2}; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \dfrac{1}{2x-y}+y=-5, \\ \dfrac{y}{2x-y}=6; \end{cases}$ **8)** $\begin{cases} (x+y)^4+4\cdot(x+y)^2=117, \\ x-y=25; \end{cases}$

9) $\begin{cases} x^2\cdot(x+y)=80, \\ x^2\cdot(2x-3y)=80; \end{cases}$ **10)** $\begin{cases} x-y=\dfrac{1}{4}\cdot x\cdot y, \\ x^2+y^2=\dfrac{5}{2}\cdot x\cdot y. \end{cases}$

4.3.2 Решить системы рациональных уравнений:

1) $\begin{cases} 3\cdot x^2-8\cdot x\cdot y+4\cdot y^2=0, \\ 5\cdot x^2-7\cdot x\cdot y-6\cdot y^2=0; \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} 3\cdot x^2+x\cdot y-2\cdot y^2=0, \\ 2\cdot x^2+3\cdot x\cdot y+y^2=0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2-5\cdot x\cdot y+6\cdot y^2=0, \\ x^2+y^2=10; \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} x^2-x\cdot y+y^2=21, \\ y^2-2\cdot x\cdot y+15=0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^3+y^3=1, \\ x^2\cdot y+2\cdot x\cdot y^2+y^3=2; \end{cases}$ **6)** $\begin{cases} x^2+4\cdot x\cdot y-2\cdot y^2=5\cdot(x+y), \\ 5\cdot x^2-x\cdot y-y^2=7\cdot(x+y). \end{cases}$

4.3.3 Решить системы рациональных уравнений:

1) $\begin{cases} x\cdot y+4=0, \\ x+y=3; \end{cases}$ **2)** $\begin{cases} x^2+y^2=41, \\ x+y=9; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x\cdot y+x+y=11, \\ x^2\cdot y+x\cdot y^2=30; \end{cases}$ **4)** $\begin{cases} x^3+y^3=7, \\ x\cdot y\cdot(x+y)=-2; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^4 + y^4 = 82, \\ x \cdot y = 3; \end{cases}$

6) $\begin{cases} (x^2 + y^2) \cdot x \cdot y = 78, \\ x^4 + y^4 = 97. \end{cases}$

4.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

4.4.1 Решить системы рациональных уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 6 \cdot x + 2 \cdot y = 0, \\ x + y = -8; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x \cdot y = 2, \\ 9 \cdot x^2 + y^2 = 13; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{1}{x+y} + \dfrac{1}{x-y} = 2, \\ \dfrac{3}{x+y} + \dfrac{4}{x-y} = 7; \end{cases}$

4) $\begin{cases} \dfrac{1}{x + 2 \cdot y} + y = 2, \\ \dfrac{y}{x + 2 \cdot y} = -3; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^3 \cdot (x+y) = 2, \\ x^3 \cdot (x - 5y) = -4, \end{cases}$ $x + y < 0$?

6) $\begin{cases} (x^2 - y^2) \cdot (x + y) = 32, \\ x - y = 2, \end{cases}$ $x \cdot y > 0$?

7) $\begin{cases} \dfrac{x+y}{x-y} + \dfrac{x-y}{x+y} = \dfrac{10}{3}, \\ x^2 + y^2 = 5; \end{cases}$

8) $\begin{cases} 2 \cdot x \cdot y + 3 \cdot \dfrac{x}{y} = 22, \\ 5 \cdot x \cdot y - 4 \cdot \dfrac{y}{x} = 38; \end{cases}$

9) $\begin{cases} x + y - \dfrac{x}{y} = 1, \\ 2 \cdot x + 2 \cdot y + \dfrac{y}{x} = 5; \end{cases}$

10) $\begin{cases} x + y = 3, \\ (x - y)^4 + 2 \cdot (x - y)^2 = 3. \end{cases}$

4.4.2 Решить системы рациональных уравнений:

1) $\begin{cases} 6 \cdot x^2 + x \cdot y - 2 \cdot y^2 = 0, \\ 3 \cdot x^2 - x \cdot y - 2 \cdot y^2 = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 4 \cdot x^2 - 3 \cdot x \cdot y - y^2 = 0, \\ 32 \cdot x^2 - 36 \cdot x \cdot y + 10 \cdot y^2 = 6. \end{cases}$

3) $\begin{cases} x^2 - 3 \cdot x \cdot y + y^2 = -1, \\ 3 \cdot x^2 - x \cdot y + 3 \cdot y^2 = 13; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x^2 + x \cdot y + 4 \cdot y^2 = 6, \\ 8 \cdot y^2 + 3 \cdot x^2 = 14; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 3 \cdot x^2 - 2 \cdot x \cdot y = 160 \cdot (x - y), \\ x^2 - 3 \cdot x \cdot y - 2 \cdot y^2 = 8 \cdot (x - y); \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^3 - y^3 = 19 \cdot (x - y), \\ x^3 + y^3 = 7 \cdot (x + y). \end{cases}$

4.4.3 Решить системы рациональных уравнений:

1) $\begin{cases} x^2 - x \cdot y + y^2 = 7, \\ x + y = 5; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ x \cdot y = 8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \dfrac{x^2}{y} + \dfrac{y^2}{x} = 18, \\ x + y = 12; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2 \cdot x \cdot y + 5 \cdot (x + y) = -19, \\ x + y + 3 \cdot x \cdot y = -35; \end{cases}$

5) $\begin{cases} x^3 + y^3 = 35, \\ x + y = 5; \end{cases}$

6) $\begin{cases} -x^2 - y^2 + 3 \cdot x \cdot y = 5, \\ 7 \cdot x^2 \cdot y^2 - x^4 - y^4 = 155. \end{cases}$

5 КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ И ТЕОРЕМА ВИЕТА

Содержание: квадратичная функция и её свойства, теорема Виета.

5.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Квадратичной функцией называется функция вида $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$. График квадратичной функцией называется параболой. Ветви параболы направлены вверх, если $a > 0$. Ветви параболы направлены вниз, если $a < 0$.

Если дискриминант $D = b^2 - 4ac$ квадратного трёхчлена $ax^2 + bx + c$ положителен, то парабола имеет две точки пересечения с осью абсцисс: $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$.

Если дискриминант D квадратного трёхчлена равен нулю, то парабола касается оси Ox своей вершиной с абсциссой в точке $x_B = \dfrac{-b}{2a}$.

Если дискриминант D квадратного трёхчлена меньше нуля, то парабола $y = ax^2 + bx + c$ располагается полностью выше оси абсцисс, если $a > 0$ и ниже оси абсцисс, если $a < 0$.

Теорема Виета (прямая)

Если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет корни, то их сумма равна $-\dfrac{b}{a}$, а произведение равно $\dfrac{c}{a}$:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a}, \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a}. \end{cases}$$

Для корней приведённого квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$ формулы Виета имеют вид

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -p, \\ x_1 x_2 = q. \end{cases}$$

Теорема Виета (обратная)

Если сумма каких-нибудь чисел x_1 и x_2 равна $-\frac{b}{a}$, а их произведение равно $\frac{c}{a}$, то эти числа являются корнями квадратного уравнения $ax^2+bx+c=0$.

5.2 Примеры решения типовых задач

5.2.1 Не решая уравнения $2x^2-4x-3=0$, найти $x_1^2+x_2^2$.

Решение. Так как дискриминант квадратного уравнения $2x^2-4x-3=0$ равен $D=40>0$, то уравнение имеет корни, а, следовательно, по теореме Виета, существует сумма и произведение корней: $x_1+x_2=2$, $x_1x_2=-\frac{3}{2}$.

Найдѐм искомую сумму квадратов корней квадратного уравнения.

$$x_1^2+x_2^2=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2-2x_1x_2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=2^2-2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=7.$$

5.2.2 Составить квадратное уравнение с корнями $\frac{1}{x_2}$ и $\frac{1}{x_1}$, где x_1 и x_2 являются корнями квадратного уравнения $3x^2+7x+1=0$.

Решение. Так как дискриминант квадратного уравнения $3x^2+7x+1=0$ равен $D=37>0$, то уравнение имеет корни, а, следовательно, по теореме Виета, существует сумма и произведение корней: $x_1+x_2=-\frac{7}{3}$, $x_1x_2=\frac{1}{3}$.

Составим квадратное уравнение $x^2+px+q=0$, корнями которого являются числа $x_3=\frac{1}{x_2}$ и $x_4=\frac{1}{x_1}$. По теореме Виета:

$$-p=x_3+x_4=\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_1}=\frac{x_1+x_2}{x_1x_2}=\frac{-7/3}{1/3}=-7 \text{ или } p=7;$$

$$q=x_3\cdot x_4=\frac{1}{x_2}\cdot\frac{1}{x_1}=\frac{1}{x_1x_2}=\frac{1}{1/3}=3.$$

Искомое уравнение имеет вид $x^2+7x+3=0$.

5.3 Задания для решения на практическом занятии

5.3.1 Найти сумму целых коэффициентов квадратного уравнения, корнями которого являются числа $x_1=\frac{1}{4-3\sqrt{2}}$ и $x_2=\frac{1}{4+\sqrt{18}}$.

5.3.2 Найти произведение целых коэффициентов квадратного уравнения с рациональными коэффициентами, одним из корней которого является число $2-\sqrt{3}$.

5.3.3 Составить квадратное уравнение с рациональными коэффициентами, одним из корней которого является число $\dfrac{17}{7-4\sqrt{2}}$.

5.3.4 Не решая уравнения $2x^2-5x+1=0$, найти $\dfrac{2x_2}{x_1}+\dfrac{2x_1}{x_2}$, $\dfrac{1}{x_1^3}+\dfrac{1}{x_2^3}$, $x_1^4+x_2^4$.

5.3.5 Не решая уравнения $x^2-5x+13=0$, найти $\dfrac{x_1^2}{x_2^2}+\dfrac{x_2^2}{x_1^2}$.

5.3.6 Не решая уравнения $3x^2-10x+3=0$, найти $9x_1^2-9x_2^2$, если $x_1<x_2$.

5.3.7 Не решая уравнения $2x^2+x-3=0$, найти $\dfrac{3}{x_1}-\dfrac{3}{x_2}$, если $x_1>x_2$.

5.3.8 Составить квадратное уравнение с корнями $\dfrac{1}{x_1}$ и $\dfrac{1}{x_2}$, где x_1 и x_2 являются корнями квадратного уравнения $3x^2+x-6=0$.

5.3.9 Составить уравнение второй степени, один из корней которого равен сумме, а другой – произведению корней квадратного уравнения $2x^2-3x-1=0$.

5.3.10 Составить квадратное уравнение с корнями $\dfrac{x_1}{x_2^2}$ и $\dfrac{x_2}{x_1^2}$, где x_1 и x_2 являются корнями квадратного уравнения $2x^2+5x+1=0$.

5.3.11 Составить квадратное уравнение с корнями $\dfrac{x_1}{x_2^3}$ и $\dfrac{x_2}{x_1^3}$, где x_1 и x_2 являются корнями квадратного уравнения $2x^2+x-3=0$.

5.3.12 Известно, что парабола $y=x^2-4x+c$ пересекает ось Ox. При каком значении c расстояние от вершины параболы до оси Ox равно 2?

5.3.13 Известно, что парабола $y=-x^2+8x+c$ не пересекает ось Ox. При каком значении c расстояние от вершины параболы до оси Ox равно 3?

5.3.14 Одно из чисел больше другого на 5, а их произведение равно 204. Составить уравнение, одним из корней которого является большее число.

5.3.15 В одинаковые коробки упаковано 99 карандашей, причѐм коробок на две меньше, чем карандашей в каждой из них. Составить уравнение, один из корней которого равен количеству коробок.

5.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

5.4.1 Составить квадратное уравнение, корнями которого являются числа $x_1 = \dfrac{1}{5-\sqrt{32}}$ и $x_2 = \dfrac{1}{5+4\sqrt{2}}$.

5.4.2 Составить квадратное уравнение с рациональными коэффициентами, одним из корней которого является число $8+\sqrt{7}$.

5.4.3 Составить квадратное уравнение с рациональными коэффициентами, одним из корней которого является число $\dfrac{33}{9+4\sqrt{3}}$.

5.4.4 Найти квадратное уравнение с корнями $\dfrac{x_2}{x_1}$ и $\dfrac{x_1}{x_2}$, где x_1 и x_2 являются корнями уравнения $5x^2-10x+4=0$.

5.4.5 Составить уравнение второй степени, один из корней которого равен $\dfrac{1}{x_1}$, а второй $\dfrac{1}{x_2}$, где x_1 и x_2 являются корнями уравнения $7x^2-3x-2=0$.

5.4.6 Составить уравнение второй степени, один из корней которого на единицу больше произведения корней уравнения $4x^2+x-1=0$, а второй корень на единицу больше суммы корней этого уравнения.

5.4.7 Составить квадратное уравнение с корнями $\dfrac{x_1^3}{x_2}$ и $\dfrac{x_2^3}{x_1}$, где x_1 и x_2 являются корнями квадратного уравнения $3x^2-5x-8=0$.

5.4.8 Одно из чисел больше другого на 2, а их произведение равно 195. Составить уравнение, одним из корней которого является большее число.

5.4.9 Сестра старше брата на 5 лет, а произведение их возрастов равно 126. Составить уравнение, один из корней которого равен возрасту сестры.

5.4.10 Известно, что парабола $y = x^2-6x+c$ не пересекает ось Ox. При каком значении c расстояние от вершины параболы до оси Ox равно 2?

5.4.11 Известно, что парабола $y=-x^2+10x+c$ не пересекает ось Ox. При каком значении c расстояние от вершины параболы до оси Ox равно 5?

5.4.12 Не решая уравнения $5x^2-8x-4=0$, найти $x_1x_2+x_1^2+x_2^2$, $\dfrac{1}{x_1^4}+\dfrac{1}{x_2^4}$, $x_1^3+x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_2^3$.

5.4.13 Не решая уравнения $x^2-4x+5=0$ найти $\dfrac{x_1^4}{x_2^4}+\dfrac{x_2^4}{x_1^4}$.

5.4.14 Не решая уравнения $2x^2+x-10=0$, найти $x_1^4-x_2^4$ если $x_1>x_2$.

5.4.15 Не решая уравнения $5x^2+3x-8=0$, найти $\dfrac{x_1^2}{x_2}-\dfrac{x_2^2}{x_1}$, если $x_1<x_2$.

6 РАЦИОНАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Содержание: решение рациональных неравенств методом интервалов, системы рациональных неравенств.

6.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Рассмотрим функцию

$$f(x)=\frac{(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}...(x-a_k)^{n_k}}{(x-b_1)^{m_1}(x-b_2)^{m_2}...(x-b_p)^{m_p}},$$

где $n_1, n_2, ..., n_k, m_1, m_2, ..., m_p$ – натуральные числа, а все числа a_i и b_j различны.

Предположим, необходимо решить неравенства: $f(x)>0$, $f(x)<0$, $f(x)\geq 0$ или $f(x)\leq 0$. Первые два неравенства называются строгими, а вторые два неравенства называются нестрогими неравенствами.

Решение рационального неравенства будем находить методом интервалов, который состоит в следующем:

1) отмечаем на числовой прямой точки, в которых числитель и знаменатель обращаются в нуль, при этом, если знак неравенства нестрогий, точки в которых числитель обращается в нуль, заштриховываем;

2) через все отмеченные точки проводим волнообразную кривую, которая начинается выше и правее крайней правой отмеченной точки, при этом, если степень $(x-c_i)^{h_i}$ нечѐтная, то кривая пересекает ось, если степень чѐтная, то кривая остаѐтся по ту же сторону, что и на предыдущем интервале;

3) заштриховываем промежутки с учѐтом знака неравенства (если знак «больше», то те, где кривая располагается выше оси; если знак «меньше», то те, где кривая располагается ниже оси);

4) в ответе указываем все заштрихованные множества.

Системы рациональных неравенств решаются аналогичным образом. Для каждого неравенства строится числовая прямая, причѐм все прямые должны иметь один и тот же масштаб. Решением системы является множество, где штриховка есть на всех числовых прямых одновременно.

6.2 Примеры решения типовых задач

6.2.1 Найти наименьшее целое решение неравенства $2x-5>7-x$.

Решение. Преобразуем неравенство.

$$2x-5>7-x \Leftrightarrow 2x+x>7+5 \Leftrightarrow 3x>12 \Leftrightarrow x>4.$$

Наименьшее целое решение, которое удовлетворяет исходному неравенству, равно 5.

6.2.2 Найти сумму целых решений двойного неравенства $-1\leq 5-2x\leq 9$.

Решение. Преобразуем неравенство.

$$-1\leq 5-2x\leq 9 \Leftrightarrow -6\leq -2x\leq 4 \Leftrightarrow -2\leq x\leq 3.$$

Найдѐм сумму целых решений неравенства: $-2-1+0+1+2+3=3$.

6.3 Задания для решения на практическом занятии

6.3.1 Решить неравенства:

1) $x(x-1)^2>0$; **2)** $(2-x)(3x+1)(2x-3)^2>0$;

3) $(3x-2)(x-3)^3(x+1)^3(-x-2)^4<0$;

4) $x^3-64x<0$; **5)** $x^2+10\le 7x$;

6) $-x^2-16+8x\ge 0$; **7)** $x^2-7x<3$;

8) $x^3+6x^2+11x+6>0$; **9)** $x^3+x^2-5x+3\le 0$;

10) $x^4+8x^3+12x^2\le 0$; **11)** $(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1)\le 0$

12) $(16-x^2)(x^2+4)(x^2+x+1)(x^2+x-20)\le 0$;

13) $(x^2-4)(x^2-4x+4)(x^2-6x+8)(x^2+4x+4)<0$;

14) $x^4-8x^2-9\le 0$; **15)** $\dfrac{(x-1)(3x-2)}{5-2x}\ge 0$;

16) $\dfrac{(x+1)(x+2)(x+3)^4}{(2x-1)^3(x+4)(3-x)^2}>0$; **17)** $\dfrac{(x-3)^2(x+2)}{x^2-4x+4}<0$;

18) $\dfrac{(x^2-4x+3)^2}{x+1}>0$; **19)** $\dfrac{x^2-2x+1}{x^2+x-2}\le 0$;

20) $\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2-6x+8}\ge 0$; **21)** $\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{3}$;

22) $\dfrac{3x-2}{x+3}\ge 3$; **23)** $\dfrac{x^2}{x-\dfrac{5}{2}}\le 10$;

24) $\dfrac{x+1}{x-2}>\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{1}{2}$; **25)** $\dfrac{1}{3x-2-x^2}\ge\dfrac{3}{7x-4-3x^2}$;

26) $\dfrac{3}{6x^2-x-12}<\dfrac{25x-47}{10x-15}-\dfrac{3}{3x+4}$; **27)** $\dfrac{2-x}{x^3+x^2}\le\dfrac{1-2x}{x^3-3x^2}$;

28) $\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x^2-x+1}\le\dfrac{1-2x}{x^3+1}$; **29)** $\dfrac{(x-2)\cdot(x-4)\cdot(x-7)}{(x+2)\cdot(x+4)\cdot(x+7)}>1$;

30) $(x^2-2x)\cdot(2x-2)-9\cdot\dfrac{(2x-2)}{(x^2-2x)}\le 0$; **31)** $\left(x^2+3x+1\right)\cdot\left(x^2+3x-3\right)\ge 5$;

32) $\left(x-1\right)\cdot\left(2x-4\right)\cdot\left(x-3\right)^2\le\left(x^2-3x+2\right)\cdot\left(x-3\right)^2$.

6.3.2 Найти область определения функции $f(x)=\sqrt{\dfrac{x^2-6x+9}{4-x^2}}$.

6.3.3 Решить системы неравенств:

1) $\begin{cases}2x^2+2<5x,\\ x^2\ge x;\end{cases}$ **2)** $\begin{cases}x^2-3x\le 10,\\ (x-1)^2>0;\end{cases}$

3) $\begin{cases}(2x+3)^3\cdot(2x+1)\cdot(x-1)^2\le 0,\\(x+5)^7\cdot(x+1)^4\cdot(1-2x)^2\cdot(x-3)^5<0;\end{cases}$ **4)** $\begin{cases}x+6\ge x^2,\\x^2-2x+1>0;\end{cases}$

5) $\begin{cases}x^2\ge 1,\\4-3x-x^2>0;\end{cases}$ **6)** $\begin{cases}\dfrac{x+3}{3-x}<2,\\x^3<16x,\\4\ge x^2.\end{cases}$

6.3.4 Найти сумму всех целых значений переменной из области определения функции $f(x)=\sqrt[6]{\dfrac{x^2-6x-16}{x^2-12x+11}}+\dfrac{2}{\sqrt[4]{x^2-49}}$.

6.3.5 Найти наименьшее целое значение из области определения функции $f(x)=\sqrt[12]{\dfrac{x^3-2x^2+x-2}{x^2-4x+3}}+\sqrt{3x-5}$.

6.3.6 Найти произведение целых значений из области определения функции $f(x)=\sqrt[6]{\dfrac{\left(x^2+4x+4\right)\cdot\left(4-x^2\right)}{x^2+2x+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{x+3}}-\sqrt[4]{8x^2-x^3-15x}$.

6.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

6.4.1 Решить неравенства:

1) $x(x+1)^2(x-3)^5>0$; **2)** $(x+2)(x+3)^4(x-5)x^2\le 0$;

3) $(3x-4)x^4(2x-2)^3(x+5)^7>0$; **4)** $(3-x)(5x+1)^3(3x+2)<0$;

5) $(2x-3)(x-4)^3(x+2)^5(x+3)^4\le 0$; **6)** $x^4-16x^2\ge 0$;

7) $2x^2+5x\le -2$; **8)** $x^2+x<1$;

9) $-x^2+4x\ge 4$; **10)** $x^2+3x>-3$;

11) $x^4-7x^3+10x^2\ge 0$; **12)** $\left(x^2-4\right)\left(x^2-5x+7\right)\le 0$;

13) $(x-2)\left(x^2-4\right)\left(x^3-8\right)\left(x^4-16\right)\le 0$; **14)** $\left(x^3-x^2+x-1\right)(x-2)\ge 0$;

15) $x^3+9x^2+23x+15<0$; **16)** $\left(x^2-5x+6\right)\left(x^2-4\right)\left(x^2-9\right)\le 0$;

17) $\left(x^2-6x+9\right)^2\left(x^2+x-12\right)x^2<0$; **18)** $x^4-3x^2-4\le 0$;

19) $x^4-11x^2>-30$; **20)** $\left(x^2-x-1\right)\left(x^2-x-7\right)<-5$;

21) $\dfrac{x^4+3x^2+3}{x^2+2x-3}\le 0$; **22)** $\dfrac{x^4+x^3+x^2}{x^2-8}\le 0$;

23) $\dfrac{(x-1)^2(x+1)}{x^2-4x+4} \ge 0$;

24) $\dfrac{x\left(x^2+x\right)}{x-5} \le 0$;

25) $\dfrac{x^3+2x^2-3}{x^2-7x+6} \le 0$;

26) $\dfrac{\left(x^2-3x+2\right)^2}{(x+1)(x+5)} > 0$;

27) $\dfrac{1}{x} > 5$;

28) $\dfrac{2x-1}{3x+2} \ge 4$;

29) $\dfrac{x^2}{x-\frac{7}{2}} \le 14$;

30) $\dfrac{2x^2+14x-2}{x^2+7x+6} \le 2$;

31) $\dfrac{x+3}{x-1} > \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{2}{3}$;

32) $\dfrac{1}{7x-x^2-10} \ge \dfrac{2}{5x-2-2x^2}$;

33) $\dfrac{1}{x^2-4x+4} \le \dfrac{5x-21}{\left(x^2-2x\right)\left(x^2-7x+10\right)}$;

34) $\dfrac{x^2}{(x-5)^2} - \dfrac{50x}{(x-5)^2(x+5)} < \dfrac{5}{x+5}$;

35) $\dfrac{x}{x^2-3x+2} \cdot \dfrac{x^2-4x+3}{2-x} \ge 0$;

36) $\left(x^2+3x\right)(2x+3) - 16\dfrac{2x+3}{x^2+3x} \ge 0$;

37) $\dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)(x+2)(x+3)} > 1$.

6.4.2 Найти произведение целых решений системы неравенств $\begin{cases} x^2 \le 9, \\ x^2 > 7. \end{cases}$

6.4.3 Найти наименьшее целое решение системы рациональных неравенств $\begin{cases} \left(x^2+12x+35\right)(2x+1)(3-2x) \ge 0, \\ \left(x^2-2x-8\right)(2x-1) \ge 0. \end{cases}$

6.4.4 Найти наибольшее целое решение системы $\begin{cases} \dfrac{x+3}{x-2} < 1, \\ \dfrac{2x+3}{3x-2} < 2. \end{cases}$

6.4.5 Найти произведение целых решений системы рациональных неравенств $\begin{cases} \dfrac{(x+2)\left(x^2-3x+8\right)}{x^2-9} \le 0, \\ \dfrac{1-x^2}{x^2+2x-8} \ge 0. \end{cases}$

6.4.6 Найти наибольшее целое решение системы $\begin{cases} \dfrac{(x+1)(x^2-6x+8)}{x^2-16} \le 0. \\ \dfrac{x^2-9}{x^2+x-12} \ge 0. \end{cases}$

6.4.7 Найти наименьшее целое решение системы рациональных неравенств $\begin{cases} \dfrac{(x-1)^3 (x^2-4)^2 (x^2-9)^3 (x^2+3x+3)}{(1-3x)(x^2-3x+4)} \le 0. \\ \dfrac{2x^2+x-16}{x^2+x} < 1. \end{cases}$

6.4.8 Найти решение двойного неравенства $4x-2 < x^2+1 \le 4x+6$.

6.4.9 Найти число целых решений двойного неравенства $x \le \dfrac{1}{x^2} \le 1$.

6.4.10 Найти область определения функции $f(x) = \sqrt{\dfrac{x^2-4x+4}{1-x^2}}$.

6.4.11 Найти наибольшее целое число, принадлежащее области определения функции $y = \dfrac{\sqrt{2-0,4x}}{x^2-9x+20}$.

6.4.12 Сколько целых решений неравенства $9(2x-7) < 2\sqrt{22}(2x-7)$ принадлежат промежутку $[-6;6]$?

6.4.13 Найти наибольшее целое число, принадлежащее области определения функции $y = \dfrac{1}{\sqrt{(2x-7)\sqrt{3}-4x+14}}$.

6.4.14 Найти сумму всех целых значений переменной, не принадлежащих области определения функции $f(x) = \sqrt{1-\dfrac{7x+1}{5+4x-x^2}}$.

7 УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА, СОДЕРЖАЩИЕ ПЕРЕМЕННУЮ С МОДУЛЕМ

Содержание: решение уравнений и неравенств, которые содержат переменную под знаком модуля.

7.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Рассмотрим уравнение $|f(x)| = \varphi(x)$. Решение уравнения определяем из решения систем:

$$\begin{cases} f(x) \ge 0, \\ f(x) = \varphi(x), \end{cases} \vee \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) = \varphi(x). \end{cases}$$

Рассмотрим неравенство $|f(x)| > \varphi(x)$. Решение неравенства определяем из решения систем:

$$\begin{cases} f(x) \ge 0, \\ f(x) > \varphi(x), \end{cases} \vee \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) > \varphi(x). \end{cases}$$

Рассмотрим неравенство $|f(x)| < \varphi(x)$. Решение неравенства определяем из решения систем:

$$\begin{cases} f(x) \ge 0, \\ f(x) < \varphi(x), \end{cases} \vee \begin{cases} f(x) < 0, \\ -f(x) < \varphi(x). \end{cases}$$

Если уравнение или неравенство содержит два и больше модулей, то проводим числовую прямую и отмечаем на ней точки, в которых каждый из модулей обращается в нуль. Раскрываем модули на каждом из промежутков. Решаем уравнение или неравенство на каждом из интервалов.

7.2 Примеры решения типовых задач

7.2.1 Найти произведение корней уравнения $|2x-4| = 5-x$.

Решение. Находим решение уравнения.

$$\begin{cases} 2x-4 \ge 0, \\ 2x-4 = 5-x, \end{cases} \vee \begin{cases} 2x-4 < 0, \\ -2x+4 = 5-x. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge 2, \\ x = 3, \end{cases} \vee \begin{cases} x < 2, \\ x = -1. \end{cases}$$

$$x = 3 \quad \vee \quad x = -1.$$

Произведение корней уравнения равно: $3 \cdot (-1) = -3$.

7.2.2 Найти сумму целых решений неравенства $|5x+10| = 22-x$.

Решение. Находим решение неравенства.

$$\begin{cases} 5x+10 \ge 0, \\ 5x+10 = 22-x, \end{cases} \vee \begin{cases} 5x+10 < 0, \\ -5x-10 = 22-x. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge -2, \\ x < 2, \end{cases} \vee \begin{cases} x < -2, \\ x > -8. \end{cases}$$

$$x \in [-2;2) \quad \vee \quad x \in (-8;-2).$$

Объединение двух промежутков представляет собой решение неравенства, то есть $x \in (-8;2)$. Найдѐм сумму целых решений неравенства: $-7-6-5-4-3-2-1+0+1 = -27$.

7.3 Задания для решения на практическом занятии

7.3.1 Решить уравнения, содержащие переменную под знаком модуля:

1) $\dfrac{7x+4}{5}-x=\dfrac{|3x-5|}{2}$;

2) $\dfrac{x+1}{|x-3|}=2x$;

3) $|x^2-x-3|=-x-1$;

4) $2\cdot|x^2-x|=x^2+1$;

5) $2x^2-|x|-15=0$;

6) $x^2+2x-3\cdot|x+1|+3=0$;

7) $2\cdot|x+3|-|x-4|=4$;

8) $|x-2|+|4-x|=3$;

9) $|x|+|x+1|=1$;

10) $|x+1|-|x-2|+|3x+6|=5$;

11) $|-2x-|3x+4|+5|=1-5x$;

12) $|-5x-3\cdot|2x-3|+2|=11+x$;

13) $|x+3|=|2x-1|$;

14) $|x-2|=3\cdot|x+3|$;

15) $|x^2-5x+6|=|2x^2-5x+2|$;

16) $\dfrac{|3x^2+2x-1|}{|3x^2-10x+3|}=1$;

17 $|x^2-6x+5|=-|x^2+3x-4|$;

18) $|3x^2-10x+3|+|x^2-x-6|=0$;

19) $\dfrac{|x^2-17x+72|}{1-x}=x^2-18x+81$;

20) $\dfrac{|x^2+4x-21|}{x^2+4x-21}=\dfrac{|x^2-x-30|}{-x^2+x+30}$.

7.3.2 Решить неравенства, содержащие переменную под знаком модуля:

1) $|1-2x|>3-x$;

2) $|x+8|\le 3x-1$;

3) $\left|\dfrac{x+2}{2x-3}\right|<3$;

4) $\left|\dfrac{2x-3}{x^2-1}\right|\ge 2$;

5) $|x-1|+|2-x|>3+x$;

6) $\dfrac{x^2-|2x-3|}{x^2-|2-x|}\le 1$;

7) $|2x-|3-x||<5+x$;

8) $|1+|2+x|+x|>3-x$;

9) $|1-3x|\ge|2x+3|$;

10) $\left|\dfrac{3}{2x-7}\right|>\left|-\dfrac{6}{x+4}\right|$;

11) $|x^2+2x-3|\le-|2x^2+5x-7|$;

12) $|3x^2+x-14|+|x^2+4x-12|\le 0$;

13) $x^2+6x-4\cdot|x+3|+13<0$;

14) $\left|\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-10x+25}\right|-3\cdot\left|\dfrac{x-3}{x-5}\right|+2\ge 0$;

15) $|8+2x-x^2|\le 8+2x-x^2$;

16) $\left(|x^2-4|^2-4\right)\cdot\left(|x|-5\right)\le 0$;

17) $|2x+1|-|5-x|<|x+6|$;

18) $|x^2-25|\cdot\left(x^2-4x+3\right)\le 0$.

7.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

7.4.1 Решить уравнения, содержащие переменную под знаком модуля:

1) $\dfrac{|x+2|}{3}=\dfrac{x+2}{5}+x$;

2) $\dfrac{4x-8}{|x-2|}=x$;

3) $|x^2+x-1|=2x-1$;

4) $2\cdot|x^2+2x-5|=x-1$;

5) $x^2-3|x|+2=0$;

6) $x^2-2x-2\cdot|x-1|+2=0$;

7) $|3x+1|-|x-2|=3$;

8) $|2x+2|+|3x+6|=18$;

9) $|x+2|+|x+4|=2$;

10) $|x-1|-|x+2|+|4x+12|=11$;

11) $\big|2|x-1|+3x-4\big|=x-2$;

12) $\big|3x-|2x-5|\big|=x+5$;

13) $|x-7|=|x+9|$;

14) $|x-3|=2\cdot|x+1|$;

15) $|2x^2+3x-5|=|4x^2-x-3|$;

16) $\dfrac{|2x^2+3x-5|}{|4x^2-x-3|}=1$;

17) $|x^2+x-2|=-|x^2-1|$;

18) $|4x^2+2x-20|+|x^2+x-6|=0$;

19) $\dfrac{|x^2-11x+30|}{1-x}=x^2-12x+36$;

20) $\dfrac{|x^2-11x+28|}{3-x}=x^2-8x+16$.

7.4.2 Решить неравенства, содержащие переменную под знаком модуля:

1) $|6x^2-2x+1|\le 1$;

2) $|-2x^2+3x+5|>2$;

3) $|4-3x|\ge 2-x$;

4) $|2x-3|\ge x+4$;

5) $|x-2|-|2x+1|<3$;

6) $\dfrac{|x+1|}{|x-2|-2}<1$;

7) $\big|2x-|3-x|-2\big|\le 4$;

8) $\big||x-2|-x+3\big|<5$;

9) $\big|6x+|4-8x|+5\big|>x+2$;

10) $\big||x+5|-2\big|\ge 12-2x$;

11) $|2x-1|<|4x+1|$;

12) $\left|-\dfrac{5}{x+2}\right|<\left|\dfrac{10}{x-1}\right|$;

13) $|x-6|>|x^2-5x+9|$;

14) $|x^2+2x-3|\le -|2x^2+5x-7|$;

15) $x^2+4x-5\cdot|x+2|+10\le 0$;

16) $\left|\dfrac{x^2-4x+4}{x^2-12x+36}\right|-7\cdot\left|\dfrac{x-2}{x-6}\right|+6\ge 0$.

8 ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА И СИСТЕМЫ

Содержание: иррациональные уравнения, иррациональные неравенства, системы иррациональных уравнений.

8.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Рассмотрим решение иррациональных уравнений.

$$\sqrt[2n+1]{f(x)}=\varphi(x) \Leftrightarrow f(x)=\varphi^{2n+1}(x).$$

$$\sqrt[2n]{f(x)}=\varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases}\varphi(x)\ge 0,\\ f(x)=\varphi^{2n}(x).\end{cases}$$

Рассмотрим решение иррациональных неравенств.

$$\sqrt[2n+1]{f(x)}<\varphi(x) \Leftrightarrow f(x)<\varphi^{2n+1}(x).$$

$$\sqrt[2n+1]{f(x)}>\varphi(x) \Leftrightarrow f(x)>\varphi^{2n+1}(x).$$

$$\sqrt[2n]{f(x)}<\varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases}\varphi(x)>0,\\ f(x)<\varphi^{2n}(x),\\ f(x)\ge 0.\end{cases}$$

$$\sqrt[2n]{f(x)}>\varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases}\varphi(x)\ge 0,\\ f(x)>\varphi^{2n}(x),\end{cases} \vee \begin{cases}\varphi(x)<0,\\ f(x)\ge 0.\end{cases}$$

8.2 Примеры решения типовых задач

8.2.1 Найти сумму квадратов корней (квадрат корня, если он единственный) уравнения $\sqrt{5+4x}=-x$.

Решение: Найдѐм решение заданного уравнения.

$$\sqrt{5+4x}=-x \Leftrightarrow \begin{cases}-x\ge 0,\\ 5+4x=x^2,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 0,\\ x^2-4x-5=0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 0,\\ x=5 \vee x=-1,\end{cases} \Leftrightarrow x=-1.$$

Уравнение имеет единственный корень $x=-1$, а его квадрат равен 1.

8.2.2 Найти длину промежутка решения неравенства $\sqrt{2-x}<x$.

Решение. Найдѐм решение неравенства.

$$\sqrt{2-x}<x \Leftrightarrow \begin{cases}x>0,\\ 2-x<x^2,\\ 2-x\ge 0,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>0,\\ x^2+x-2>0,\\ x\le 2,\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x>0,\\ (x-1)(x+2)>0,\\ x\le 2,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>0,\\ x\in(-\infty;-2)\cup(1;2),\\ x\le 2.\end{cases} \quad x\in(1;2].$$

Длина промежутка решения неравенства равна $2-1=1$.

8.2.3 Найти среднее арифметическое целых решений неравенства $\sqrt{6x-8} \ge x$.

Решение. Найдём решение неравенства.

$$\sqrt{6x-8} \ge x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \ge 0, \\ 6x-8 \ge x^2, \end{cases} \vee \quad \begin{cases} x < 0, \\ 6x-8 \ge 0. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge 0, \\ x^2 - 6x + 8 \le 0, \end{cases} \vee \quad \begin{cases} x < 0, \\ x \ge \dfrac{4}{4}. \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \ge 0, \\ (x-2)(x-4) \le 0, \end{cases} \vee \quad x \in \varnothing.$$

$$\begin{cases} x \ge 0, \\ x \in [2;4]. \end{cases} \qquad x \in [2;4].$$

Находим среднее арифметическое целых решений неравенства:

$$\overline{x} = \frac{2+3+4}{3} = 3.$$

8.3 Задания для решения на практическом занятии

8.3.1 Решить иррациональные уравнения:

1) $\sqrt{12-x} = -x$;

2) $x - \sqrt{x+1} = 5$;

3) $2 \cdot \sqrt{x+5} = x+2$;

4) $\sqrt{6-4x-x^2} = x+4$;

5) $\sqrt[3]{35-x^3} + x = 5$;

6) $\dfrac{\sqrt{5-x^2}}{x+1} = 1$;

7) $\dfrac{1+\sqrt{2x+1}}{x} = 1$;

8) $\sqrt{2x-3} + \sqrt{4x+1} = 4$;

9) $\sqrt{2x+6} - \sqrt{x+1} = 2$;

10) $\sqrt{2x+5} = 8 - \sqrt{x-1}$;

11) $\sqrt{2x+1} + \sqrt{x-3} = 2\sqrt{x}$;

12) $\sqrt{x+2} - \sqrt{2x-3} = \sqrt{4x-7}$;

13) $\sqrt{x-2} = \sqrt{6-x} - \sqrt{4-x}$;

14) $\sqrt{x^2+2x+1} - \sqrt{x^2-4x+4} = 3$;

15) $\dfrac{4}{\sqrt[3]{x}+2} + \dfrac{\sqrt[3]{x}+3}{5} = 2$;

16) $\dfrac{8}{\sqrt{10-2x}} - \sqrt{10-2x} = 2$;

17) $\dfrac{x \cdot \sqrt[3]{x} - 1}{\sqrt[3]{x^2} - 1} - \dfrac{\sqrt[3]{x^2} - 1}{\sqrt[3]{x} + 1} = 4$;

18) $x \cdot \sqrt{x^2+15} - \sqrt{x} \cdot \sqrt[4]{x^2+15} = 2$;

19) $\sqrt{\dfrac{3-x}{2+x}} + 3 \cdot \sqrt{\dfrac{x+2}{3-x}} = 4$;

20) $\dfrac{x}{x+1} - 2 \cdot \sqrt{\dfrac{x+1}{x}} = 3$;

21) $x^2 + \sqrt{x^2+2x+8} = 12 - 2x$;

22) $3x^2 + 15x + 2 \cdot \sqrt{x^2+5x+1} = 2$;

23) $\dfrac{\sqrt{14+x}+\sqrt{14-x}}{\sqrt{14+x}-\sqrt{14-x}}=\dfrac{14}{x}$;

24) $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x-1}=1$;

25) $\sqrt[3]{x+7}+\sqrt[3]{28-x}=5$;

26) $\sqrt[4]{x-2}+\sqrt[4]{6-x}=\sqrt{2}$;

27) $\sqrt{x}+\sqrt{2-x}+\sqrt{2x-x^2}=\sqrt{2}$;

28) $\sqrt{20x+28}-\sqrt{4x+16}=16x+12$;

29) $\left(x^2-1\right)\cdot\sqrt{2x-1}=0$;

30) $\sqrt{2x-3}\cdot\left(1-\left|x^2-5x+5\right|\right)=0$;

31) $\sqrt{3x^2-12x+16}+\sqrt{5x^2-20x+45}=\sqrt{41-2x^2+8x}$;

32) $\sqrt{2x^2-12x+43}+\sqrt{4x^2-24x+85}=-3x^2+18x-15$.

8.3.2 Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $x^2-\dfrac{5}{6\cdot\sqrt{x^2+3x}}=1\dfrac{25}{36}-3x$.

8.3.3 Найти произведение корней (или корень, если он один) уравнения $x=\left(\sqrt{4+x}+2\right)\cdot\left(\sqrt{4+x}+x^2-5x+4\right)$.

8.3.4 Найти сумму корней уравнения (или корень, если он один) $\left(x+10\right)^2-6x\sqrt{4x-1}=105$.

8.3.5 Решить иррациональные неравенства:

1) $\sqrt{1-\dfrac{x+2}{x^2}}<\dfrac{2}{3}$;

2) $\sqrt{\dfrac{x-2}{1-2x}}>-1$;

3) $\sqrt{x^2+2x-3}\le 1$;

4) $x+3<\sqrt{x+33}$;

5) $\sqrt{9x-20}<x$;

6) $\sqrt[3]{9-x^3}+x\ge 3$;

7) $\sqrt{2x-1}+2<x$;

8) $\sqrt{2x+14}-3-x>0$;

9) $x-1<\sqrt{7-x}$;

10) $\sqrt{5-2x}<6x-1$;

11) $\sqrt{\left(x-6\right)\cdot\left(1-x\right)}-2x<3$;

12) $\sqrt{x^2+7x+12}+x>6$;

13) $\sqrt{\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{3}{4}}+\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{x}$;

14) $\dfrac{\sqrt{3x+4}}{x}-1<0$;

15) $3\sqrt{x}-\sqrt{x+3}>1$;

16) $\sqrt{x+3}+\sqrt{x+15}<6$;

17) $\sqrt{x+3}-\sqrt{x-1}>\sqrt{2x-1}$;

18) $\sqrt{2x^2+20x+6}-\sqrt{x^2+10x+1}<2$;

19) $\dfrac{3}{\sqrt{2-x}}-\sqrt{2-x}<2$;

20) $\dfrac{\sqrt{x}-3}{x-2}>0$;

21) $\left(x-1\right)\cdot\sqrt{x^2-x-2}\ge 0$;

22) $\dfrac{\sqrt{19x-x^2-78}}{x^2-13x+40}\le 0$.

8.3.6 Решить системы иррациональных уравнений:

1) $\begin{cases} x+y+\sqrt{x+y}=20, \\ x^2+y^2=136; \end{cases}$

2) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{2x-1}{y+2}}+\sqrt{\dfrac{y+2}{2x-1}}=2, \\ x+y=2; \end{cases}$

3) $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}-\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{5}{2}, \\ x+y+xy=9; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 4^{\frac{x}{y}-\frac{3y}{x}}=16, \\ \sqrt{x}-\sqrt{2y}=\sqrt{12}-\sqrt{8}; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}=2, \\ x\cdot y=27; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^{\frac{1}{3}}-y^{\frac{1}{3}}=-1, \\ x\cdot y=216; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=10, \\ \sqrt[4]{x}+\sqrt[4]{y}=4; \end{cases}$

8) $\begin{cases} x\sqrt{y}+y\sqrt{x}=6, \\ x^2y+y^2x=20; \end{cases}$

9) $\begin{cases} \sqrt{x+y}+\sqrt{2x+y+2}=7, \\ 3x+2y=23; \end{cases}$

10 $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{20y}{x}}=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}, \\ \sqrt{\dfrac{16x}{5y}}=\sqrt{x+y}-\sqrt{x-y}. \end{cases}$

8.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

8.4.1 Решить иррациональные уравнения:

1) $\sqrt{7-x}=x-1$;

2) $1+\sqrt{2x-7}=x$;

3) $21-\sqrt{1+5x}=x$;

4) $4\cdot\sqrt{x+6}=x+1$;

5) $\sqrt{1+4x-x^2}=x-1$;

6) $\sqrt[3]{16-x^3}+x=4$;

7) $\dfrac{\sqrt{13-x^2}}{x+1}=1$;

8) $\dfrac{2+\sqrt{19-2x}}{x}=1$;

9) $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x+4}=1$;

10) $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-2}=7$;

11) $\sqrt{4-x}+\sqrt{5+x}=3$;

12) $\sqrt{3x-5}=3-\sqrt{x-2}$;

13) $\sqrt{4x+8}-\sqrt{3x-2}=2$;

14) $\sqrt{x}+\sqrt{x-3}=\sqrt{3(x-1)}$;

15) $\sqrt{x+5}=2\sqrt{x}-\sqrt{2x-7}$;

16) $\sqrt{2x+5}-\sqrt{12x+25}=-\sqrt{5x+6}$;

17) $\sqrt{x^2+2x+1}-\sqrt{x^2-4x+4}=3$;

18) $\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}-6=0$;

19) $\dfrac{4}{\sqrt{2-x}+3}+\sqrt{2-x}=2$;

20) $\dfrac{x-4}{\sqrt{x}+2}=x-8$;

21) $\sqrt{\dfrac{2x+1}{x-1}}-2\cdot\sqrt{\dfrac{x-1}{2x+1}}=1$;

22) $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}=\dfrac{3}{2}$;

23) $2x^2-5\cdot\sqrt{2x^2+3x+9}=-3-3x$;

24) $2x^2+\sqrt{2x^2-4x+12}=4x+8$;

25) $\sqrt[3]{2-x}=1-\sqrt{x-1}$;

26) $\sqrt[3]{x^2-1}+\sqrt[3]{x^2+18}=5$;

27) $\sqrt[4]{x+77}+\sqrt[4]{20-x}=5$;

28) $4\left(\sqrt{1+x}-1\right)\left(\sqrt{1-x}+1\right)=x$;

29) $\left(\sqrt{x+1}+1\right)\left(\sqrt{2x+3}-2\right)=x$;

30) $\left(x^2-4\right)\cdot\sqrt{x+1}=0$;

31) $\sqrt{2-x}\cdot\left(4-\left|x^2-5\right|\right)=0$;

32) $\sqrt{5x+7}-\sqrt{x+4}=4x+3$.

8.4.2 Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $x^2-\dfrac{6}{7\cdot\sqrt{x^2+2x}}=1\dfrac{36}{49}-2x$.

8.4.3 Найти произведение корней (или корень, если он один) уравнения $x=\left(\sqrt{9+x}+3\right)\cdot\left(\sqrt{9+x}+x^2+8x-23\right)$.

8.4.4 Найти сумму корней (или корень, если он один) уравнения $\left(x+9\right)^2-5x\sqrt{3x-2}=93$.

8.4.5 Найти сумму квадратов корней (или квадрат корня, если он один) уравнения $\sqrt{3x^2+6x+7}+\sqrt{5x^2+10x+14}=4-2x-x^2$.

8.4.6 Решить иррациональные неравенства:

1) $\dfrac{\sqrt{x+2}}{x}-1<0$;

2) $\sqrt{x+78}-6<x$;

3) $\sqrt{x+2}>x$;

4) $\sqrt{x+61}-x<5$;

5) $\sqrt{11-5x}>x-1$;

6) $\sqrt[3]{28-x^3}+x\geq 4$;

7) $4-x<\sqrt{2x-x^2}$;

8) $\sqrt{3x-x^2}+x<4$;

9) $3\sqrt{x}-\sqrt{5x+5}>1$;

10) $\sqrt{x-6}-\sqrt{10-x}\geq 1$;

11) $\sqrt{x+3}<\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2}$;

12) $\sqrt{x+\dfrac{1}{x^2}}+\sqrt{x-\dfrac{1}{x^2}}>\dfrac{2}{x}$;

13) $\dfrac{4}{\sqrt[3]{3-x}}-\sqrt[3]{3-x}\leq 3$;

14) $\dfrac{\sqrt{x}-2}{x-9}>0$;

15) $\sqrt{x}-3\leq\dfrac{2}{\sqrt{x}-2}$;

16) $\sqrt{3x^2+5x+7}-\sqrt{3x^2+5x+2}>1$;

17) $\left(x^2-1\right)\cdot\sqrt{x^2+x-2}\geq 0$;

18) $\dfrac{\sqrt{2x^2+15x-17}}{2+x}\leq 0$.

8.4.7 Решить системы иррациональных уравнений:

1) $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{y}{x}}-2\sqrt{\dfrac{x}{y}}=1,\\ \sqrt{5x+y}+\sqrt{5x-y}=4;\end{cases}$

2) $\begin{cases}\sqrt{\dfrac{3x-2y}{2x}}+\sqrt{\dfrac{2x}{3x-2y}}=2,\\ 4y^2-1=3y(x-1);\end{cases}$

3) $\begin{cases} 5\cdot\sqrt[3]{x-2y}+3\cdot\sqrt[3]{x+2y}=13, \\ 3\cdot\sqrt[3]{x-2y}-4\cdot\sqrt[3]{x+2y}=2; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x+y+\sqrt{xy}=14, \\ x^2+y^2+xy=84; \end{cases}$

5) $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{1}{\sqrt{y}}=\dfrac{4}{3}, \\ x\cdot y=9; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{1}{3}}=3, \\ x^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{1}{3}}\cdot y^{\frac{1}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=3; \end{cases}$

7) $\begin{cases} \sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=3, \\ x\cdot y=8; \end{cases}$

8) $\begin{cases} \sqrt[3]{\dfrac{y+1}{x}}-2\cdot\sqrt[3]{\dfrac{x}{y+1}}=1, \\ \sqrt{x+y+1}+\sqrt{x-y+10}=5; \end{cases}$

9) $\begin{cases} \sqrt[3]{x+2y}+\sqrt[3]{x-y+2}=3, \\ 2x+y=7; \end{cases}$

10) $\begin{cases} \sqrt{2x-y+11}-\sqrt{3x+y-9}=3, \\ \sqrt[4]{2x-y+11}+\sqrt[4]{3x+y-9}=3. \end{cases}$

9 ПРОГРЕССИИ

Содержание: арифметическая прогрессия, геометрическая прогрессия, бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, смешанные задачи на прогрессии.

9.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Арифметической прогрессией называется числовая последовательность, каждый член которой, начиная со второго равен предыдущему, сложенному с одним и тем для данной последовательности числом d, которое называется разностью прогрессии.

Формула *n*-го члена арифметической прогрессии: $a_n = a_1 + d(n-1)$.

Формулы суммы первых *n* членов арифметической прогрессии:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n \quad \text{или} \quad S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2}\cdot n.$$

Свойства арифметической прогрессии:

1) $a_n = \dfrac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}$, если $n>1$;

2) $a_n = \dfrac{a_{n-k}+a_{n+k}}{2}$, если $n>k$.

Геометрической прогрессией называется числовая последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый последующий член, начиная со второго, равен предыдущему, умноженному на одно и то же, отличное от нуля, для данной последовательности числом q, которое называется знаменателем прогрессии.

Формула *n*-го члена геометрической прогрессии: $b_n = b_1 q^{n-1}$.

Формулы суммы первых n членов геометрической прогрессии:

$$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1} \quad \text{или} \quad S_n = \frac{b_1(q^n - 1)}{q-1}.$$

Свойства геометрической прогрессии:

1) $b_n = \sqrt{b_{n-1}b_{n+1}}$ или $b_n^2 = b_{n-1} \cdot b_{n+1}$, если $n > 1$;

2) $b_n^2 = b_{n-k} \cdot b_{n+k}$, если $n > k$.

Геометрическая прогрессия называется *бесконечно убывающей*, если $|q| < 1$.

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии вычисляется по формуле

$$S = \frac{b_1}{1-q}.$$

9.2 Примеры решения типовых задач

9.2.1 Сумма второго и четвѐртого членов арифметической прогрессии равна 20, а сумма третьего и пятого членов этой прогрессии равна 26. Найти сумму первых десяти членов арифметической прогрессии.

Решение. По условию $a_2 + a_4 = 20$, $a_3 + a_5 = 26$. Перейдем к первому члену и разности арифметической прогрессии.

$$\begin{cases} a_1 + d + a_1 + 3d = 20, \\ a_1 + 2d + a_1 + 4d = 26, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + 2d = 10, \\ a_1 + 3d = 13, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 4, \\ d = 3. \end{cases}$$

Найдѐм сумму первых десяти членов арифметической прогрессии:

$$S_{10} = \frac{2 \cdot 4 + 3 \cdot (10-1)}{2} \cdot 10 = 175.$$

9.2.2 Разность третьего и первого членов геометрической прогрессии равна 9, а разность второго и первого членов этой прогрессии равна 3. Найти сумму первых пяти членов геометрической прогрессии.

Решение: По условию $b_3 - b_1 = 9$, $b_2 - b_1 = 3$. Перейдем к первому члену и знаменателю геометрической прогрессии.

$$\begin{cases} b_1 q^2 - b_1 = 9, \\ b_1 q - b_1 = 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1(q^2 - 1) = 9, \\ b_1(q-1) = 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{b_1(q^2-1)}{b_1(q-1)} = \dfrac{9}{3}, \\ b_1(q-1) = 3, \end{cases} \begin{cases} q + 1 = 3, \\ b_1(q-1) = 3, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = 2, \\ b_1 = 3. \end{cases}$$

Найдѐм сумму первых десяти членов геометрической прогрессии:

$$S_5 = \frac{3 \cdot (2^5 - 1)}{2 - 1} = 45.$$

9.2.3 Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если её первый член равен 2048, а отношение шестнадцатого члена к её седьмому члену равно $\frac{1}{512}$.

Решение. По условию $b_1 = 2048$. Найдём знаменатель прогрессии

$$\frac{b_{16}}{b_7} = \frac{b_1 \cdot q^{15}}{b_1 \cdot q^6} = q^9 = \frac{1}{512}, \text{ то есть } q = \frac{1}{2}.$$

Найдём сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

9.3 Задания для решения на практическом занятии

9.3.1 Найти сумму двадцати первых членов арифметической прогрессии, если её первый член равен 2, а седьмой член равен 20.

9.3.2 Определить восьмой член арифметической прогрессии, если сумма её первых пяти членов, стоящих на чётных местах, равна 15, а сумма первых трёх членов равна (-15).

9.3.3 Сумма первого и пятого членов убывающей арифметической прогрессии равна 26, а произведение второго и четвёртого её членов равно 160. Найти сумму шести первых членов этой прогрессии.

9.3.4 В арифметической прогрессии сумма второго и пятого членов равна 8, а третьего и седьмого членов равна 14. Найти восьмой член прогрессии.

9.3.5 Найти пятый член возрастающей арифметической прогрессии, у которой сумма первых трёх членов равна 27, а сумма их квадратов равна 275.

9.3.6 Сумма четырёх чисел, образующих арифметическую прогрессию, равна 1, а сумма квадратов этих чисел равна 0,3. Найти пятый член убывающей арифметической прогрессии.

9.3.7 Произведение третьего и шестого членов арифметической прогрессии, каждый член которой является целым числом, равно 406. При делении девятого члена этой прогрессии на её четвёртый член в частном получается 2, а в остатке 6. Найти сумму первых пяти членов арифметической прогрессии.

9.3.8 Сколько членов арифметической прогрессии нужно взять, чтобы их сумма равнялась 91, если её третий член равен 9, а разность седьмого и второго членов равна 20?

9.3.9 Найти сумму второго и пятого членов арифметической прогрессии, умноженную на 100, если между первым её членом, равным 1, и числом 1,3 вставлено пять чисел, которые вместе с данными образуют указанную прогрессию.

9.3.10 Сумма третьего и девятого членов арифметической прогрессии равна 8. Найти сумму первых одиннадцати членов данной прогрессии.

9.3.11 Найти сумму первых девяти членов арифметической прогрессии, у которой сумма седьмого, девятого, одиннадцатого и утроенного первого члена этой прогрессии равна 72.

9.3.12 Найти сумму всех трѐхзначных натуральных чисел, которые при делении на 3 дают в остатке 2.

9.3.13 Решить уравнение $5^2 \cdot 5^4 \cdot 5^6 \cdot 5^8 \cdot \ldots \cdot 5^{2x} = (0{,}04)^{-28}$.

9.3.14 Найти модуль суммы корней уравнения (или модуль корня, если он является единственным) $(x+1)+(x+4)+(x+7)+\ldots+(x+28)=155$.

9.3.15 Найти модуль произведения корней уравнения $f(x)=0$ (или модуль корня, если он является единственным), где
$f(x)=(x^2+x+1)+(x^2+2x+3)+(x^2+3x+5)+\ldots+(x^2+20x+39)-4500$.

9.3.16 Градусные меры углов α_n составляют арифметическую прогрессию, у которой $\alpha_1 = 30^0$, а $\alpha_2 = 35^0$. Найти значение выражения $4 \cdot \cos\alpha_{55}$.

9.3.17 Найти значение выражения $12 \cdot m$, где m – значение абсолютной величины суммы переменных x (или абсолютная величина переменной x, если она является единственной), при которых числа $3x^2$, 2 и $11x$ являются последовательными членами арифметической прогрессии.

9.3.18 За изготовление и установку первого железобетонного кольца было уплачено 10 у. е., а за каждое следующее кольцо заплатили на 2 у. е. больше, чем за предыдущее. Кроме того, по окончании работы было уплачено ещѐ 40 у. е. Средняя скорость изготовления и установки одного кольца оказалась равной $22\frac{4}{9}$ у. е. Сколько колец было установлено?

9.3.19 Четвѐртый член геометрической прогрессии больше второго на 24, а сумма второго и третьего членов равна 6. Найти второй член прогрессии.

9.3.20 Сумма первых четырѐх членов геометрической прогрессии равна 30, а сумма следующих четырѐх членов этой прогрессии равна 480. Найти сумму первых двенадцати членов этой геометрической прогрессии.

9.3.21 Найти пятый член возрастающей геометрической прогрессии, если сумма крайних первых четырѐх членов этой прогрессии равна 112, а сумма средних этих четырѐх членов равна 48.

9.3.22 Найти сумму первых пяти членов возрастающей геометрической прогрессии, если сумма первых еѐ трѐх членов равна 13, а их произведение равно 27.

9.3.23 Найти абсолютную величину суммы значений переменной x(или указать абсолютную величину его значения, если оно единственно), при котором последовательность $2x; x-8; x-2$ образуют геометрическую прогрессию.

9.3.24 Найти произведение первых трѐх членов убывающей геометрической прогрессии, если сумма этих членов прогрессии равна 35, а сумма их квадратов равна 525.

9.3.25 Найти утроенную сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если сумма первых её трёх членов равна 3, а сумма её первых трёх членов с нечётными номерами равна $5\frac{1}{4}$.

9.3.26 Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 243, а сумма её первых пяти членов равна 275. Найти абсолютную величину второго члена геометрической прогрессии.

9.3.27 Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 1,5, а сумма квадратов её членов равна $\frac{1}{8}$. Найти отношение первого члена этой прогрессии к её знаменателю. В ответ записать это отношение, умноженное на 102.

9.3.28 Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 3, а сумма кубов её членов равна $\frac{108}{13}$. Найти сумму первых двух членов этой прогрессии, умноженную на 18.

9.3.29 Найти произведение числа 2662 на пятый член возрастающей прогрессии, первыми тремя членами которой являются числа $0,(27); x; 0,(72)$. Все члены прогрессии положительные числа, а второй член x является иррациональным числом.

9.3.30 Вычислить $1+\sin\frac{\pi}{6}+\sin^2\frac{\pi}{6}+\sin^3\frac{\pi}{6}+\ldots$.

9.3.31 Решить уравнение $\frac{1}{x}+x+x^2+\ldots+x^n+\ldots=3,5$, где $|x|<1$.

9.3.32 Найти a^3, если $a=\sqrt{4\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{3\sqrt{4\sqrt{3\sqrt{4\ldots}}}}}}}$.

9.3.33 Три числа, сумма которых равна 28, образуют геометрическую прогрессию. Если к первому числу прибавить 3, ко второму 1, а от третьего отнять 5, то полученные числа составят арифметическую прогрессию. Найти четвёртый член возрастающей геометрической прогрессии.

9.3.34 Три числа образуют арифметическую прогрессию. Если к первому числу прибавить 8, а остальные оставить без изменения, то получается геометрическая прогрессия с суммой членов, равной 26. Найти четвёртый член возрастающей геометрической прогрессии.

9.3.35 Найти наибольшее из четырёх чисел, первые три из которых образуют геометрическую прогрессию, а последние три – арифметическую прогрессию. Сумма крайних чисел равна 14, а сумма средних чисел равна 12.

9.3.36 Три целых числа, сумма которых равна 60, являются тремя последовательными числами арифметической прогрессии. Если к первому числу прибавить число 2,2, ко второму – число 4, а к третьему – 7, то новые числа составят три последовательных члена геометрической прогрессии. Найти наибольшее из первоначально заданных чисел.

9.3.37 Второй, первый и третий члены арифметической прогрессии, разность которой отлично от нуля, образуют в указанном порядке геометрическую прогрессию. Определить знаменатель геометрической прогрессии.

9.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

9.4.1 Сумма первых шести членов арифметической прогрессии равна девяти, а разность между четвѐртым и вторым членами этой прогрессии равна 0,4. Найти первый член прогрессии.

9.4.2 Сумма второго и восьмого членов арифметической прогрессии равна 10, а сумма третьего и четырнадцатого членов этой прогрессии равна 101. Найти сумму первых семи членов прогрессии.

9.4.3 Найти четвѐртый член возрастающей арифметической прогрессии, в которой сумма первых десяти членов равна 155, а произведение первого и десятого члена прогрессии равна 58.

9.4.4 Сумма первых четырѐх членов арифметической прогрессии равна 9, а сумма первых шести еѐ членов равна 22,5. Найти сумму первых десяти членов арифметической прогрессии.

9.4.5 Сумма первого и пятого членов арифметической прогрессии равна 5/3, а произведение третьего и четвѐртого членов этой прогрессии равна 65/72. Найти сумму первых семнадцати членов арифметической прогрессии.

9.4.6 Найти арифметическую прогрессию, у которой сумма первого, третьего и пятого членов равна (-12), а произведение первых трѐх членов равно восьми.

9.4.7 Сумма первых трѐх членов арифметической прогрессии равна 2, а сумма их квадратов – 14/9. Найти наименьший из членов этой прогрессии.

9.4.8 При делении девятого члена арифметической прогрессии на еѐ второй член в частном получается 5. При делении тринадцатого члена этой прогрессии на десятый еѐ член в частном получается 2, а в остатке 5. Найти сумму первых двенадцати членов арифметической прогрессии.

9.4.9 Найти сумму четырѐх чисел, которые расположены между числами 4 и 40, и вместе с ними являются последовательными членами арифметической прогрессии.

9.4.10 Найти сумму всех трѐхзначных натуральных чисел, которые при делении на 13 дают в остатке 8.

9.4.11 Найти сумму всех трѐхзначных натуральных чисел, которые оканчиваются цифрой 7, и не делящихся на 11.

9.4.12 При каких значениях x числа $3x, \dfrac{x+2}{2}$ и $2x-1$ являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии?

9.4.13 Найти $a_1+a_6+a_{11}+a_{16}$, если $a_1+a_4+a_7+...+a_{16}=147$.

9.4.14 В арифметической прогрессии отношение сто семидесятого члена ко второму равно 15. Найти отношение двадцать первого члена прогрессии к двенадцатому члену, умножив это отношение на 44.

9.4.15 Найти сумму корней (или корень, если он единственен) уравнения $\frac{x-1}{x}+\frac{x-2}{x}+...+\frac{1}{x}=3$.

9.4.16 Найти модуль суммы корней уравнения (или модуль корня, если он является единственным) $\left(x+1\right)+\left(x+4\right)+\left(x+7\right)+...+\left(x+28\right)=155$.

9.4.17 Найти модуль произведения корней уравнения $f(x)=0$ (или модуль корня, если он является единственным), где $f(x)=\left(x^2+1\right)+\left(2x^2+3\right)+$ $+\left(3x^2+5\right)+...+\left(10x^2+19\right)-3950$.

9.4.18 Градусные меры углов α_n составляют арифметическую прогрессию, у которой $\alpha_1=10^0$, а $\alpha_2=15^0$. Найти значение выражения $4\cdot\sin^2\alpha_{44}$.

9.4.19 В соревновании по стрельбе за каждый промах в серии из 25 выстрелов стрелок получал штрафные очки: за первый промах – одно штрафное очко, а за каждый последующий промах – на 0,5 очка больше, чем за предыдущий промах. Сколько раз попал в цель стрелок, который получил 7 штрафных очков?

9.4.20 Турист, поднимаясь в гору, в первый час достиг высоты 800 метров, а в каждый следующий час поднимался на высоту на 25 метров меньшую, чем в предыдущий подъѐм. За сколько часов он достигнет высоты в 5700 метров?

9.4.21 Разность между четвѐртым и первым членами геометрической прогрессии равна 52, а сумма первых трѐх членов этой прогрессии равна 26. Найти сумму первых шести членов заданной геометрической прогрессии.

9.4.22 Сумма первых двух членов геометрической прогрессии равна 15. Первый член прогрессии больше знаменателя на 25/3. Найти четвѐртый член геометрической прогрессии.

9.4.23 Отношение четвѐртого члена геометрической прогрессии ко второму равно 1/4, а сумма второго и пятого членов равна 216. Найти целое значение первого члена прогрессии.

9.4.24 Сумма первого и третьего членов геометрической прогрессии равна 20, а сумма первых трѐх еѐ членов равна 26. Найти сумму первых десяти членов геометрической прогрессии.

9.4.25 Найти максимальное из трѐх последовательных чисел, которые образуют геометрическую прогрессию, если их произведение равно 64, а среднее арифметическое равно 14/3.

9.4.26 Записать три числа, образующих геометрическую прогрессию, в порядке возрастания, если их сумма равна 13, а сумма их квадратов равна 91.

9.4.27 В геометрической прогрессии с положительными членами первый член равен $\sqrt{2}$, а седьмой равен $\sqrt{128}$. Найти восьмой член прогрессии.

9.4.28 Найти отношение третьего члена геометрической прогрессии к её пятнадцатому члену, если сумма двенадцати членов, начиная с тринадцатого, составляет 40 % суммы первых двенадцати членов.

9.4.29 При каких значениях x числа $x-5$, $-2x$ и $-x-15$ являются тремя последовательными членами геометрической прогрессии.

9.4.30 Найти первый член бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если её сумма равна $\sqrt{2}\left(\sqrt{2}+1\right)$, а знаменатель равен $\sqrt{2}/2$.

9.4.31 Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 16, а сумма квадратов её членов равна $153\frac{3}{5}$. Найти второй член указанной прогрессии.

9.4.32 Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 4, а сумма кубов её членов равна 192. Найти сумму пяти членов указанной прогрессии.

9.4.33 Найти произведение первых трёх членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, если сумма всех её членов равна 4, а знаменатель прогрессии равен $1/2$.

9.4.34 Вычислить $1-\cos\frac{\pi}{4}+\cos^2\frac{\pi}{4}-\mathrm{co}^3\mathrm{s}\frac{\pi}{4}+\dots$.

9.4.35 Найти x^3, если $x=5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\dots}}}}}}}$.

9.4.36 Найти $60\cdot x$, где $x=7{,}2(3)$.

9.4.37 Разность третьего и второго членов геометрической прогрессии равна 12. Если к первому числу прибавить 10, ко второму прибавить 8, а третий член оставить без изменения, то получим три последовательных члена арифметической прогрессии. Найти сумму первых пяти членов геометрической прогрессии.

9.4.38 Найти наименьшее из четырёх чисел, первые три из которых образуют геометрическую прогрессию, а последние три – арифметическую прогрессию. Сумма крайних чисел равна 21, а сумма средних чисел равна 18.

9.4.39 Три целых числа, сумма которых равна 90, являются тремя последовательными членами арифметической прогрессии. Если к первому числу прибавить 5, ко второму – число 20, а к третьему – 60, то новые числа составят геометрическую прогрессию. Найти наибольшее из первоначально заданных чисел.

ЛИТЕРАТУРА

1. Гусак, Г. М. Математика для подготовительных отделений / Г. М. Гусак, Д. А. Капуцкая. – Минск : Выш. шк., 1989. – 495 с.

2. Цыпкин, А. Г. Справочное пособие по методам решения задач по математике для средней школы / А. Г. Цыпкин, А. И. Пинский. – Москва : Наука, 1994. – 416 с.

3. Гусев, В. А. Практикум по элементарной математике / В. А. Гусев, А. Г. Мордкович. – Москва : Просвещение, 1988. – 350 с.

4. Куланин, Е. Д. 3000 конкурсных задач по математике / Е. Д. Куланин [и др]. – Москва : Айрис Пресс, 2007. – 623 с.

5. Сканави, М. И. Сборник задач по математике в вузы / М. И. Сканави [и др]. – Москва : Оникс, 2007. – 608 с.

6. Мамонтова, Г. Г. Математика. Подготовка к тестированию / Г. Г. Мамонтова. – Минск. : Новое знание, 2008. – 686 с.

7. Азаров, А. И. Математика. Пособие для подготовки к экзамену и централизованному тестированию за курс средней школы / А. И. Куланин [и др]. – Минск : Аверсэв, 2004. – 416 с.

8. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. В 4 ч. Ч. 1 / А. П. Рябушко [и др.]. – Минск : Выш. шк., 2009. – 270 с.

9. Централизованное тестирование. Математика: сборник тестов / Республиканский институт контроля знаний Министерства образования Республики Беларусь. – Минск. : Аверсэв, 2011. – 37 с.

10. Централизованное тестирование. Математика: сборник тестов / Республиканский институт контроля знаний Министерства образования Республики Беларусь. – Минск. : Аверсэв, 20112. – 38 с.

11. Централизованное тестирование. Математика: сборник тестов / Республиканский институт контроля знаний Министерства образования Республики Беларусь. – Минск. : Аверсэв, 2013. – 35 с.

12. Централизованное тестирование. Математика: сборник тестов / Республиканский институт контроля знаний Министерства образования Республики Беларусь. – Минск. : Аверсэв, 2014. – 40 с.

13. Централизованное тестирование. Математика: сборник тестов / Республиканский институт контроля знаний Министерства образования Республики Беларусь. – Минск. : Аверсэв, 2015. – 42 с.

14. Централизованное тестирование. Математика: сборник тестов / Республиканский институт контроля знаний Министерства образования Республики Беларусь. – Минск. : Аверсэв, 2016. – 35 с.

15. Централизованное тестирование. Математика: сборник тестов / Республиканский институт контроля знаний Министерства образования Республики Беларусь. – Минск. : Аверсэв, 2017. – 40 с.

Учебное издание

МАТЕМАТИКА. АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, УРАВНЕНИЯ, НЕРАВЕНСТВА И ПРОГРЕССИИ

Методические указания к решению задач централизованного тестирования

Составители:
Коваленко Александр Вильямович
Дмитриев Александр Петрович
Завацкий Юрий Александрович

Редактор *Н. В. Медведева*
Корректор *Т. А. Осипова*
Компьютерная верстка *А. В. Коваленко*

Подписано к печати 21.06.2018. Формат 60x90 1/16. Усл. печ. листов 3,1.
Уч.-изд. листов 2,9. Тираж 50 экз. Заказ № 184.

Учреждение образования «Витебский государственный технологический университет»
210038, г. Витебск, Московский пр., 72.
Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Витебский государственный технологический университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/172 от 12 февраля 2014 г.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 3/1497 от 30 мая 2017 г.