МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«Витебский государственный технологический университет»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
Случайные величины в теории вероятностей

Методические указания к практическим занятиям для студентов второго курса экономических специальностей

ВИТЕБСК
2015

УДК 517 (076.1) (075.8)

Высшая математика. Случайные величины в теории вероятностей: методические указания к практическим занятиям для студентов второго курса экономических специальностей.

Витебск: Министерство образования Республики Беларусь, УО «ВГТУ», 2015.

Составители: ст. преп. Коваленко А. В.,
доц., к. ф.-м. н. Денисов В. С.,
ст. преп. Дмитриев А. П.,
ст. преп. Завацкий Ю. А.,
доц., к. ф.-м. н. Загурский В. Н.

Методические указания содержат основные теоретические сведения, задания к практическим занятиям, примеры для самостоятельного выполнения, вопросы к экзамену или зачёту по четырём разделам курса «Высшая математика» и предназначены для проведения практических занятий у студентов второго курса экономического факультета дневной и заочной форм обучения.

Одобрено кафедрой математики и информационных технологий УО «ВГТУ»
14 апреля 2015 г., протокол № 6.

Рецензент: ст. преп. Статковский Н. С.
Редактор: доц., к.ф.-м.н. Никонова Т. В.

Рекомендовано к опубликованию редакционно-издательским советом
УО «ВГТУ» "28" мая 2015 г., протокол № 5.

Ответственный за выпуск: Шалапухо Е. А.

Учреждение образования «Витебский государственный технологический университет»

Подписано к печати 26.11.15. Формат 60x90 1/16. Уч.-изд. лист. 7,3.
Печать ризографическая. Тираж 160 экз. Заказ № 332.

Отпечатано на ризографе учреждения образования «Витебский государственный технологический университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/172 от 12 февраля 2014 г.
210035, г. Витебск, Московский пр., 72.

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания составлены на основе практических занятий, которые авторы проводили на протяжении многих лет преподавания дисциплины «Высшая математика» в Витебском государственном технологическом университете. Приведённый материал проверен на нескольких поколениях студентов и содержит необходимые сведения для будущих экономистов. Среди рассмотренных в указаниях типовых примеров есть задачи, имеющие практическую направленность и связанные с дисциплинами, которые будут изучать студенты-экономисты в следующих семестрах.

В работе приведены теоретические вопросы для сдачи экзамена, содержание и тематика практических занятий по указанному курсу. Методические указания написаны в соответствии с учебной программой дисциплины «Высшая математика» для студентов экономических специальностей второго года обучения в третьем семестре. Они являются продолжением методических указаний «Числовые и функциональные ряды. Случайные события в теории вероятностей» и содержат темы семи практических занятий третьего семестра.

В методических указаниях рассмотрены четыре раздела курса «Высшая математика»: дискретные одномерные случайные величины, непрерывные одномерные случайные величины, дискретные многомерные случайные величины, непрерывные многомерные случайные величины. Согласно учебной программе курса «Высшая математика» для студентов экономических специальностей на третий семестр обучения, все эти темы студент должен изучить на семи аудиторных занятиях. Каждое практическое занятие представляет собой методический материал для его проведения, содержит решения типовых примеров и подборку рекомендуемых к решению задач по теме занятия. В начале каждого практического занятия приведён краткий теоретический материал, который необходимо знать студенту при подготовке к аудиторной и самостоятельной работе по заданной теме, однако этих сведений недостаточно для сдачи экзамена или зачёта по предмету. Прежде чем приступать к решению задач практического занятия или выполнению домашнего задания, студенту необходимо изучить теоретический курс лекционного материала или обратиться к академическим изданиям для более детального изучения разделов курса, которые его интересуют. Методические указания предназначены для студентов экономических специальностей, но также могут применяться на усмотрение преподавателя на практических занятиях студентами других специальностей различных форм обучения. Студенты заочной формы обучения могут применять изложенный теоретический и практический материал для самостоятельной работы по предмету «Высшая математика».

Предложенные методические указания также помогут студентам подготовиться к прохождению теста по отдельным темам и разделам курса, так как проведение зачёта или экзамена может подразумевать электронный контроль знаний.

ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ ПО КУРСУ «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА» ДЛЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ (ТРЕТИЙ СЕМЕСТР)

1. Числовой ряд. Сходимость числового ряда. Примеры сходящихся рядов (геометрический ряд).
2. Числовой ряд. Сходимость числового ряда. Примеры сходящихся рядов (гармонический ряд).
3. Необходимый признак сходимости и достаточный признак расходимости числового ряда.
4. Свойства сходящихся рядов.
5. Ряды с положительными членами. Достаточные признаки сходимости (признак сравнения).
6. Ряды с положительными членами. Достаточные признаки сходимости (предельный признак сравнения).
7. Ряды с положительными членами. Достаточные признаки сходимости (признак Даламбера).
8. Ряды с положительными членами. Достаточные признаки сходимости (радикальный признак Коши).
9. Ряды с положительными членами. Достаточные признаки сходимости (интегральный признак Коши).
10. Знакопеременные ряды. Условная и абсолютная сходимость знакопеременного ряда.
11. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница и следствие из него.
12. Функциональные ряды. Область сходимости функционального ряда.
13. Равномерно сходящиеся ряды и их свойства.
14. Степенной ряд. Теорема Абеля и следствие из неё.
15. Степенной ряд. Радиус и область сходимости степенного ряда.
16. Теорема существования и единственности разложения функции в степенной ряд.
17. Необходимое и достаточное условие разложения функции в степенной ряд.
18. Разложение элементарных функций в степенной ряд.
19. Вычисление приближённых значений функции с помощью степенных рядов.
20. Вычисление определенного интеграла с помощью степенных рядов.
21. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.
22. Вероятностный эксперимент. Предмет и задачи теории вероятностей.
23. Основные формулы комбинаторики.
24. Пространство элементарных событий. Алгебра событий.

25. Классификация событий.
26. Аксиоматическое, классическое, геометрическое и статистическое определение вероятностей случайных событий.
27. Свойства вероятностей случайных событий.
28. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей.
29. Формула полной вероятности.
30. Формула Байеса.
31. Последовательность независимых испытаний. Схема Бернулли.
32. Наивероятнейшее число.
33. Теорема Пуассона.
34. Локальная теорема Муавра-Лапласа.
35. Интегральная теорема Муавра-Лапласа.
36. Закон больших чисел в схеме Бернулли.
37. Понятие случайной величины.
38. Функция распределения, её свойства.
39. Плотность вероятности, её свойства.
40. Дискретные случайные величины.
41. Непрерывные случайные величины.
42. Характеристики, описывающие центр распределения случайной величины (математическое ожидание, мода и медиана), их свойства.
43. Характеристики, описывающие рассеивание случайной величины (дисперсия и среднее квадратическое отклонение), их свойства.
44. Одноточечное и двухточечное распределение.
45. Геометрическое и гипергеометрическое распределение.
46. Биномиальный закон распределения.
47. Равномерный закон распределения.
48. Показательный закон распределения.
49. Нормальный закон распределения.
50. Правило трех сигм для нормального закона распределения.
51. Определение многомерных случайных величин. Понятие о моделях распределения многомерных случайных величин.
52. Распределение вероятностей многомерных дискретных случайных величин.
53. Функция распределения многомерной случайной величины.
54. Непрерывные многомерные случайные величины. Плотность распределения вероятностей многомерной случайной величины.
55. Распределения составляющих многомерной случайной величины.
56. Условные распределения составляющих многомерных случайных величин.
57. Зависимые и независимые случайные величины.
58. Числовые характеристики многомерных случайных величин.
59. Функции (преобразования) двумерной случайной величины.
60. Двумерное нормальное распределение.

ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

1 ДИСКРЕТНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ (практическое занятие № 11 в третьем семестре)

Содержание: дискретные случайные величины (ДСВ), закон распределения ДСВ, функция распределения, числовые характеристики ДСВ (математическое ожидание, мода, медиана, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, начальные и центральные моменты *k*-го порядка).

1.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Рассмотрим вероятностный эксперимент. Пусть $\left(\Omega, F, P\right)$ – математическая модель данного эксперимента. Часто при решении экономических и инженерных задач каждому элементарному событию $\omega \in \Omega$ сопоставляется некоторое действительное число $\xi(\omega)$, которое зависит от ω. В этом случае результаты эксперимента будут описываться некоторой числовой функцией $\xi(\omega)$, которая определена на пространстве элементарных событий Ω, то есть функция $\xi(\omega)$ отображает множество Ω на множество действительных чисел. Такие функции называются случайными величинами. Условимся случайные величины обозначать греческими буквами, а принимаемые ими значения – строчными латинскими буквами.

Определение 1.1.1 *Дискретной случайной величиной* называется такая величина $\xi = \xi(\omega)$, которая в зависимости от элементарных исходов ω принимает конечное или счётное множество различных значений x.

Определение 1.1.2 *Распределением вероятностей* или *законом распределения* вероятностей дискретной случайной величины называется соответствие между возможными значениями случайной величины и их вероятностями, по которому каждому возможному значению x_i случайной величины ξ поставлено в соответствие неотрицательное число $p_i = P\left(\xi = x_i\right)$, где $\sum\limits_i p_i = 1$.

Дискретная случайная величина считается заданной, если определён её закон распределения в различных формах. Закон распределения дискретной случайной величины может быть задан рядом распределения, многоугольником распределения, аналитическим образом и функцией распределения.

Определение 1.1.3 *Рядом распределения* дискретной случайной величины ξ называется таблица, в которой перечислены возможные значения $x_1, x_2, ..., x_n, ...$ случайной величины ξ и соответствующие им вероятности $p_1, p_2, ..., p_n, ...$, причём $\sum\limits_i p_i = \sum\limits_i P\left(\xi = x_i\right) = 1$.

Если дискретная случайная величина ξ принимает конечное множество значений, например, пусть число значений случайной величины равно n, то ряд распределения имеет вид:

$\xi = x_i$	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
$P(\xi = x_i)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

Если же дискретная случайная величина ξ принимает счётное множество значений, то ряд распределения записывается в виде:

$\xi = x_i$	x_1	x_2	$\ldots$	x_n	$\ldots$
$P(\xi = x_i)$	p_1	p_2	$\ldots$	p_n	$\ldots$

Графическое изображение ряда распределения называется *многоугольником распределения*. По оси абсцисс откладываются значения случайной величины, а по оси ординат – соответствующие вероятности. Полученные точки соединяются линиями.

При аналитическом задании закона распределения ДСВ указывается формула нахождения вероятностей для каждого значения случайной величины. Например, для биномиального распределения, значения вероятностей случайной величины определяется формулой Бернулли $P_n(\xi = x_i) = C_n^{x_i} \cdot p^{x_i} \cdot q^{n-x_i}$.

Определение 1.1.4 *Функцией распределения* случайной величины ξ называется функция $F(x)$ действительного переменного x, определяющее вероятность того, что случайная величина ξ в результате эксперимента примет значение меньше некоторого числа x, то есть

$$F(x) = P(\xi < x). \tag{1.1.1}$$

Если случайную величину рассматривать как случайную точку на числовой оси, то функция распределения представляет собой вероятность того, что случайная величина попадёт в интервал расположенный левее некоторого числа x.

Приведём основные свойства функции распределения:

1) $\lim\limits_{x \to -\infty} F(x) = F(-\infty) = 0$;

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = F(+\infty) = 1$;

3) функция распределения является неубывающей функцией, то есть $F(x_1) \le F(x_2)$, если $x_1 < x_2$;

4) функция распределения непрерывна слева в точке x_0, то есть $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} F(x) = F(x_0)$;

5) функция распределения $F(x)$ случайной величины ξ однозначно определяет распределение вероятностей этой случайной величины, то есть вероятность произвольного события можно выразить через функцию распределения;

6) если $F(x)$ – функция распределения случайной величины ξ, то вероятность попадания случайной величины ξ в интервал $[\alpha;\beta)$, полузамкнутый справа, определяется формулой

$$P(\alpha \le \xi < \beta) = F(\beta) - F(\alpha), \tag{1.1.2}$$

для любого значения x из этого интервала;

7) для любого значения $\xi = \alpha$ справедлива формула $P(\xi = \alpha) = \lim\limits_{x \to \alpha + 0} F(x) - F(\alpha)$.

Функция распределения для ДСВ вычисляется по формуле

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(\xi = x_i), \tag{1.1.3}$$

где суммирование ведётся по всем значениям i, для которых $x_i < x$.

Рассмотрим числовые характеристики дискретных случайных величин.

Определение 1.1.5 *Математическим ожиданием дискретной случайной величины* ξ называется её среднее значение, которое вычисляется по формуле

$$M(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i . \tag{1.1.4}$$

Математическое ожидание также обозначается m_ξ или $\mathrm{E}\xi$.

Приведём основные свойства математического ожидания:

1) если C – неслучайная величина, то $M(C) = C$;

2) если C – постоянный множитель, то его можно выносить за знак математического ожидания, то есть $M(C \cdot \xi) = C \cdot M(\xi)$;

3) $M(\xi \pm \eta) = M(\xi) \pm M(\eta)$ – для любых случайных величин ξ и η;

4) $M\left(\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} M(\xi_i)$ – для любых случайных величин ξ_i, $i = \overline{1;n}$;

5) $M(\xi \cdot \eta) = M(\xi) \cdot M(\eta) + M\left(\left(\xi - m_\xi\right) \cdot \left(\eta - m_\eta\right)\right)$;

6) математическое ожидание произведения независимых случайных величин равно произведению их математических ожиданий;

7) если $\alpha \le \xi \le \beta$, то $\alpha \le M(\xi) \le \beta$;

8) $M(\xi) \le M|\xi|$;

9) $M(\xi - m_\xi) = 0$.

Определение 1.1.6 *Центрированной случайной величиной* называется разность между случайной величиной ξ и её математическим ожиданием m_ξ:

$$\hat{\xi} = \xi - m_\xi . \tag{1.1.5}$$

Определение 1.1.7 *Модой* $Mo(\xi)$ *дискретной случайной величины* ξ называется наиболее вероятное значение случайной величины, то есть такое её значение, при котором вероятность максимальна.

Определение 1.1.8 *Медианой* $Me(\xi)$ *дискретной случайной величины* ξ называется такое значение случайной величины, относительно которого равновероятны получение значений случайной величины, то есть $P\left(\xi < Me(\xi)\right) = P\left(\xi > Me(\xi)\right)$.

Значение медианы можно определить из равенства $2P\left(\xi < Me(\xi)\right) = 1$.

Определение 1.1.9 *Дисперсией случайной величины* ξ называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от её математического ожидания и обозначается $D(\xi)$

$$D(\xi) = M\left(\hat{\xi}^2\right) = M\left(\left(\xi - m_\xi\right)^2\right). \tag{1.1.6}$$

Дисперсия также обозначается σ_ξ^2, или D_ξ, или $\mathrm{Var}(\xi)$.

Согласно определению математического ожидания, дисперсия дискретной случайной величины ξ вычисляется по формуле

$$D\left(\xi\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - m_\xi\right)^2 p_i\,. \tag{1.1.7}$$

Преобразуем формулу (1.1.7), используя определение и свойства математического ожидания:

$$D\left(\xi\right) = M\left(\xi^2\right) - m_\xi^2\,. \tag{1.1.8}$$

На основании формулы (1.1.8) получаем формулу вычисления дисперсии для дискретных случайных величин:

$$D(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - m_\xi^2\,. \tag{1.1.9}$$

Приведём основные свойства дисперсии случайных величин:

1) Если C – постоянная величина, то $D(C) = 0$;
2) $D\left(C\xi\right) = C^2 D\left(\xi\right)$;
3) $D(\xi \pm \eta) = D(\xi) + D(\eta) \pm 2M\left(\left(\xi - m_\xi\right)\left(\eta - m_\eta\right)\right)$;
4) Если события независимы, то дисперсия суммы равна сумме дисперсий.

Определение 1.1.10 Положительное значение квадратного корня из дисперсии называется *средним квадратическим отклонением или стандартом* случайной величины ξ и определяется формулой

$$\sigma_\xi = \sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)}\,. \tag{1.1.10}$$

Кроме дисперсии и среднего квадратического отклонения, рассеивание случайной величины ξ может характеризоваться *размахом* $R = x_{\max} - x_{\min}$, где $x_{\max}$ – наибольшее из возможных значений случайной величины ξ; $x_{\min}$ – наименьшее из возможных значений случайной величины ξ.

Часто на практике, особенно в экономических расчётах, рассеивание принято характеризовать *коэффициентом вариации* $V = \dfrac{\sigma_\xi}{M(\xi)}$.

Начальным моментом k*-го порядка случайной величины* ξ называется математическое ожидание случайной величины ξ^k, то есть $\nu_k = M\left(\xi^k\right)$.

Следовательно, для дискретной случайной величины начальный момент выражается суммой:

$$\nu_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k p_i \,. \qquad (1.1.11)$$

Начальный момент первого порядка является математическим ожиданием $\nu_1 = M\left(\xi\right)$, а второго порядка равен $\nu_2 = M\left(\xi^2\right)$. Следовательно, формулу для вычисления дисперсии можно записать в виде: $D\left(\xi\right) = \nu_2 - \nu_1^2$.

Центральным моментом k*-го порядка случайной величины* ξ называется математическое ожидание случайной величины $\left(\xi - m_\xi\right)^k$, то есть $\mu_k = M\left(\left(\xi - m_\xi\right)^k\right)$.

Следовательно, для дискретной случайной величины центральный момент выражается суммой:

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - m_\xi\right)^k p_i \,. \qquad (1.1.12)$$

Центральный момент первого порядка всегда равен нулю. Центральный момент второго порядка является дисперсией случайной величины ξ: $\mu_2 = D(\xi) = \nu_2 - \nu_1^2$. Центральный момент третьего порядка определяется по формуле $\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3$, а четвёртого - $\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4$.

1.2 Примеры решения типовых задач

1.2.1 Специалист кредитного отдела банка имеет высшую категорию с вероятностью 0,6. Построить ряд распределения случайной величины ξ - числа специалистов, которые имеют высшую категорию, среди пяти выбранных специалистов. Вычислить вероятность того, что среди них окажется не менее двух, но не более четырёх специалистов, которые имеют высшую категорию.

Решение. Дискретная случайная величина ξ может принимать следующие значения: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, $x_5 = 4$, $x_6 = 5$, а, следовательно, вероятности $p_i = P\left(\xi = x_i\right)$ вычисляются по формуле $p_i = P\left(\xi = x_i\right) = C_n^{x_i} p^{x_i} q^{n - x_i}$. По условию: $n = 5$, $p = 0{,}6$, $q = 1 - p = 0{,}4$. В результате вычислений получим следующий ряд распределения:

$\xi = x_i$	0	1	2	3	4	5
$P(\xi = x_i)$	0,01024	0,0768	0,2304	0,3456	0,2592	0,07776

Проверка: $0,01024 + 0,0768 + 0,2304 + 0,3456 + 0,2592 + 0,07776 = 1$.

Найдём вероятность заданного события:

$$P(2 \le \xi \le 4) = P((\xi = 2) + (\xi = 3) + (\xi = 4)) = P(\xi = 2) + P(\xi = 3) + P(\xi = 4) = 0,8352.$$

1.2.2 Два стрелка стреляют по одной мишени, делая, независимо друг от друга, по два выстрела. Вероятность попадания в мишень для первого стрелка равна 0,6, для второго – 0,7. Построить ряд распределения случайной величины ξ - общего числа попаданий.

Решение. Дискретная случайная величина ξ может принимать следующие значения: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$, $x_5 = 4$. Вероятность поражения мишени первым стрелком при одном выстреле равна $p_1 = 0,6$, следовательно, вероятность его промаха равна $q_1 = 0,4$. Для второго стрелка вероятность попадания в мишень равна $p_2 = 0,7$, а промаха - $q_2 = 0,3$. Каждый из стрелков сделал по два выстрела. Событие $\{\xi = 0\}$ означает, что каждый из стрелков промахнулись в обоих выстрелах. Остальные события описываются аналогично. Найдем вероятности $P(\xi = x_i)$, где $i = 1;5$.

$$P(\xi = 0) = q_1 q_1 q_2 q_2 = 0,4 \cdot 0,4 \cdot 0,3 \cdot 0,3 = 0,0144.$$

$$P(\xi = 1) = p_1 q_1 q_2 q_2 + q_1 p_1 q_2 q_2 + q_1 q_1 p_2 q_2 + q_1 q_1 q_2 p_2 = 0,1104.$$

$$P(\xi = 2) = p_1 p_1 q_2 q_2 + q_1 p_1 p_2 q_2 + p_1 q_1 p_2 q_2 + q_1 p_1 q_2 p_2 + p_1 q_1 q_2 p_2 + q_1 q_1 p_2 p_2 = 0,3124.$$

$$P(\xi = 3) = p_1 p_1 p_2 q_2 + p_1 p_1 q_2 p_2 + p_1 q_1 p_2 p_2 + q_1 p_1 p_2 p_2 = 0,3864.$$

$$P(\xi = 4) = p_1 p_1 p_2 p_2 = 0,6 \cdot 0,6 \cdot 0,7 \cdot 0,7 = 0,1764.$$

В результате получаем следующий ряд распределения:

$\xi = x_i$	0	1	2	3	4
$P(\xi = x_i)$	0,0144	0,1104	0,3124	0,3864	0,1764

Проверка: $0,0144 + 0,1104 + 0,3124 + 0,3864 + 0,1764 = 1$.

1.2.3 Из кошелька, в котором находятся три купюры номиналом 1 тысяча рублей и семь купюр номиналом 50 тысяч рублей, наугад извлекают пять купюр. Пусть ξ - число вынутых купюр номиналом 50 тысяч рублей. Построить ряд распределения случайной величины ξ.

Решение. Так как, в кошельке имеется только три купюры достоинством 1 тысяча рублей, то среди выбранных пяти купюр должно быть не менее двух купюр номиналом 50 тысяч рублей. Следовательно, дискретная случайная величина ξ может принимать следующие значения: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 4$, $x_4 = 5$.

Для вычисления вероятностей $P(\xi = x_i)$ воспользуемся классическим определением вероятностей. Так как, выбор 5 купюр из 10, которые имеются в кошельке, определяется только составом, без учёта порядка, то для вычисления числа исходов эксперимента используем сочетания: $P(\xi = 2) = \frac{C_7^2 \cdot C_3^3}{C_{10}^5} = \frac{1}{12}$, $P(\xi = 3) = \frac{C_7^3 \cdot C_3^2}{C_{10}^5} = \frac{5}{12}$, $P(\xi = 4) = \frac{C_7^4 \cdot C_3^1}{C_{10}^5} = \frac{5}{12}$, $P(\xi = 5) = \frac{C_7^5 \cdot C_3^0}{C_{10}^5} = \frac{1}{12}$.

В результате получаем следующий ряд распределения:

$\xi = x_i$	2	3	4	5
$P(\xi = x_i)$	1/12	5/12	5/12	1/12

Проверка: $1/12 + 5/12 + 5/12 + 1/12 = 1$.

1.2.4 Автомобилист пытается «завести» автомобиль. Автомобиль «заводится» независимо от других попыток водителя привести автомобиль в движение, с вероятностью $p = 0{,}7$. Каждая попытка автомобилиста «завести» автомобиль, занимает время τ. Найти распределение общего времени T, которое потребуется автомобилисту для того, чтобы автомобиль был готов к движению.

Решение. Дискретная случайная величина T может принимать следующие значения: $t_1 = \tau, t_2 = 2\tau, t_3 = 3\tau, ..., t_n = n\tau, ...$. Событие $\{T = \tau\}$ означает, что в течение времени τ автомобиль «заведётся» с вероятностью $P(T = \tau) = 0{,}7$. Событие $\{T = 2\tau\}$ означает, что в течение времени τ автомобиль «не заведётся» с вероятностью $q = 1 - p = 0{,}3$, а в течение последующего времени τ он заработает с вероятностью $p = 0{,}7$. Следовательно, вероятность того, что случайная величина T примет значение 2τ равна $P(T = 2\tau) = 0{,}3 \cdot 0{,}7$.

Событие $\{T = n\tau\}$ означает, что в течение времени $(n-1)\tau$ автомобиль не «завёлся» в $(n-1)$ попытках с вероятностью $0{,}3^{n-1}$ и завёлся с последней попытки с вероятностью $p = 0{,}7$. То есть, вероятность того, что случайная величина T примет значение $n\tau$ равна $P(T = n\tau) = 0{,}3^{n-1} \cdot 0{,}7$. Таким образом, получаем ряд распределения общего времени T, которое потребуется автомобилисту для того, чтобы автомобиль был готов к движению:

$T = t_i$	τ	2τ	3τ	…	$n\tau$	…
$P(T = t_i)$	$0{,}7$	$0{,}3 \cdot 0{,}7$	$0{,}3^2 \cdot 0{,}7$	…	$0{,}3^{n-1} \cdot 0{,}7$	…

Проверка: $0,7+0,3\cdot 0,7+0,3^2\cdot 0,7+...+0,3^{n-1}\cdot 0,7+...=0,7\cdot(1+0,3+$ $+0,3^2+...+0,3^{n-1}+...)=0,7\cdot\dfrac{1}{1-0,3}=0,7\cdot\dfrac{1}{0,7}=1.$

1.2.5 Студенту для допуска к экзамену по «Высшей математике» необходимо пройти два тестирования по различным темам. Тесты можно сдавать в любом порядке, независимо друг от друга, неограниченное число раз, главное пройти два теста. Каждый тест считается сданным, если студент ответит на 12 вопросов из 16 предложенных тестовых задач. Случайная величина ξ представляет собой количество тестов, выполненных студентом для допуска к экзамену. Построить ряд распределения случайной величины ξ.

Решение. Дискретная случайная величина ξ может принимать следующие значения: $x_1=2, x_2=3, x_3=4, ..., x_n=n, ...$. Студент сдаёт тест с вероятностью $p=12/16=3/4$, и, соответственно, не сдаёт тест с вероятностью $q=1/4$. Предположим, что студент сдавал тесты ровно n раз. Второй тест имеет номер n, а первый может иметь любой из оставшихся $n-1$ номеров. В $n-2$ попытках тесты не сданы с вероятностью $1/4^{n-2}$, а в двух оставшихся попытках тесты сдаются с вероятностью $(3/4)^2=9/16$. Следовательно, вероятность события $\{\xi=x_n\}$определяется по формуле $P(\xi=x_n)=(n-1)\cdot\dfrac{1}{4^{n-2}}\cdot\dfrac{9}{16}$. Таким образом, получаем ряд распределения случайной величина ξ - количество тестов, выполненных студентом для допуска к экзамену:

$\xi=x_i$	2	3	4	…	n	…
$P(\xi=x_i)$	$\dfrac{9}{16}$	$\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{9}{16}$	$\dfrac{3}{4^2}\cdot\dfrac{9}{16}$	…	$(n-1)\cdot\dfrac{1}{4^{n-2}}\cdot\dfrac{9}{16}$	…

Проверка: $\dfrac{9}{16}+\dfrac{2}{4}\cdot\dfrac{9}{16}+\dfrac{3}{4^2}\cdot\dfrac{9}{16}+...+(n-1)\cdot\dfrac{1}{4^{n-2}}\cdot\dfrac{9}{16}+...=\dfrac{9}{16}\cdot\left(1+\dfrac{2}{4}+\dfrac{3}{4^2}+...\right.$ $\left....+\dfrac{n-1}{4^{n-2}}+...\right)=\dfrac{9}{16}\cdot\dfrac{1}{\left(1-\frac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{9}{16}\cdot\dfrac{1}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\dfrac{9}{16}\cdot\dfrac{1}{\frac{9}{16}}=1.$

Пояснение. Покажем, что $1+2\cdot q+3\cdot q^2+...+(n-1)\cdot q^{n-2}+...=\dfrac{1}{(1-q)^2}$.

Рассмотрим сходящийся ряд $1+q+q^2+q^3+...+q^{n-1}+...$ с непрерывно дифференцируемыми членами, причём $|q|<1$. Его сумма равна $S=\dfrac{1}{1-q}$. Данный ряд можно почленно дифференцировать, причём сумма производных членов ряда равна производной от суммы ряда, то есть

$$S' = 1 + 2\cdot q + 3\cdot q^2 + ... + (n-1)\cdot q^{n-2} + ... = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

В задаче значение q равно $1/4$.

1.2.6 Дискретная случайная величина задана рядом распределения:

$\xi = x_i$	2	4	7	11
$P(\xi = x_i)$	0,1	0,3	0,4	0,2

Найти функцию распределения случайной величины ξ и построить её график.

Решение. Построим функцию распределения $F(x) = P(\xi < x)$ случайной величины ξ.

1) Если $x \le 2$, то $F(x) = 0$. Действительно, значений, меньших числа два, случайная величина ξ не принимает. Следовательно, при значениях $x \le 2$ функция распределения равна $F(x) = P(\xi < x) = 0$.

2) Если $2 < x \le 4$, то значение функции распределения равно $F(x) = 0{,}1$. Действительно, случайная величина принимает только одно значение $\xi = 2$, которое меньше любого из чисел из указанного промежутка. Следовательно, при значениях $2 < x \le 4$ функция распределения равна $F(x) = P(\xi < x) = P(\xi = 2) = 0{,}1$.

3) Если $4 < x \le 7$, то значение функции распределения равно $F(x) = 0{,}4$. Действительно, случайная величина принимает только два значения $\xi = 2$ или $\xi = 4$, которые меньше любого из чисел из выбранного промежутка. Случайная величина принимает значение 2 с вероятностью 0,1 и значение 4 с вероятностью 0,3; следовательно, одно из этих значений, безразлично какое, случайная величина ξ может принять (по теореме сложения вероятностей для несовместных событий) с вероятностью $0{,}1 + 0{,}3 = 0{,}4$. Таким образом, при значениях $4 < x \le 7$ функция распределения равна $F(x) = P(\xi < x) = P(\xi = 2) + P(\xi = 4) = 0{,}1 + 0{,}3 = 0{,}4$.

4) Если $7 < x \le 11$, то значение функции распределения равно $F(x) = 0{,}8$. Действительно, случайная величина принимает только три значения $\xi = 2$, или $\xi = 4$, или $\xi = 4$, которые меньше любого из чисел из рассматриваемого промежутка. Случайная величина принимает значение 2 с вероятностью 0,1, значение 4 с вероятностью 0,3, а значение 7 с вероятностью 0,4; следовательно, одно из этих значений, безразлично какое, случайная величина ξ может принять (по теореме сложения вероятностей для несовместных событий) с вероятностью $0{,}1 + 0{,}3 + 0{,}4 = 0{,}8$. Таким образом, при значениях $7 < x \le 11$ функция распределения равна $F(x) = P(\xi < x) = P(\xi = 2) + P(\xi = 4) + P(\xi = 7) = 0{,}8$.

5) Если $x > 11$, то значение функции распределения равно $F(x) = 1$. Действительно, случайная величина принимает только четыре значения $\xi = 2$, или $\xi = 4$, или $\xi = 4$, или $\xi = 11$, которые меньше любого из чисел из промежутка $(11;+\infty)$. Случайная величина принимает значение 2 с вероятностью 0,1, значение 4 с вероятностью 0,3, значение 7 с вероятностью 0,4, а значение 11 с вероятностью 0,2; следовательно, одно из этих значений, безразлично какое, случайная величина ξ может принять (по теореме сложения вероятностей для несовместных событий) с вероятностью $0,1+0,3+0,4+0,2=1$. Таким образом, при значениях $x > 11$ функция распределения равна $F(x) = P(\xi < x) =$ $= P(\xi = 2) + P(\xi = 4) + P(\xi = 7) + P(\xi = 11) = 0,1+0,3+0,4+0,2=1$.

Следовательно, функция распределения случайной величины ξ имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 2, \\ 0,1, & 2 < x \le 4, \\ 0,4, & 4 < x \le 7, \\ 0,8, & 7 < x \le 11, \\ 1, & x > 11. \end{cases}$$

График функции распределения приведён на рисунке 1.

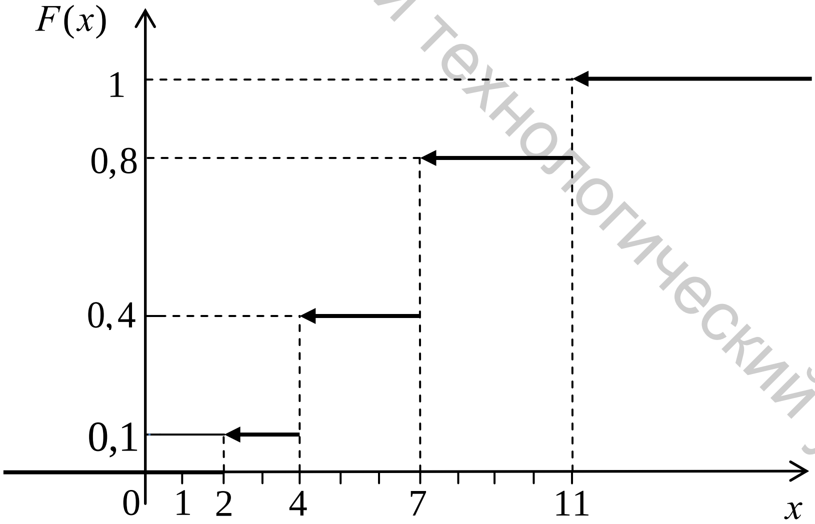

Рисунок 1 – График функции распределения

1.2.7 Дискретная случайная величина задана рядом распределения:

$\xi = x_i$	2	3	5	8	11
$P(\xi = x_i)$	0,3	0,1	0,3	0,1	0,2

Построить многоугольник распределения случайной величины ξ.

Решение. Рассмотрим прямоугольную декартовую систему координат, причём по оси абсцисс будем откладывать возможные значения x_i случайной величины ξ, а по оси ординат соответствующие вероятности p_i.

Построим точки $M_1(2;0{,}3)$, $M_2(3;0{,}1)$, $M_3(5;0{,}3)$, $M_4(8;0{,}1)$ и $M_1(11;0{,}2)$. Соединив эти точки отрезками, получим искомый многоугольник распределения случайной величины ξ (рис. 2)

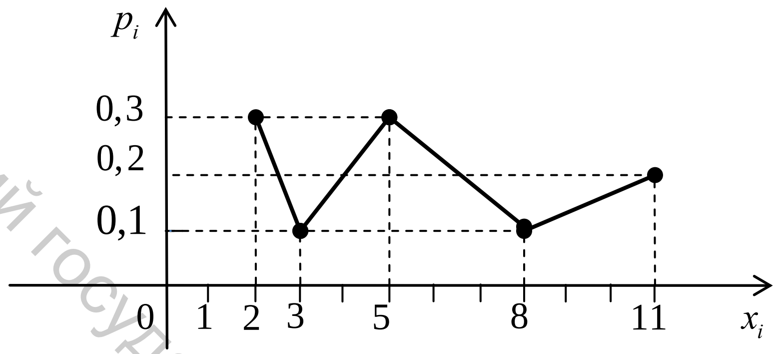

Рисунок 2 – График многоугольника распределения

1.2.8 Дискретная случайная величина задана рядом распределения:

$\xi = x_i$	2	4	6	8	10
$P(\xi = x_i)$	0,15	0,05	0,35	0,25	0,20

Найти математическое ожидание $M(\xi)$, моду $Mo(\xi)$, дисперсию $D(\xi)$ и среднеквадратическое отклонение σ_ξ для заданной случайной величины ξ. Вычислить теоретические и центральные моменты первого, второго, третьего и четвёртого порядков.

Решение. Математическое ожидание равно сумме произведений всех возможных значений случайной величины ξ на их вероятности (формула 1.1.4): $M(\xi) = m_\xi = \sum_{i=1}^{5} x_i p_i = 2 \cdot 0{,}15 + 4 \cdot 0{,}05 + 6 \cdot 0{,}35 + 8 \cdot 0{,}25 + 10 \cdot 0{,}20 = 6{,}6$.

Значение $\xi = 6$ случайная величина принимает с наибольшей вероятностью 0,35, а, следовательно, мода случайной величины равна $Mo(\xi) = 6$.

Можно вычислить дисперсию, исходя из определения дисперсии, однако лучше использовать формулы 1.1.8 или 1.1.9, которые упрощают вычисления. Искомая дисперсия равна

$$D(\xi) = \sum_{i=1}^{5} x_i^2 p_i - m_\xi^2 = 2^2 \cdot 0{,}15 + 4^2 \cdot 0{,}05 + 6^2 \cdot 0{,}35 + 8^2 \cdot 0{,}25 + 10^2 \cdot 0{,}2 - 6{,}6^2 = 6{,}44.$$

Найдём среднее квадратическое отклонение: $\sigma_\xi = \sqrt{D(\xi)} = \sqrt{6{,}44} \approx 2{,}54$.

Вычислим начальные моменты:

$$\nu_1 = M(\xi) = 6,6;$$

$$\nu_2 = M\left(\xi^2\right) = 2^2 \cdot 0,15 + 4^2 \cdot 0,05 + 6^2 \cdot 0,35 + 8^2 \cdot 0,25 + 10^2 \cdot 0,20 = 50;$$

$$\nu_3 = M\left(\xi^3\right) = 2^3 \cdot 0,15 + 4^3 \cdot 0,05 + 6^3 \cdot 0,35 + 8^3 \cdot 0,25 + 10^3 \cdot 0,20 = 408;$$

$$\nu_4 = M\left(\xi^4\right) = 2^4 \cdot 0,15 + 4^4 \cdot 0,05 + 6^4 \cdot 0,35 + 8^4 \cdot 0,25 + 10^4 \cdot 0,20 = 3492,8.$$

Находим центральные моменты:

$$\mu_1 = 0;$$

$$\mu_2 = D(\xi) = 6,44;$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3 = 408 - 3 \cdot 6,6 \cdot 50 + 2 \cdot 6,6^3 = -7,008;$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4 = 3492,8 - 4 \cdot 408 \cdot 6,6 + 6 \cdot 50 \cdot 6,6^2 - 3 \cdot 6,6^4 = 97,1792.$$

1.2.9 Известны математические ожидания независимых случайных величин ξ и η, а также математические ожидания их квадратов: $M\left(\xi\right) = 5$, $M\left(\eta\right) = 4$, $M\left(\xi^2\right) = 28$, $M\left(\eta^2\right) = 20$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = 7\xi - 3\eta$.

Решение. Найдём дисперсии случайных величин по формуле 1.1.8: $D\left(\xi\right) = M\left(\xi^2\right) - m_\xi^2 = 28 - 5^2 = 3, D\left(\xi\right) = M\left(\eta^2\right) - m_\eta^2 = 20 - 4^2 = 4$. Для определения искомых величин воспользуемся свойствами математического ожидания и дисперсии.

$$M(Z) = M\left(7\xi - 3\eta\right) = 7 \cdot M(\xi) - 3 \cdot M(\eta) = 7 \cdot 5 - 3 \cdot 4 = 23;$$

$$D(Z) = D\left(7\xi - 3\eta\right) = 7^2 D(\xi) - 3^2 D(\eta) = 49 \cdot 3 - 9 \cdot 4 = 111.$$

1.2.10 Дан перечень возможных значений дискретной случайной величины ξ: $x_1 = 2, x_2 = 4, x_3 = 6$, а также заданы математические ожидания этой величины и её квадрата: $M\left(\xi\right) = 2,9$, $M\left(\xi^2\right) = 8,9$. Найти вероятности p_1, p_2, p_3, соответствующие возможным значениям x_1, x_2, x_3 случайной величины ξ. Записать ряд распределения случайной величины ξ.

Решение. Пользуясь тем, что сумма вероятностей возможных значений случайной величины ξ равна единице, а также приняв во внимание, что $M\left(\xi\right) = 2,9$, $M\left(\xi^2\right) = 8,9$, составляем следующую систему трёх линейных уравнений относительно неизвестных вероятностей:

$$\begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1, \\ 2\,p_1 + 3p_2 + 4p_3 = 2,9, \\ 2^2 p_1 + 3^2 p_2 + 4^2 p_3 = 8,9. \end{cases}$$

Решая полученную систему линейных уравнений, находим искомые вероятности: $p_1 = 0,3,\ p_2 = 0,5,\ p_3 = 0,2$. Ряд распределения имеет вид:

$\xi = x_i$	2	3	4
$P(\xi = x_i)$	0,3	0,5	0,2

1.2.11 Дискретная случайная величина ξ может принять только два возможных значения: x_1 и x_2, причём $x_2 > x_1$. Вероятность того, что случайная величина ξ примет значение x_1, равна $p_1 = 0,2$. Найти закон распределения случайной величины ξ, если известны математическое ожидание и дисперсия случайной величины: $M(\xi) = 4,6$, а $D(\xi) = 0,64$.

Решение. Так как сумма вероятностей всех возможных значений дискретной случайной величины ξ равна единице, то вероятность того, что случайная величина ξ примет значение x_2, равна $p_2 = 1 - 0,2 = 0,8$.

Запишем ряд распределения случайной величины ξ:

$\xi = x_i$	x_1	x_2
$P(\xi = x_i)$	0,2	0,8

Для нахождения x_1 и x_2 необходимо составить два уравнения, которые связывают эти числа. С этой целью выразим математическое ожидание и дисперсию через значения случайной величины x_1 и x_2. Найдём математическое ожидание $M(\xi)$: $M(\xi) = 0,2x_1 + 0,8x_2$. По условию $M(\xi) = 4,6$, следовательно, $0,2x_1 + 0,8x_2 = 4,6$. Второе уравнение составляем, исходя из условия $D(\xi) = 0,64$ и формулы нахождения дисперсии $D(\xi) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 p_i - m_\xi^2$: $0,2x_1^2 + 0,8x_2^2 - 4,6^2 = 0,64$. В результате имеем систему уравнений

$$\begin{cases} 0,2x_1 + 0,8x_2 = 4,6, \\ 0,2x_1^2 + 0,8x_2^2 = 21,8. \end{cases}$$

Решив эту систему, находим два решения: $x_1 = 3; x_2 = 5$ и $x_1 = 6,2; x_2 = 4,2$. По условию $x_2 > x_1$, поэтому задаче удовлетворяет лишь первое решение: $x_1 = 3$; $x_2 = 5$. В результате получаем следующий ряд распределения:

$\xi = x_i$	3	5
$P(\xi = x_i)$	0,2	0,8

1.3 Задания для решения на практическом занятии

1.3.1 В каждой задаче определена дискретная случайная величина ξ. Для случайной величины ξ записать ряд распределения и построить многоугольник распределения этой случайной величины. Найти функцию распределения $F(x)$ случайной величины ξ и построить её график. Вычислить математическое ожидание $M(\xi)$, моду $Mo(\xi)$, дисперсию $D(\xi)$ и среднеквадратическое отклонение σ_ξ случайной величины ξ. Найти вероятность того, что в результате опыта случайная величина ξ принимает значение не менее α, но не более β.

1.3.1.1 Клиент банка при расчётах использует кредитную карточку с вероятностью 0,4, а в остальных случаях осуществляет оплату наличными денежными средствами. Клиент банка произвёл четыре покупки. Рассматривается случайная величина ξ - число расчетов, при которых клиент банка воспользовался кредитной карточкой. Значение $\alpha = 3$, а $\beta = 4$.

1.3.1.2 Из банковской ячейки, которая содержит три слитка золота и пять слитков платины, наугад извлекают три слитка. Пусть ξ - число вынутых слитков платины. Построить ряд распределения и функцию распределения случайной величины ξ. Значение $\alpha = 2$, а $\beta = 3$.

1.3.1.3 Два предприятия поставляют продукцию в один и тот же регион. Предприятия независимо друг от друга по возможности делают две поставки в месяц в данный регион. Первое предприятие может сделать каждую поставку в данный регион с вероятностью 0,3, а второе - с вероятностью 0,4. Случайная величина ξ - общее число поставок предприятиями за месяц в регион. Значение $\alpha = 1$, а $\beta = 3$.

1.3.1.4 Охотник, имеющий шесть патронов, стреляет в цель до первого попадания, или пока не израсходует все патроны. Вероятность попадания при каждом выстреле равна 0,3. Случайная величина ξ - общее число израсходованных патронов. Значение $\alpha = 3$, а $\beta = 5$.

1.3.1.5 В партии из восьми изделий имеется одно бракованное. Чтобы его обнаружить, выбирают наугад одно изделие за другим и каждое проверяют, пока не выберут бракованное изделие. Случайная величина ξ - общее число проверенных изделий. Значение $\beta = 2$.

1.3.2 Дискретная случайная величина ξ задана рядом распределения:

$\xi = x_i$	-4	-1	2	5	7
$P(\xi = x_i)$	0,1	0,2	0,4	0,1	0,2

Построить многоугольник распределения случайной величины ξ. Найти функцию распределения случайной величины ξ и построить её график. Вычислить математическое ожидание $M(\xi)$, моду $Mo(\xi)$, медиану $Me(\xi)$, дисперсию $D(\xi)$ и среднеквадратическое отклонение σ_ξ для заданной случайной величины ξ.

1.3.3 Дискретная случайная величина ξ может принять только два возможных значения: x_1 и x_2, причём $x_2 < x_1$. Вероятность того, что случайная величина ξ примет значение x_1, равна $p_1 = 0,9$. Найти закон распределения случайной величины ξ, если известны математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение случайной величины: $M(\xi) = 3,8$, а $\sigma_\xi = 0,6$.

1.3.4 Дан перечень возможных значений дискретной случайной величины ξ: $x_1 = 1, x_2 = 3, x_3 = 5$, а также заданы дисперсия этой величины и её математическое ожидание: $D(\xi) = 2,44$, $M(\xi) = 3,6$. Найти вероятности p_1, p_2, p_3, соответствующие возможным значениям x_1, x_2, x_3 случайной величины ξ. Записать ряд распределения случайной величины ξ.

1.3.5 Известны математические ожидания независимых случайных величин ξ и η, то есть $M(\xi) = 6$ и $M(\eta) = 5$, а также математические ожидания их квадратов, то есть $M(\xi^2) = 40$ и $M(\eta^2) = 30$. Найти математическое ожидание и дисперсию случайной величины $Z = 4\xi + 5\eta$.

1.3.6 Дискретная случайная величина задана рядом распределения:

$\xi = x_i$	3	4	5	6	7
$P(\xi = x_i)$	0,2	0,3	0,1	0,25	0,15

Вычислить теоретические и центральные моменты первого, второго, третьего и четвёртого порядков случайной величины ξ.

1.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

1.4.1 В каждой задаче задана дискретная случайная величина ξ. Для случайной величины ξ построить ряд распределения и многоугольник распределения этой случайной величины. Найти функцию распределения $F(x)$ случайной величины ξ и построить её график. Вычислить математическое ожидание $M(\xi)$, моду $Mo(\xi)$, дисперсию $D(\xi)$ и среднеквадратическое отклонение σ_ξ случайной величины ξ. Найти вероятность того, что в результате опыта случайная величина ξ принимает значение не менее α, но не более β. Вычислить теоретические и центральные моменты первого, второго, третьего и четвёртого порядков случайной величины ξ.

1.4.1.1 Вероятность того, что клиент банка приобретёт облигацию пятипроцентного займа, равна 0,7. Случайная величина ξ – число облигаций пятипроцентного займа, среди наудачу приобретённых 6 облигаций. Значения параметров: $\alpha = 2$, $\beta = 4$.

1.4.1.2 У семейной пары имеются акции предприятия A и предприятия B. Муж владеет пятью акциями предприятия A и семью акциями предприятия B, жена – восемью и четырьмя акциями, соответственно. На семейном совете решено продать четыре акции, по две от каждого члена семьи. Случайная величина ξ – число выбранных на продажу акций предприятия A. Значение параметра $\alpha = 3$.

1.4.1.3 Холодильник «Атлант ХМ 4007» можно приобрести только в одном из шести имеющихся магазинов. Покупатель последовательно объезжает магазины, пока не находит холодильник указанной марки. Случайная величина ξ – число магазинов, которые посетил покупатель. Значение параметра $\beta = 4$.

1.4.1.4 Вероятность того, что купюра имеет повреждение, равна 0,2. Случайная величина ξ– число купюр имеющих повреждение, среди наудачу выбранных шести купюр. Значения параметров: $\alpha = 3$, $\beta = 5$.

1.4.1.5 Из цеха, имеющего в наличие три бетонные плиты марки ФБС 9.4.6 и девять плит марки ФБС 24.40.6, случайным образом на склад отгружают шесть плит. Случайная величина ξ – число бетонных плит марки ФБС 24.40.6, отгруженных из цеха на склад. Значение параметра $\alpha = 4$.

1.4.1.6 Трактор марки «Беларус - 892» находится только на одной из восьми из имеющихся стоянок предприятия. Для работы потребовался трактор этой марки. Инженер предприятия связывается по селектору последовательно с каждой стоянкой, пока не находит трактор указанной марки. Случайная величина ξ – число стоянок, с которыми связался инженер предприятия по селектору. Значение параметра $\beta = 5$.

1.4.1.7 Вероятность того, что банкнота имеет повреждение, равна 0,4. Случайная величина ξ– число банкнот, которые имеют повреждения, среди наудачу выбранных семи банкнот. Значения параметров: $\alpha = 4$, $\beta = 6$.

1.4.1.8 В наличие имеются девять столов, пять из которых имеют светлый цвет. Наудачу выбирают четыре стола. Случайная величина ξ – число столов, которые не имеют светлый цвет. Значение параметра $\alpha = 2$.

1.4.1.9 В партии из 10 изделий три изделия являются бракованными. Для контроля их качества случайным образом отбирают пять изделий. Случайная величина ξ – число бракованных изделий среди отобранных изделий. Значение параметра $\beta = 2$.

1.4.1.10 Каждый третий лотерейный билет, который учувствует в лотерее, является выигрышным. Случайная величина ξ– число выигрышных лотерейных билетов, среди наудачу выбранных пяти лотерейных билетов. Значения параметров: $\alpha = 1$, $\beta = 4$.

1.4.1.11 В сейфе имеется пять слитков серебра, четыре слитка золота и три слитка платины. Из сейфа наугад извлекают шесть слитков. Случайная величина ξ – число вынутых из сейфа слитков золота. Значение параметра $\alpha = 2$.

1.4.1.12 Только на одном из пяти складов имеются телевизоры марки «Горизонт 47 LCD 825 Infinitv FulHD». Для выполнения заказа на доставку телевизора этой марки дилер компании последовательно проверяет по компьютеру наличие телевизоров на складах. Случайная величина ξ – число складов, которые проверит дилер на наличие телевизоров необходимой марки. Значение параметра $\beta = 3$.

1.4.1.13 На олимпиаде по математике студентам предложили решить пять задач. Каждая задача может быть правильно решена студентом с вероятностью равной 0,4. Случайная величина ξ – число правильно решённых студентом задач. Значения параметров: $\alpha = 1$, $\beta = 4$.

1.4.1.14 В наличие имеются 4 кредитные и 6 дебетовые карты. Случайным образом выбирают пять карт. Случайная величина ξ – число выбранных кредитных карт. Значение параметра $\alpha = 1$.

1.4.1.15 Слитки платины имеются только в одном из шести банков. Клиент обращается последовательно в банки до тех пор, пока не находит банк, предлагающий на продажу слитки платины. Случайная величина ξ – число банков, в которые может обратиться клиент. Значение параметра $\beta = 3$.

1.4.1.16 На экзаменационной сессии студент получает удовлетворительную оценку по экзамену с вероятностью 0,8. Случайная величина ξ – число сданных экзаменов с удовлетворительной оценкой, если во время сессии необходимо сдать пять экзаменов. Значения параметров: $\alpha = 3$, $\beta = 4$.

1.4.1.17 В гаражном кооперативе, состоящем из 12 гаражей, находится восемь автомобилей «Opel» и четыре автомобиля «BMW». За сутки из гаражного кооператива выехало шесть автомобилей. Случайная величина ξ – число автомобилей «BMW», выехавших за сутки из гаражного кооператива. Значение параметра $\alpha = 2$.

1.4.1.18 Каждый четвёртый компьютер, который установлен на фирме, производства фирмы «Samsung». Компьютеры располагаются в семи кабинетах фирмы. Сотрудник фирмы последовательно обходит кабинеты, пока не находит компьютер указанной марки. Случайная величина ξ – число кабинетов, в которые зайдёт сотрудник фирмы. Значение параметра $\beta = 5$.

1.4.1.19 Повреждение дебетовой карты происходит с вероятностью 0,2. Случайная величина ξ – число дебетовых карт, которые имеют повреждение, среди восьми наудачу дебетовых карт. Значения параметров: $\alpha = 5$, $\beta = 7$.

1.4.1.20 Из колоды, содержащей 36 карт, берут наудачу 5 карт. Случайная величина ξ – число вынутых тузов среди взятых карт. Значение параметра $\alpha = 2$.

1.4.1.21 Мобильный телефон марки «Samsung SGH 780» можно приобрести только в одной из имеющихся семи торговых точек. Покупатель последовательно обходит торговые точки, пока не находит телефон указанной марки. Случайная величина ξ – число торговых точек, которые посетил покупатель. Значение параметра $\beta = 5$.

1.4.1.22 Вероятность того, что выпускник экономического факультета будет работать по специальности, равна 0,8. Случайная величина ξ – число выпускников, которые работают по специальности, среди наудачу выбранных восьми выпускников. Значения параметров: $\alpha = 2$, $\beta = 4$.

1.4.1.23 Вероятность того, что изделие произведённое первым станком-автоматом удовлетворяет стандарту, равна 0,9, для второго станка-автомата – 0,8, для третьего – 0,7. С каждого станка-автомата наугад берут по одному изделию. Случайная величина ξ – число изделий, удовлетворяющих стандару. Значение параметра $\alpha = 1$.

1.4.1.24 Два стрелка стреляют по мишени, делая по два выстрела. Первый стрелок попадает в мишень с вероятностью 0,6, а второй – с вероятностью 0,7. Случайная величина ξ – число попаданий в мишень обоими стрелками. Значение параметра $\beta = 2$.

1.4.1.25 Вероятность выигрыша в лотерее на один билет равна 0,2. Случайная величина ξ– число билетов лотереи, по которым можно получить выигрыш, если всего приобретено шесть билетов. Значения параметров: $\alpha = 2$, $\beta = 4$.

1.4.1.26 Каждый из двух автоматов произвёл по две детали. Вероятность допустить брак для первого автомата равна 0,2, для второго – 0,3. Случайная величина ξ – число бракованных деталей, из четырёх произведённых деталей. Значение параметра $\alpha = 2$.

1.4.1.27 В электрической цепи установлено пять одинаковых триодов, один из которых неисправен. Последовательно проводят тестирование триодов, до обнаружения неисправного. Случайная величина ξ – число протестированных триодов. Значение параметра $\beta = 3$.

1.4.1.28 Вероятность сдать экзамен на «10 баллов» для первого студента равна 0,4, а для второго – 0,7. Каждый из студентов сдал по два экзамена. Случайная величина ξ– число экзаменов, сданных обоими студентами на «10 баллов». Значения параметров: $\alpha = 2$, $\beta = 4$.

1.4.1.29 Вероятность приёма каждого из пяти сигналов равна 0,7. Случайная величина ξ – число принятых сигналов. Значение параметра $\alpha = 3$.

1.4.1.30 В партии из восьми фотоаппаратов один фотоаппарат бракованный. Чтобы его обнаружить, выбирают один фотоаппарат за другим, и каждый проверяют. Случайная величина ξ – число проверенных фотоаппаратов. Значение параметра $\beta = 5$.

2 НЕПРЕРЫВНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ
(практическое занятие № 12 в третьем семестре)

Содержание: непрерывные случайные величины (НСВ), функция распределения, плотность распределения вероятностей, числовые характеристики НСВ (математическое ожидание, мода, медиана, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, начальные и центральные моменты *k*-го порядка).

2.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Если множество возможных значений случайной величины ξ несчётно, то возможные значения этой случайной величины целиком заполняют некоторый интервал. Такие случайные величины называются непрерывными.

Определение 2.1.1 Функция $F(x)$, определённая на множестве действительных чисел, называется *абсолютно непрерывной*, если существует такая функция f, что для любого действительного числа x выполняется равенство

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt\,. \tag{2.1.1}$$

Определение 2.1.2 Случайная величина ξ называется *абсолютно непрерывной*, если её функция распределения вероятностей $F(x)$ является абсолютно непрерывной функцией.

Функцию $f(x)$ называют *плотностью распределения вероятностей*, а её график – кривой распределения.

Так как функция распределения является неубывающей и кусочно-непрерывной, то плотность распределения обладает следующими свойствами:

а) из того, что $F(x_2) \ge F(x_1)$ $\forall x_2 > x_1$, следует $f(x) \ge 0$;

б) функцию распределения можно дифференцировать, за исключением, быть может, конечного или счётного числа точек: $F'(x) = \left(\int_{-\infty}^{x} f(t)dt \right)' = f(x)$.

С другой стороны, если для некоторой функции $f(x)$ выполняются условия:

1) $f(x) \ge 0$;

2) $f(x)$ - непрерывна или кусочно-непрерывна;

3) $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$,

то функция распределения $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$ является абсолютно непрерывной функцией и, следовательно, функция $f(x)$ - плотность распределения.

Первое условие означает, что кривая распределения располагается выше оси Ox, второе - $f(x)$ может быть либо непрерывной, либо состоять из частей непрерывных функций, третье – площадь под кривой распределения численно равна единице.

Определение 2.1.3 *Плотностью распределения вероятностей* непрерывной случайной величины ξ в произвольно фиксированной точке x называется предел отношения вероятности попадания этой случайной величины в интервал

$[x; x+\Delta x)$ к величине этого интервала при стремлении Δx к нулю, и если этот предел существует и конечен, то есть

$$f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{P\left(x \le \xi < x + \Delta x\right)}{\Delta x}.$$

Смысл плотности распределения вероятностей $f(x)$ состоит в том, что она указывает на то, как часто группируются возможные значения случайной величины ξ в некоторой окрестности точки x.

Функция распределения $F(x)$ выражается через плотность распределения вероятностей $f(x)$ формулой

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx. \tag{2.1.2}$$

Плотность распределения вероятностей $f(x)$ выражается через функцию распределения $F(x)$, если она дифференцируема, формулой

$$f(x) = F'(x). \tag{2.1.3}$$

Для плотности распределения вероятностей справедливо *условие нормировки:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1. \tag{2.1.4}$$

Так как, функция распределения вероятностей является непрерывной функцией, то предел функции в точке равен значению функции в этой точке, а, следовательно, согласно свойствам функции распределения, вероятность принятия случайной величиной конкретного значения равна нулю, то есть $P\left(\xi = \alpha\right) = 0$. Следовательно, справедлива *формула нахождения вероятности попадания непрерывной случайной величины в заданный интервал*.

$$\begin{gathered} P(\alpha < \xi < \beta) = P(\alpha \le \xi < \beta) = P(\alpha < \xi \le \beta) = P(\alpha \le \xi \le \beta) = \\ = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = F(\beta) - F(\alpha). \end{gathered} \tag{2.1.5}$$

Таким образом, зная функцию распределения непрерывной случайной величины или плотность распределения вероятностей можно вычислить вероятности произвольных событий. Указание функции распределения или плотности распределения вероятностей являются математическими моделями эксперимента. Эти модели называются законами распределения случайных величин.

Рассмотрим числовые характеристики непрерывных случайных величин. Определения и свойства числовых характеристик для произвольных случайных величин приведены в теме № 1 «Дискретные случайные величины».

Определение 2.1.4 *Математическим ожиданием непрерывной случайной величины* ξ, для которой функция $f(x)$ является плотностью распределения вероятностей, называется величина несобственного интеграла

$$M(\xi) = m_\xi = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, f(x)\, dx, \qquad (2.1.6)$$

если он сходится.

Определение 2.1.5 *Модой* $Mo(\xi)$ *непрерывной случайной величины* ξ называется такое её значение, при котором плотность распределения вероятностей имеет максимум.

Определение 2.1.6 *Медианой* $Me(\xi)$ *непрерывной случайной величины* ξ называется такое её значение, относительно которого равновероятно получение большего или меньшего значения случайной величины, то есть $P\left(\xi < Me(\xi)\right) = P\left(\xi > Me(\xi)\right)$.

Значение медианы можно определить из равенства $\int\limits_{-\infty}^{Me(\xi)} f(x)dx = \frac{1}{2}$.

Определение 2.1.7 *Дисперсией непрерывной случайной величины* ξ, для которой функция $f(x)$ является плотностью распределения вероятностей, называется величина несобственного интеграла

$$D(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(x - m_\xi\right)^2 f(x)\, dx, \qquad (2.1.7)$$

если он сходится.

Из равенства (1.1.8) следует ещё одна формула для вычисления дисперсии:

$$D(\xi) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - m_\xi^2. \qquad (2.1.8)$$

Определение 2.1.8 Положительное значение квадратного корня из дисперсии называется *средним квадратическим отклонением или стандартом* случайной величины ξ и определяется формулой

$$\sigma_\xi = \sigma(\xi) = \sqrt{D(\xi)}. \qquad (2.1.9)$$

Размах R и коэффициент вариации для непрерывных случайных величин определяются по формулам, которые указаны на практическом занятии № 11.

Для непрерывной случайной величины *начальный момент k-го порядка* выражается несобственным интегралом:

$$\nu_k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx, \qquad (2.1.10)$$

если он сходится.

Для непрерывной случайной величины *центральный момент k-го порядка* находится по формуле

$$\mu_k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(x - m_\xi\right)^k f(x)\, dx, \qquad (2.1.11)$$

если он сходится.

Центральный момент первого порядка всегда равен нулю, второго порядка является дисперсией случайной величины ξ: $\mu_2 = D(\xi) = \nu_2 - \nu_1^2$. Как правило, для описания характерных особенностей вероятностной модели используются моменты не выше четвёртого порядка. Центральный момент третьего порядка определяется по формуле $\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_2\nu_1 + 2\nu_1^3$, а четвёртого - $\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - \nu_1^4$.

Центральный момент третьего порядка μ_3 служит характеристикой асимметрии («скошенности») распределения. Если случайная величина ξ распределена симметрично относительно своего математического ожидания, то третий центральный момент $\mu_3 = M\left(\left(\xi - m_\xi\right)^3\right) = 0$.

Центральный момент четвёртого порядка μ_4 служит характеристикой островершинности или плосковершинности распределения. Ввиду того, что эти центральные моменты имеют различные размерности, удобнее пользоваться безразмерными коэффициентами: $A = \dfrac{\mu_3}{\sigma^3}$ - *коэффициент асимметрии*; $B = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4}$ - *коэффициент плосковершинности*.

Так как для наиболее распространённого нормального закона распределения $\mu_4 / \sigma^4 = 3$, то в качестве характеристики островершинности используют безразмерный коэффициент, называемый *эксцессом* $Э = \dfrac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$.

Кроме рассмотренных начальных и центральных моментов, на практике иногда применяются так называемые *абсолютные начальные моменты* $\alpha_k = M\left(|\xi|^k\right)$ и *абсолютные центральные моменты* $\beta_k = M\left(\left|\xi - m_\xi\right|^k\right)$.

2.2 Примеры решения типовых задач

2.2.1 Случайная величины ξ имеет плотность распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} a\cos x, \text{ если } 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}; \\ 0, \quad \text{если } x < 0 \text{ или } x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Определить коэффициент a. Найти функцию распределения $F(x)$. Вычислить математическое ожидание $M(\xi)$, дисперсию $D(\xi)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(\xi)$ и вероятность неравенства $\dfrac{\pi}{6} < \xi < \dfrac{\pi}{2}$.

Решение. Для определения параметра a воспользуемся условием нормировки (2.1.4).

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1;$$

$$\int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\pi/2} a\cos x\,dx + \int_{\pi/2}^{+\infty} 0\,dx = 1; \quad a\sin x\Big|_0^{\pi/2} = 1; \quad a\left(\sin\frac{\pi}{2} - \sin 0\right) = 1; \quad a = 1.$$

Следовательно, плотность распределения задана выражением

$$f(x) = \begin{cases} \cos x,\ \textit{если}\ 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}; \\ 0\,,\ \textit{если}\ x < 0\ \textit{или}\ x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Найдём функцию распределения по формуле (2.1.2).

Если $x < 0$, то $F(x) = P(\xi < x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{x} 0\,dx = 0$.

Если $0 \le x \le \pi/2$, то

$$F(x) = P(\xi < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{x} \cos x\,dx = \sin x\Big|_0^x = \sin x\,.$$

Если $x > \pi/2$, то

$$F(x) = P(\xi < x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{\pi/2} \cos x\,dx + \int_{\pi/2}^{x} 0\,dx = \sin x\Big|_0^{\pi/2} = 1\,.$$

Функция распределения случайной величины ξ имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0\,,\ \textit{если}\ x < 0; \\ \sin x,\ \textit{если}\ 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}; \\ 1\,,\ \textit{если}\ x > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Вычислим математическое ожидание по формуле (2.1.6).

$$M(\xi) = m_\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x)\,dx = \int_{0}^{\pi/2} x\cos x\,dx = \left(x\sin x + \cos x\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

Для вычисления интеграла использовалась формула интегрирования по частям. Вычислим дисперсию по формуле (2.1.8).

$$D(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - m_\xi^2 = \int_{0}^{\pi/2} x^2\cos x\,dx - \left(\frac{\pi - 2}{2}\right)^2 = \left(2x\cos x + (x^2 - 2)\sin x\right)\Big|_0^{\pi/2} -$$

$$-\left(\frac{\pi-2}{2}\right)^2=\pi-3.$$

Для вычисления интеграла дважды использовалась формула интегрирования по частям. Вычислим среднее квадратическое отклонение по формуле (2.1.9): $\sigma_\xi=\sigma(\xi)=\sqrt{D(\xi)}=\sqrt{\pi-3}$.

Для вычисления вероятности неравенства $\frac{\pi}{6}<\xi<\frac{\pi}{2}$ воспользуемся формулой (2.1.5).

$$P\left(\frac{\pi}{6}<\xi<\frac{\pi}{2}\right)=\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2}\cos x\,dx=F\left(\frac{\pi}{2}\right)-F\left(\frac{\pi}{6}\right)=\sin\frac{\pi}{2}-\sin\frac{\pi}{6}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

2.2.2 Функция распределения случайной величины ξ имеет вид

$$F(x)=\begin{cases}0,\ \textit{если}\ x<0;\\ x^3,\ \textit{если}\ 0\le x\le 1;\\ 1,\ \textit{если}\ x>1.\end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей $f(x)$, математическое ожидание $M(\xi)$, дисперсию $D(\xi)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(\xi)$ и вероятность попадания случайной величины ξ в отрезок $[0;0,5]$.

Решение. Находим плотность распределения вероятностей по формуле (2.1.3).

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}0,\ \textit{если}\ x<0;\\ 3x^2,\ \textit{если}\ 0\le x\le 1;\\ 0,\ \textit{если}\ x>1.\end{cases}$$

Вычислим математическое ожидание по формуле (2.1.6).

$$M(\xi)=m_\xi=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x\,f(x)\,dx=\int\limits_0^1 x\cdot 3x^2\,dx=\int\limits_0^1 3x^3dx=\frac{3}{4}x^4\bigg|_0^1=\frac{3}{4}.$$

Вычислим дисперсию по формуле (2.1.8).

$$D(\xi)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx-m_\xi^2=\int\limits_0^1 x^2\cdot 3x^2\,dx-\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{3}{5}x^5\bigg|_0^1-\frac{9}{16}=\frac{3}{5}-\frac{9}{16}=\frac{3}{80}.$$

Вычислим среднее квадратическое отклонение по формуле (2.1.9): $\sigma_\xi=\sigma(\xi)=\sqrt{D(\xi)}=\sqrt{\frac{3}{80}}\approx 0{,}194$.

Для вычисления вероятности попадания случайной величины ξ в отрезок $[0;0,5]$ воспользуемся формулой (2.1.5).

$$P(0\le\xi\le 0{,}5)=\int\limits_0^{0,5}3x^2\,dx=F(0{,}5)-F(0)=0{,}5^3-0^3=0{,}125.$$

2.2.3 Случайная величины ξ имеет плотность распределения вероятностей

$$f(x)=\begin{cases} 3\cos 3x, \textit{ если } 0\le x\le \dfrac{\pi}{6}; \\ 0, \textit{ если } x<0 \textit{ или } x>\dfrac{\pi}{6}. \end{cases}$$

Найти моду $Mo(\xi)$ и медиану $Me(\xi)$ случайной величины ξ.

Решение. Для определения моды случайной величины найдём максимум плотности распределения на отрезке $\left[0;\dfrac{\pi}{6}\right]$. Находим производную плотности: $f'(x)=\left(3\cos 3x\right)'=-9\sin 3x=0$, $x=\dfrac{\pi n}{3}, \forall n\in \mathbf{Z}$. Если $n=0$, то $x=0\in\left[0;\dfrac{\pi}{6}\right]$, а это конец отрезка. При других n, критические точки не принадлежит заданному отрезку. Значения плотности вероятности на концах отрезка: $f(0)=3$, $f(\pi/6)=0$. Следовательно, мода случайной величины равна $Mo(\xi)=3$.

Найдём медиану $Me(\xi)=m_e$, исходя из определения медианы:

$$P\left(\xi<m_e\right)=P\left(\xi>m_e\right),$$

или, что то же самое, $2P\left(\xi<m_e\right)=1$. Учитывая, что по условию возможные значения случайной величины положительны, перепишем это равенство в виде:

$$P\left(\xi<m_e\right)=0{,}5,$$

или

$$\int_0^{m_e} 3\cos 3x\,dx=\sin 3m_e=0{,}5.$$

Из последнего равенства, имеем $3m_e=\arcsin\dfrac{1}{2}=\dfrac{\pi}{6}$. Следовательно, искомая медиана равна $m_e=\dfrac{\pi}{18}$.

2.2.4 Случайная величины ξ имеет плотность распределения вероятностей

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+8x-11, \textit{ если } 2<x<6; \\ 0, \textit{ если } x\le 2 \textit{ или } x\ge 6. \end{cases}$$

Найти моду $Mo(\xi)$, математическое ожидание $M(\xi)$ и медиану $Me(\xi)$ случайной величины ξ.

Решение. Для определения моды случайной величины найдём максимум плотности распределения. Преобразуем выражение для плотности распределения вероятностей:

$$f(x)=-x^2+8x-16+5 \text{ или } f(x)=5-(x-4)^2.$$

Следовательно, $f(x) \le 5$ и плотность распределения вероятностей достигает своего максимального значения, которое равно 5, при значении переменной $x = 4$. Тогда мода случайной величины равна $Mo(\xi) = 4$. Это же значение моды можно получить, используя методы дифференциального исчисления.

Так как кривая распределения симметрична относительно прямой $x = 4$, то математическое ожидание равно $M(\xi) = 4$ и медиана так же принимает значение $Me(\xi) = 4$.

2.2.5 Случайная величины ξ имеет плотность распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} x, \textit{если } 0 < x < 1; \\ 0, \textit{если } x \le 0 \textit{ или } x \ge 1. \end{cases}$$

Найти начальные и центральные моменты первого, второго, третьего и четвёртого порядков.

Решение. Найдём начальные моменты по формуле $\nu_k = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)dx$. Учитывая, что на интервалах $(-\infty;0]$ и $[1;+\infty)$ значения плотности распределения вероятностей равны нулю, то формула нахождения начальных моментов принимает вид:

$$\nu_k = \int\limits_0^1 x^k f(x)dx.$$

$$\nu_1 = \int\limits_0^1 x^1 \cdot x\,dx = \int\limits_0^1 x^2\,dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

$$\nu_2 = \int\limits_0^1 x^2 \cdot x\,dx = \int\limits_0^1 x^3\,dx = \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^1 = \frac{1}{4}.$$

$$\nu_3 = \int\limits_0^1 x^3 \cdot x\,dx = \int\limits_0^1 x^4\,dx = \left.\frac{x^5}{5}\right|_0^1 = \frac{1}{5}.$$

$$\nu_4 = \int\limits_0^1 x^4 \cdot x\,dx = \int\limits_0^1 x^5\,dx = \left.\frac{x^6}{6}\right|_0^1 = \frac{1}{6}$$

Найдём центральные моменты. Центральный момент первого порядка любой случайной величины равен нулю. Для вычисления центральных моментов более высокого порядка воспользуемся формулами, выражающими центральные моменты через начальные моменты случайной величины.

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2 = \frac{1}{4} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{9} = \frac{5}{36}.$$

$$\mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3 = \frac{1}{5} - 3\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4} + 2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{5} - \frac{1}{4} + \frac{2}{27} = \frac{13}{540}.$$

$$\mu_4 = \nu_4 - 4\nu_3\nu_1 + 6\nu_2\nu_1^2 - 3\nu_1^4 = \frac{1}{6} - 4\cdot\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3} + 6\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{9} - 3\cdot\frac{1}{81} = \frac{14}{135}.$$

2.3 Задания для решения на практическом занятии

2.3.1 Случайная величина ξ имеет плотность распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} a\cdot\sin x, \textit{если } 0 \le x \le \pi; \\ \quad 0 \ , \textit{если } x < 0 \textit{ или } x > \pi. \end{cases}$$

Определить коэффициент a. Найти функцию распределения $F(x)$. Построить графики плотности распределения вероятностей и функции распределения случайной величины. Вычислить математическое ожидание $M(\xi)$, дисперсию $D(\xi)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(\xi)$ и вероятность неравенства $0 < \xi < \dfrac{\pi}{4}$.

2.3.2 Случайная величина ξ имеет плотность распределения вероятностей

$$f(x) = \begin{cases} a\cdot\cos^2 x, \textit{если } |x| \le \dfrac{\pi}{2}; \\ \quad 0 \ , \ \textit{если } |x| > \dfrac{\pi}{2}. \end{cases}$$

Определить коэффициент a. Найти функцию распределения $F(x)$. Построить графики плотности распределения вероятностей и функции распределения случайной величины. Вычислить математическое ожидание $M(\xi)$, дисперсию $D(\xi)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(\xi)$. Найти вероятность того, что в двух независимых испытаниях случайная величина ξ будет больше $\dfrac{\pi}{4}$.

2.3.3 Плотность распределения вероятностей $f(x)$ случайной величины ξ определяется формулой (распределение Лапласа) $f(x) = a\cdot e^{-|x|}$. Определить коэффициент a. Найти функцию распределения $F(x)$. Построить графики плотности распределения вероятностей и функции распределения случайной величины. Вычислить математическое ожидание $M(\xi)$, дисперсию $D(\xi)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(\xi)$.

2.3.4 Плотность распределения вероятностей $f(x)$ случайной величины ξ определяется формулой (распределение Коши) $f(x)=\dfrac{a}{1+x^2}$. Определить коэффициент a. Найти функцию распределения $F(x)$. Построить графики плотности распределения вероятностей и функции распределения случайной величины. Вычислить математическое ожидание $M(\xi)$, дисперсию $D(\xi)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(\xi)$, моду $Mo(\xi)$ и медиану $Me(\xi)$ случайной величины ξ. Найти вероятность неравенства $\xi>\sqrt{3}$.

2.3.5 Случайная величина ξ имеет плотность распределения вероятностей

$$f(x)=\begin{cases} a\cdot x^2, \textit{ если } 0\le x\le 2; \\ \quad 0\ , \quad \textit{если } x<0 \textit{ или } x>2. \end{cases}$$

Определить коэффициент a. Найти функцию распределения $F(x)$. Построить графики плотности распределения вероятностей и функции распределения случайной величины. Вычислить математическое ожидание $M(\xi)$, дисперсию $D(\xi)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(\xi)$. Найти вероятность того, что в результате опыта случайная величина ξ отклонится от своего математического ожидания не более чем на значение равное $0,5$.

2.3.6 Функция распределения случайной величины ξ имеет вид

$$F(x)=\begin{cases} 0, \textit{ если } x<0; \\ \dfrac{x^2-x}{2}, \textit{ если } 0\le x\le 2; \\ \ 1, \textit{ если } x>2. \end{cases}$$

Найти плотность распределения вероятностей $f(x)$ случайной величины ξ. Построить графики плотности распределения вероятностей и функции распределения случайной величины ξ. Вычислить математическое ожидание $M(\xi)$, дисперсию $D(\xi)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(\xi)$ моду $Mo(\xi)$ и медиану $Me(\xi)$ случайной величины ξ. Найти вероятность попадания случайной величины ξ на отрезок $[0,5;1,5]$.

2.3.7 Функция распределения случайной величины ξ имеет вид (закон арксинуса)

$$F(x)=\begin{cases} 0, & \textit{если } x<-1; \\ a+b\cdot\arcsin x, & \textit{если } -1\le x\le 1; \\ 1, & \textit{если } x>1. \end{cases}$$

Определить коэффициенты a и b. Найти плотность распределения вероятностей $f(x)$ случайной величины ξ. Построить графики плотности распределения вероятностей и функции распределения случайной величины ξ. Вычислить математическое ожидание $M(\xi)$, дисперсию $D(\xi)$, среднее квадратическое отклонение $\sigma(\xi)$, Найти вероятность того, что случайная величина ξ примет значение не меньше 0,5, но не более 1.

2.3.8 Случайная величина ξ имеет плотность распределения вероятностей

$$f(x)=\begin{cases} 2\cos 2x, \text{ }если\text{ } 0\le x\le \dfrac{\pi}{4}; \\ 0\text{ }, \text{ }если\text{ } x<0 \text{ }или\text{ } x>\dfrac{\pi}{4}. \end{cases}$$

Найти моду $Mo(\xi)$ и медиану $Me(\xi)$ случайной величины ξ. Найти вероятность попадания случайной величины ξ на отрезок $\left[\dfrac{\pi}{8};\dfrac{3\pi}{8}\right]$.

2.3.9 Случайная величина ξ имеет плотность распределения вероятностей

$$f(x)=\begin{cases} -x^2+6x-5, \text{ }если\text{ } 1<x<5; \\ 0\text{ }, \text{ }если\text{ } x\le 1 \text{ }или\text{ } x\ge 5. \end{cases}$$

Найти моду $Mo(\xi)$, математическое ожидание $M(\xi)$ и медиану $Me(\xi)$ случайной величины ξ.

2.3.10Доказать, что для любой непрерывной случайной величины центральный момент первого порядка равен нулю.

2.3.11Случайная величина ξ имеет плотность распределения вероятностей

$$f(x)=\begin{cases} 2x, \text{ }если\text{ } 0<x<2; \\ 0\text{ }, \text{ }если\text{ } x\le 0 \text{ }или\text{ } x\ge 2. \end{cases}$$

Найти начальные и центральные моменты первого, второго, третьего и четвёртого порядков.

2.3.12Случайная величина ξ имеет плотность распределения вероятностей

$$f(x)=\begin{cases} 3x^2, \text{ }если\text{ } 1<x<2; \\ 0\text{ }, \text{ }если\text{ } x\le 1 \text{ }или\text{ } x\ge 2. \end{cases}$$

Найти начальные и центральные моменты первого, второго, третьего и четвёртого порядков.

2.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

2.4.1 В каждой задаче варианта задана плотность распределения вероятностей $f(x)$ непрерывной случайной величина ξ. Определить постоянную величину a. Найти функцию распределения $F(x)$ случайной величины ξ. Построить график функции распределения и плотности распределения вероятностей случайной величины ξ. Вычислить математическое ожидание $M(\xi)$, моду $Mo(\xi)$, медиану $Me(\xi)$, дисперсию $D(\xi)$ и среднеквадратическое отклонение σ_ξ случайной величины. Найти вероятность того, что в результате, по крайней мере, в одном из трёх независимых испытаний случайная величина ξ примет значение не менее α, но не более β.

2.4.1.1

$$f(x)=\begin{cases} a\cdot\cos^2 2x, & |x|\le\dfrac{\pi}{4};\\ 0, & |x|>\dfrac{\pi}{4}; \end{cases}$$

$$\alpha=\frac{\pi}{6},\ \beta=\frac{\pi}{3}.$$

2.4.1.2

$$f(x)=\begin{cases} a\cdot\sin^2 2x, & |x|\le\dfrac{\pi}{4};\\ 0, & |x|>\dfrac{\pi}{4}; \end{cases}$$

$$\alpha=0,\ \beta=\frac{\pi}{4}.$$

2.4.1.3

$$f(x)=\begin{cases} a\cdot\dfrac{2^x}{\ln 2}, & |x|\le 2;\\ 0, & |x|>2; \end{cases}$$

$$\alpha=0,\ \beta=1.$$

2.4.1.4

$$f(x)=\begin{cases} a\cdot\cos^2 3x, & |x|\le\dfrac{\pi}{6};\\ 0, & |x|>\dfrac{\pi}{6}; \end{cases}$$

$$\alpha=\frac{\pi}{12},\ \beta=\frac{\pi}{4}.$$

2.4.1.5

$$f(x)=\begin{cases} a\cdot\sin^2 3x, & |x|\le\dfrac{\pi}{6};\\ 0, & |x|>\dfrac{\pi}{6}; \end{cases}$$

$$\alpha=-\frac{\pi}{12},\ \beta=\frac{\pi}{12}.$$

2.4.1.6

$$f(x)=\begin{cases} a\cdot\dfrac{3^x}{\ln 3}, & |x|\le 1;\\ 0, & |x|>1; \end{cases}$$

$$\alpha=-0,5,\ \beta=0,5.$$

2.4.1.7

$$f(x)=\begin{cases} a\cdot\cos^2\dfrac{x}{2}, & |x|\le\pi;\\ 0, & |x|>\pi; \end{cases}$$

$$\alpha=\frac{\pi}{4},\ \beta=\frac{\pi}{3}.$$

2.4.1.8

$$f(x)=\begin{cases} a\cdot\sin^2\dfrac{x}{2}, & |x|\le\pi;\\ 0, & |x|>\pi; \end{cases}$$

$$\alpha=-\frac{\pi}{6},\ \beta=0.$$

2.4.1.9

$$f(x)=\begin{cases} a\cdot\dfrac{4^x}{\ln 4}, & |x|\le 2;\\ 0, & |x|>2; \end{cases}$$

$$\alpha=-1,\ \beta=1.$$

2.4.1.10

$$f(x)=\begin{cases} a\cdot\cos^2\dfrac{x}{4}, & |x|\le 2\pi;\\ 0, & |x|>2\pi; \end{cases}$$

$$\alpha=\frac{\pi}{4},\ \beta=\frac{3\pi}{4}.$$

2.4.1.11

$$f(x)=\begin{cases} a\cdot\sin^2\dfrac{x}{4}, & |x|\le 4\pi;\\ 0, & |x|>4\pi; \end{cases}$$

$$\alpha=-\pi,\ \beta=2\pi.$$

2.4.1.12

$$f(x)=\begin{cases} a\cdot\dfrac{5^x}{\ln 5}, & |x|\le 1;\\ 0, & |x|>1; \end{cases}$$

$$\alpha=-3,\ \beta=0.$$

2.4.1.13

$$f(x)=\begin{cases} a\cdot\cos^2 4x, & |x|\le \dfrac{\pi}{8};\\ 0, & |x|>\dfrac{\pi}{8}; \end{cases}$$

$$\alpha=-\frac{\pi}{16},\ \beta=\frac{\pi}{16}.$$

2.4.1.14

$$f(x)=\begin{cases} a\cdot\sin^2 4x, & |x|\le \dfrac{\pi}{8};\\ 0, & |x|>\dfrac{\pi}{8}; \end{cases}$$

$$\alpha=0,\ \beta=\frac{\pi}{16}.$$

2.4.1.15

$$f(x)=\begin{cases} a\cdot\dfrac{6^x}{\ln 6}, & |x|\le 3;\\ 0, & |x|>3; \end{cases}$$

$$\alpha=-2,\ \beta=1.$$

2.4.1.16

$$f(x)=\begin{cases} a\cdot\cos^2\dfrac{x}{6}, & |x|\le 3\pi;\\ 0, & |x|>3\pi; \end{cases}$$

$$\alpha=\pi,\ \beta=2\pi.$$

2.4.1.17

$$f(x)=\begin{cases} a\cdot\sin^2\dfrac{x}{6}, & |x|\le 3\pi;\\ 0, & |x|>3\pi; \end{cases}$$

$$\alpha=-\pi,\ \beta=3\pi.$$

2.4.1.18

$$f(x)=\begin{cases} a\cdot\dfrac{7^x}{\ln 7}, & |x|\le 2;\\ 0, & |x|>2; \end{cases}$$

$$\alpha=-1,\ \beta=2.$$

2.4.1.19

$$f(x)=\begin{cases} a\cdot\cos^2 5x, & |x|\le \dfrac{\pi}{10};\\ 0, & |x|>\dfrac{\pi}{10}; \end{cases}$$

$$\alpha=-\frac{\pi}{20},\ \beta=0.$$

2.4.1.20

$$f(x)=\begin{cases} a\cdot\sin^2 5x, & |x|\le \dfrac{\pi}{10};\\ 0, & |x|>\dfrac{\pi}{10}; \end{cases}$$

$$\alpha=-\frac{\pi}{10},\ \beta=\frac{\pi}{20}.$$

2.4.1.21
$$f(x)=\begin{cases} a\cdot\dfrac{8^x}{\ln 8}, & |x|\le 1;\\ 0, & |x|>1;\end{cases}$$
$$\alpha=0,\ \beta=1.$$

2.4.1.22
$$f(x)=\begin{cases} a\cdot\cos^2\dfrac{x}{8}, & |x|\le 4\pi;\\ 0, & |x|>4\pi;\end{cases}$$
$$\alpha=2\pi,\ \beta=3\pi.$$

2.4.1.23
$$f(x)=\begin{cases} a\cdot\sin^2\dfrac{x}{8}, & |x|\le 4\pi;\\ 0, & |x|>4\pi;\end{cases}$$
$$\alpha=-3\pi,\ \beta=-2\pi.$$

2.4.1.24
$$f(x)=\begin{cases} a\cdot\dfrac{9^x}{\ln 9}, & |x|\le 2;\\ 0, & |x|>2;\end{cases}$$
$$\alpha=-1,\ \beta=0.$$

2.4.1.25
$$f(x)=\begin{cases} a\cdot\cos^2 6x, & |x|\le\dfrac{\pi}{12};\\ 0, & |x|>\dfrac{\pi}{12};\end{cases}$$
$$\alpha=-\frac{\pi}{24},\ \beta=\frac{\pi}{24}.$$

2.4.1.26
$$f(x)=\begin{cases} a\cdot\sin^2 6x, & |x|\le\dfrac{\pi}{12};\\ 0, & |x|>\dfrac{\pi}{12};\end{cases}$$
$$\alpha=-\frac{\pi}{36},\ \beta=\frac{\pi}{36}.$$

2.4.1.27
$$f(x)=\begin{cases} a\cdot\dfrac{10^x}{\ln 10}, & \text{если } |x|\le 2;\\ 0, & \text{если } |x|>2;\end{cases}$$
$$\alpha=-1,\ \beta=3.$$

2.4.1.28
$$f(x)=\begin{cases} a\cdot\cos^2\dfrac{x}{10}, & |x|\le 5\pi;\\ 0, & |x|>5\pi;\end{cases}$$
$$\alpha=-2\pi,\ \beta=\pi.$$

2.4.1.29
$$f(x)=\begin{cases} a\cdot\sin^2\dfrac{x}{10}, & |x|\le 5\pi;\\ 0, & |x|>5\pi;\end{cases}$$
$$\alpha=\pi,\ \beta=4\pi.$$

2.4.1.30
$$f(x)=\begin{cases} a\cdot\dfrac{12^x}{\ln 12}, & |x|\le 1;\\ 0, & |x|>1;\end{cases}$$
$$\alpha=-1,\ \beta=4.$$

3 ОСНОВНЫЕ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДИСКРЕТНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН (практическое занятие № 13 в третьем семестре)

Содержание: одноточечное (вырожденное) распределение, распределение Бернулли (двухточечное), биномиальное распределение, геометрическое распределение, гипергеометрическое распределение, распределение Пуассона.

3.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Закон распределения случайной величины представляет собой математическую модель вероятностного эксперимента. Рассмотрим наиболее распространённые модели дискретных распределений.

3.1.1 Одноточечное (вырожденное) распределение

Случайная величина ξ имеет одноточечное (вырожденное) распределение, если она принимает только одно значение x_0 с вероятностью $P(\xi = x_0) = 1$.

Функция распределения $F(x) = \begin{cases} 0, \text{ если } x \le x_0; \\ 1, \text{ если } x > x_0. \end{cases}$

Математическое ожидание $M(\xi) = x_0$.

Дисперсия $D(\xi) = 0$.

Среднее квадратическое отклонение $\sigma_\xi = 0$.

3.1.2 Распределение Бернулли (двухточечное)

Случайная величина ξ имеет двухточечное распределение, если она принимает только два значения x_1 и x_2 с вероятностями: $P(\xi = x_1) = p_1$; $P(\xi = x_2) = p_2$; $p_1 + p_2 = 1$.

Обычно в теории вероятностей рассматривают случайную величину ξ, принимающую два значения $\xi = 1$(«успех») и $\xi = 0$(«неудача») с вероятностями: $P(\xi = 1) = p$; $P(\xi = 0) = q = 1 - p$; $p + q = 1$. Распределение такой случайной величины называется распределением Бернулли.

Ряд распределения запишем в виде таблицы:

$\xi = x_i$	0	1
$P(\xi = x_i)$	$1-p$	p

Функция распределения $F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \le 0; \\ 1-p, & \text{если } 0 < x \le 1; \\ 1, & \text{если } x > 1. \end{cases}$

Математическое ожидание $M(\xi) = p$.

Дисперсия $D(\xi) = pq$.

Среднее квадратическое отклонение $\sigma_\xi = \sqrt{pq}$.

3.1.3 Биномиальное распределение

Биномиальное распределение является математической моделью независимых экспериментов, которые повторяются при одних и тех же условиях:

а) число экспериментов должно быть конечным (будем считать, что число экспериментов равно числу n);

б) каждый эксперимент должен закончиться одним из взаимоисключающих друг друга исходов, то есть «успех» или «неудача»;

в) эксперименты должны быть независимы друг от друга, то есть наступления события в каждом отдельно взятом эксперименте не зависит от того, какие результаты наступят в других экспериментах;

г) вероятность p наступления события, то есть «успех», и вероятность $q = 1 - p$ противоположного события, то есть «неудача», в каждом отдельно взятом испытании постоянна.

Данные условия называются схемой Бернулли.

Вероятность того, что случайная величина ξ примет конкретное значение x_0 определяется по формуле

$$P\left(\xi = x_0\right) = C_n^{x_0} p^{x_0} (1-p)^{n-x_0}. \qquad (3.1.3.1)$$

Функция распределения $F(x) = P\left(\xi < x_i\right) = \sum\limits_{x_i < x} C_n^{x_i} p^{x_i} q^{n-x_i}$.

Математическое ожидание $M(\xi) = np$.

Дисперсия $D(\xi) = npq$.

Среднее квадратическое отклонение $\sigma_\xi = \sqrt{npq}$.

Биномиальное распределение (этот термин был впервые использован в работе Yule, 1911 г.) возникает в тех случаях, когда ставится вопрос: сколько раз происходит некоторое событие в серии из определенного числа независимых наблюдений (опытов), выполняемых в одинаковых условиях. Биномиальное распределение возникло из наблюдений за простейшей азартной игрой: бросание правильной монеты. Во многих ситуациях эта модель служит хорошим первым приближением для более сложных игр и случайных процессов, возникающих при игре на бирже. Необходимо отметить, что существенные черты многих сложных процессов можно понять, исходя из простой биномиальной модели.

3.1.4 Геометрическое распределение

Пусть случайная величина ξ - число экспериментов по схеме Бернулли (вероятность наступления события в отдельно взятом испытании равна p, а не наступление этого события равна $q = 1 - p$) до наступления первого успеха. В условиях данной схемы первый успех наступит при выполнении условий:

а) первые $(k-1)$ эксперименты закончились неудачей с вероятностью $\left(1-p\right)^{k-1}$;

б) k-ое испытание закончилось успехом с вероятностью p.

Геометрическое распределение, определяющее вероятность того, что в условиях схемы Бернулли, событие наступит ровно в k-ом испытании равно

$$P\left(\xi = k\right) = pq^{k-1}. \qquad (3.1.4.1)$$

Функция распределения $F(x) = P\left(\xi < x_i\right) = \sum\limits_{x_i < x} pq^{x_i - 1}$.

Математическое ожидание $M(\xi) = 1/p$.

Дисперсия $D(\xi) = \dfrac{1-p}{p^2}$.

Среднее квадратическое отклонение $\sigma_\xi = \dfrac{\sqrt{1-p}}{p}$.

Геометрический закон распределения имеет место в таких науках как микробиология, генетика, физика и экономика. На практике эксперимент или опыт осуществляют до первого появления успешной события A. Число проведенных попыток будет целочисленной случайной величиной *1,2,...*

3.1.5 Гипергеометрическое распределение

Гипергеометрическое распределение используется в теории статистического контроля качества. Используя это распределение, определяется доля качественных деталей в выборке из контролируемой партии.

Предположим, что в контролируемой партии имеется N элементов, среди которых M не удовлетворяют стандарту и $N-M$ удовлетворяют стандарту. Из этой партии выбираем n элементов. Пусть ξ - число элементов, не удовлетворяющих стандарту, среди n взятых элементов. Вероятность того, что в выборке объёма n будет ровно x_i элементов, которые не удовлетворяют стандарту, определяется по формуле

$$P(\xi = x_i) = \frac{C_M^{x_i} C_{N-M}^{n-x_i}}{C_N^n}. \tag{3.1.5.1}$$

Функция распределения $F(x) = P(\xi < x_i) = \sum\limits_{x_i < x} \dfrac{C_M^{x_i} C_{N-M}^{n-x_i}}{C_N^n}$.

Математическое ожидание $M(\xi) = np$, где $p = M/N$, $q = 1-p$.

Дисперсия $D(\xi) = npq \cdot \left(1 - \dfrac{n-1}{N-1}\right)$.

Среднее квадратическое отклонение $\sigma_\xi = \sqrt{npq \cdot \left(\dfrac{N-n}{N-1}\right)}$.

3.1.6 Распределение Пуассона

Рассмотрим схему Бернулли при большом числе испытаний n и достаточно малой вероятности p наступления события в отдельно взятом испытании, причём произведение np принимает постоянное значение $np = \mu$. Тогда вероятность того, что случайная величина ξ принимает значение m, определяется формулой Пуассона

$$P(\xi = m) = \frac{\mu^m}{m!} e^{-\mu}. \tag{3.1.6.1}$$

Значения распределения Пуассона можно определить по специальным таблицам (приложение 1).

Функция распределения $F(x) = P(\xi < x_i) = \sum_{x_i<x} \frac{\mu^{x_i}}{x_i!} e^{-\mu}$.

Математическое ожидание $M(\xi) = \mu$.

Дисперсия $D(\xi) = \mu$.

Среднее квадратическое отклонение $\sigma_\xi = \sqrt{\mu}$.

Пуассоновское распределение присутствует в теории случайных процессов. Например, при расчёте нагрузки линий связи обычно предполагают, что количества вызовов, поступивших за непересекающиеся интервалы времени, независимые случайные величины, подчиняющиеся пуассоновскому распределению с параметрами, значения которых пропорциональны длинам соответствующих интервалов времени.

3.2 Примеры решения типовых задач

3.2.1 Производится ряд попыток включения устройства. Каждая попытка заканчивается успехом (включением устройства) независимо от других с вероятностью $p = 0,64$. Найти распределение случайной величины ξ - числа попыток включения устройства, её математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Вычислить вероятность того, что устройство включится, по крайней мере, с третьей попытки.

Решение. Дискретная случайная величина ξ может принимать следующие значения: $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3, ..., x_n = n, ...$. Событие $\{\xi = 1\}$ означает, что устройство заработает с первой попытки с вероятностью $P(\xi = 1) = 0,64$. Событие $\{\xi = 2\}$ означает, что устройство не заработает с первой попытки с вероятностью $q = 1 - p = 0,36$, а со второй попытки включения сработает с вероятностью $p = 0,64$. Следовательно, вероятность того, что случайная величина ξ примет значение 2 равна $P(\xi = 2) = 0,36 \cdot 0,64$.

Событие $\{\xi = n\}$ означает, что устройство не заработало в первых $(n-1)$ попытках с вероятностью $0,36^{n-1}$ и включилось с последней попытки с вероятностью $p = 0,64$. То есть, вероятность того, что случайная величина ξ примет значение n равна $P(\xi = n) = 0,36^{n-1} \cdot 0,64$. Таким образом, число произведённых попыток ξ есть величина, распределённая по геометрическому закону: $P(\xi = n) = pq^{n-1} = 0,64 \cdot 0,36^{n-1}$. При этом ряд распределения заданной случайной величины имеет вид:

$\xi = x_i$	1	2	3	…	n	…
$P(\xi = x_i)$	$0,64$	$0,36 \cdot 0,64$	$0,36^2 \cdot 0,64$	…	$0,36^{n-1} \cdot 0,64$	…

Найдём математическое ожидание $M(\xi)$, дисперсию $D(\zeta)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(\xi)$: $M(\xi)=\dfrac{1}{p}=\dfrac{1}{0,64}=1,5625$, $D(\xi)=\dfrac{1-p}{p^2}=\dfrac{1-0,64}{0,64^2}\approx 0,8789$, $\sigma(\xi)=\dfrac{\sqrt{1-p}}{p}=\dfrac{\sqrt{1-0,64}}{0,64}=0,9375$. Вычислим вероятность того, что устройство включится, по крайней мере, с третьей попытки. Для этого переходим к противоположному событию: устройство заработает при его включение в первой или во второй попытке.

$$P(\xi\ge 3)=1-P(\xi=1)-P(\xi=2)=1-0,64-0,36\cdot 064=0,1296.$$

3.2.2 Имеется 7 банковских карт, среди которых 3 являются неисправными и на вид они неотличимы от исправных банковских карт. Наугад берутся 4 банковские карты и проходят проверку. Найти распределение случайной величины ξ - числа исправных банковских карт, её математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Вычислить вероятность того, что среди выбранных банковских карт, по крайней мере, одна неисправна.

Решение. Дискретная случайная величина ξ может принимать следующие значения: $x_1=1, x_2=2, x_3=3, x_4=4$. Так как имеется 7 банковских карт, среди которых 4 карты исправные, а затем среди 7 карт выбираются случайным образом 4 карты, то случайная величина ξ имеет гипергеометрическое распределение: $P\left(\xi=x_i\right)=\dfrac{C_M^{x_i}C_{N-M}^{n-x_i}}{C_N^n}=\dfrac{C_4^{x_i}C_3^{4-x_i}}{C_7^4}$.

При этом ряд распределения заданной случайной величины имеет вид:

$\xi=x_i$	1	2	3	4
$P\left(\xi=x_i\right)$	$4/35$	$18/35$	$12/35$	$1/35$

Вероятность того, что банковская карта исправна, равна $p=4/7$, а вероятность того, что она неисправна $q=3/7$. Найдём математическое ожидание $M(\xi)$, дисперсию $D(\zeta)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(\xi)$: $M(\xi)=np=4\cdot\dfrac{4}{7}=\dfrac{16}{7}\approx 2,29$, $D(\xi)=npq\cdot\left(1-\dfrac{n-1}{N-1}\right)=4\cdot\dfrac{4}{7}\cdot\dfrac{3}{7}\cdot\left(1-\dfrac{4-1}{7-1}\right)=\dfrac{24}{49}$, $\sigma(\xi)=\sqrt{npq\cdot\left(\dfrac{N-n}{N-1}\right)}=\sqrt{4\cdot\dfrac{4}{7}\cdot\dfrac{3}{7}\cdot\left(\dfrac{7-4}{7-1}\right)}=\sqrt{\dfrac{24}{49}}=\dfrac{2}{7}\cdot\sqrt{6}$. Вычислим вероятность того, что среди выбранных банковских карт, по крайней мере, две банковские карты исправны. Для этого переходим к противоположному событию: среди выбранных четырёх банковских карт ровно одна исправная.

$$P(2\le\xi\le 4)=1-P(\xi=1)=1-\frac{4}{35}=\frac{31}{35}\approx 0,8857.$$

3.2.3 Вероятность того, что кольцо содержит бриллиант, равна 0,4. Наудачу выбрали четыре кольца. Найти распределение случайной величины ξ - числа колец, содержащих бриллиант, функцию распределения случайной величины, её математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Вычислить вероятность того, что среди выбранных колец ровно одно кольцо содержит бриллиант.

Решение. Дискретная случайная величина ξ может принимать следующие значения: $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, x_4 = 3, x_5 = 4$. Так как вероятность того, что кольцо будет содержать бриллиант одна и та же, среди выбранных четырёх колец, то случайная величина ξ имеет биномиальное распределение

$$P(\xi = x_i) = C_4^{x_i} 0,4^{x_i} (1-0,4)^{4-x_i} = C_4^{x_i} \cdot 0,4^{x_i} \cdot 0,6^{4-x_i},\ i = \overline{1;5}.$$

При этом ряд распределения заданной случайной величины имеет вид:

$\xi = x_i$	0	1	2	3	4
$P(\xi = x_i)$	0,1296	0,3456	0,3456	0,1536	0,0256

Находим функцию распределения по формуле $F(x) = P(\xi < x_i) = \sum_{x_i < x} C_4^{x_i} p^{x_i} q^{4-x_i}$.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ 0,1296, & 0 < x \le 1, \\ 0,4752, & 1 < x \le 2, \\ 0,8208, & 2 < x \le 3, \\ 0,9744, & 3 < x \le 4, \\ 1, & x > 4. \end{cases}$$

Найдём математическое ожидание $M(\xi)$, дисперсию $D(\zeta)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(\xi)$: $M(\xi) = np = 4 \cdot 0,4 = 1,6$, $D(\xi) = npq = 4 \cdot 0,4 \cdot 0,6 = 0,96$, $\sigma(\xi) = \sqrt{npq} = \sqrt{4 \cdot 0,4 \cdot 0,6} = \sqrt{0,96} \approx 0,9798$. Вычислим вероятность того, что среди выбранных колец ровно одно кольцо содержит бриллиант.

$$P(\xi = 1) = C_4^1 \cdot 0,4^1 \cdot 0,6^3 = 0,3456.$$

3.2.4 Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность выхода из строя любого элемента в течение времени τ равна $p = 0,003$. Найти распределение случайной величины ξ - число элементов, вышедших из строя за время τ, её математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Найти вероятность того, что за время τ откажет ровно 2 элемента.

Решение. Дискретная случайная величина ξ может принимать следующие значения: $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 2, ..., x_{n+1} = 1000$. Так как вероятность $p = 0,003$ выхода из строя одного элемента мала, а число элементов $n = 1000$ велико, то случайная величина ξ подчиняется закону Пуассона: $P_n\left(\xi = x_i\right) = \dfrac{\mu^{x_i}}{x_i!}e^{-\mu}$, где $\mu = np$. Найдём значение $\mu = 1000 \cdot 0{,}003 = 3$. Тогда закон распределения имеет вид: $P_{1000}\left(\xi = x_i\right) = \dfrac{3^{x_i}}{x_i!}e^{-3}$. Найдём математическое ожидание $M(\xi)$, дисперсию $D(\zeta)$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma(\xi)$: $M(\xi) = \mu = 3$, $D(\xi) = \mu = 3$, $\sigma(\xi) = \sqrt{\mu} = \sqrt{3} \approx 1{,}73$. Вычислим вероятность того, что за время τ откажет ровно $x_3 = 2$ элемента.

$$P_{1000}\left(\xi = 2\right) = \frac{3^2}{2!}e^{-3} = 0{,}22404.$$

Вероятность $P_{1000}\left(\xi = 2\right)$ при значениях $\mu = 3$ и $m = x_3 = 2$ находим по таблице (приложение 1).

3.3 Задания для решения на практическом занятии

3.3.1 Производятся последовательные испытания десяти приборов одной партии на надёжность, причём вероятность того, что прибор в партии надежен, равна 0,8. Каждый следующий прибор испытывается только в том случае, если предыдущий прибор оказался надёжным. Найти распределение случайной величины ξ - число проверенных приборов, её математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Вычислить вероятность того, что будет проверено не менее двух, но не более пяти приборов.

3.3.2 Из партии, содержащей 100 изделий, среди которых имеется 10 бракованных, выбраны случайным образом четыре изделия для проверки их качества. Найти распределение случайной величины ξ - числа бракованных изделий, содержащихся в выборке, её математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Вычислить вероятность того, что в выборке содержатся не менее двух бракованных изделий.

3.3.3 Вероятность того, что дом будет сдан в эксплуатацию в срок, равна 0,8. Организация занимается строительством пяти домов. Найти распределение случайной величины ξ - число домов, которые организация сдала в срок, функцию распределения случайной величины, её математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Вычислить вероятность того, что среди строящихся пяти домов не менее четырёх домов организация сдаст в отведённый срок.

3.3.4 Предприятие поставило на базу партию из 2000 курток. Вероятность того, что куртка содержит брак, равна 0,002. Найти распределение случайной величины ξ - число курток, которые содержат брак, её математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Найти вероятность того, что не мене четырёх курток в партии содержат брак.

3.3.5 Однотипные приборы испытываются при перегрузочных режимах. Вероятности для каждого прибора пройти испытания равны 0,6 и независимы. Испытания заканчиваются после выхода из строя первого же прибора. Найти распределение случайной величины ξ - число проведённых испытаний, её математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Вычислить вероятность того, что будет проведено не более двух испытаний.

3.3.6 Вероятность того, что человек дозвонится до своего друга в течение времени τ, равна 0,9. Шесть человек одновременно произвели звонки. Найти распределение случайной величины ξ - число человек, которые дозвонятся до своих друзей в течение времени τ. Найти её математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Вычислить вероятность того, что среди шести человек, которые произвели звонки, ровно четыре дозвонятся до своего друга.

3.3.7 Радиоаппаратура содержит 1000 одинаково надёжных элементов, вероятность отказа для каждого из которых равна 0,001. Найти распределение случайной величины ξ - число возможно отказавших элементов. Найти её математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Какова вероятность отказа радиоаппаратуры, если он наступает при отказе хотя бы одного из элементов?

3.3.8 В партии из 10 деталей имеется 8 стандартных. Наудачу отобраны 2 детали. Найти распределение случайной величины ξ - число стандартных деталей среди двух отобранных деталей. Найти её математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Какова вероятность того, что среди отобранных деталей не менее одной стандартной?

3.3.9 Вероятность того, что стрелок попадёт в мишень при одном выстреле, равна 0,7. Стрелку последовательно выдаются патроны до тех пор, пока он не промахнётся. Найти распределение случайной величины ξ - числа патронов, выданных стрелку. Найти её математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение и наивероятнейшее число патронов, выданных стрелку.

3.3.10Вероятность того, что любой абонент позвонит на коммутатор в течение часа, равна 0,005. Телефонная станция обслуживает 600 абонентов. Найти распределение случайной величины ξ - число абонентов, которые позвонят на коммутатор в течение часа. Найти её математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Какова вероятность того, что в течение часа позвонят пять абонентов?

3.3.11Для работы восьми станков время от времени используется электрическая энергия. Снабжение рассчитано на пять единиц энергии. Каждому станку с одной и той же вероятностью p может потребоваться единица энергии. Определить вероятность перегрузки электросети, если известно, что станки работают независимо друг от друга, и каждый из них потребляет энергию в среднем 10 минут в течение часа.

3.3.12Среди 25 студентов группы, в которой десять девушек, разыгрывается пять билетов. Найти распределение случайной величины ξ - числа девушек среди обладателей билетов. Найти её математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Какова вероятность того, что среди обладателей билетов не менее девяти девушек?

3.3.13В радиоаппаратуре за 10000 часов непрерывной работы происходит замена десяти ламп. Вычислить вероятность выхода из строя радиоаппаратуры из-за выхода из строя ламп за 100 часов непрерывной работы.

3.3.14Сколько игральных костей необходимо бросить для того, чтобы математическое ожидание числа костей, на которых выпало три очка, равнялось шести?

3.3.15Из кошелька на стол высыпали 25 монет. Какова вероятность того, что число монет, упавших гербом вниз, заключено между 8 и 15, включая и эти два крайних значения?

3.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

3.4.1 В каждой задаче определена дискретная случайная величина ξ. Для случайной величины ξ определить закон распределения в аналитическом виде. Вычислить математическое ожидание $M(\xi)$, дисперсию $D(\xi)$ и среднеквадратическое отклонение σ_ξ случайной величины ξ. Найти вероятность того, что в результате опыта случайная величина ξ принимает значение не менее α, но не более β.

3.4.1.1 Вероятность того, что изделие не выдержит испытания, равна 0,0004. Рассматривается случайная величина ξ - число изделий, которые не выдержат испытания, среди проверенных 1000 изделий. Значение $\beta = 5$.

3.4.1.2 Каждый пятый студент, который сдаёт экзамен по предмету «Высшая математика», не доволен оценкой, полученной при сдаче экзамена. Группа из 11 студентов сдавали экзамен по предмету «Высшая математика». Рассматривается случайная величина ξ - число студентов, которые не довольны своей оценкой по предмету «Высшая математика». Значение $\alpha = 2$.

3.4.1.3 Вероятность банкротства каждой из девяти торговых фирм в течение года, равна 0,14. Рассматривается случайная величина ξ - число торговых фирм, которые могут обанкротиться в течение года. Значение $\alpha = 2$, а $\beta = 5$.

3.4.1.4 Учебник издан тиражом 10000 экземпляров. Вероятность того, что учебник сброшюрован неправильно, равна 0,0002. Рассматривается случайная величина ξ - число учебников, которые сброшюрованы неправильно. Значение $\beta = 5$.

3.4.1.5 Каждый четвёртый посетитель банка обращается на ресепшен для консультации сотрудника банка. За некоторое фиксированное время банк посетило десять клиентов. Рассматривается случайная величина ξ - число клиентов банка, которые обратились на ресепшен. Значение $\alpha = 5$, а $\beta = 7$.

3.4.1.6 Вероятность после разговора оставить карту в телефонном аппарате равна 0,005. В течение недели телефоном воспользовались 60 абонентов. Рассматривается случайная величина ξ - число абонентов, которые забыли карту в телефонном аппарате. Значение $\beta = 2$.

3.4.1.7 В некотором университете учатся 18300 студентов, которые родились в одном и том же високосном году. Каждый будущий студент может родиться с равной вероятностью в любой из дней года. Рассматривается случайная величина ξ - число студентов, которые родились 1 января. Значение $\alpha = 1$, а $\beta = 5$.

3.4.1.8 Вероятность перевыполнения плана для одного рабочего бригады, равна 0,8. В бригаде работают девять рабочих. Рассматривается случайная величина ξ - число рабочих, которые перевыполнили план. Значение $\alpha = 4$.

3.4.1.9 Вероятность успешной сдачи студентом каждого из четырёх экзаменов сессии равна 0,7. Рассматривается случайная величина ξ - число экзаменов, которые сдал студент во время сессии. Значение $\beta = 3$.

3.4.1.10 Вероятность приобретения бриллианта в банке, для одного клиента, равна 0,003. Рассматривается случайная величина ξ - число клиентов банка, которые приобрели бриллиант в банке, среди 3000 обслуженных клиентов. Значение $\alpha = 3$.

3.4.1.11 Вероятность того, что у частного предпринимателя находятся в наличии джемпера фирмы «DEVIR», равна 0,6. Предприниматель продал 8 джемперов. Рассматривается случайная величина ξ - число джемперов фирмы «DEVIR», которые продал предприниматель. Значение $\beta = 7$.

3.4.1.12 В хранилище музея находится 2000 картин. Любая картина может не иметь подписи автора с вероятностью 0,0004. Рассматривается случайная величина ξ - число картин, которые не имеют подписи автора. Значение $\alpha = 3$.

3.4.1.13 Вероятность того, что человек, забрав платёжную карту в банкомате, забудет взять деньги, равна 0,004. В течение некоторого времени банкоматом воспользовались 1250 человек. Рассматривается случайная величина ξ - число человек, которые забыли забрать деньги в банкомате. Значение $\alpha = 2$, а $\beta = 5$.

3.4.1.14 Вероятность того, что телефон марки «LG» будет приобретен покупателем, равна 0,2. За некоторый фиксированный период времени приобретено пятнадцать телефонов. Рассматривается случайная величина ξ - число телефонов марки «LG», которые были приобретены за этот период времени. Значение $\alpha = 12$.

3.4.1.15 Вероятность того, что человек приобретёт облигацию пятипроцентного займа, равна 0,15. Акции приобрели десять человек. Рассматривается случайная величина ξ - число человек, которые приобрели акции пятипроцентного займа. Значение $\alpha = 3$, а $\beta = 6$.

3.4.1.16 Завод отправил на оптовую базу 5000 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,00008. Рассматривается случайная величина ξ - число изделий, которые могут получить повреждения в пути. Значение $\beta = 5$.

3.4.1.17 Вероятность того, что ноутбук фирмы «Samsung» в течение рабочего дня будет подключён к сети, равна 0,3. В организации установлено двенадцать ноутбуков. Рассматривается случайная величина ξ - число ноутбуков фирмы «Samsung», которые подключены к сети. Значение $\alpha = 10$, а $\beta = 11$.

3.4.1.18 Вероятность того, что оптический диск не соответствует стандарту, равна 0, 006. На проверку выбрано 1000 оптических дисков. Рассматривается случайная величина ξ - число оптических дисков, которые не соответствуют стандарту. Значение $\beta = 5$.

3.4.1.19 На железнодорожном вокзале установлены 600 автоматов, которые производят продажу билетов. В течение суток каждый автомат может выйти из строя с вероятностью 0,005. Рассматривается случайная величина ξ - число автоматов, которые могут выйти из строя. Значение $\alpha = 4$.

3.4.1.20 Двадцать процентов студентов после окончания ВУЗа не работают по специальности. Рассматривается случайная величина ξ - число выпускников, работающих по специальности, среди выбранных десяти выпускников ВУЗа. Значение $\beta = 6$.

3.4.1.21 Вероятность того, что клиент сделает в банке валютный вклад, равна 0,48. Вклады в банке осуществило восемь клиентов. Рассматривается случайная величина ξ - число клиентов, которые сделали вклад в валюте. Значение $\alpha = 3$, а $\beta = 7$.

3.4.1.22 Вероятность того, что купюра является фальшивой, равна 0,001. Для проверки выбрано 6000 купюр. Рассматривается случайная величина ξ - число купюр, которые оказались фальшивыми. Значение $\beta = 7$.

3.4.1.23 Вероятность получения заявки оптовой базой на данный день для каждого из девяти магазинов, равна 0,8. Рассматривается случайная величина ξ - число магазинов, которые сделали заявку на оптовую . Значение $\alpha = 2$, а $\beta = 5$.

3.4.1.24 Клиенту банка для заполнения предлагается карточка обратной связи с вероятностью 0,7. В банк обратилось тринадцать клиентов. Рассматривается случайная величина ξ - число клиентов, которым была предложена для заполнения карточка обратной связи. Значение $\beta = 5$.

3.4.1.25 За некоторый период времени фабрика выпустила 2500 джемперов. Допустить брак при пошиве одного джемпера возможно с вероятностью 0,0016. Рассматривается случайная величина ξ - число джемперов, в которых обнаружен брак. Значение $\alpha = 2$, а $\beta = 4$.

3.4.1.26 На выставке трактор «Беларус-80.1» может быть представлен с вероятностью 0,6. На выставку было представлено десять тракторов. Рассматривается случайная величина ξ - число тракторов «Беларус-80.1», которые представлены на выставке. Значение $\alpha = 3$.

3.4.1.27 Вероятность того, что человек снимет в банкомате всю сумму стотысячными купюрами, равна 0,2. В банкомате сняли деньги двенадцать человек. Рассматривается случайная величина ξ - число человек, которым банкомат выдал всю сумму стотысячными купюрами. Значение $\alpha = 2$, а $\beta = 5$.

3.4.1.28 Кузов автомобиля «Audi» имеет цвет баклажана с вероятностью 0,0004. Через пост в течение некоторого времени проехало 2000 автомобилей «Audi». Рассматривается случайная величина ξ - число автомобилей «Audi» цвета баклажана, которые проехали через пост. Значение $\alpha = 1$.

3.4.1.29 Вдоль дороги установлены 3000 фонарей, каждый из которых может перегореть в течение месяца с вероятностью 0,001. Рассматривается случайная величина ξ - число фонарей, которых перегорели в течение месяца. Значение $\beta = 4$.

3.4.1.30 Вероятность потери кредитной карточки в течение месяца равна 0,003. Банк выдал 300 кредитных карточек. Рассматривается случайная величина ξ - число кредитных карточек, которые потеряли клиенты банка. Значение $\alpha = 2$, а $\beta = 6$.

4 ОСНОВНЫЕ ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН (практическое занятие № 14 в третьем семестре)

Содержание: равномерное распределение, экспоненциальное (показательное) распределение, гамма-функция и её свойства, распределение Вейбулла, β-распределение.

4.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Рассмотрим основные законы непрерывных случайных величин.

4.1.1 Равномерный закон распределения

На практике встречаются случайные величины, о которых заранее известно, что они могут принять какое-либо значение в строго определенных границах, причем в этих границах все значения случайной величины имеют одинаковую вероятность (обладают одной и той же плотностью вероятностей). Например, при поломке часов остановившаяся минутная стрелка будет с одинаковой вероятностью показывать время, прошедшее от начала данного часа до поломки часов. Это время является случайной величиной, принимающей с одинаковой плотностью вероятности значения, которые не выходят за границы, определенные продолжительностью одного часа. К подобным случайным величинам относится также и погрешность округления. Про такие величины говорят, что они распределены равномерно, т. е. имеют равномерное распределение.

Непрерывная случайная величина ξ имеет равномерное распределение на отрезке $[a;b]$, если на этом отрезке плотность распределения вероятности принимает постоянное значение, то есть

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, \text{если } a\le x\le b;\\ 0,\quad \text{если } x<a \text{ или } x>b.\end{cases} \tag{4.1.1.1}$$

Функция распределения $F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<a;\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \text{если } a\le x\le b;\\ 1, & \text{если } x>b.\end{cases}$

Математическое ожидание $M(\xi)=\dfrac{a+b}{2}$.

Дисперсия $D(\xi)=\dfrac{(b-a)^2}{12}$.

Среднее квадратическое отклонение $\sigma_\xi=\dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}$.

Вероятность попадания равномерно распределённой случайной величины ξ на интервал $[\alpha;\beta)$, представляющий собой часть отрезка $[a;b]$, вычисляется по формуле

$$P(\alpha\le\xi<\beta)=\frac{\beta-\alpha}{b-a}. \tag{4.1.1.2}$$

4.1.2 Показательное (экспоненциальное) распределение

Расстояние T между двумя соседними событиями в стационарном пуассоновском потоке с интенсивностью λ представляет собой непрерывную случайную величину, распределённую по показательному закону с плотностью вероятности

$$f(t)=\begin{cases}0, & \text{если } t<0;\\ \lambda e^{-\lambda t}, & \text{если } t\ge 0.\end{cases} \tag{4.1.2.1}$$

Функция распределения $F(t)=\begin{cases}0, & \text{если } t<0;\\ 1-e^{-\lambda t}, & \text{если } t\ge 0.\end{cases}$

Математическое ожидание $M(T)=\dfrac{1}{\lambda}$.

Дисперсия $D(T)=\dfrac{1}{\lambda^2}$.

Среднее квадратическое отклонение $\sigma_T = \dfrac{1}{\lambda}$.

Для показательного распределения вероятность того, что случайная величина T примет значение, которое принадлежит интервалу $[\alpha;\beta)$, определяется по формуле

$$P(\alpha \le T < \beta) = e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}. \qquad (4.1.2.2)$$

Примером непрерывной случайной величины, распределенной по показательному закону, может служить время между появлениями двух последовательных событий простейшего потока.

4.1.3 Гамма-функция и её свойства

Гамма-функцией или интегралом Эйлера второго рода называется функция вида

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x}\, dx. \qquad (4.1.3.1)$$

Гамма-функция является интегралом, зависящим от параметра α. Она удовлетворяет следующим свойствам:

1) $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$;

2) $\Gamma(0,5) = \sqrt{\pi}$;

3) $\Gamma(\alpha+1) = \alpha \cdot \Gamma(\alpha)$;

4) Если α кратно 0,5, то $\Gamma(\alpha)$ может быть легко вычислено на основании третьего свойства:

$$\Gamma(1,5) = \Gamma(0,5+1) = 0,5 \cdot \Gamma(0,5) = 0,5 \cdot \sqrt{\pi},$$

$$\Gamma(2,5) = \Gamma(1,5+1) = 1,5 \cdot \Gamma(1,5) = 1,5 \cdot 0,5 \cdot \sqrt{\pi},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{n-1}{2}+1\right) = \frac{n-1}{2} \cdot \Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) = \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-3}{2} \cdot \ldots \cdot \frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi};$$

5) при больших значениях α гамма-функция вычисляется по формуле

$$\Gamma(\alpha) = (\alpha-1) \cdot \Gamma(\alpha-1) = (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdot \Gamma(\alpha-2) = \ldots$$

4.1.4 Распределение Вейбулла ($a > 0$, $b > 0$, $-\infty < c < +\infty$)

Данное распределение имеет наработка до отказа некоторых невосстанавливаемых изделий. К ним относятся, в частности, некоторые изделия у которых отказ наступает вследствие усталостного разрушения. При оценке надежности механических узлов этим законом описывается надежность подшипников. Распределение Вейбулла используют для описания закономерностей отказов под действием износа и старения, отказов последовательно соединенных и дублированных элементов. Особенно часто распределение Вейбулла применяют тогда, когда поток отказов не стационарен и интенсивность отказов меняется с течением времени.

Непрерывная случайная величина ξ имеет распределение Вейбулла, если плотность распределения вероятности имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{b}{a}\left(\dfrac{x-c}{a}\right)^{b-1}e^{-\left(\frac{x-c}{a}\right)^{b}}, \text{ если } x>c;\\ 0, \quad \text{если } x\le c,\end{cases} \qquad (4.1.4.1)$$

где a - параметр масштаба, b - параметр формы кривой распределения, c - параметр сдвига.

С помощью параметра b удобно подбирать аналитическое описание для различных экспериментальных зависимостей. При значении $b=1$ распределение Вейбулла становится экспоненциальным. При значениях параметра $b<1$ интенсивность отказов монотонно убывает с течением времени, а при значениях $b>1$ монотонно возрастает. Подбирая значения a, b и c, можно добиться приближения аналитической функции плотности распределения к опытным данным.

Математическое ожидание $M(X)=c+a\cdot\Gamma\left(1+\dfrac{1}{b}\right)$.

Дисперсия $D(T)=a^2\cdot\left(\Gamma\left(1+\dfrac{2}{b}\right)-\Gamma^2\left(1+\dfrac{1}{b}\right)\right)$.

Среднее квадратическое отклонение $\sigma_X=a\cdot\sqrt{\left(\Gamma\left(1+\dfrac{2}{b}\right)-\Gamma^2\left(1+\dfrac{1}{b}\right)\right)}$.

4.1.5 β-распределение($\alpha>0$, $\beta>0$)

Функция β-распределения обычно используется для изучения вариации в процентах какой-либо величины между выборками - например, части дня, которую студенты проводят для самостоятельного изучения дисциплин.

Непрерывная случайная величина ξ имеет β-распределение, если плотность распределения вероятности имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{\alpha-1}\cdot(1-x)^{\beta-1}}{B(\alpha;\beta)}, \text{ если } 0<x<1;\\ 0, \quad \text{если } x\le 0 \text{ или } x\ge 1,\end{cases} \qquad (4.1.5.1)$$

где $B(\alpha;\beta)=\int\limits_0^1 x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}\,dx$ называется β-функцией.

Математическое ожидание $M(X)=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$.

Дисперсия $D(X)=\dfrac{\alpha\cdot\beta}{(\alpha+\beta)^2\cdot(\alpha+\beta+1)}$.

Среднее квадратическое отклонение $\sigma_X=\dfrac{1}{\alpha+\beta}\cdot\sqrt{\dfrac{\alpha\cdot\beta}{\alpha+\beta+1}}$.

4.2 Примеры решения типовых задач

4.2.1 Цена деления шкалы измерительного прибора равна 0,2. Показания прибора округляют до ближайшего деления. Определить закон распределения для случайной величины ξ - ошибка округления отсчёта. Записать выражения для плотности распределения вероятностей и функции распределения случайной величины ξ. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ. Найти вероятность того, что при отсчёте будет сделана ошибка: а) меньшая 0,04, б) большая 0,05.

Решение. Ошибку округления отсчёта можно рассматривать как случайную величину ξ, которая распределена равномерно в интервале между двумя соседними делениями. Параметры равномерного распределения равны: $a=0$, $b=0,2$. Тогда, согласно формуле (4.1.1.1) плотность распределения вероятностей имеет вид:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{0,2-0}, \text{ если } 0\le x\le 0,2;\\ 0, \quad \text{если } x<0 \text{ или } x>0,2,\end{cases} \text{ или } f(x)=\begin{cases}5, \text{ если } 0\le x\le 0,2;\\ 0, \quad \text{если } x<0 \text{ или } x>0,2.\end{cases}$$

Запишем выражение для функции распределения случайной величины ξ, которая имеет равномерный закон распределения.

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<0;\\ \dfrac{x-0}{0,2-0}, & \text{если } 0\le x\le 0,2;\\ 1, & \text{если } x>0,2,\end{cases} \text{ или } F(x)=\begin{cases}0, & \text{если } x<0;\\ 5x, & \text{если } 0\le x\le 0,2;\\ 1, & \text{если } x>0,2.\end{cases}$$

Найдём математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение заданной случайной величины.

Математическое ожидание: $M(\xi)=\dfrac{a+b}{2}=\dfrac{0+0,2}{2}=0,1$.

Дисперсия: $D(\xi)=\dfrac{(b-a)^2}{12}=\dfrac{(0,2-0)^2}{12}=\dfrac{0,04}{12}=\dfrac{1}{300}\approx 0,0033$.

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma_\xi=\dfrac{b-a}{2\sqrt{3}}=\dfrac{0,2-0}{2\sqrt{3}}=\dfrac{1}{10\sqrt{3}}\approx 0,0577$.

Вычислим вероятность события $A=\{$при отсчёте будет сделана ошибка меньшая 0,04$\}$. Данное событие означает, что случайная величина примет значение меньше 0,04 или больше 0,16. Для вычисления вероятностей этих событий будем использовать формулу (4.1.1.2). При этом учтём, что события {меньше 0,04} и {больше 0,16} независимы, то есть вероятность суммы равна сумме вероятностей. $P\left(\alpha \le \xi < \beta\right) = \dfrac{\beta - \alpha}{b - a}$

$$P(A) = P(0 < \xi < 0,04) + P(0,16 < \xi < 0,2) = \frac{0,04 - 0}{0,2 - 0} + \frac{0,2 - 0,16}{0,2 - 0} = 0,2 + 0,2 = 0,4.$$

Вычислим вероятность события $B =$ {при отсчёте будет сделана ошибка больше 0,05}. Данное событие означает, что случайная величина примет значение больше 0,05, но меньше 0,15.

$$P(B) = P(0,05 < \xi < 0,15) = \frac{0,15 - 0,05}{0,2 - 0} = \frac{0,1}{0,2} = 0,5.$$

4.2.2 Случайная величина ξ имеет равномерное распределение с математическим ожиданием $M(\xi) = 8$ и дисперсией $D(\xi) = 12$. Найти плотность распределения вероятностей и функцию распределения случайной величины ξ. Определить вероятность того, что случайная величина ξ отклонится от своего математического ожидания не более чем на величину $\varepsilon = 1$.

Решение. Воспользуемся формулами математического ожидания и дисперсии для равномерно распределённой случайной величины:

$$M(\xi) = \frac{a+b}{2} \text{ и } D(\xi) = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{a+b}{2} = 8, \\ \dfrac{(b-a)^2}{12} = 12. \end{cases}$$

Решение системы: $a = 2$, $b = 14$.

Согласно формуле (4.1.1.1) плотность распределения вероятностей имеет вид:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{14-2}, & \text{если } 2 \le x \le 14; \\ 0, & \text{если } x < 2 \text{ или } x > 14, \end{cases} \quad \text{или} \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{12}, & \text{если } 2 \le x \le 14; \\ 0, & \text{если } x < 2 \text{ или } x > 14. \end{cases}$$

Запишем выражение для функции распределения случайной величины ξ, которая имеет равномерный закон распределения.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 2; \\ \dfrac{x-2}{14-2}, & \text{если } 2 \le x \le 14; \\ 1, & \text{если } x > 14, \end{cases} \quad \text{или} \quad F(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 2; \\ \dfrac{x-2}{12}, & \text{если } 2 \le x \le 14; \\ 1, & \text{если } x > 14. \end{cases}$$

Вычислим вероятность того, что случайная величина ξ отклонится от своего математического ожидания не более чем на величину $\varepsilon = 1$.

$$P\left(\left|\xi - M(\xi)\right| < \varepsilon\right) = P\left(\left|\xi - 8\right| < 1\right) = P\left(-1 < \xi - 8 < 1\right) = P\left(7 < \xi < 9\right) = \frac{9-7}{14-2} = \frac{1}{6}.$$

4.2.3 Длительность времени безотказной работы каждого из четырёх элементов, входящих в техническое устройство, имеет показательное распределение. Среднее время безотказной работы для каждого элемента равно 400 часов. Техническое устройство работает при условии безотказной работы всех четырёх элементов. Определить вероятность безотказной работы устройства в течение 700 часов, если время безотказной работы каждого элемента не зависит от времени работы четырёх других элементов. Записать выражения для плотности распределения вероятностей и функции распределения случайной величины T безотказной работы одного элемента. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины T. Найти вероятность того, что отдельно взятый элемент будет работать не менее 500 часов, но не более 900 часов.

Решение. Искомая вероятность равна вероятности того, что в течение не менее 700 часов будет безотказно работать все четыре элемента.

Пусть событие A_i означает, что i-й элемент устройства проработает безотказно не менее 700 часов $\left(i = \overline{1,4}\right)$. Тогда искомая вероятность равна

$$P = P\left(A_1 A_2 A_3 A_4\right) = P\left(A_1\right) \cdot P\left(A_2\right) \cdot P\left(A_3\right) \cdot P\left(A_4\right) = P^4\left(A_1\right).$$

Так как, события A_i независимы, то вероятность произведения равна произведению вероятностей, причём $P\left(A_1\right) = P\left(A_2\right) = P\left(A_3\right) = P\left(A_4\right)$.

Найдём вероятность события A_i. Рассмотрим случайную величину T - время безотказной работы i-го элемента. По условию задачи математическое ожидание величины T равно 400 часов, следовательно, $\lambda = \frac{1}{400}$. В этом случае плотность распределения вероятности имеет вид:

$$f(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0; \\ \dfrac{1}{400} e^{-\frac{1}{400}t}, & \text{если } t \geq 0. \end{cases}$$

Функция распределения: $F(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t < 0; \\ 1 - e^{-\frac{1}{400}t}, & \text{если } t \geq 0. \end{cases}$

Математическое ожидание: $M(T) = T_{ср} = \dfrac{1}{\lambda} = 400$.

Дисперсия: $D(T) = \dfrac{1}{\lambda^2} = 160000$.

Среднее квадратическое отклонение: $\sigma_T = \frac{1}{\lambda} = 400$.

Тогда вероятность события A_i равна

$$P(A_i) = P(T \geq 700) = 1 - P(T < 700) = 1 - \left(1 - e^{-\frac{1}{400} \cdot 700}\right) = e^{-\frac{700}{400}} = e^{-1,75} \approx 0,174.$$

Таким образом, вероятность исходного события равна

$$P = P^4(A_1) = (0,174)^4 \approx 0,917.$$

4.3 Задания для решения на практическом занятии

4.3.1 Случайная величина подчинена закону равномерного распределения на интервале $(1;3)$. Записать выражение для плотности распределения вероятности и функцию распределения. Вычислить числовые характеристики случайной величины. Определить вероятность того, что случайная величина примет значение не менее 1,5, но не более 2,5.

4.3.2 Случайная величина ξ имеет равномерное распределение с математическим ожиданием $M(\xi) = 22$ и дисперсией $D(\xi) = 1,08$. Найти плотность распределения вероятностей и функцию распределения случайной величины ξ. Построить графики плотности и функции распределения. Определить вероятность того, что случайная величина ξ отклонится от своего математического ожидания не более чем на 3 единицы.

4.3.3 Поезда метрополитена идут строго по расписанию. Интервал движения равен трём минутам. Найти вероятность того, что пассажир, подошедший к остановке, будет ожидать очередного поезда менее 40 секунд.

4.3.4 Случайная величина ξ удовлетворяет неравенству $-3 \leq \xi \leq 3$. Известно, что каждое из значений 3 и (-3) она принимает с одной и той же вероятностью $p = 1/6$. Кроме того, в интервале $(-3;3)$ случайная величина ξ имеет равномерное распределение. Найти плотность распределения вероятностей и функцию распределения, и построить их графики.

4.3.5 Цена деления вольтметра 10 В. Отсчёт производится с округлением до целого деления шкалы. Определить среднеквадратичную ошибку среднего квадратического отклонения σ при снятии отсчёта и вероятности p того, что ошибка заключена в пределах ± 1 В.

4.3.6 Плотность распределения вероятности случайной величины ξ сохраняет на отрезке $[2;10]$ постоянное значение c, а вне этого отрезка равна нулю. Определить закон распределения для случайной величины ξ. Найти параметр c. Записать выражения для плотности распределения вероятностей и функции распределения, построить их графики. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ.

Определить вероятность того, что случайная величина ξ отклонится от своего математического ожидания не более чем на 1,5 единицы.

4.3.7 На шоссе установлен контрольный пункт для проверки технического состояния автомобилей. Найти математическое ожидание и дисперсию времени ожидания автомобиля контролёром, если поток машин простейший и время (в часах) между прохождением автомобилей через контрольный пункт распределено по показательному закону с параметром $\lambda = 12$.

4.3.8 Определить время работы прибора с надёжностью 0,9 (вероятность безотказной работы прибора), если среднее время его работы равно 800 часов.

4.3.9 Время T обнаружения цели радиолокатором распределено по показательному закону. Найти вероятность того, что цель будет обнаружена за время от 6 до 9 секунд после начала поиска, если среднее время обнаружения цели равно трём секундам.

4.3.10 Беспроводная оптическая мышка за 10000 часов работы выходит из строя в среднем один раз. Определить вероятность выхода из строя беспроводной оптической мышки за 2000 часов работы, предполагая, что срок безотказной работы мыши есть случайная величина, распределённая по показательному закону.

4.3.11 Время T безотказной работы системы распределено по показательному закону. Интенсивность отказов системы равно $\lambda = 0,03$. Найти среднее время безотказной работы системы и вероятность безотказной работы за 60 часов работы.

4.3.12 Время T безотказной работы станка распределено по показательному закону. Интенсивность отказов в работе компьютера составляет $\lambda = 0,0025$. Найти среднее время безотказной работы и вероятность безотказной работы компьютера за 400 дней.

4.3.13 Время T безотказной работы процессора распределено по показательному закону. Известно, что среднее время наработки процессора на отказ составляет 360 месяцев. Найти вероятность безотказной работы процессора за 90 месяцев.

4.3.14 Среднее время работы каждого из двух банкоматов без технического обслуживания соответственно равно 168 и 216 часов. Определить вероятность того, что оба банкомата будут работать без технического обслуживания в течение 224 часов.

4.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

4.4.1 Плотность распределения вероятности случайной величины ξ сохраняет на отрезке $[a;b]$ постоянное значение c, а вне этого отрезка равна нулю. Определить закон распределения для случайной величины ξ. Найти параметр c. Записать выражения для плотности распределения вероятностей и функции распределения, построить их графики. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины ξ.

Определить вероятность того, что случайная величина ξ отклонится от своего математического ожидания не более чем на величину ε.

4.4.1.1	$a=1, b=4, \varepsilon=0{,}1.$	**4.4.1.2**	$a=2, b=6, \varepsilon=0{,}2.$
4.4.1.3	$a=3, b=7, \varepsilon=0{,}3.$	**4.4.1.4**	$a=6, b=8, \varepsilon=0{,}4.$
4.4.1.5	$a=7, b=11, \varepsilon=0{,}5.$	**4.4.1.6**	$a=1, b=10, \varepsilon=0{,}6.$
4.4.1.7	$a=4, b=7, \varepsilon=0{,}7.$	**4.4.1.8**	$a=3, b=5, \varepsilon=0{,}8.$
4.4.1.9	$a=2, b=11, \varepsilon=0{,}9.$	**4.4.1.10**	$a=1, b=5, \varepsilon=1{,}0.$
4.4.1.11	$a=5, b=10, \varepsilon=1{,}1.$	**4.4.1.12**	$a=4, b=10, \varepsilon=1{,}2.$
4.4.1.13	$a=3, b=10, \varepsilon=1{,}3.$	**4.4.1.14**	$a=2, b=13, \varepsilon=1{,}4.$
4.4.1.15	$a=1, b=7, \varepsilon=1{,}5.$	**4.4.1.16**	$a=5, b=15, \varepsilon=1{,}6.$
4.4.1.17	$a=4, b=8, \varepsilon=1{,}7.$	**4.4.1.18**	$a=3, b=9, \varepsilon=1{,}8.$
4.4.1.19	$a=2, b=10, \varepsilon=1{,}9.$	**4.4.1.20**	$a=1, b=9, \varepsilon=2{,}0.$
4.4.1.21	$a=5, b=19, \varepsilon=2{,}1.$	**4.4.1.22**	$a=4, b=16, \varepsilon=2{,}2.$
4.4.1.23	$a=3, b=19, \varepsilon=2{,}3.$	**4.4.1.24**	$a=2, b=11, \varepsilon=2{,}4.$
4.4.1.25	$a=1, b=15, \varepsilon=2{,}5.$	**4.4.1.26**	$a=5, b=18, \varepsilon=2{,}6.$
4.4.1.27	$a=4, b=13, \varepsilon=2{,}7.$	**4.4.1.28**	$a=3, b=14, \varepsilon=2{,}8.$
4.4.1.29	$a=2, b=14, \varepsilon=2{,}9.$	**4.4.1.30**	$a=1, b=11, \varepsilon=3{,}0.$

4.4.2 Среднее время работы каждого из трёх элементов, входящих в техническое устройство, равно $T_{ср}$ часов. Для безотказной работы устройства необходима безотказная работа хотя бы одного из этих трёх элементов. Определить вероятность того, что устройство будет работать от t_1 до t_2 часов, если время T работы каждого из трёх элементов независимо и распределено по показательному закону. Записать выражения для плотности распределения вероятностей и функции распределения случайной величины T безотказной работы одного элемента, построить их графики. Найти математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение случайной величины T. Найти вероятность того, что отдельно взятый элемент будет работать не менее t_1 часов.

4.4.2.1	$T_{ср}=225, t_1=75, t_2=150.$	**4.4.2.2**	$T_{ср}=100, t_1=50, t_2=75.$
4.4.2.3	$T_{ср}=250, t_1=150, t_2=200.$	**4.4.2.4**	$T_{ср}=600, t_1=400, t_2=500.$
4.4.2.5	$T_{ср}=154, t_1=44, t_2=88.$	**4.4.2.6**	$T_{ср}=256, t_1=192, t_2=224.$
4.4.2.7	$T_{ср}=378, t_1=294, t_2=336.$	**4.4.2.8**	$T_{ср}=60, t_1=20, t_2=40.$
4.4.2.9	$T_{ср}=120, t_1=30, t_2=60.$	**4.4.2.10**	$T_{ср}=160, t_1=40, t_2=120.$
4.4.2.11	$T_{ср}=250, t_1=50, t_2=100.$	**4.4.2.12**	$T_{ср}=300, t_1=60, t_2=180.$
4.4.2.13	$T_{ср}=350, t_1=70, t_2=280.$	**4.4.2.14**	$T_{ср}=400, t_1=160, t_2=240.$
4.4.2.15	$T_{ср}=450, t_1=180, t_2=360.$	**4.4.2.16**	$T_{ср}=210, t_1=35, t_2=70.$

4.4.2.17 $T_{ср} = 270, t_1 = 45, t_2 = 135.$ **4.4.2.18** $T_{ср} = 330, t_1 = 55, t_2 = 220.$
4.4.2.19 $T_{ср} = 390, t_1 = 65, t_2 = 325.$ **4.4.2.20** $T_{ср} = 510, t_1 = 170, t_2 = 255.$
4.4.2.21 $T_{ср} = 570, t_1 = 190, t_2 = 380.$ **4.4.2.22** $T_{ср} = 90, t_1 = 30, t_2 = 75.$
4.4.2.23 $T_{ср} = 144, t_1 = 72, t_2 = 96.$ **4.4.2.24** $T_{ср} = 204, t_1 = 102, t_2 = 170.$
4.4.2.25 $T_{ср} = 308, t_1 = 44, t_2 = 88.$ **4.4.2.26** $T_{ср} = 378, t_1 = 54, t_2 = 162.$
4.4.2.27 $T_{ср} = 448, t_1 = 64, t_2 = 256.$ **4.4.2.28** $T_{ср} = 518, t_1 = 74, t_2 = 370.$
4.4.2.29 $T_{ср} = 588, t_1 = 84, t_2 = 504.$ **4.4.2.30** $T_{ср} = 658, t_1 = 188, t_2 = 282.$

5 НОРМАЛЬНЫЙ ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ (практическое занятие № 15 в третьем семестре)

Содержание: нормальное распределение, стандартное нормальное распределение, логарифмическое нормальное распределение, правило трёх сигм, распределение χ^2, распределение Стьюдента, распределение Фишера.

5.1 Теоретический материал по теме практического занятия

В данном разделе рассматривается нормальный закон распределения непрерывных случайных величин, а также законы непосредственно связанные с ним.

5.1.1 Нормальный закон распределения

Нормальное распределение имеет большое значение в теории вероятностей и математической статистике. Фундаментальная роль, которую играет нормальное распределение, объясняется тем, что при некоторых условиях суммы случайных величин $\sum_{i=1}^{n}\xi_i$ с ростом числа слагаемых асимптотически нормальны, то есть имеют распределение, близкое к нормальному распределению. Нормальное распределение часто встречается на практике в самых различных областях. Принято считать, что ошибки измерений, вес и размер деталей, вес и рост людей имеют нормальное распределение. Нормальное распределение используется при анализе производственных погрешностей, контроле технологических процессов и режимов, а также при анализе и прогнозировании различных явлений в экономике, медицине и других областях знаний.

Случайная величина ξ имеет нормальное распределение, которое также называется распределением Гаусса, если плотность распределения вероятностей имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \qquad (5.1.1.1)$$

где a - математическое ожидание случайной величины ξ, а σ - среднее квадратическое отклонение.

Нормальное распределение зависит от двух параметров a и σ, и поэтому его часто называют *двухпараметрическим распределением*.

Функция нормального распределения имеет следующий вид

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx. \qquad (5.1.1.2)$$

График плотности распределения вероятностей, задаваемой формулой (5.1.1.1), называется *нормальной кривой или кривой Гаусса*. Нормальная кривая представляет собой колоколообразную кривую, симметричную относительно прямой $x = a$. Если $x \to \pm\infty$, то график нормальной кривой асимптотически приближается к оси абсцисс.

Приведём основные свойства кривой Гаусса.

1) Функция плотности распределения вероятностей определена на множестве действительных чисел.

2) Нормальная кривая расположена выше оси абсцисс, $f(x) > 0$.

3) Ветви нормальной кривой асимптотически приближаются к оси абсцисс, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$.

4) Кривая имеет максимум в точке $x = a$, равный $f(a) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. При увеличении (уменьшении) параметра σ максимальная ордината уменьшается (увеличивается). Функция плотности распределения вероятностей возрастает на промежутке $(-\infty; a]$ и убывает на промежутке $[a; +\infty)$

5) Кривая Гаусса симметрична относительно прямой $x = a$. Следовательно, для нормально распределённой случайной величины математическое ожидание совпадает с модой и медианой.

6) Нормальная кривая имеет две точки перегиба $M_1\left(a-\sigma; \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$ и $M_2\left(a+\sigma; \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi e}}\right)$. Кривая Гаусса выпуклая на промежутке $(a-\sigma; a+\sigma)$, а вогнутая на промежутках $(-\infty; a-\sigma)$ и $(a+\sigma; +\infty)$.

7) Площадь фигуры, ограниченной кривой Гаусса и осью абсцисс, равна 1; площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой Гаусса, осью абсцисс и прямыми $x = a \pm \sigma$, приблизительно равна 0,6428; площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой Гаусса, осью абсцисс и прямыми $x = a \pm 2\sigma$, приблизительно равна 0,9545; площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой Гаусса, осью абсцисс и прямыми $x = a \pm 3\sigma$, приблизительно равна 0,9973. Так как площадь под кривой Гаусса всегда равна 1 ($\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$), то при увеличении σ кривая Гаусса становится плосковершин-

ной; при уменьшении σ - кривая Гаусса вытягивается вверх. Поэтому параметр σ часто называют *параметром масштаба*.

8) Если изменять математическое ожидание a при неизменном значении σ, то кривая Гаусса будет смещаться вдоль оси Ox, то есть параметр a характеризует положение кривой при неизменной форме. Поэтому часто параметр a называют *параметром сдвига*.

9) Коэффициенты асимметрии и эксцесса для нормального распределения равны нулю: $A = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = 0$; $Э = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = 0$.

Вероятность попадания нормально распределённой случайной величины ξ в интервал $(\alpha;\beta)$ вычисляется по следующей формуле

$$P(\alpha < \xi < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right), \qquad (5.1.1.3)$$

где $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ - функция Лапласа, значение которой можно определить по таблице (приложение 3). Свойства функции Лапласа приведены на практическом занятии № 10.

Используя определение 1.1.3 (определение функции распределения) и формулу (5.1.1.3), функцию распределения нормально распределённой случайной величины ξ можно записать в виде

$$F(x) = \Phi\left(\frac{x - a}{\sigma}\right) + 0{,}5. \qquad (5.1.1.4)$$

5.1.2 Правило трёх сигм

В практических расчётах часто требуется найти вероятность осуществления неравенства $|\xi - a| < \delta$. Для вычисления вероятности этого события, то есть вероятности того, что нормально распределённая случайная величина ξ отклонится от своего математического ожидания по абсолютной величине на величину, меньшую δ, воспользуемся формулой (5.1.1.3) и свойством нечётности функции Лапласа:

$$P(|\xi - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right). \qquad (5.1.2.1)$$

Преобразуем формулу (5.1.2.1), положив $\delta = t\sigma$. В результате получим $P(|\xi - a| < t\sigma) = 2\Phi(t)$. Полагая последовательно $t = 1, 2, 3$, имеем:

$$P(|\xi - a| < \sigma) = 2\Phi(1) = 0{,}6428;$$

$$P(|\xi - a| < 2\sigma) = 2\Phi(2) = 0{,}9545;$$

$$P(|\xi - a| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 0{,}9973.$$

Из последнего равенства следует, что практическое рассеивание нормально распределённой случайной величины лежит в пределах $(a-3\sigma; a+3\sigma)$. Вероятность того, что случайная величина, окажется вне этого промежутка, равна 0,0027, то есть событие может произойти лишь в 0,27 % случаев. В теории вероятностей и математической статистике такие события называются *практически невозможными*. В этом и состоит *правило трёх сигм*: если случайная величина имеет нормальное распределение, то отклонение этой величины от математического ожидания по абсолютной величине не превосходит утроенного среднего квадратического отклонения.

Поэтому трёхсигмовые границы принимаются за границы практически предельных возможных значений нормально распределённой случайной величины. Используя это правило, можно ориентировочно оценить среднее квадратическое отклонение. Для этого вычисляют размах наблюдаемой случайной величины $R = x_{\max} - x_{\min}$. Тогда на основании правила трёх сигм имеем: $\sigma = \frac{1}{6}R$.

При решении практических задач используются квантили нормального распределения. Квантилем $u_{\alpha/2}$, соответствующим уровню вероятности $P = 1-\alpha$, называется такое значение нормированной переменной $u = u_{\alpha/2}$, при котором выполняется равенство: $P\left(|u| < u_{\alpha/2}\right) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-u_{\alpha/2}}^{u_{\alpha/2}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx = 1-\alpha$. С геометрической точки зрения, нахождение квантиля $u_{\alpha/2}$ заключается в таком выборе значения $u = u_{\alpha/2}$, при котором суммарная площадь криволинейных трапеций, лежащих левее $-u_{\alpha/2}$ и правее $u_{\alpha/2}$ под кривой Гаусса, равна числу α. Квантили нормального распределения, соответствующие вероятности $1-\alpha$, являются аргументами функции Лапласа: $P\left(|u| < u_{\alpha/2}\right) = 2\Phi(u_{\alpha/2}) = 1-\alpha$. Значения наиболее используемых квантилей нормального распределения приведены в таблице:

$P = 1-\alpha$	0	0,95	0,99	0,9973	0,9999
$u_{\alpha/2}$	0	1,96	2,58	3,00	3,37

В остальных случаях используется приложение 3.

5.1.3 Стандартное нормальное распределение

Нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией называется стандартным нормальным распределением.

Непрерывная случайная величина ξ распределена по стандартному нормальному закону с плотностью вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}. \qquad (5.1.3.1)$$

Функция распределения для стандартного нормального распределения имеет вид

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \Phi(x) + 0{,}5. \tag{5.1.3.2}$$

Математическое ожидание $M(\xi) = 0$.

Дисперсия $D(\xi) = 1$.

Среднее квадратическое отклонение $\sigma_\xi = 1$.

Вероятность попадания случайной величины ξ, которая имеет стандартное нормальное распределение, в интервал $(\alpha; \beta)$ вычисляется по следующей формуле

$$P(\alpha < \xi < \beta) = \Phi(\beta) - \Phi(\alpha). \tag{5.1.3.3}$$

5.1.4 Логарифмическое нормальное распределение

Случайная величина ξ называется логарифмически нормально распределённой, если её логарифм $\ln\xi$ подчинён нормальному закону распределения. Это означает, в частности, что значения этой случайной величины формируются под воздействием очень большого числа взаимно независимых факторов, причём воздействие каждого отдельного фактора «равномерно незначительно» и равновероятно по знаку. При этом в отличие от схемы формирования механизма нормального закона последовательный характер воздействия случайных факторов таков, что случайный прирост, вызываемый действием каждого следующего фактора, пропорционален уже достигнутому к этому моменту значению исследуемой величины (в этом случае говорят о мультипликативном характере воздействия фактора). Этому распределению с хорошим приближением подчиняется, например, размер частиц при дроблении какого-либо материала (камня и т. п.), содержание многих минералов в породах. Данный закон, чаще всего, используется для описания распределения поступления денежных средств (доходов), банковских вкладов, износа основных средств и т.д. Логнормальное распределение часто используют в математической статистике и эконометрике.

Логарифмическое нормальное распределение является распределением положительной случайной величины, логарифм которой имеет гауссово распределение. Случайная величина ξ распределена по логарифмическому нормальному закону (логнормальному закону) с плотностью вероятности

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \cdot x \cdot \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln x - \mu)^2}{2\sigma^2}}. \tag{5.1.4.1}$$

В данном законе параметр сдвига μ и параметр масштаба σ являются средним значением и стандартным отклонением не самой случайной величины ξ, а ее логарифма $\ln\xi$.

Функция распределения для логнормального распределения имеет вид

$$F(x)=\frac{1}{\sigma\cdot\sqrt{2\pi}}\int_0^x \frac{1}{t}e^{-\frac{(\ln t-\mu)^2}{2\sigma^2}}dt=\frac{1}{2}\left(1+\operatorname{erf}\left(\frac{\ln x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right), \qquad (5.1.4.2)$$

где $\operatorname{erf} t=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^t e^{-z^2}dz$ - функция ошибок.

Плотность распределения, функцию распределения данного закона можно определить по специальным таблицам для нормированного нормального распределения, вычисляя квантиль по формуле $t=\frac{\ln x-\mu}{\sigma}$.

Математическое ожидание $M(\xi)=e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$.

Дисперсия $D(\xi)=e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2}-1\right)$.

Среднее квадратическое отклонение $\sigma_\xi=\sqrt{e^{2\mu+\sigma^2}\left(e^{\sigma^2}-1\right)}$.

Вероятность попадания случайной величины ξ, которая имеет логарифмическое нормальное распределение, в интервал $(\alpha;\beta)$ вычисляется по следующей формуле

$$P(\alpha<\xi<\beta)=\operatorname{erf}\left(\frac{\ln\beta-\mu}{\sigma}\right)-\operatorname{erf}\left(\frac{\ln\alpha-\mu}{\sigma}\right). \qquad (5.1.4.3)$$

5.1.5 Распределение χ^2 (хи-квадрат)

Распределение хи-квадрат используют при оценивании дисперсии (с помощью доверительного интервала), при проверке гипотез согласия, однородности, независимости, прежде всего для качественных (категоризованных) переменных, принимающих конечное число значений, и во многих других задачах статистического анализа данных.

Рассмотрим случайную величину ξ, распределённую по нормальному закону с математическим ожиданием $M(\xi)=a$ средним квадратическим отклонением σ.

Случайная величина $\chi=\xi-a/\sigma$ называется стандартизованной случайной величиной, распределённой по нормальному закону с параметрами $M(\chi)=0$ и $\sigma_\chi=1$. Квадрат стандартизованной случайной величины $\chi^2=\left(\frac{\xi-a}{\sigma}\right)^2$ называется случайной величиной χ^2 с одной степенью свободы.

Рассмотрим n независимых величин $\xi_1,\xi_2,...,\xi_n$, распределённых по нормальному закону с математическими ожиданиями $a_1,a_2,...,a_n$ и средними квадратическими отклонениями $\sigma_1,\sigma_2,...,\sigma_n$. Сумма квадратов стандартизованных переменных $\chi^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\xi_i - a_i}{\sigma_i} \right)^2$ называется *случайной величиной* χ^2 с числом степеней свободы $\nu = n$.

Плотность распределения случайной величины χ^2 имеет вид

$$f\left(\chi^2\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\nu/2}\Gamma\left(\nu/2\right)} \cdot \left(\chi^2\right)^{\frac{\nu}{2}-1} \cdot e^{-\frac{\chi^2}{2}}, \; \textit{если} \;\; \chi^2 \ge 0; \\ \qquad\qquad 0, \qquad\qquad\qquad \textit{если} \;\; \chi^2 < 0. \end{cases} \qquad (5.1.5.1)$$

Функция распределения случайной величины χ^2 имеет вид

$$F\left(\chi^2\right) = P\left(\chi^2 < \chi_0^2\right) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\nu/2}\Gamma\left(\nu/2\right)} \cdot \int\limits_0^{\chi_0^2} \left(\chi^2\right)^{\frac{\nu}{2}-1} e^{-\frac{\chi^2}{2}} d\left(\chi^2\right), \textit{если} \;\; \chi^2 \ge 0; \\ \qquad\qquad 0, \qquad\qquad\qquad \textit{если} \;\; \chi^2 < 0. \end{cases} \qquad (5.1.5.2)$$

На практике часто используются квантили χ^2- распределения - $\chi^2_{\alpha,\nu}$. Квантилем $\chi^2_{\alpha,\nu}$, отвечающим заданному уровню α, называется такое значение $\chi^2 = \chi^2_{\alpha,\nu}$, при котором $P\left(\chi^2 > \chi^2_{\alpha,\nu}\right) = \int\limits_{\chi^2_{\alpha,\nu}}^{+\infty} f\left(\chi^2\right) d\chi^2 = \alpha$. В приложении 4 приведены значения квантилей $\chi^2_{\alpha,\nu}$ в зависимости от числа ν степеней свободы и вероятностей α.

5.1.6 Распределение Стьюдента

В настоящее время распределение Стьюдента – одно из наиболее известных распределений среди используемых при анализе реальных данных. Его применяют при оценивании математического ожидания, прогнозного значения и других характеристик с помощью доверительных интервалов, по проверке гипотез о значениях математических ожиданий, коэффициентов регрессионной зависимости, гипотез однородности выборок и т.д.

Пусть $X, X_1, X_2, ..., X_n$ - независимые случайные величины, имеющие нормальное распределение с параметрами $M(X) = M(X_1) = ... = M(X_n) = 0$ и $\sigma_X = \sigma_{X_1} = ... = \sigma_{X_n} = 1$.

Случайная величина

$$t = \frac{X}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2}} = \frac{X}{\sqrt{\frac{1}{n}\chi^2}}, \qquad (5.1.6.1)$$

являющаяся функцией нормально распределённых случайных величин, называется *безразмерной дробью Стьюдента*.

Плотность распределения вероятностей случайной величины t имеет вид

$$f(t) = S(t,\nu) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi\nu}\cdot\Gamma\left(\nu/2\right)}\cdot\left(1+\frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}. \qquad (5.1.6.2)$$

Функция распределения вероятностей случайной величины t имеет вид

$$F(t) = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi\nu}\cdot\Gamma\left(\nu/2\right)}\cdot\int_{-\infty}^{t}\left(1+\frac{z^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} dz. \qquad (5.1.6.3)$$

Математическое ожидание $M(t) = 0$.

Дисперсия $D(t) = \dfrac{\nu}{\nu-2}\left(\nu \ge 3\right)$.

Среднее квадратическое отклонение $\sigma_t = \sqrt{\dfrac{\nu}{\nu-2}}\left(\nu \ge 3\right)$.

В приложении 5 приведены квантилей распределения Стьюдента $t_{\alpha/2;\,\nu}$ в зависимости от числа ν степеней свободы и заданного уровня вероятности α, найденного из решения уравнения $P\left(\left|t\right| > t_{\alpha/2;\,\nu}\right) = 2\int_{t_{\alpha/2;\,\nu}}^{+\infty} f(t)\,dt = \alpha$.

5.1.7 Распределение Фишера

Распределение Фишера (F-распределение) используют при проверке гипотез об адекватности модели в регрессионном анализе, о равенстве дисперсий и в других задачах прикладной статистики.

Пусть случайные величины $\chi_1, \chi_2, ..., \chi_m$ и $\eta_1, \eta_2, ..., \eta_n$ независимы и имеют нормальное распределение с параметрами

$$M\left(\chi_i\right) = M\left(\eta_j\right) = 0;\ D\left(\chi_i\right) = D\left(\eta_j\right) = 1\ \left(i = \overline{1;m};\ j = \overline{1;n}\right).$$

Безразмерная случайная величина

$$F = \frac{n\sum_{i=1}^{m}\chi_i^2}{m\sum_{j=1}^{n}\eta_j^2}$$

имеет распределение Фишера с плотностью распределения вероятностей

$$f(F)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{\nu_2}{2}\right)}\left(\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}}\dfrac{F^{\frac{\nu_1}{2}-1}}{\left(1+\dfrac{\nu_1}{\nu_2}F\right)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}}, & \text{если } F>0;\\ 0, & \text{если } F<0,\end{cases} \qquad (5.1.7.1)$$

где $\nu_1=m$ - число степеней свободы числителя случайной величины F; $\nu_2=n$ - число степеней свободы знаменателя случайной величины F.

Функция распределения Фишера имеет вид

$$R(F)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{\nu_1+\nu_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{\nu_1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{\nu_2}{2}\right)}\left(\dfrac{\nu_1}{\nu_2}\right)^{\frac{\nu_1}{2}}\displaystyle\int_0^F\dfrac{Z^{\frac{\nu_1}{2}-1}}{\left(1+\dfrac{\nu_1}{\nu_2}Z\right)^{\frac{\nu_1+\nu_2}{2}}}\,dZ, & \text{если } Z>0;\\ 0, & \text{если } Z<0.\end{cases} \qquad (5.1.7.2)$$

Математическое ожидание $M(F)=\dfrac{\nu_2}{\nu_2-2}$ $(\nu_2\ge 3)$.

Дисперсия $D(F)=\dfrac{2\nu_2^2}{\nu_2-4}\cdot\dfrac{\nu_1+\nu_2-2}{\nu_1(\nu_2-2)^2}$ $(\nu_2\ge 5)$.

Среднее квадратическое отклонение $\sigma_F=\dfrac{\nu_2}{\nu_2-2}\cdot\sqrt{\dfrac{2\cdot(\nu_1+\nu_2-2)}{\nu_1(\nu_2-4)}}$, $(\nu_2\ge 5)$.

В приложении 6 приведены значения квантилей F- распределения $F_{\alpha;\nu_1;\nu_2}$ в зависимости от числа степеней свободы ν_1 и ν_2. Значения квантилей найдены из решения уравнения $P\left(F>F_{\alpha;\nu_1;\nu_2}\right)=\displaystyle\int_{F_{\alpha;\nu_1;\nu_2}}^{+\infty} f(F)\,dF=\alpha$.

5.2 Примеры решения типовых задач

5.2.1 Математическое ожидание нормально распределённой случайной величины ξ равно $a=3$, а дисперсия равна $D(\xi)=16$. Записать выражения для плотности распределения вероятностей и функции распределения случайной величины ξ.

Решение. Находим среднее квадратическое отклонение: $\sigma=\sqrt{D(\xi)}=4$. Тогда, согласно формуле (5.1.1.1), выражение для плотности распределения вероятностей имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{4\cdot\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{2\cdot 4^2}} \text{ или } f(x)=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-3)^2}{32}}.$$

Функцию распределения определяем по формулам (5.1.1.2) и (5.1.1.4).

$$F(x) = \frac{1}{4\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(x-3)^2}{32}} dx \text{ или } F(x) = \Phi\left(\frac{x-3}{4}\right) + 0,5.$$

5.2.2 Автомат штампует детали. Контролируемая длина детали L распределена нормально с проектной длиной $60\,мм$. Фактическая длина изготовленных деталей не менее $48\,мм$ и не более $72\,мм$. Найти вероятность того, что длина наудачу взятой детали: а) больше $65\,мм$, б) меньше $53\,мм$.

Решение. Математическое ожидание случайной величины равно проектной длине детали, то есть $a = 60$ $мм$. Найдём среднее квадратическое отклонение из условия $P(48 < L < 72) = 1$. Воспользуемся формулой (5.1.1.3).

$$P(48 < \xi < 72) = \Phi\left(\frac{72-60}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{48-60}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{12}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{12}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{12}{\sigma}\right) = 1.$$

По таблице (приложение 3) находим $12/\sigma = 5$ или $\sigma = 2,4$.

Вычислим вероятности заданных событий:

а) $$P(65 < \xi < 72) = \Phi\left(\frac{72-60}{2,4}\right) - \Phi\left(\frac{65-60}{2,4}\right) = \Phi(5) - \Phi(2,08) =$$
$$= 0,5 - 0,48124 = 0,01876;$$

б) $$P(48 < \xi < 53) = \Phi\left(\frac{53-60}{2,4}\right) - \Phi\left(\frac{48-60}{2,4}\right) = \Phi(-2,92) - \Phi(-5) =$$
$$= -\Phi(2,92) + \Phi(5) = -0,49825 + 0,5 = 0,00175.$$

5.2.3 Производится измерение диаметра вала без систематических ошибок. Случайные ошибки измерения случайной величины ξ подчинены нормальному закону со средним квадратическим отклонением $\sigma = 5\,мм$. Вычислить вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине $\varepsilon = 10\,мм$.

Решение. Так как, систематические ошибки измерения диаметра вала отсутствуют, то математическое ожидание случайной величины ξ равно нулю. Вычислим вероятность того, что измерение будет произведено с ошибкой, не превосходящей по абсолютной величине $15\,мм$.

$$P(|\xi - a| < \varepsilon) = P(|\xi| < 10) = P(-10 < \xi < 10) = \Phi\left(\frac{10-0}{5}\right) - \Phi\left(\frac{-10-0}{5}\right) =$$
$$= \Phi(2) - \Phi(-2) = \Phi(2) + \Phi(2) = 2 \cdot \Phi(2) = 2 \cdot 0,47725 = 0,9545.$$

5.2.4 Случайные ошибки измерения прибором подчинены нормальному закону распределения со средним квадратическим отклонением $\sigma = 15\,мм$. Систематические ошибки измерения прибором отсутствуют. Найти вероятность того, что из четырёх независимых измерений ошибка хотя бы одного из них не превзойдёт по абсолютной величине $3\,мм$.

Решение. Для вычисления вероятности события A - того, что в четырёх независимых измерениях ошибка ξ хотя бы один раз не превзойдёт $3\,мм$, перейдём к событию, которое противоположно событию A, то есть к тому, что в результате проведённых четырёх измерений случайная величина ξ примет значение превосходящее по абсолютной величине $3\,мм$.

Вероятность того, что в результате одного измерения случайная величина ξ примет значение, превосходящее по абсолютной величине $3\,мм$ равна

$$p = 1 - P\left(|\xi| < 3\right) = 1 - P\left(-3 < \xi < 3\right) = 1 - \left(\Phi\left(\frac{3-0}{15}\right) - \Phi\left(\frac{-3-0}{15}\right)\right) =$$

$$= 1 - \left(\Phi(0,2) - \Phi(-0,2)\right) = 1 - 2\cdot\Phi(0,2) = 1 - 2\cdot 0,07926 = 0,84148.$$

Используя теорему умножения для независимых событий, находим вероятность противоположного события к событию A, то есть вероятность события $\overline{A}$: $P\left(\overline{A}\right) = p^4 = (0,84148)^4 \approx 0,7081$. Тогда вероятность заданного события равна

$$P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - 0,7081 = 0,2919.$$

5.2.5 Предприятие получило заказ на изготовление бильярдных шаров. Бильярдный шар при производстве считается годным, если отклонение D диаметра шара от проектного размера по абсолютной величине меньше $\varepsilon = 0,5\,мм$. Систематические отклонения диаметра от номинала отсутствуют. Считая, что случайная величина D распределена нормально со средним квадратическим отклонением $\sigma = 0,2\,мм$, найти, сколько будет годных бильярдных шаров среди двухсот шаров, изготовленных на заказ предприятием.

Решение. Так как, систематические отклонения диаметра от номинала отсутствуют, то математическое ожидание случайной величины D равно нулю.

Найдем вероятность того, случайная величина D отклонится от своего математического ожидания на величину $\varepsilon = 0,5\,мм$.

$$P\left(|D| < 0,05\right) = P\left(-0,5 < D < 0,5\right) = \Phi\left(\frac{0,5-0}{0,2}\right) - \Phi\left(\frac{-0,5-0}{0,2}\right) =$$

$$= \Phi\left(2,5\right) - \Phi\left(-2,5\right) = 2\cdot\Phi\left(2,5\right) = 2\cdot 0,49379 = 0,98758 \approx 0,99.$$

Таким образом, вероятность отклонения диаметра шара, меньшего 0,5, равна 0,99. Следовательно, примерно $0,99\cdot 200 = 198$ бильярдных шаров из двухсот шаров, изготовленных предприятием окажутся, годными.

5.2.6 Станок изготавливает детали, причём контролируется длина детали L. Считая, что L - нормально распределённая случайная величина с математическим ожиданием $a = 20\,мм$ и средним квадратическим отклонением $\sigma = 0,1\,мм$, найти интервал, в котором с вероятностью 0,99404 будут заключены длины изготовленных деталей.

Решение. Воспользуемся формулой (5.1.2.1): $P\left(\left|\xi - a\right| < \delta\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right)$. В условиях данной задачи $P\left(\left|L - 20\right| < \delta\right) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{0,1}\right) = 0,99404$, $\Phi\left(\frac{\delta}{0,1}\right) = 0,49702$.

Тогда, $\frac{\delta}{0,1} = 2,75$ или $\delta = 0,275$. Следовательно, интервал, в котором с вероятностью 0,99404 будут заключены длины изготовленных деталей, представляет собой промежуток: $(20 - 0,275; 20 + 0,275)$ или $(19,725; 20,275)$.

5.2.7 Случайная величина ξ распределена нормально с математическим ожиданием $a = 13$ и средним квадратическим отклонением $\sigma = 0,5$. Найти интервал, в который с вероятностью 0,9973 попадёт случайная величина ξ в результате испытания.

Решение. Воспользуемся правилом трёх сигм: $(a - 3\sigma; a + 3\sigma)$. В условиях данной задачи интервал, в который с вероятностью 0,9973 попадёт случайная величина ξ в результате испытания, имеет вид: $(13 - 3\cdot 0,5; 13 + 3\cdot 0,5)$ или $(11,5; 14,5)$.

5.3 Задания для решения на практическом занятии

5.3.1 Случайная величина ξ подчинена нормальному закону с математическим ожиданием $a = M(\xi) = 4$ и дисперсией $D(\xi) = 16$. Найти выражения для плотности распределения и функции распределения вероятностей. Построить графики функции распределения и плотности распределения вероятностей случайной величины ξ. Определить вероятность неравенства $2 < \xi < 5$.

5.3.2 Плотность распределения вероятностей случайной величины ξ задана выражением $f(x) = k \cdot e^{-\frac{(x-3)^2}{18}}$. Найти коэффициент k и определить вероятность того, что в результате опыта случайная величина ξ отклонится от своего математического ожидания не более чем на 1,5.

5.3.3 Плотность распределения вероятностей случайной величины ξ задана выражением $f(x) = k \cdot e^{-\frac{1}{32}x^2 + \frac{5}{16}x + 2}$. Найти неизвестный параметр k и функцию распределения случайной величины ξ. Определить математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратическое отклонение. Построить графики плотности распределения и функции распределения. Найти вероятность того, что случайная величина ξ попадёт в интервал $(4,1; 6,2)$.

5.3.4 Измерительный прибор имеет систематическую ошибку $5\ м$ и среднее квадратическое отклонение $\sigma = 2\ м$. Найти вероятность того, что ошибка измерения превзойдёт $10\ м$?

5.3.5 Автоматический станок производит однотипные изделия, номинальный размер которых $4\,см$. Вследствие неточности изготовления размер изделия является случайной величиной ξ, распределённой по нормальному закону со среднеквадратичным отклонением $\sigma = 0,05\,см$, а систематические отклонения размера отсутствуют. При контроле отбраковывают все изделия, размер которых отличается от номинального размера больше, чем на $0,1\,см$. Определить, какой процент изделий в среднем будет отбраковываться.

5.3.6 Производится три независимых измерения прибором, имеющим систематическую ошибку $3\,мм$ и среднеквадратичное отклонение $5\,мм$. Найти вероятность того, что измеренные значения будут отклоняться от истинного не более, чем на $7\,мм$.

5.3.7 Какой процент изделий из числа отобранных с разбросом ±15 %, подчиняющихся нормальному закону распределения, будет иметь отклонение от номинала 0 до +2 %, если предположить, что весь диапазон разбросов изделий соответствует 3σ?

5.3.8 Ошибка измерения дальности радиолокатором имеет нормальный закон распределения. Систематические ошибки измерения дальности отсутствуют, а среднеквадратичное отклонение равно $5\,м$. Сколько необходимо произвести измерений, чтобы с вероятностью 0,9545 ошибка хотя бы одного из них не превосходила по абсолютной величине $3\,м$?

5.3.9 Считается, что изделие – первого сорта, если отклонение его размера от номинала не превосходит по абсолютной величине $2,4\,мм$. Случайные отклонения размера изделия от номинала подчиняются нормальному закону распределения со среднеквадратичным отклонением $2\,мм$, при этом систематические отклонения отсутствуют. Найти среднее число изделий первого сорта, если изготавливается 200 изделий.

5.3.10 Средний вес взрослого человека является случайной величиной, распределённой по нормальному закону, с математическим ожиданием $62\,кг$ и среднеквадратичным отклонением $8\,кг$. Найти вероятность того, что хотя бы один из случайно выбранных десяти взрослых человек будет иметь вес от 54 до $73\,кг$.

5.3.11 Диаметр втулок, изготовленных на предприятии, подчиняется нормальному закону распределения с математическим ожиданием $3\,см$ и среднеквадратичным отклонением $0,02\,см$. В каких границах можно гарантировать величину диаметров втулок, если за вероятность практической достоверности принимается 0,9973?

5.3.12 Детали, выпускаемые предприятием, считаются первого сорта, если отклонения их размеров от номинала не превосходят по абсолютной величине $0,8\,мм$. Случайные отклонения размера детали от номинала подчиняются нормальному закону распределения со среднеквадратичным отклонением, равным $0,5\,мм$. Систематические отклонения отсутствуют. Найти среднее число изделий первого сорта среди выбранных случайным образом 10 деталей.

5.3.13 Станок изготавливает детали, причём контролируется длина детали L. Считая, что L - нормально распределённая случайная величина с математическим ожиданием $a = 10\,мм$ и средним квадратическим отклонением $\sigma = 0,2\,мм$, найти интервал, в котором с вероятностью 0,9216 будут заключены длины изготовленных деталей.

5.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

5.4.1 Найти вероятность того, что событие A наступит не менее m_1 раз, но не более m_2 раза в n независимых испытаниях. Вероятность наступления события A в отдельно взятом испытании равна вероятности того, что непрерывная случайная величина ξ попадёт в интервал $(\alpha;\beta)$. Плотность распределения вероятностей случайной величины ξ имеет вид $f(x) = k \cdot e^{ax^2+bx+c}$. Найти неизвестный параметр k и функцию распределения случайной величины ξ. Определить математическое ожидание, дисперсию и среднеквадратическое отклонение этой случайной величины. Построить график плотности распределения случайной величины ξ. Ниже указаны исходные данные для каждого варианта.

5.4.1.1 $m_1 = 2,\ m_2 = 4,\ n = 6,$ $\alpha = 0,75,\ \beta = 1,25,$ $a = -2,\ b = 4,\ c = 5.$

5.4.1.2 $m_1 = 1,\ m_2 = 3,\ n = 5,$ $\alpha = 3,8,\ \beta = 4,1,$ $a = -8,\ b = 16,\ c = 3.$

5.4.1.3 $m_1 = 2,\ m_2 = 5,\ n = 7,$ $\alpha = -1,\ \beta = 3,$ $a = -\dfrac{1}{18},\ b = \dfrac{2}{9},\ c = -\dfrac{11}{9}.$

5.4.1.4 $m_1 = 4,\ m_2 = 7,\ n = 8,$ $\alpha = 2,5,\ \beta = 4,$ $a = -\dfrac{1}{8},\ b = \dfrac{3}{4},\ c = -\dfrac{17}{8}.$

5.4.1.5 $m_1 = 3,\ m_2 = 5,\ n = 9,$ $\alpha = 3,\ \beta = 8,$ $a = -\dfrac{1}{50},\ b = \dfrac{4}{25},\ c = \dfrac{17}{25}.$

5.4.1.6 $m_1 = 6,\ m_2 = 8,\ n = 10,$ $\alpha = 4,\ \beta = 7,$ $a = -\dfrac{1}{32},\ b = \dfrac{5}{16},\ c = \dfrac{7}{32}.$

5.4.1.7 $m_1 = 2,\ m_2 = 3,\ n = 5,$ $\alpha = 0,9,\ \beta = 1,4,$ $a = -\dfrac{1}{8},\ b = \dfrac{1}{4},\ c = \dfrac{23}{8}.$

5.4.1.8 $m_1 = 1,\ m_2 = 5,\ n = 6,$ $\alpha = 1,5,\ \beta = 2,2,$ $a = -\dfrac{1}{2},\ b = 2,\ c = 4.$

5.4.1.9 $m_1 = 2, m_2 = 4, n = 7,$
$\alpha = 3, \beta = 8,$
$a = -\frac{1}{98}, b = \frac{7}{49}, c = \frac{1}{2}.$

5.4.1.10 $m_1 = 4, m_2 = 6, n = 8,$
$\alpha = 7, \beta = 11,$
$a = -\frac{1}{128}, b = \frac{81}{64}, c = 1.$

5.4.1.11 $m_1 = 3, m_2 = 5, n = 9,$
$\alpha = 2{,}75, \beta = 3{,}25,$
$a = -4{,}5, b = 27, c = -38.$

5.4.1.12 $m_1 = 7, m_2 = 9, n = 10,$
$\alpha = 1{,}85, \beta = 2{,}1,$
$a = -8, b = 32, c = 36.$

5.4.1.13 $m_1 = 3, m_2 = 4, n = 5,$
$\alpha = 3{,}8, \beta = 3{,}95,$
$a = -\frac{25}{2}, b = 100, c = 2.$

5.4.1.14 $m_1 = 2, m_2 = 5, n = 6,$
$\alpha = 4{,}9, \beta = 5{,}1,$
$a = -18, b = 180, c = -4.$

5.4.1.15 $m_1 = 1, m_2 = 2, n = 7,$
$\alpha = 5{,}95, \beta = 6{,}1,$
$a = -\frac{49}{2}, b = 294, c = 8.$

5.4.1.16 $m_1 = 5, m_2 = 7, n = 8,$
$\alpha = -1{,}25, \beta = -0{,}85,$
$a = -2, b = -4, c = 6.$

5.4.1.17 $m_1 = 4, m_2 = 7, n = 9,$
$\alpha = -4{,}2, \beta = -3{,}9,$
$a = -8, b = -16, c = 4.$

5.4.1.18 $m_1 = 6, m_2 = 9, n = 10,$
$\alpha = -2{,}3, \beta = 0{,}3,$
$a = -\frac{1}{18}, b = -\frac{2}{9}, c = 2.$

5.4.1.19 $m_1 = 3, m_2 = 4, n = 5,$
$\alpha = -2{,}5, \beta = -1{,}5,$
$a = -\frac{1}{8}, b = -\frac{3}{4}, c = \frac{5}{4}.$

5.4.1.20 $m_1 = 2, m_2 = 4, n = 6,$
$\alpha = -4{,}5, \beta = -3,$
$a = -\frac{1}{50}, b = -\frac{4}{25}, c = 1.$

5.4.1.21 $m_1 = 4, m_2 = 6, n = 7,$
$\alpha = -5{,}4, \beta = -4,$
$a = -\frac{1}{32}, b = -\frac{5}{16}, c = 6.$

5.4.1.22 $m_1 = 4, m_2 = 7, n = 8,$
$\alpha = -1{,}2, \beta = 0{,}8,$
$a = -\frac{1}{8}, b = -\frac{1}{4}, c = \frac{3}{8}.$

5.4.1.23 $m_1 = 2, m_2 = 4, n = 9,$
$\alpha = -2{,}5, \beta = -2{,}3,$
$a = -\frac{1}{2}, b = -2, c = 6.$

5.4.1.24 $m_1 = 7, m_2 = 9, n = 10,$
$\alpha = -7{,}5, \beta = -6,$
$a = -\frac{1}{98}, b = -\frac{7}{49}, c = \frac{1}{4}.$

5.4.1.25 $m_1 = 3, m_2 = 5, n = 5,$
$\alpha = -11, \beta = -4,$
$a = -\frac{1}{128}, b = -\frac{81}{64}, c = 1.$

5.4.1.26 $m_1 = 2, m_2 = 4, n = 6,$
$\alpha = -3{,}15, \beta = -2,$
$a = -4{,}5, b = -27, c = 5.$

5.4.1.27 $m_1 = 5, m_2 = 6, n = 7,$
$\alpha = -2,65, \beta = -1,85,$
$a = -8, b = -32, c = 15.$

5.4.1.28 $m_1 = 2, m_2 = 5, n = 8,$
$\alpha = -4,15, \beta = -3,$
$a = -\frac{25}{2}, b = -100, c = 2.$

5.4.1.29 $m_1 = 5, m_2 = 6, n = 9,$
$\alpha = -5,2, \beta = -4,9,$
$a = -18, b = -180, c = 3.$

5.4.1.30 $m_1 = 6, m_2 = 8, n = 10,$
$\alpha = -7,05, \beta = -6,$
$a = -\frac{49}{2}, b = -294, c = 3.$

6 ДИСКРЕТНЫЕ МНОГОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ (практическое занятие № 16)

Содержание: распределение вероятностей многомерных дискретных случайных величин, функция распределения многомерной случайной величины, условные распределения двумерных случайных величин, зависимые и независимые случайные величины, числовые характеристики дискретных двумерных случайных величин.

6.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Во многих экономических приложениях любому элементарному исходу $\omega \in \Omega$ ставится в соответствие не одно, а несколько (в общем случае n) действительных чисел. При этом говорят, что эксперимент описывается n-мерной случайной величиной, или системой n случайных величин, или n-мерным вектором $\left(\xi_1(\omega); \xi_2(\omega); ...; \xi_n(\omega)\right)$.

Рассмотрим подробно двумерную случайную величину. Для n-мерной случайной величины указанные понятия определяются аналогично.

Пусть ξ и η - две дискретные случайные величины, которые определены на одном и том же пространстве элементарных событий Ω. Упорядоченную пару $(\xi; \eta)$ дискретных случайных величин ξ и η называют *двумерной случайной величиной*. Множество возможных значений такой случайной величины содержит конечное или счётное число точек $\left(x_i; y_j\right)$, $i, j = \overline{1,\infty}$: $\Omega_{\xi\eta} = \left\{\left(x_1; y_1\right); \left(x_1; y_2\right); ...; \left(x_2; y_1\right); \left(x_2; y_2\right); \ ...; \left(x_3; y_1\right); \left(x_3; y_2\right); ...\right\}$.

Определение 6.1.1 *Распределением* дискретной двумерной случайной величины $(\xi; \eta)$ или *законом распределения* называется соответствие, по которому каждой паре точек $\left(x_i; y_j\right) \in \Omega_{\xi\eta}$ сопоставляется положительное число p_{ij}, характеризующее вероятность того, что составляющая ξ примет значение x_i и одновременно с этим составляющая η примет значение y_j таким образом, чтобы это число, которое называется вероятностью события $P\left(\left(\xi = x_i\right)\cdot\left(\eta = y_j\right)\right) =$ $= P\left(A\right)$, удовлетворяло аксиомам Колмогорова (определение 5.1.1.1).

Числовую функцию $P_{\xi\eta} = p_{i\,j}$ называют *функцией вероятностей*. Функцию вероятностей можно задать в виде таблицы.

Функцию вероятностей $P_{\xi\eta} = p_{i\,j}$ дискретной случайной величины $\left(\xi;\eta\right)$ можно задать в виде таблицы:

Ω_ξ / Ω_η	x_1	x_2	$\ldots$	x_i	$\ldots$	x_n	Распределение составляющей η
y_1	p_{11}	p_{21}	$\ldots$	p_{i1}	$\ldots$	p_{n1}	$P\left(\eta = y_1\right)$
y_2	p_{12}	p_{22}	$\ldots$	p_{i2}	$\ldots$	$p_{n\,2}$	$P\left(\eta = y_2\right)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_j	$p_{1\,j}$	$p_{2\,j}$	$\ldots$	$p_{i\,j}$	$\ldots$	$p_{n\,j}$	$P\left(\eta = y_j\right)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
y_m	p_{1m}	p_{2m}	$\ldots$	$p_{i\,m}$	$\ldots$	$p_{n\,m}$	$P\left(\eta = y_m\right)$
Распределение составляющей ξ	$P\left(\xi = x_1\right)$	$P\left(\xi = x_2\right)$	$\ldots$	$P\left(\xi = x_i\right)$	$\ldots$	$P\left(\xi = x_n\right)$	Контроль $\sum\limits_i \sum\limits_j p_{i\,j} = 1$

В клетках, стоящих на пересечении *i*-го столбца *j*-ой строки, указана вероятность того, что случайная величина $\left(\xi,\eta\right)$ примет значение $\left(x_i;\, y_j\right)$, то есть $p_{i\,j} = P\left(\left(\xi = x_i\right)\cdot\left(\eta = y_j\right)\right)$. Зная функцию вероятностей $P_{\xi\eta} = p_{i\,j}$, можно вычислить вероятность появления произвольного события C: $P\left(C\right) = \sum\limits_{(x_i;y_j)\in C} p_{i\,j}$.

Зная распределение $P_{\xi\eta}$ дискретной случайной величины $\left(\xi;\eta\right)$, можно найти распределение P_ξ и P_η составляющих ξ и η.

Для нахождения вероятности $P\left(\xi = x_i\right)$ надо просуммировать вероятности столбца x_i:

$$\begin{gathered} P\left(\xi = x_i\right) = P\left(\left(\xi = x_i\right)\cdot\left(\eta = y_1\right)\right) + P\left(\left(\xi = x_i\right)\cdot\left(\eta = y_2\right)\right) + \ldots \\ \ldots + P\left(\left(\xi = x_i\right)\cdot\left(\eta = y_m\right)\right) = \sum_j p_{i\,j} = p_{i\circ}. \end{gathered} \tag{6.1.1}$$

Аналогично, сложив вероятность строки j, получаем вероятность

$$P\left(\eta = y_j\right) = P\Big(\left(\xi = x_1\right)\cdot\left(\eta = y_j\right)\Big) + P\Big(\left(\xi = x_2\right)\cdot\left(\eta = y_j\right)\Big) + \ldots$$
$$\ldots + P\Big(\left(\xi = x_n\right)\cdot\left(\eta = y_j\right)\Big) = \sum_i p_{i\,j} = p_{\circ\, j}. \qquad (6.1.2)$$

Распределения вероятностей, определяемыми наборами $p_{i\circ}$ и $p_{0\,j}$, называются *маргинальными распределениями* составляющих ξ и η дискретной двумерной случайной величины $(\xi;\eta)$, соответственно. На краях таблицы указаны маргинальные распределения («margo» (лат.) – граница, край).

По аналогии с распределением двумерной случайной величины определяется распределение $P_{\xi_1,\,\xi_2,\,\ldots,\,\xi_n} = p_{i\,j\ldots n}$ n-мерной случайной величины: $p_{i\,j\ldots n} = P\Big(\left(\xi_1 = x_i\right)\cdot\left(\xi_2 = x_j\right)\cdot\ldots\cdot\left(\xi_n = x_n\right)\Big)$.

Распределение произвольной n-мерной случайной величины (дискретной или непрерывной) однозначно может быть выражено через функцию распределения этой случайной величины.

Определение 6.1.2 *Функцией распределения n*-мерной случайной величины $\left(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\right)$ называется вероятность появления события $\left\{\left(\xi_1 < x_1\right)\cdot\left(\xi_2 < x_2\right)\cdot\ldots\cdot\left(\xi_n < x_n\right)\right\}$, которая рассматривается как функция переменных $x_1, x_2, \ldots x_n$: $F\left(x_1, x_2, \ldots x_n\right) = P\Big(\left(\xi_1 < x_1\right)\cdot\left(\xi_2 < x_2\right)\cdot\ldots\cdot\left(\xi_n < x_n\right)\Big)$.

Функция распределения двумерной случайной величины $(\xi;\eta)$ имеет вид

$$F\left(x;\, y\right) = P\Big(\left(\xi < x\right)\cdot\left(\eta < y\right)\Big). \qquad (6.1.3)$$

Приведём основные свойства функции распределения СВ $(\xi;\eta)$:

1) $\forall x,\, y \in \Omega_{\xi\eta}\ \ 0 \le F(x;\, y) \le 1$;

2) функция $F(x;y)$ является неубывающей по каждому из аргументов, то есть $\forall\ x_2 > x_1 \to F\left(x_2;\, y\right) \ge F\left(x_1;\, y\right)$ и $\forall\ y_2 > y_1 \to F\left(x;\, y_2\right) \ge F\left(x;\, y_1\right)$;

3) функция $F\left(x;\, y\right)$ непрерывна слева по каждому из аргументов;

4) справедливы предельные соотношения:

а) $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x;y) = F(-\infty;y) = 0$, б) $\lim\limits_{y\to-\infty} F(x;y) = F(x;-\infty) = 0$,

в) $\lim\limits_{\substack{x\to-\infty\\ y\to-\infty}} F(x;y) = F(-\infty;-\infty) = 0$, г) $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} F(x;y) = F(+\infty;+\infty) = 1$;

5) при значении $y \to +\infty$ функция распределения двумерной случайной величины $(\xi;\eta)$ становится маргинальной функцией распределения составляющей ξ: $F(x;+\infty) = P\Big(\left(\xi < x\right)\cdot\left(\eta < +\infty\right)\Big) = P\left(\xi < x\right) = F_1(x)$. Функцию $F_1(x)$ называют *граничной* или *разделённой* функцией распределения составляющей ξ;

6) при значении $x \to +\infty$ функция распределения двумерной случайной величины $(\xi;\eta)$ становится маргинальной функцией распределения со-

ставляющей η: $F(+\infty; y) = P\big((\xi < +\infty)\cdot(\eta < y)\big) = P(\eta < y) = F_2(y)$. Функцию $F_2(y)$ называют *граничной* или *разделённой* функцией распределения составляющей η.

Все свойства функции распределения, приведённые для двумерной случайной величины, распространяются на многомерные случайные величины.

1. Функция распределения *n*-мерной случайной величины неотрицательна и не может быть больше единицы.
2. Если хотя бы одна из составляющих *n*-мерной случайной величины принимает значение $-\infty$, то функция распределения равна нулю.
3. Если $x_1 = x_2 = ... = x_n = +\infty$, то функция распределения равна 1.
4. Функция распределения является неубывающей функцией.
5. Функция распределения непрерывна слева по каждому из аргументов.
6. Если какие-либо k из составляющих $\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n$ *n*-мерной случайной величины принимают значения ∞, то функция распределения *n*-мерной случайной величины становится равной функции распределения (*n*-*k*)-мерной случайной величины.

Условные распределения составляющих многомерных случайных величин, зависимые и независимые случайные величины, а так же числовые характеристики многомерных случайных величин, рассмотрим на примере двумерной случайной величины $(\xi;\eta)$.

Определение 6.1.3 *Условным распределением* составляющей ξ дискретной случайной величины $(\xi;\eta)$ называется распределение, вычисляемое при условии, что составляющая η приняла определённое значение.

Из определения следует, что условные распределения характеризуют взаимосвязи между составляющими ξ и η случайной величины $(\xi;\eta)$. Условное распределение составляющей ξ дискретной случайной величины $(\xi;\eta)$ может быть задано условной функцией вероятностей, выражающей вероятность того, что составляющая ξ примет значение x_i при условии, что составляющая η приняла значение y_j:

$$p_{i|j} = P\left(\xi = x_i \middle| \eta = y_j\right) = \frac{P\big((\xi = x_i)\cdot(\eta = y_j)\big)}{P(\eta = y_j)}. \qquad (6.1.4)$$

Аналогично, условная функция вероятностей составляющей η имеет вид

$$p_{j|i} = P\left(\eta = y_j \middle| \xi = x_i\right) = \frac{P\big((\xi = x_i)\cdot(\eta = y_j)\big)}{P(\xi = x_i)}. \qquad (6.1.5)$$

Определение 6.1.4 Пусть $F(x, y)$ - функция распределения дискретной случайной величины $(\xi;\eta)$, а $F_1(x)$ и $F_2(y)$ - маргинальные функции распределения составляющих ξ и η. Говорят, что две случайные величины, составляющие ξ и η, независимы, если для всех $(x, y) \in \Omega_{\xi\eta}$ справедливо равенство

$$F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y). \tag{6.1.6}$$

Теорема 6.1.1 Если СВ $(\xi; \eta)$ - дискретная, то равенство

$$p_{ij} = p_{i\circ} \cdot p_{\circ j} \tag{6.1.7}$$

является необходимым и достаточным условием независимости СВ ξ и η.

Вероятность попадания случайной величины $(\xi; \eta)$ в прямоугольник $\Pi = \{(\xi;\eta) | x_1 \le \xi \le x_2 \wedge y_1 \le \eta \le y_2\}$ находится по формуле

$$P\left((x_1 \le \xi \le x_2) \cdot (y_1 \le \eta \le y_2)\right) = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1) \tag{6.1.8}$$

Рассмотрим числовые характеристики двумерных случайных величин.

Основными характеристиками, описывающими центр распределения дискретной случайной величины $(\xi; \eta)$, являются математические ожидания составляющих, определяемые по формулам:

$$m_\xi = \sum_i x_i p_{i\circ} = \sum_i \sum_j x_i p_{ij}, \tag{6.1.9}$$

$$m_\eta = \sum_j y_j p_{\circ j} = \sum_i \sum_j y_j p_{ij}. \tag{6.1.10}$$

Математические ожидания m_ξ и m_η определяют координаты центра распределения. Кроме этих основных характеристик, центр распределения характеризуется модами и медианами (практическое занятие № 11).

Рассеивание составляющих дискретной случайной величины $(\xi; \eta)$ определяется дисперсиями, которые определяются по формулам:

$$D(\xi) = \sigma_\xi^2 = M\left(\xi - m_\xi\right)^2 = M\left(\xi^2\right) - m_\xi^2, \tag{6.1.11}$$

$$D(\eta) = \sigma_\eta^2 = M\left(\eta - m_\eta\right)^2 = M\left(\eta^2\right) - m_\eta^2. \tag{6.1.12}$$

Используя формулы (6.1.9) и (6.1.10), имеем:

$$D(\xi) = \sum_i \sum_j \left(x_i - m_\xi\right)^2 p_{ij} = \sum_i x_i^2 p_{i\circ} - m_\xi^2, \tag{6.1.13}$$

$$D(\eta) = \sum_i \sum_j \left(y_j - m_\eta\right)^2 p_{ij} = \sum_j y_j^2 p_{\circ j} - m_\eta^2. \tag{6.1.14}$$

Положительные квадратные корни из дисперсий составляющих ξ и η называются *средними квадратическими отклонениями* составляющих ξ и η или стандартами: $\sigma_\xi = \sqrt{D(\xi)}$, $\sigma_\eta = \sqrt{D(\eta)}$.

Рассеивание составляющих ξ и η также характеризуется коэффициентами вариации составляющих и их размахами (практическое занятие № 11).

Основной характеристикой, которая описывает связь между составляющими ξ и η случайной величины $(\xi; \eta)$, является *ковариация*, которая также называется *корреляционным моментом* или *моментом связи* $K_{\xi\eta}$ и определяется по формуле (ковариация также обозначается $\mu_{\xi\eta}$):

$$K_{\xi\eta} = \operatorname{cov}(\xi;\eta) = M\left(\left(\xi - m_\xi\right)\cdot\left(\eta - m_\eta\right)\right). \qquad (6.1.15)$$

Для дискретной случайной величины расчётную формулу для ковариации можно записать в виде

$$K_{\xi\eta} = \sum_i \sum_j \left(x_i - m_\xi\right)\cdot\left(y_j - m_\eta\right)\cdot p_{ij} = \sum_i \sum_j x_i y_j p_{ij} - m_\xi \cdot m_\eta . \qquad (6.1.16)$$

Для получения числовой характеристики, удобной для сравнения составляющих, эти составляющие ξ и η предварительно нормируют, то есть переходят к случайным величинам $\hat{\xi}$ $\hat{\eta}$, математические ожидания которых равны нулю, а их дисперсия – единице. Если положить $\hat{\xi} = \dfrac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi}$; $\eta = \dfrac{\eta - m_\eta}{\sigma_\eta}$, то ковариация нормированных случайных величин называется *коэффициентом корреляции* и определяется по формуле

$$\rho_{\xi\eta} = M\left(\hat{\xi}\cdot\hat{\eta}\right) = M\left(\left(\frac{\xi - m_\xi}{\sigma_\xi}\right)\cdot\left(\frac{\eta - m_\eta}{\sigma_\eta}\right)\right) = \frac{m_{\xi\eta} - m_\xi m_\eta}{\sigma_\xi \sigma_\eta} = \frac{K_{\xi\eta}}{\sigma_\xi \sigma_\eta}. \qquad (6.1.17)$$

Коэффициент корреляции не зависит от выбора единиц измерения случайных величин, то есть является безразмерной случайной величиной. Коэффициент корреляции $\rho_{\xi\eta}$ характеризует тесноту линейной связи между составляющими ξ и η случайной величины $(\xi;\eta)$. Приведём основные свойства коэффициента корреляции.

1) Абсолютная величина коэффициента корреляции не превосходит единицы, то есть $\left|\rho_{\xi\eta}\right| \le 1$.

2) Если $\rho_{\xi\eta} = \pm 1$, то между случайными величинами ξ и η существует линейная функциональная зависимость $\left(\left|\rho_{\xi\eta}\right| = 1 \leftrightarrow \eta = k\cdot\xi + b\right)$.

3) Если $\rho_{\xi\eta} \ne 0$, то случайные величины ξ и η зависимы.

Зависимость между составляющими ξ и η случайной величины $(\xi;\eta)$ может исследоваться с помощью условных распределений. Если окажется, что условные распределения равны безусловным, то говорят, что случайная величина ξ не зависит от случайной величины η. При этом условные распределения составляющих ξ и η случайной величины $(\xi;\eta)$ характеризуются условными числовыми характеристиками, условными математическими ожиданиями и дисперсиями этих составляющих.

Например, *условное математическое ожидание* составляющей ξ при условии, что дискретная случайная величина η приняла определённое значение y, находится по формуле

$$m_{\xi|\eta} = M\left(\xi\middle|\eta = y\right) = \sum_i x_i \cdot p_{i|j}\,. \qquad (6.1.18)$$

Аналогично определяется *условное математическое ожидание* составляющей η:

$$m_{\mu|\xi} = M\left(\eta\middle|\xi = x\right) = \sum_j y_j \cdot p_{j|i}\,. \qquad (6.1.19)$$

Условная дисперсия составляющей ξ при условии, что дискретная случайная величина η приняла определённое значение y, находится по формуле

$$\sigma^2_{\xi|\eta} = D\left(\xi\middle|\eta = y\right) = \sum_i \left(x_i - m_{\xi|\eta}\right)^2 \cdot p_{i|j}\,. \qquad (6.1.20)$$

Аналогично определяется *условная дисперсия составляющей* η:

$$\sigma^2_{\eta|\xi} = D\left(\eta\middle|\xi = x\right) = \sum_j \left(y_j - m_{\eta|\xi}\right)^2 \cdot p_{j|i}\,. \qquad (6.1.21)$$

6.2 Примеры решения типовых задач

6.2.1 Функция вероятностей $P_{\xi\eta} = p_{ij}$ дискретной случайной величины $(\xi;\eta)$ задана в виде таблицы.

Ω_η \ Ω_ξ	1	2	3
2	0,09	0,05	0,06
4	0,11	0,09	0,1
6	0,2	0,16	0,14

Требуется:

1) найти маргинальные распределения составляющих ξ и η дискретной случайной величины $(\xi;\eta)$;

2) установить, зависимы или нет составляющие ξ и η;

3) найти условные законы распределения;

4) вычислить математические ожидания, дисперсии и среднеквадратические отклонения составляющих ξ и η;

5) найти функцию распределения дискретной случайной величины $(\xi;\eta)$;

6) вычислить вероятность попадания случайной величины $(\xi;\eta)$ в прямоугольник $\Pi = \left\{(\xi;\eta)\middle|1{,}5 \le \xi \le 4 \wedge 3 \le \eta \le 7\right\}$;

7) вычислить коэффициент корреляции.

Решение. 1) Найдём маргинальные распределения составляющих ξ и η дискретной случайной величины $(\xi;\eta)$ по формулам (6.1.1) и (6.1.2). Например, $P(\xi = 1) = p_{11} + p_{21} + p_{31} = 0{,}09 + 0{,}11 + 0{,}2 = 0{,}4$, $P(\eta = 4) = p_{21} + {}$ ${} + p_{22} + p_{23} = 0{,}11 + 0{,}09 + 0{,}1 = 0{,}3$.

Маргинальные законы распределения запишем в виде таблиц.

$\xi = x_j$	1	2	3
$P(\xi = x_j)$	0,4	0,3	0,3

и

$\eta = y_i$	2	4	6
$P(\eta = y_i)$	0,2	0,3	0,5

2) Для определения зависимости составляющих ξ и η проверим равенство $P(\xi = x_i, \eta = y_j) = P(\xi = x_i) \cdot P(\eta = y_j)$ для всех значений составляющих. Если равенство выполняется, то составляющие независимы. Рассчитываем вероятности: $P(\xi = x_1, \eta = y_1) = 0{,}09 = P(\xi = x_1) \cdot P(\eta = y_1) = 0{,}4 \cdot 0{,}2 = 0{,}08$. Равенство неверно, следовательно, составляющие ξ и η случайной величины $(\xi;\eta)$ зависимы.

3) Найдём условные законы распределения по формулам (6.1.4) и (6.1.5).

Например, $p_{3|2} = P\left(\xi = x_3 \middle| \eta = y_2\right) = \dfrac{P\left((\xi = x_3)\cdot(\eta = y_2)\right)}{P(\eta = y_2)} =$

$= \dfrac{P\left((\xi = 3)\cdot(\eta = 4)\right)}{P(\eta = 4)} = \dfrac{0{,}1}{0{,}3} = \dfrac{1}{3}$, $p_{3|1} = P\left(\eta = y_3 \middle| \xi = x_1\right) = \dfrac{P\left((\xi = x_1)\cdot(\eta = y_3)\right)}{P(\xi = x_1)} =$

$= \dfrac{P\left((\xi = 1)\cdot(\eta = 3)\right)}{P(\xi = 1)} = \dfrac{0{,}2}{0{,}4} = \dfrac{1}{2}$.

Условные законы распределения запишем в виде таблиц.

$\xi = x_i$	1	2	3
$P(\eta = 2)$	9/20	1/4	3/10
$P(\eta = 4)$	11/30	3/10	1/3
$P(\eta = 6)$	2/5	8/25	7/25

и

$\eta = y_j$	2	4	6
$P(\xi = 1)$	9/40	1/6	1/5
$P(\xi = 2)$	11/40	3/10	1/3
$P(\xi = 3)$	1/2	8/15	7/15

4) Вычислим математические ожидания составляющих ξ и η случайной величины $(\xi;\eta)$. Для составляющей ξ математическое ожидание равно $M(\xi) = 1 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}3 = 1{,}9$, а для η - $M(\eta) = 2 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}3 + 6 \cdot 0{,}5 = 4{,}6$.

Находим дисперсии составляющих ξ и η случайной величины $(\xi;\eta)$. Для величины ξ дисперсия равна $D(\xi) = 1^2 \cdot 0{,}4 + 2^2 \cdot 0{,}3 + 3^2 \cdot 0{,}3 - 1{,}9^2 = 0{,}69$, а для составляющей η - $D(\eta) = 2^2 \cdot 0{,}2 + 4^2 \cdot 0{,}3 + 6^2 \cdot 0{,}5 - 4{,}6^2 = 2{,}44$.

Тогда среднеквадратические отклонения для составляющих случайной величины равны: $\sigma_\xi = \sqrt{D(\xi)} = \sqrt{0{,}69} \approx 0{,}83$, $\sigma_\eta = \sqrt{D(\eta)} = \sqrt{2{,}44} \approx 1{,}562$.

5) Найдём функцию распределения дискретной случайной величины $(\xi;\eta)$ по формуле (6.1.3): $F(x;y) = P\left((\xi < x)\cdot(\eta < y)\right) = \sum\limits_{x_i < x} \sum\limits_{y_j < y} p_{ij}$.

Если значения случайных величин $\xi \le 1; \eta \le k$, где k принимает любое значение, то функция распределения $F(x;y)$ равна нулю, так как не существует значений случайной величины, которые удовлетворяют неравенствам

$\xi \le 1; \eta \le k$. Аналогично, если $\xi \le m, \eta \le 2$, где m принимает любое значение, то функция распределения $F(x;y)$ так же равна нулю.

Если $\xi \le 1; 2 < \eta \le 4$, то $F(x;y) = p_{11} = 0{,}09$. Если $\xi \le 1; 4 < \eta \le 6$, то $F(x;y) = p_{11} + p_{21} = 0{,}09 + 0{,}11 = 0{,}2$.

Рассмотрим событие $\xi \le 1; \eta > 6$, то $F(x;y) = p_{11} + p_{21} + p_{31} = 0{,}09 + 0{,}11 + {}$ $+0{,}2 = 0{,}4$. Предположим, что составляющие случайной величины удовлетворяют условию $\xi \le 3, \eta \le 6$. В данном случае функция распределения равна $F(x;y) = p_{11} + p_{12} + p_{21} + p_{22} = 0{,}09 + 0{,}05 + 0{,}11 + 0{,}09 = 0{,}34$.

Запишем функцию распределения $F(x;y)$ двумерной случайной величины (ξ,η) в виде таблицы.

	$\xi \le 1$	$1 < \xi \le 2$	$2 < \xi \le 3$	$\xi > 3$
$\eta \le 2$	0	0	0	0
$2 < \eta \le 4$	0	0,09	0,14	0,2
$4 < \eta \le 6$	0	0,2	0,34	0,5
$\eta > 6$	0	0,4	0,7	1

6) Вычислим вероятность попадания случайной величины $(\xi;\eta)$ в прямоугольник $\Pi = \{(\xi;\eta) | 1{,}5 \le \xi \le 4 \wedge 3 \le \eta \le 7\}$, используя формулу (6.1.8).

$$P\big((1{,}5 \le \xi \le 4)\cdot(3 \le \eta \le 7)\big) = F(4;7) - F(1{,}5;7) - F(4;3) + F(1{,}5;3) =$$
$$= 1 - 0{,}4 - 0{,}2 + 0{,}09 = 0{,}049.$$

7) Вычислим коэффициент корреляции $\rho_{\xi\eta}$ по формуле (6.1.17), для чего вначале найдём ковариацию $K_{\xi\eta}$ по формуле (6.1.16).

$$K_{\xi\eta} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} x_i y_j p_{ij} - M(\xi)\cdot M(\eta) = 1\cdot 2\cdot 0{,}09 + 1\cdot 4\cdot 0{,}11 + 1\cdot 6\cdot 0{,}2 + 2\cdot 2\cdot 0{,}05 +$$
$$+2\cdot 4\cdot 0{,}09 + 2\cdot 6\cdot 0{,}16 + 3\cdot 2\cdot 0{,}06 + 3\cdot 4\cdot 0{,}1 + 3\cdot 6\cdot 0{,}14 - 1{,}9\cdot 4{,}6 = 0.$$

Следовательно, коэффициент корреляции равен

$$\rho_{\xi\eta} = \frac{K_{\xi\eta}}{\sigma_\xi \sigma_\eta} = \frac{0}{0{,}83\cdot 1{,}562} = 0.$$

Равенство нулю коэфициента корреляции ничего не говорит о зависимости составляющих. Во втором пункте мы доказали, что составляющие являются зависимыми.

6.3 Задания для решения на практическом занятии

6.3.1 Функция вероятностей $P_{\xi\eta} = p_{ij}$ дискретной случайной величины $(\xi;\eta)$ задана в виде таблицы

Ω_η \ Ω_ξ	3	5	7
1	0,03	0,07	0,09
2	0,12	0,08	0,3
4	0,14	0,15	0,02

Найти маргинальные распределения составляющих ξ и η дискретной случайной величины $(\xi;\eta)$. Установить зависимость составляющие ξ и η.

6.3.2 Функция вероятностей $P_{\xi\eta} = p_{i\,j}$ дискретной случайной величины $(\xi;\eta)$ задана в виде таблицы

Ω_η \ Ω_ξ	1	3	5	7
2	0,13	0,17	0,19	0,02
6	0,2	0,12	0,13	0,04

Найти условные законы распределения.

6.3.3 Функция вероятностей $P_{\xi\eta} = p_{i\,j}$ дискретной случайной величины $(\xi;\eta)$ задана в виде таблицы

Ω_η \ Ω_ξ	3	5
2	0,1	0,05
4	0,2	0,29
6	0,14	0,13
8	0,03	0,06

Найти математические ожидания, дисперсии и среднеквадратические отклонения составляющих ξ и η.

6.3.4 Функция вероятностей $P_{\xi\eta} = p_{i\,j}$ дискретной случайной величины $(\xi;\eta)$ задана в виде таблицы

Ω_η \ Ω_ξ	3	5	7
1	0,08	0,06	0,06
2	0,11	0,08	0,14
4	0,21	0,16	0,1

Найти функцию распределения дискретной случайной величины $(\xi;\eta)$. Вычислить вероятность попадания случайной величины $(\xi;\eta)$ в прямоугольник $\Pi=\{(\xi;\eta)|3,5\le\xi\le 8\wedge 1,5\le\eta\le 3,5\}$. Вычислить коэффициент корреляции.

6.3.5 Изготавливаемые на предприятии втулки сортируются по отклонению их внутреннего диаметра от номинального размера на четыре группы со значениями 0,02; 0,04; 0,06 и 0,08 мм и по овальности на четыре группы со значениями 0,01; 0,03; 0,05 и 0,07 мм. Совместное распределение отклонений диаметра (случайная величина ξ) и овальности (случайная величина η) втулок приведено в таблице

Ω_η \ Ω_ξ	0,02	0,04	0,06	0,08
0,01	0,08	0,08	0,10	0,04
0,03	0,02	0,03	0,04	0,02
0,05	0,04	0,04	0,02	0,01
0,07	0,06	0,15	0,24	0,03

Найти маргинальные распределения составляющих ξ и η дискретной случайной величины $(\xi;\eta)$. Установить, зависимы или нет составляющие ξ и η. Определить условные законы распределения составляющих. Вычислить математические ожидания, дисперсии и среднеквадратические отклонения составляющих ξ и η. Найти функцию распределения дискретной случайной величины $(\xi;\eta)$. Вычислить вероятность попадания случайной величины $(\xi;\eta)$ в прямоугольник $\Pi=\{(\xi;\eta)|0,05\le\xi\le 0,07\wedge 0,02\le\eta\le 0,08\}$ и коэффициент корреляции.

6.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

6.4.1 Функция вероятностей $P_{\xi\eta}=p_{ij}$ дискретной случайной величины $(\xi;\eta)$ задана в виде таблицы

Ω_η \ Ω_ξ	x_1	x_2	x_3
y_1	p_{11}	p_{12}	p_{13}
y_2	p_{21}	p_{22}	p_{23}

Требуется:

1) найти маргинальные распределения составляющих ξ и η дискретной случайной величины $(\xi;\eta)$;

2) установить, зависимы или нет составляющие ξ и η;

3) найти условные законы распределения;

4) вычислить математические ожидания, дисперсии и среднеквадратические отклонения составляющих ξ и η;

5) найти функцию распределения дискретной случайной величины $(\xi;\eta)$;

6) вычислить вероятность попадания случайной величины $(\xi;\eta)$ в прямоугольник $\Pi = \{(\xi;\eta) | x_1 + 0,5 \le \xi \le x_2 + 0,5 \wedge y_1 + 0,5 \le \eta \le y_2 + 1\}$;

7) вычислить коэффициент корреляции.

Исходные данные для каждого варианта приведены в таблице.

6.4.1.1

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	1	2	3
2	0,13	0,15	0,10
6	0,27	0,25	0,10

6.4.1.2

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	2	3	4
3	0,11	0,17	0,12
5	0,18	0,15	0,27

6.4.1.3

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	3	4	5
1	0,23	0,12	0,02
3	0,31	0,14	0,18

6.4.1.4

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	4	5	6
1	0,32	0,12	0,20
2	0,14	0,11	0,11

6.4.1.5

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	5	6	7
2	0,10	0,12	0,06
3	0,30	0,40	0,02

6.4.1.6

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	6	7	8
1	0,09	0,12	0,10
6	0,21	0,28	0,20

6.4.1.7

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	7	8	9
2	0,30	0,12	0,10
4	0,20	0,06	0,22

6.4.1.8

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	1	3	5
2	0,12	0,16	0,18
8	0,27	0,14	0,13

6.4.1.9

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	1	5	7
3	0,11	0,12	0,04
7	0,31	0,28	0,14

6.4.1.10

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	1	7	9
2	0,13	0,17	0,15
8	0,21	0,18	0,16

6.4.1.11

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	3	5	7
1	0,10	0,09	0,13
7	0,31	0,23	0,14

6.4.1.12

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	3	7	9
2	0,41	0,25	0,06
7	0,03	0,12	0,13

6.4.1.13

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	3	5	9
3	0,12	0,13	0,14
4	0,21	0,18	0,22

6.4.1.14

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	5	7	9
2	0,04	0,35	0,24
9	0,05	0,16	0,16

6.4.1.15

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	2	4	6
1	0,21	0,13	0,15
3	0,23	0,21	0,07

6.4.1.16

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	2	4	8
1	0,12	0,31	0,10
5	0,11	0,25	0,11

6.4.1.17

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	2	6	8
3	0,12	0,10	0,13
7	0,12	0,25	0,28

6.4.1.18

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	1	2	4
4	0,10	0,09	0,09
5	0,17	0,19	0,36

6.4.1.19

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	1	2	5
5	0,09	0,12	0,13
7	0,21	0,22	0,23

6.4.1.20

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	1	2	7
5	0,16	0,17	0,18
9	0,15	0,16	0,18

6.4.1.21

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	1	2	9
6	0,30	0,06	0,07
8	0,20	0,18	0,19

6.4.1.22

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	1	3	4
7	0,10	0,13	0,14
8	0,20	0,22	0,21

6.4.1.23

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	3	6	9
5	0,28	0,11	0,02
7	0,32	0,12	0,15

6.4.1.24

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	2	5	8
5	0,06	0,04	0,14
9	0,25	0,23	0,28

6.4.1.25

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	3	8	9
1	0,21	0,11	0,12
2	0,28	0,13	0,15

6.4.1.26

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	4	5	6
2	0,12	0,13	0,14
3	0,18	0,23	0,20

6.4.1.27

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	4	6	8
5	0,24	0,23	0,22
7	0,08	0,13	0,10

6.4.1.28

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	1	5	9
6	0,14	0,13	0,15
8	0,17	0,19	0,22

6.4.1.29

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	1	3	5
2	0,03	0,04	0,08
4	0,12	0,21	0,52

6.4.1.30

$\Omega_\eta \backslash \Omega_\xi$	6	7	8
5	0,06	0,08	0,11
9	0,21	0,23	0,31

7 НЕПРЕРЫВНЫЕ МНОГОМЕРНЫЕ СЛУЧАЙНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ

(практическое занятие № 17 и № 18 в третьем семестре)

Содержание: распределение вероятностей многомерных непрерывных случайных величин, функция и плотность распределения многомерной случайной величины, зависимые и независимые случайные величины, числовые характеристики непрерывных многомерных случайных величин, двумерное нормальное распределение, предельные теоремы теории вероятностей.

7.1 Теоретический материал по теме практического занятия

7.1.1 Непрерывные многомерные случайные величины

Функция распределения, рассмотренная на предыдущем практическом занятии, существует для любых многомерных случайных величин, как для дискретных, так и непрерывных. Определения и свойства функции распределения дискретных случайных величин будут справедливы для непрерывных случайных величин. На практике чаще всего встречаются многомерные непрерывные случайные величины. Дадим определение двумерной непрерывной случайной величины $(\xi;\eta)$.

Определение 7.1.1.1 Случайная величина $(\xi;\eta)$ называется абсолютно непрерывной, если её *функция распределения* $F(x,y)$ абсолютно непрерывна, то есть существует некоторая функция $f(x,y)$, называемая *плотностью распределения вероятностей*, такая, что

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{x}dx\int_{-\infty}^{y}f(x,y)\,dy,\ \ \forall(x,y)\in R^2. \qquad (7.1.1.1)$$

Так как функция распределения $F(x,y)$ является неубывающей по каждому аргументу и непрерывной, то плотность распределения вероятностей обладает следующими свойствами:

1) $f(x,y)\geq 0$;

2) во всех точках $(x;y)$, за исключением, быть может, конечного или счётного множества точек, существует

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\int_{-\infty}^{x}dx\int_{-\infty}^{y}f(x,y)\,dy\right)=f(x,y). \qquad (7.1.1.2)$$

Из формул (7.1.1.1) и (7.1.1.2) следует, что плотность вероятности и функция распределения однозначно выражаются одна через другую. Это означает, что плотность распределения вероятностей $f(x,y)$ так же, как и функция распределения $F(x,y)$, полностью определяет непрерывную случайную величину (ξ,η). С геометрической точки зрения, плотность распределения вероятностей $f(x,y)=\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\partial y}$ можно рассматривать как предел отношения вероятности попадания случайной величины (ξ,η) в прямоугольник со сторонами $\vartriangle x$ и $\vartriangle y$ к площади этого прямоугольника, когда обе стороны этого прямоугольника стремятся к нулю:

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\frac{P\big((x<\xi<x+\Delta x)\cdot(y<\eta<y+\Delta y)\big)}{\Delta x\Delta y}. \qquad (7.1.1.3)$$

Сформулируем характеристические свойства плотности распределения непрерывной двумерной случайной величины (ξ,η):

1) $f(x,y)\geq 0$;

2) $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)\,dx\,dy=1$.

Дадим определение плотности вероятности n-мерной случайной величины.

Определение 7.1.1.2 Плотностью распределения вероятностей n-мерной случайной величины $(\xi_1,\xi_2,...,\xi_n)$ называется предел отношения вероятности попадания этой случайной величины в бесконечно малую область n-мерного пространства к мере этой области при стягивании в точку

$$f(x_1,x_2,...,x_n)=\lim_{\substack{\Delta x_i\to 0\\ i=1;n}}\frac{P\big((x_1<\xi_1<x_1+\Delta x_1)\cdot...\cdot(x_n<\xi_n<x_n+\Delta x_n)\big)}{\Delta x_1\cdot...\cdot\Delta x_n}. \qquad (7.1.1.4)$$

Оба характеристических свойства плотности вероятности, указанных выше для двумерной случайной величины, справедливы и для *n*-мерной случайной величины:

1) $f(x_1, x_2, ..., x_n) \geq 0$;

2) $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} ... \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, ..., x_n)\, dx_1\, dx_2 ... dx_n = 1$.

Пусть (ξ, η) - непрерывная случайная величина, то есть такая величина, функция распределения которой представима через плотность распределения вероятностей: $F(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{x} dx \int\limits_{-\infty}^{y} f(x, y)\, dy$. Если один из аргументов стремится к значению $+\infty$, а другой остаётся переменным, то функция распределения $F(x, y)$ становится функцией распределения одномерной случайной величины, соответствующей другому аргументу:

$$F_1(x) = F(x, +\infty) = \lim_{y \to +\infty} F(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{x} dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dy. \qquad (7.1.1.5)$$

$$F_2(y) = F(+\infty, y) = \lim_{x \to +\infty} F(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{y} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx. \qquad (7.1.1.6)$$

Дифференцируя функции распределения составляющих ξ и η случайной величины (ξ, η) по соответствующим переменным x и y, согласно правилу дифференцирования определённого интеграла с переменным верхним пределом интегрирования, получаем формулы для вычисления плотностей вероятностей:

$$f_1(x) = F_1'(x) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dy; \qquad (7.1.1.7)$$

$$f_2(y) = F_2'(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x, y)\, dx. \qquad (7.1.1.8)$$

Таким образом, чтобы найти плотность распределения одной из составляющей двумерной случайной величины, необходимо проинтегрировать их совместную плотность распределения вероятностей $f(x, y)$ в бесконечных пределах по аргументу, соответствующему другой составляющей.

Пусть $F(x_1, x_2, ..., x_n)$ - функция распределения *n*-мерной случайной величины. Выделим из *n*-мерной случайной величины $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$ *k*-мерную случайную величину $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k)$. Тогда функция распределения выделенной случайной величины $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k)$ определяется по формуле $F(x_1, x_2, ..., x_k) = F(x_1, x_2, ..., x_k, +\infty, ..., +\infty)$. Плотность распределения *k*-мерную случайной величины $(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_k)$, выделенной из *n*-мерной случайной величины, получается в результате интегрирования плотности n-мерной случайной величины по оставшимся $(n-k)$ переменным

$$f\left(x_1, x_2, ..., x_k\right) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} ... \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, ..., x_n)\, dx_{k+1} dx_{k+2} \ldots dx_n .$$

В частности, функция распределения и плотность распределения вероятностей составляющей ξ_i n-мерной случайной величины $\left(\xi_1, \xi_2, ..., \xi_i, ..., \xi_n\right)$ находятся по формулам:

$$F_i\left(x_i\right) = F\left(+\infty, +\infty, ..., x_i, ..., +\infty\right);$$

$$f_i(x_i) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} ... \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, ..., x_n)\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_{i-1}\, dx_{i+1} \ldots dx_n .$$

Условные распределения составляющих многомерных случайных величин, зависимые и независимые случайные величины, а так же числовые характеристики многомерных случайных величин, рассмотрим на примере двумерной случайной величины $(\xi;\eta)$.

Определение 7.1.1.3 *Условным распределением* составляющей ξ непрерывной случайной величины $(\xi;\eta)$ называется распределение, вычисляемое при условии, что составляющая η приняла определённое значение.

Условные распределения характеризуют взаимосвязи между составляющими ξ и η случайной величины $(\xi;\eta)$.

Условные распределения составляющих ξ и η непрерывной случайной величины $(\xi;\eta)$ могут быть заданы условными функциями распределения $F\left(x \mid y\right)$ и $F\left(y \mid x\right)$, или условными плотностями $f\left(x \mid y\right)$ и $f\left(y \mid x\right)$.

$$F\left(x \mid y\right) = \frac{\int\limits_{-\infty}^{x} f(x,y)\, dx}{f_2(y)} = \frac{\int\limits_{-\infty}^{x} f(x,y)\, dx}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dx}. \qquad (7.1.1.9)$$

$$F\left(y \mid x\right) = \frac{\int\limits_{-\infty}^{y} f(x,y)\, dy}{f_1(x)} = \frac{\int\limits_{-\infty}^{y} f(x,y)\, dy}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\, dy}. \qquad (7.1.1.10)$$

Дифференцируя функции $F\left(x \mid y\right)$ и $F\left(y \mid x\right)$ по переменным x и y, соответственно получаем формулы для вычисления условных плотностей распределения вероятностей составляющих ξ и η случайной величины $(\xi;\eta)$:

$$f\left(x \mid y\right) = \frac{\partial F\left(x \mid y\right)}{\partial x} = \frac{f(x,y)}{f_2(y)}. \qquad (7.1.1.11)$$

$$f\left(y\,|\,x\right)=\frac{\partial F\left(y\,|\,x\right)}{\partial y}=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}. \tag{7.1.1.12}$$

Используя формулы (7.1.1.11) и (7.1.1.12), можно записать, что

$$f\left(x,y\right)=f_1\left(x\right)\cdot f\left(y\,|\,x\right)=f_2\left(y\right)\cdot f\left(x\,|\,y\right). \tag{7.1.1.13}$$

Определение 7.1.1.4 Пусть $F(x, y)$ - функция распределения непрерывной случайной величины $\left(\xi;\eta\right)$, а $F_1(x)$ и $F_2(y)$ - маргинальные функции распределения её составляющих. Говорят, что две случайные величины, составляющие ξ и η, независимы, если для всех $(x, y)\in\Omega_{\xi\eta}$ справедливо равенство

$$F(x, y)=F_1(x)\cdot F_2(y). \tag{7.1.1.14}$$

Теорема 7.1.1.1 Если СВ $\left(\xi;\eta\right)$ - непрерывная, то равенство

$$f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y) \tag{7.1.1.15}$$

является необходимым и достаточным условием независимости СВ ξ и η.

Рассмотрим числовые характеристики двумерных случайных величин.

Основными характеристиками, описывающими центр распределения непрерывной случайной величины $\left(\xi;\eta\right)$, являются математические ожидания составляющих, определяемые по формулам:

$$m_\xi=\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f_1(x)\,dx=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\,f(x,y)\,dxdy, \tag{7.1.1.16}$$

$$m_\eta=\int_{-\infty}^{+\infty} y\,f_2(y)\,dy=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} y\,f(x,y)\,dxdy. \tag{7.1.1.17}$$

Математические ожидания m_ξ и m_η определяют координаты центра распределения. Кроме этих основных характеристик, центр распределения характеризуется модами и медианами (практическое занятие № 11).

Рассеивание составляющих случайной величины $\left(\xi;\eta\right)$ определяется дисперсиями, которые определяются по формулам (6.1.10) и (6.1.11).

Используя формулы (7.1.1.16) и (7.1.1.17), имеем:

$$D(\xi)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(x-m_\xi)^2 f(x,y)\,dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_1(x)\,dx-m_\xi^2, \tag{7.1.1.18}$$

$$D(\eta)=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(y-m_\eta)^2 f(x,y)\,dxdy=\int_{-\infty}^{+\infty} y^2 f_2(y)\,dy-m_\eta^2. \tag{7.1.1.19}$$

Положительные квадратные корни из дисперсий составляющих ξ и η называются *средними квадратическими отклонениями* составляющих ξ и η или стандартами: $\sigma_\xi=\sqrt{D(\xi)}$, $\sigma_\eta=\sqrt{D(\eta)}$.

Основной характеристикой, которая описывает связь между составляющими ξ и η случайной величины $\left(\xi;\eta\right)$, является *ковариация*, которая также называется *корреляционным моментом* или *моментом связи* $K_{\xi\eta}$ и определяется по формуле (6.1.4).

Для непрерывной случайной величины расчётную формулу для ковариации можно записать в виде

$$K_{\xi\eta} = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_\xi)(y - m_\eta) f(x,y)dxdy = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x\, y\, f(x,y)\, dxdy - m_\xi \cdot m_\eta . \quad (7.1.1.20)$$

Коэффициент корреляции определяется по формуле (6.1.16).

Условные распределения составляющих ξ и η случайной величины $(\xi;\eta)$ характеризуются условными числовыми характеристиками, условными математическими ожиданиями и дисперсиями этих составляющих.

Условное математическое ожидание составляющей ξ при условии, что непрерывная случайная величина η приняла определённое значение y, находится по формуле

$$m_{\xi|\eta} = M\left(\xi \middle| \eta = y\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x|y)\,dx . \quad (7.1.1.21)$$

Аналогично определяется *условное математическое ожидание* составляющей η:

$$m_{\mu|\xi} = M\left(\eta \middle| \xi = x\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} y\, f(y|x)\,dy . \quad (7.1.1.22)$$

Условная дисперсия составляющей ξ при условии, что непрерывная случайная величина η приняла определённое значение y, находится по формуле

$$\sigma^2_{\xi|\eta} = D\left(\xi \middle| \eta = y\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - m_{\xi|\eta}\right)^2 f\left(x|y\right)\,dx . \quad (7.1.1.23)$$

Аналогично определяется *условная дисперсия составляющей* η:

$$\sigma^2_{\eta|\xi} = D\left(\eta \middle| \xi = x\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(x - m_{\eta|\xi}\right)^2 f\left(y|x\right)\,dy . \quad (7.1.1.24)$$

Из распределений двумерной случайной величины $(\xi;\eta)$ рассмотрим нормальное распределение, которое наиболее часто применяется на практике. Случайная величина $(\xi;\eta)$ имеет нормальное распределение, если её плотность вероятности имеет вид

$$f(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_\xi\sigma_\eta\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2\left(1-\rho^2\right)}\left(\frac{\left(x-m_\xi\right)^2}{\sigma_\xi^2} - 2\rho\frac{\left(x-m_\xi\right)\cdot\left(y-m_\eta\right)}{\sigma_\xi\sigma_\eta} + \frac{\left(y-m_\eta\right)^2}{\sigma_\eta^2}\right)}, \quad (7.1.1.25)$$

где m_ξ, m_η - математические ожидания составляющих ξ и η; σ_ξ, σ_η - их средние квадратические отклонения; ρ - коэффициент корреляции между составляющими.

Если случайная величина $(\xi;\eta)$ имеет нормальное распределение, то распределение её составляющих ξ и η являются тоже нормальными распределениями: $f_1(x)=\dfrac{1}{\sigma_\xi\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(x-m_\xi\right)^2}{2\sigma_\xi^2}}$, $f_2(y)=\dfrac{1}{\sigma_\eta\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\left(y-m_\eta\right)^2}{2\sigma_\eta^2}}$.

Вероятность попадания случайной точки, распределённой по нормальному закону, в прямоугольник $G=\left\{(x,y)\middle|\alpha\le\xi\le\beta\wedge\delta\le\eta\le\gamma\right\}$ с осями, параллельными главным осям рассеивания, выражается формулой

$$P\big((\xi,\eta)\subset G\big)=\left(\Phi\left(\frac{\beta-m_\xi}{\sigma_\xi}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-m_\xi}{\sigma_\xi}\right)\right)\left(\Phi\left(\frac{\gamma-m_\eta}{\sigma_\eta}\right)-\Phi\left(\frac{\delta-m_\eta}{\sigma_\eta}\right)\right)\qquad(7.1.1.26)$$

Вероятность попадания случайной точки, распределённой по нормальному закону, в область R_n, ограниченную эллипсом рассеивания, равна

$$P\big((\xi,\eta)\subset G\big)=1-e^{n^2/2},$$

где n - размеры полуосей эллипса в среднеквадратичных отклонениях: $n=a/\sigma_\xi=b/\sigma_\eta$.

Если $\sigma_\xi=\sigma_\eta=\sigma$, то рассеивание по нормальному закону называется круговым. При круговом нормальном рассеивании с центром рассеивания, совпадающим с началом координат, расстояние R от начала координат до случайной точки (ξ,η) распределено по закону Рэлея с плотностью вероятностей

$$f(r)=\begin{cases}\dfrac{r}{\sigma^2}e^{-r^2/2\sigma^2} & при\ r\ge 0;\\ 0 & при\ r<0,\end{cases}\qquad(7.1.1.27)$$

и функцией распределения вероятностей

$$F(r)=\begin{cases}1-e^{-r^2/2\sigma^2} & при\ r\ge 0;\\ 0 & при\ r<0,\end{cases}\qquad(7.1.1.28)$$

7.1.2 Предельные теоремы теории вероятностей

Теорема 7.1.2.1 (о неравенстве Чебышева). Вероятность того, что отклонение случайной величины от её математического ожидания будет по абсолютной величине не меньше любого положительного числа ε, ограничена сверху величиной σ^2/ε^2:

$$P\big(|\xi-m|\ge\varepsilon\big)\le\sigma^2/\varepsilon^2.\qquad(7.1.2.1)$$

Так как $\left\{|\xi-m|\ge\varepsilon\right\}\cup\left\{|\xi-m|<\varepsilon\right\}=\Omega$, то неравенство Чебышева можно записать в виде $P\big(|\xi-m|<\varepsilon\big)\ge 1-\sigma^2/\varepsilon^2$.

Теорема 7.1.2.2 (Чебышева). Пусть $\xi_i, i=\overline{1,\infty}$ - последовательность независимых случайных величин, у которых дисперсии $D(\xi_i) \le C$, и все математические ожидания $M(\xi_i)$ конечны. Тогда среднее арифметическое этих случайных величин сходится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий, то есть

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}M(\xi_i)\right| < \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{D(\xi)}{n\cdot\varepsilon^2}. \qquad (7.1.2.2)$$

Теорема 7.1.2.3 (Маркова). Пусть случайные величины $\xi_i, i=\overline{1,\infty}$ удовлетворяют условию $\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right) \to 0$ при значении $n \to +\infty$. Тогда при любом положительном значении ε выполняется предельное соотношение (7.1.2.2).

Следствие. Пусть независимые случайные величины ξ_n, $n=\overline{1,\infty}$, имеют одинаковые математические ожидания $M(\xi_i) = m$ для всех $i=\overline{1,n}$, а дисперсии удовлетворяют условию $D(\xi_i) \le C$. Тогда среднее арифметическое случайных величин сходится по вероятности к числу m при условии $n \to +\infty$:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i - m\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Второе важное следствие из теоремы Чебышева сформулируем в виде теоремы Бернулли, которое называется законом больших чисел в схеме Бернулли (практическое занятие № 10).

Теорема 7.1.2.4 (Бернулли). Если в каждом из n независимых испытаний вероятность наступления события A равна p, то относительная частота сходится по вероятности к числу p при значении $n \to +\infty$, то есть

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) = 1. \qquad (7.1.2.3)$$

В результате получаем следующую оценку

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| < \varepsilon\right) \ge 1 - \frac{pq}{n\varepsilon^2}. \qquad (7.1.2.4)$$

Теорема 7.1.2.5 (центральная предельная теорема или теорема Ляпунова). Пусть $\xi_i, i=\overline{1,\infty}$ - последовательность независимых случайных величин, для каждой из которых существует математическое ожидание $M(\xi_i) = m_i$, дисперсия $D(\xi_i) = \sigma_i^2$ и третий центральный абсолютный момент $M\left|\xi_i - m_i\right|^3$. Пусть, кроме этого, выполнено условие Ляпунова

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} M\left|\xi_i - m_i\right|^3}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n}\sigma_i^2\right)^{3/2}} = 0 .$$

Тогда при неограниченном увеличении n распределение случайной величины $\eta_n = \sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$ сходится по распределению к нормальному распределению с математическим ожиданием $M\left(\eta_n\right) = \sum\limits_{i=1}^{n} M\left(\xi_i\right)$ и дисперсией $\sigma_{\eta_n}^2 = \sum\limits_{i=1}^{n}\sigma_i^2$, то есть для случайной величины $\eta_n = \sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$ при значении $n \to \infty$ выполняется соотношение

$$P\left(\eta_n < y\right) \xrightarrow[n\to\infty]{p} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_{\eta_n}} \cdot \int\limits_{-\infty}^{y} e^{-\frac{\left(\eta_n - M\left(\eta_n\right)\right)^2}{2\sigma_{\eta_n}^2}}\, dy . \qquad (7.1.2.5)$$

7.2 Примеры решения типовых задач

7.2.1 Непрерывная случайная величина $\left(\xi;\eta\right)$ задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x,y) = \begin{cases} a\cdot(2x+2y)\ \textit{при}\ 0 \le x \le 2;\, 0 \le y \le 2; \\ 0\ \textit{при любых других значениях}\ x\ \textit{и}\ y. \end{cases}$$

Требуется:

1) найти неизвестный параметр a;

2) найти маргинальные распределения составляющих ξ и η непрерывной случайной величины $\left(\xi;\eta\right)$;

3) установить, зависимы или нет составляющие ξ и η;

4) найти условные законы распределения;

5) вычислить математические ожидания, дисперсии и среднеквадратические отклонения составляющих ξ и η;

6) найти функцию распределения непрерывной случайной величины $\left(\xi;\eta\right)$;

7) вычислить вероятность попадания случайной величины $\left(\xi;\eta\right)$ в область $G = \left\{(\xi;\eta) \middle| 0 \le \xi \le 1 \wedge 1 \le \eta \le 2\right\}$;

8) вычислить ковариацию случайных величин ξ и η.

Решение. 1) Для определения неизвестного параметра a воспользуемся условием нормировки $\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = 1$.

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_0^2\int\limits_0^2 a(2x+2y)\,dx\,dy = a\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^2 (2x+2y)dy = a\int\limits_0^2 \left(2xy+y^2\right)\Big|_0^2 dx =$$

$$= a\int\limits_0^2 \left(4x+4\right)dx = a\cdot\left(2x^2+4x\right)\Big|_0^2 = a\cdot 16 = 1.$$

Откуда $a=\dfrac{1}{16}$. Следовательно, плотность распределения вероятностей имеет вид

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{16}\cdot(2x+2y)\ \text{при}\ 0\le x\le 2;\ 0\le y\le 2;\\ 0\ \text{при любых других значениях}\ x\ \text{и}\ y.\end{cases}$$

2) Найдём маргинальные распределения составляющих ξ и η непрерывной случайной величины $(\xi;\eta)$ по формулам (7.1.1.7) и (7.1.1.8).

$$f_1(x)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy=\int\limits_0^2\frac{1}{16}(2x+2y)dy=\frac{1}{16}(2xy+y^2)\Big|_0^2=\frac{1}{4}x+\frac{1}{4},$$

то есть $f_1(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{16}(4x+4),\ \text{если}\ 0\le x\le 2;\\ 0,\ \text{если}\ x<0\ \text{или}\ x>2.\end{cases}$

$$f_2(y)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx=\int\limits_0^2\frac{1}{16}(2x+2y)dx=\frac{1}{16}(x^2+2yx)\Big|_0^2=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}y,$$

то есть $f_2(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{16}(4+4y),\ \text{если}\ 0\le y\le 2;\\ 0,\ \text{если}\ y<0\ \text{или}\ y>2.\end{cases}$

3) Установим, зависимы или нет составляющие ξ и η. Проверим равенство $f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{16}\cdot(2x+2y)\ \text{при}\ 0\le x\le 2;\ 0\le y\le 2;\\ 0\ \text{при любых других значениях}\ x\ \text{и}\ y.\end{cases}$$

$$f_1(x)\cdot f_2(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}x+\dfrac{1}{4},\ \text{если}\ 0\le x\le 2;\\ 0,\ \text{если}\ x<0\ \text{или}\ x>2;\end{cases}\cdot\begin{cases}\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}y,\ \text{если}\ 0\le y\le 2;\\ 0,\ \text{если}\ y<0\ \text{или}\ y>2;\end{cases}\ne f(x,y)$$

Следовательно, составляющие ξ и η являются зависимыми величинами.

4) Для определения условных распределений воспользуемся формулами (7.1.1.11) и (7.1.1.12).

$$f\left(x\,|\,y\right)=\frac{f(x,y)}{f_2(y)}=\begin{cases}\dfrac{x+y}{2+2y}\ \textit{при}\ 0\le x\le 2;\ 0\le y\le 2;\\ 0\ \textit{при любых других значениях}\ x\ \textit{и}\ y.\end{cases}$$

$$f\left(y\,|\,x\right)=\frac{f(x,y)}{f_1(x)}=\begin{cases}\dfrac{x+y}{2x+2}\ \textit{при}\ 0\le x\le 2;\ 0\le y\le 2;\\ 0\ \textit{при любых других значениях}\ x\ \textit{и}\ y.\end{cases}$$

5) Математическое ожидание случайной величины ξ вычислим по формуле (7.1.1.16).

$$m_\xi=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x\,f_1(x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x\,f(x,y)\,dxdy=\int\limits_0^2 x\frac{1}{16}(4x+4)dx=\int\limits_0^2\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{4}x\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^3}{12}+\frac{x^2}{8}\right)\Bigg|_0^2=\frac{8}{12}-\frac{4}{8}=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}.$$

Дисперсию случайной величины ξ вычислим по формуле (7.1.1.18).

$$D(\xi)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}x^2 f_1(x)\,dx-m_\xi^2=\int\limits_0^2 x^2\frac{1}{16}(4x+4)dx-\left(\frac{1}{6}\right)^2=\int\limits_0^2\left(\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{4}x^2\right)dx-\frac{1}{36}=$$

$$=\left(\frac{1}{16}x^4+\frac{1}{12}x^3\right)\Bigg|_0^2-\frac{1}{36}=1+\frac{2}{3}-\frac{1}{36}=\frac{59}{36}.$$

Среднеквадратичное отклонение случайной величины ξ равно: $\sigma_\xi=\sqrt{D(\xi)}=\dfrac{\sqrt{59}}{6}$.

На основании симметрии плотности вероятностей относительно составляющих ξ и η следует, что

$$m_\eta=m_\xi=\frac{1}{6},\ D(\eta)=D(\xi)=\frac{59}{36},\ \sigma_\eta=\sigma_\xi=\frac{\sqrt{59}}{6}.$$

6) Найдём функцию распределения заданной непрерывной случайной величины $\left(\xi,\eta\right)$ по формуле (7.1.1.1): $F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}dx\int\limits_{-\infty}^{y}f(x,y)\,dy$.

Если $x\le 0$ или $y\le 0$, то $f(x,y)=0$, а, следовательно, $F(x,y)=0$

Если $0<x<2$ и $0<y<2$, то

$$F(x,y)=\int\limits_0^x dx\int\limits_0^y\frac{1}{16}\cdot(2x+2y)\,dy=\frac{1}{16}\int\limits_0^x\left(2xy+y^2\right)\Big|_0^y dx=\frac{1}{16}\int\limits_0^x(2xy+y^2)dx=$$

$$=\frac{1}{16}\cdot\left(x^2y+y^2x\right)\Big|_0^x=\frac{1}{16}\cdot\left(x^2y+y^2x\right).$$

Если $0<x<2$ и $y\ge 2$, то

$$F(x,y)=\int\limits_0^x dx\int\limits_0^2 \frac{1}{16}\cdot(2x+2y)\,dy=\frac{1}{16}\int\limits_0^x\left(2xy+y^2\right)\Big|_0^2 dx=\frac{1}{16}\int\limits_0^x(4x+4)dx=$$

$$=\frac{1}{16}\cdot\left(2x^2+4x\right)\Big|_0^x=\frac{1}{16}\cdot\left(2x^2+4x\right).$$

Если $x\geq 2$ и $0<y<2$, то

$$F(x,y)=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^y \frac{1}{16}\cdot(2x+2y)\,dy=\frac{1}{16}\int\limits_0^2\left(2xy+y^2\right)\Big|_0^y dx=\frac{1}{16}\int\limits_0^2(2xy+y^2)\,dx=$$

$$=\frac{1}{16}\cdot\left(x^2y+y^2x\right)\Big|_0^2=\frac{1}{16}\cdot\left(4y+2y^2\right).$$

Если $x\geq 2$ и $y\geq 2$, то

$$F(x,y)=\int\limits_0^2 dx\int\limits_0^2 \frac{1}{16}\cdot(2x+2y)\,dy=\frac{1}{16}\int\limits_0^x\left(2xy+y^2\right)\Big|_0^2 dx=\frac{1}{16}\int\limits_0^2(4x+4)dx=$$

$$=\frac{1}{16}\cdot\left(2x^2+4x\right)\Big|_0^2=\frac{1}{16}\cdot\left(2\cdot 2^2+4\cdot 2\right)=1.$$

Таким образом, функция распределения системы имеет вид

$$F(x,y)=\begin{cases}0 & при\ x\leq 0\ или\ y\leq 0;\\ \dfrac{1}{16}\left(x^2y+y^2x\right) & при\ 0<x<2\ и\ 0<y<2;\\ \dfrac{1}{16}\left(2x^2+4x\right) & при\ 0<x<2\ и\ y\geq 2;\\ \dfrac{1}{16}\left(4y+2y^2\right) & при\ x\geq 2\ и\ 0<y<2;\\ 1 & при\ x\geq 2\ и\ y\geq 2.\end{cases}$$

7) Вычислим вероятность попадания случайной величины $(\xi;\eta)$ в область $G=\left\{(\xi;\eta)\middle|0\leq\xi\leq 1\wedge 1\leq\eta\leq 2\right\}$;

$$P\big((0\leq\xi\leq 1)\cdot(1\leq\eta\leq 2)\big)=\int\limits_0^1 dx\int\limits_1^2 \frac{1}{16}(2x+2y)\,dy=\frac{1}{16}\int\limits_0^1\left(2xy+y^2\right)\Big|_1^2 dx=$$

$$=\frac{1}{16}\int\limits_0^1(4x+4-2x-1)\,dx=\frac{1}{16}\int\limits_0^1\left(2x+3\right)dx=\frac{1}{16}\left(x^2+3x\right)\Big|_0^1=\frac{1}{16}(1+3-0)=\frac{1}{4}.$$

8) Вычислим ковариацию случайных величин ξ и η по формуле (7.1.1.20).

$$K_{\xi\eta} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,y\,f(x,y)\,dxdy - m_\xi m_\eta = \int\limits_0^2\int\limits_0^2 xy\frac{x+y}{8}dx\,dy - \frac{1}{36} = \int\limits_0^2 dx\int\limits_0^2 \frac{x^2y+xy^2}{8}dy - \frac{1}{36} =$$

$$= \frac{1}{8}\int\limits_0^2 \left(\frac{x^2y^2}{2} + \frac{xy^3}{3}\right)\Bigg|_0^2 dx - \frac{1}{36} = \frac{1}{8}\int\limits_0^2 \left(2x^2 + \frac{8x}{3}\right)dx - \frac{1}{36} = \frac{1}{8}\left(\frac{2x^3}{3} + \frac{4x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 - \frac{1}{36} = \frac{59}{36}.$$

7.2.2 Производится три независимых выстрела по цели (на рис. 7.2.1 фигура $MNSTQ$). Прицеливание производится по точке O. Рассеивание является круговым. Среднеквадратичное отклонение равно 2 метра. Систематическая ошибка отсутствует. Найти вероятность хотя бы одного попадания при $r = 2\ м$ и $l = 2,4\ м$.

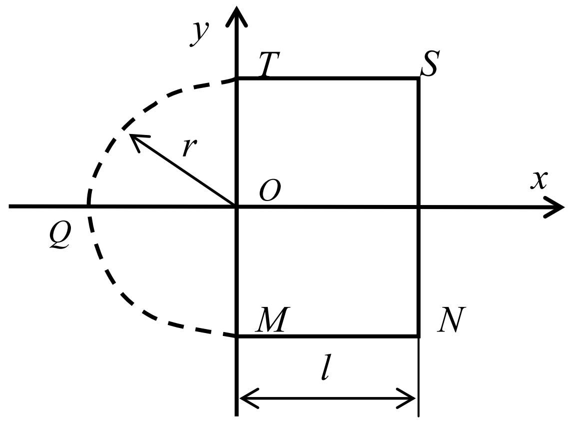

Рисунок 7.2.1 - Цель для выстрела

Решение. Пусть событие A - попадание в прямоугольник $MNST$, а событие B - попадание в полукруг MQT при одном выстреле. Тогда событие $C = A + B$ - попадание в цель при одном выстреле.

Рассматривая случайные величины ξ и η как координаты точки попадания и учитывая, что рассеивание точки (ξ,η) подчинено нормальному закону с параметрами $m_\xi = m_\eta = 0$, $\sigma_\xi = \sigma_\eta = 2\ м$, на основании формулы (7.1.1.26) находим вероятность попадания в прямоугольник при одном выстреле:

$$P(A)P\big((\xi,\eta)\subset MNST\big) = \left(\Phi\left(\frac{2,4-0}{2}\right) - \Phi\left(\frac{0-0}{2}\right)\right)\times$$

$$\times\left(\Phi\left(\frac{2-0}{2}\right) - \Phi\left(\frac{-2-0}{2}\right)\right) = 2\cdot\Phi(1,2)\cdot\Phi(1) = 2\cdot 0,38493\cdot 0,34134 \approx 0,26.$$

Так как при круговом нормальном рассеивании, совпадающим с началом координат, расстояние от начала координат до случайной точки (ξ,η) распределяется по закону Рэлея, то для определения вероятности попадания в полукруг радиуса $r = 2\ м$ (вероятности появления события B) применим функцию распределения Рэлея (формула 7.1.1.28):

$$P(B) = \frac{1}{2}P(R<2) = \frac{1}{2}\cdot\left(1 - e^{-2^2/2\cdot 2^2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(1 - e^{-1/2}\right) \approx 0,20.$$

Следовательно, вероятность попадания в цель при одном выстреле, равна

$$P(C) = P(A+B) = P(A) + P(B) = 0,26 + 0,20 = 0,46.$$

Для определения вероятностей хотя бы одного попадания в цель при трёх независимых выстрелах перейдём к противоположному событию $\overline{C}$ и найдём его вероятность $P(\overline{C}) = 1 - P(C) = 1 - 0,46 = 0,54$.

Следовательно, искомая вероятность (хотя бы одно попадание в цель) равна

$$P = 1 - P^3(\overline{C}) = 1 - (0,54)^3 = 0,842536.$$

7.2.3 Устройство состоит из 20 независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента за время T равна 0,025. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что абсолютная величина разности между числом отказавших элементов и средним числом отказов за время T окажется: а) меньше трёх, б) не меньше трёх.

Решение. а) Обозначим через ξ дискретную случайную величину – число отказавших элементов за время T. Тогда,

$$M(\xi) = np = 20 \cdot 0,025 = 0,5;$$
$$D(\xi) = npq = 20 \cdot 0,025 \cdot 0,0975 = 0,04875.$$

Воспользуемся неравенством Чебышева

$$P\left(\left|\xi - M(\xi)\right| < \varepsilon\right) \geq 1 - \frac{D(\xi)}{\varepsilon^2}.$$

Подставим $M(\xi) = 0,5$, $D(\xi) = 0,04875$, $\varepsilon = 3$, получим

$$P\left(\left|\xi - 0,5\right| < 3\right) \geq 1 - \frac{0,4875}{3^2} \approx 0,9458.$$

б) Так как события $\left|\xi - 0,5\right| < 3$ и $\left|\xi - 0,5\right| \geq 3$ противоположны, то сумма вероятностей этих событий равна единице. Следовательно,

$$P\left(\left|\xi - 0,5\right| \geq 3\right) = 1 - P\left(\left|\xi - 0,5\right| < 3\right) \leq 1 - 0,9458 = 0,0542.$$

7.2.4 Дисперсия каждой из 4000 независимых случайных величин равна 10. Оценить вероятность того, что отклонение среднее арифметической этих случайных величин от средней математической их математических ожиданий не превысит 0,3.

Решение. Воспользовшись неравенством (7.1.2.2) при значениях $\varepsilon = 0,3$, $D(\xi) = 10$ и $n = 4000$, находим

$$P\left(\left|\frac{1}{4000}\sum_{i=1}^{4000}\xi_i - \frac{1}{4000}\sum_{i=1}^{4000}M\left(\xi_i\right)\right| < 0,3\right) \geq 1 - \frac{10}{4000 \cdot 3^2} \approx 0,9997.$$

Следовательно, вероятность искомого события не менее 0,9997.

7.2.5 Сколько необходимо проверить проштампованых бланков, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,9, можно было утверждать, что абсолютная величина отклонения частоты проштампованых бланков от вероятности бланка быть проштампованым, равной 0,8, не превысит 0,01?

Решение. В соответствии с неравенством (7.1.2.4) при известных значениях p, q и ε число n выбирается таким, что разность $1 - pq/n\varepsilon^2$ будет не меньшей заданной вероятности 0,9, то есть $1 - pq/n\varepsilon^2 \geq 0{,}9$ или $n \geq \dfrac{pq}{0{,}1\varepsilon^2}$.

При $p = 0{,}8$, $q = 0{,}2$ и $\varepsilon = 0{,}01$, получаем

$$n \geq \frac{0{,}8 \cdot 0{,}2}{0{,}1 \cdot (0{,}01)^2} = \frac{0{,}16}{0{,}00001} = 16000,$$

то есть наименьшее число бланков, которые следует проверить, равно 16000.

7.3 Задания для решения на практическом занятии

7.3.1 Непрерывная двумерная случайная величина $(\xi;\eta)$ задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x,y) = \begin{cases} a \cdot (2x + 3y) \text{ } при \text{ } 0 \leq x \leq 3; 0 \leq y \leq 4; \\ 0 \text{ } при \text{ } любых \text{ } других \text{ } значениях \text{ } x \text{ } и \text{ } y. \end{cases}$$

Найти неизвестный параметр a.Определить маргинальные распределения составляющих ξ и η непрерывной случайной величины $(\xi;\eta)$. Установить, зависимость составляющих ξ и η. Записать условные законы распределения;

7.3.2 Непрерывная двумерная случайная величина $(\xi;\eta)$ задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x,y) = \begin{cases} 24 \cdot x \cdot y \text{ } при \text{ } 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 1; \\ 0 \text{ } при \text{ } любых \text{ } других \text{ } значениях \text{ } x \text{ } и \text{ } y. \end{cases}$$

Найти функцию распределения непрерывной случайной величины $(\xi;\eta)$. Вычислить вероятность попадания случайной величины $(\xi;\eta)$ в область $G = \left\{(\xi;\eta) \middle| 0{,}5 \leq \xi \leq 1{,}75 \wedge 0{,}25 \leq \eta \leq 0{,}75\right\}$. Рассчитать математические ожидания, дисперсии и среднеквадратические отклонения составляющих ξ и η. Определить значение ковариации случайных величин ξ и η.

7.3.3 Производится три независимых выстрела по цели, которая представляет собой прямоугольник со сторонами $a = 2\ км$ и $b = 5\ км$. Центр рассеивания совпадает с началом координат. Рассеивание характеризуется среднеквадратическими отклонениями $\sigma_\xi = 4\ км$ и $\sigma_\eta = 9\ км$. Систематические отклонения отсутстуют. Определить вероятность двух попаданий в цель.

7.3.4 Изделие является изделием первого сорта, если отклонения его размеров от номинала не превосходят по абсолютной величине соответственно 4,6 и 2,5 мм. Случайные отклонения ξ и η размеров изделия от стандарта независимы и подчиняются нормальному закону со среднеквадратичными отклонениями $\sigma_\xi = 3\ мм$ и $\sigma_\eta = 2\ мм$. Систематические отклонения отсутствуют. Найти вероятность того, что среди отобранных трёх изделий, хотя бы одно изделие первого сорта.

7.3.5 Система двух случайных величин (ξ,η) подчинена нормальному закону распределения, причём рассеивание является круговым. Найти радиус круга, центр которого совпадает с центром рассеивания и вероятность попадания в который равна 0,5.

7.3.6 Цель, по которой ведётся стрельба представляет собой ромб с диагоналями 20 и 4 метра.По цели производится четыре одиночных выстрела, причём прицеливание ведётся по центру ромба. Главные оси рассеивания совпадают с диагоналями ромба. Дисперсии отклонений равны: $D(\xi)=25$ и $D(\xi)=36$. Систематические ошибки отсутствуют. Чтобы поразить цель, достаточно двух попаданий. Найти вероятность того, что цель будет поражена.

7.3.7 Система двух независимых случайных величин $(\xi;\eta)$ подчинена нормальному закону распределения с параметрами $m_\xi=8$, $m_\eta=5$, $D(\xi)=4$, $D(\eta)=9$. Написать выражение для плотности распределения вероятностей и функции распределения.

7.3.8 Определить вероятность попадания при одном выстреле в прямоугольник со сторонами $a=4\,м$ и $b=3\,м$, параллельными осям рассеивания, если точка рассеивания совпадает с центром прямоугольника, а среднеквадратичные отклонения равны $\sigma_\xi=0{,}5\,м$, $\sigma_\eta=1\,м$.

7.3.9 Система двух случайных величин $(\xi;\eta)$ подчиняется нормальному закону распределения с плотностью распределения вероятностей

$$f(x,y)=a\cdot e^{-\left(\frac{(x-2)^2}{50}+\frac{(x-4)^2}{32}\right)}.$$

Найти параметр a. Определить вероятность совместного выполнения двух неравенств: $-2<\xi<2$, $1<\eta<3$.

7.3.10 Система двух независимых случайных величин $(\xi;\eta)$ подчинена нормальному закону распределения с параметрами $m_\xi=4$, $m_\eta=9$, $D(\xi)=9$, $D(\eta)=25$. Определить вероятность попадания случайной точки $(\xi;\eta)$ в прямоугольник, центр которого совпадает с началом координат, а стороны параллельны координатным осям и равны 3 и 7 в направлении этих осей.

7.3.11 По круговой мишени производится четыре независимых выстрела. Радиус мишени равен 15 см. Прицеливание ведётся по центру мишени. Систематические ошибки отсутствуют. Рассеивание круговое с вероятностным отклонением 3 см. Найти вероятность того, что в мишени будет не более двух пробоин.

7.3.12 Вероятность наступления некоторого события в каждом из 2000 испытаний равна 0,3. Используя неравенство Чебышева, оценить вероятность того, что отклонение числа наступлений данного события от математического ожидания будет более 80.

7.3.13 Известно, что 80 % всей продукции, производимой предприятием, является изделием высшего сорта. Определить вероятность того, что число изделий вышего сорта среди 90000 изготовленных будет отличаться от математического ожидания не более чем 900 штук.

7.3.14 Вероятность наступления события в каждом отдельно взятом испытании равна 0,4. Пользуясь неравенством Чебышева, оценить вероятность того, что число ξ появлений события будет заключено в пределах от 30 до 70, если будет произведено 100 независимых испытаний.

7.3.15 Дисперсия каждой из 3000 независимых случайных величин равна 15. Оценить вероятность того, что отклонение средней арифметической этих случайных величин от средней математической их математических ожиданий не превысит 0,2.

7.3.16 Сколько необходимо проверить деталей, чтобы с вероятностью, не меньшей 0,95, можно было утверждать, что абсолютная величина отклонения частоты годных деталей от вероятности деталей быть годной, равной 0,9, не превысит 0,02?

7.3.17 При контрольной проверке изготавливаемых приборов было установлено, что в среднем 10 штук из 100 оказываются с теми или иными дефектами. Оценить вероятность того, что доля приборов с дефектами среди 500 изготовленных будет по абсолютной величине отличаться от математического ожидания этой доли не более чем, на 0,04.

7.3.18 Определить необходимое число опытов, которые необходимо провести, чтобы отклонение частоты появления события от вероятности его наступления в отдельном опыте, равной 0,7, не превзошло по абсолютной величине 0,04 с вероятностью 0,95.

7.3.19 Оценить вероятность того, что в партии из 10000 изделий отклонение частоты бракованных изделий от вероятности 0,03 быть бракованным изделием превысит 0,02.

7.3.20 Стрельба ведётся поочерёдно из трёх орудий. Вероятности попадания в цель при одном выстреле из каждого орудия равны соответственно 0,2; 0,4 и 0,6. Произведено 600 выстрелов. Оценить снизу вероятность того, что при этом частота отличается от средней вероятности попадания по абсолютной величине не более, чем на 0,04.

7.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

7.4.1 Непрерывная случайная величина $(\xi;\eta)$ задана плотностью распределения вероятностей

$$f(x,y)=\begin{cases} a\cdot(k\cdot x+(k-1)\cdot y)\ \text{\textit{при}}\ 0\le x\le k;\ 0\le y\le k; \\ 0\ \text{\textit{при любых других значениях}}\ x\ \text{\textit{и}}\ y, \end{cases}$$

где k - номер варианта.

Найти неизвестный параметр a, маргинальные распределения составляющих ξ и η непрерывной случайной величины $(\xi;\eta)$, и условные законы распределения. Установить, зависимы или нет составляющие ξ и η. Вычислить математические ожидания, дисперсии и среднеквадратические отклонения составляющих ξ и η. Определить функцию распределения непрерывной случайной величины $(\xi;\eta)$. Вычислить вероятность попадания случайной величины $(\xi;\eta)$ в область $G=\{(\xi;\eta)|k-1\le\xi\le k\wedge k-1\le\eta\le k\}$ и ковариацию СВ ξ и η.

7.4.2 Вычислить вероятность хотя бы одного попадания при выстрелах в прямоугольник со сторонами a и b, параллельными осям рассеивания, если точка рассеивания совпадает с центром прямоугольника, а среднеквадратичные отклонения равны σ_ξ, σ_η. Систематические промахи отсутствуют. Записать плотности распределения вероятностей для случайной $(\xi;\eta)$ и её составляющих.

7.4.2.1 $a=1, b=2, \sigma_\xi=3, \sigma_\eta=5.$
7.4.2.2 $a=1, b=3, \sigma_\xi=4, \sigma_\eta=2.$
7.4.2.3 $a=1, b=4, \sigma_\xi=7, \sigma_\eta=6.$
7.4.2.4 $a=1, b=5, \sigma_\xi=2, \sigma_\eta=3.$
7.4.2.5 $a=1, b=6, \sigma_\xi=5, \sigma_\eta=4.$
7.4.2.6 $a=1, b=7, \sigma_\xi=4, \sigma_\eta=7.$
7.4.2.7 $a=1, b=8, \sigma_\xi=5, \sigma_\eta=3.$
7.4.2.8 $a=1, b=9, \sigma_\xi=1, \sigma_\eta=4.$
7.4.2.9 $a=2, b=3, \sigma_\xi=2, \sigma_\eta=5.$
7.4.2.10 $a=2, b=5, \sigma_\xi=6, \sigma_\eta=2.$
7.4.2.11 $a=2, b=4, \sigma_\xi=6, \sigma_\eta=9.$
7.4.2.12 $a=2, b=6, \sigma_\xi=2, \sigma_\eta=5.$
7.4.2.13 $a=2, b=7, \sigma_\xi=1, \sigma_\eta=8.$
7.4.2.14 $a=2, b=9, \sigma_\xi=2, \sigma_\eta=2.$
7.4.2.15 $a=3, b=4, \sigma_\xi=2, \sigma_\eta=3.$
7.4.2.16 $a=3, b=5, \sigma_\xi=7, \sigma_\eta=8.$
7.4.2.17 $a=3, b=6, \sigma_\xi=2, \sigma_\eta=4.$
7.4.2.18 $a=3, b=7, \sigma_\xi=5, \sigma_\eta=2.$
7.4.2.19 $a=3, b=8, \sigma_\xi=2, \sigma_\eta=4.$
7.4.2.20 $a=3, b=9, \sigma_\xi=2, \sigma_\eta=1.$
7.4.2.21 $a=4, b=5, \sigma_\xi=3, \sigma_\eta=5.$
7.4.2.22 $a=4, b=6, \sigma_\xi=2, \sigma_\eta=7.$
7.4.2.23 $a=4, b=8, \sigma_\xi=5, \sigma_\eta=2.$
7.4.2.24 $a=4, b=9, \sigma_\xi=3, \sigma_\eta=8.$
7.4.2.25 $a=5, b=6, \sigma_\xi=5, \sigma_\eta=4.$
7.4.2.26 $a=5, b=7, \sigma_\xi=4, \sigma_\eta=1.$
7.4.2.27 $a=5, b=8, \sigma_\xi=3, \sigma_\eta=9.$
7.4.2.28 $a=5, b=9, \sigma_\xi=2, \sigma_\eta=9.$
7.4.2.29 $a=6, b=7, \sigma_\xi=3, \sigma_\eta=5.$
7.4.2.30 $a=6, b=8, \sigma_\xi=3, \sigma_\eta=4.$

7.4.3 В рассматриваемом технологическом процессе в среднем k % изделий имеет допуск ± 5 %. Какое число изделий из партии n штук, с вероятностью P можно планировать с допуском ± 5 %.

7.4.3.1 $k=75, P=0{,}99, n=200000.$
7.4.3.2 $k=70, P=0{,}98, n=150000.$
7.4.3.3 $k=76, P=0{,}97, n=100000.$
7.4.3.4 $k=74, P=0{,}96, n=232000.$
7.4.3.5 $k=71, P=0{,}95, n=234000.$
7.4.3.6 $k=73, P=0{,}94, n=254000.$
7.4.3.7 $k=72, P=0{,}93, n=231000.$
7.4.3.8 $k=78, P=0{,}92, n=180000.$
7.4.3.9 $k=77, P=0{,}90, n=190000.$
7.4.3.10 $k=81, P=0{,}89, n=170000.$

7.4.3.11 $k = 85,\ P = 0{,}99,\ n = 140000.$

7.4.3.12 $k = 76,\ P = 0{,}88,\ n = 245000.$

7.4.3.13 $k = 91,\ P = 0{,}83,\ n = 246000.$

7.4.3.14 $k = 68,\ P = 0{,}81,\ n = 112000.$

7.4.3.15 $k = 67,\ P = 0{,}94,\ n = 324000.$

7.4.3.16 $k = 93,\ P = 0{,}69,\ n = 451000.$

7.4.3.17 $k = 79,\ P = 0{,}75,\ n = 247000.$

7.4.3.18 $k = 87,\ P = 0{,}89,\ n = 253000.$

7.4.3.19 $k = 86,\ P = 0{,}91,\ n = 120000.$

7.4.3.20 $k = 67,\ P = 0{,}89,\ n = 290000.$

7.4.3.21 $k = 60,\ P = 0{,}82,\ n = 400000.$

7.4.3.22 $k = 76,\ P = 0{,}98,\ n = 230000.$

7.4.3.23 $k = 84,\ P = 0{,}84,\ n = 284000.$

7.4.3.24 $k = 89,\ P = 0{,}93,\ n = 187000.$

7.4.3.25 $k = 56,\ P = 0{,}67,\ n = 110000.$

7.4.3.26 $k = 86,\ P = 0{,}92,\ n = 251000.$

7.4.3.27 $k = 77,\ P = 0{,}88,\ n = 222000.$

7.4.3.28 $k = 74,\ P = 0{,}91,\ n = 140000.$

7.4.3.29 $k = 79,\ P = 0{,}89,\ n = 300000.$

7.4.3.30 $k = 89,\ P = 0{,}89,\ n = 289000.$

ЛИТЕРАТУРА

1. Жевняк, Р. М. Высшая математика. В 5 ч. / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк., 1984. – Ч. 3 – 5.

2. Гуринович, С. Л. Математика. Задачи с экономическим содержанием / С. Л. Гуринович. – Минск : Новое знание, 2008. – 263 с.

3. Индивидуальные задания по высшей математике: операционное исчисление. Элементы теории устойчивости. Теория вероятностей. Математическая статистика / А. П. Рябушко [и др.]. – Минск : Выш. шк., 2006. – 336 с.: ил.

4. Руководство к решению задач по высшей математике. В 2 ч. / Е. И. Гурский [и др.]. – Минск : Выш. шк., 1989. – Ч. 1 – 2.

5. Чудесенко, В. Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (типовые расчёты) / В. Ф. Чудесенко. – Москва : Высш. школа, 1983. – 111 с.

6. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 2 / П. Е. Данко, А. Г. Попов. – Москва : Высш. школа, 1967. – 350.

7. Кудрявцев, В. А. Краткий курс высшей математики / В. А. Кудрявцев, Б. П. Демидович. – Москва : Наука, 1989. – 655 с.

8. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. Дифференциальное исчисление функции одной переменной: методические указания к практическим занятиям для студентов первого курса экономических специальностей / А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2012. – 89 с.

9. Высшая математика. Функции нескольких переменных. Интегральное исчисление функции одной переменной. Дифференциальные уравнения: методические указания к практическим занятиям для студентов первого курса экономических специальностей / А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2014. – 99 с.

10. Высшая математика. Числовые и функциональные ряды. Случайные события в теории вероятностей: методические указания к практическим занятиям для студентов второго курса экономических специальностей / А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2014. – 101 с.

11. Высшая математика: задания для выполнения типовых расчётов для студентов второго курса механико-технологических специальностей / А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2011. – 68 с.

12. Теория вероятностей и математическая статистика: задания для выполнения типовых расчётов для студентов второго курса механико-технологических специальностей / А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2012. – 77 с.

13. Высшая математика: методические указания и контрольные задания для студентов заочной формы обучения. В 4 ч. / В. С. Денисов [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2006. – Ч. 3 – 4.

14. Карасёв, А. И. Курс высшей математики для экономических вузов. В 2 ч. Ч. 2 / А. И. Карасёв, З. М. Аксютина, Т. И. Савельева. – Москва : Высш. школа, 1990. – 272 с.

15. Ефимов, А. В. Сборник задач по математике для ВТУЗов. Специальные курсы / А. В. Ефимов [и др]. – Москва : Наука, 1984. – 606 с.

16. Гурский, Е. И. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике / Е. И. Гурский. – Минск : Выш.шк, 1984 . – 223 с.

17. Герасимович, А. И. Математическая статистика / А. И. Герасимович. – Минск. : Выш. шк, 1983. – 280 с.

18. Руководство к решению задач по высшей математике. В 2 ч. Ч. 2 / Е. И. Гурский [и др.]. – Минск : Выш. шк., 1989. – 400 с.

19. Ершова, В. В. Импульсные функции. Функции комплексной переменной. Операционное исчисление / В. В. Ершова. – Минск : Выш. школа, 1976. – 256 с.

20. Индивидуальные задания по теории вероятностей и математической статистике: типовые расчёты / Ю. В. Муранов [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2000. – 66 с.

21. Высшая математика. Теория вероятностей. Методические указания к практическим занятиям для студентов дневной и заочной форм обучения / Д. Е. Дунина [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2009. – 102 с.

22. Высшая математика. Теория вероятностей и математическая статистика. Методические указания к практическим занятиям для студентов дневной и заочной форм обучения / Д. Е. Дунина [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2012. – 128 с.

23. Чистяков, В. П. Курс теории вероятностей / В. П. Чистяков. – Москва : Наука, 1982. – 243 с.

24. Прохоров, Ю. В. Теория вероятностей / Ю. В. Прохоров, Ю. А. Розанов. – Москва : Наука, 1973. – 496 с.

25. Карасёв, А. И. Теория вероятностей и математическая статистика / А. И. Карасёв. – Москва : Статистика, 1979. – 279 с.

26. Колемаев, В. А. Теория вероятностей и математическая статистика / В. А. Колемаев [и др.] – Москва: Высш. школа, 1991. – 400 с.

27. Гринберг, А.С. Теория вероятностей и математическая статистика. Курс лекций / А. С. Гринберг, О. Б. Плющ, Б. В. Новыш. – Академия управления при Президенте Республики Беларусь, 2005.–186с.

28. Гусак, А. А. Теория вероятностей. Справочное пособие к решению задач / А. А. Гусак, Е. А. Бричикова. – Минск: ТетраСистемс, 2007.– 288 с.

29. Белько, И. В. Теория вероятностей и математическая статистика / И. В. Белько, Г. П. Свирид. – Минск: ООО «Новое знание», 2004.– 251 с.

30. Чернов, В. П. Теория массового обслуживания / В. П. Чернов, В. Б. Ивановский. – Москва : Инфра-М, 2000. – 158 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица П. 1 – Значения функции распределения Пуассона

$$P\left(X = m\right) = \frac{\mu^m}{m!} \cdot e^{-\mu}$$

При μ, равном 0,1; 0,2; …; 1,0

m \ μ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	0,90484	0,81873	0,74082	0,67032	0,60653	0,54881	0,49659	0,44933	0,40657	0,36788
1	0,09048	0,16375	0,22225	0,26813	0,30327	0,32929	0,34761	0,35946	0,36591	0,36788
2	0,00452	0,01637	0,03334	0,05363	0,07582	0,09879	0,12166	0,14379	0,16466	0,18394
3	0,00015	0,00109	0,00333	0,00715	0,01264	0,01976	0,02839	0,03834	0,04940	0,06131
4	0,00000	0,00005	0,00025	0,00072	0,00158	0,00296	0,00497	0,00767	0,01111	0,01533
5		0,00000	0,00002	0,00006	0,00016	0,00036	0,00070	0,00123	0,00200	0,00307
6			0,00000	0,00000	0,00001	0,00004	0,00008	0,00016	0,00030	0,00051
7					0,00000	0,00000	0,00001	0,00002	0,00004	0,00007
8							0,00000	0,00000	0,00000	0,00001
9										0,00000

При μ, равном 2; 3; 4; …; 11

m \ μ	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0,13534	0,04979	0,01832	0,00674	0,00248	0,00091	0,00034	0,00012	0,00005	0,00002
1	0,27067	0,14936	0,07326	0,03369	0,01487	0,00638	0,00268	0,00111	0,00045	0,00018
2	0,27067	0,22404	0,14653	0,08422	0,04462	0,02234	0,01073	0,00500	0,00227	0,00101
3	0,18045	0,22404	0,19537	0,14037	0,08924	0,05213	0,02863	0,01499	0,00757	0,00370
4	0,09022	0,16803	0,19537	0,17547	0,13385	0,09123	0,05725	0,03374	0,01892	0,01019
5	0,03609	0,10082	0,15629	0,17547	0,16062	0,12772	0,09160	0,06073	0,03783	0,02242
6	0,01203	0,05041	0,10420	0,14622	0,16062	0,14900	0,12214	0,09109	0,06306	0,04109
7	0,00344	0,02160	0,05954	0,10444	0,13768	0,14900	0,13959	0,11712	0,09008	0,06458
8	0,00086	0,00810	0,02977	0,06528	0,10326	0,13038	0,13959	0,13176	0,11260	0,08879
9	0,00019	0,00270	0,01323	0,03627	0,06884	0,10140	0,12408	0,13176	0,12511	0,10853
10	0,00004	0,00081	0,00529	0,01813	0,04130	0,07098	0,09926	0,11858	0,12511	0,11938
11	0,00001	0,00022	0,00192	0,00824	0,02253	0,04517	0,07219	0,09702	0,11374	0,11938
12	0,00000	0,00006	0,00064	0,00343	0,01126	0,02635	0,04813	0,07277	0,09478	0,10943
13		0,00001	0,00020	0,00132	0,00520	0,01419	0,02962	0,05038	0,07291	0,09259
14		0,00000	0,00006	0,00047	0,00223	0,00709	0,01692	0,03238	0,05208	0,07275
15			0,00002	0,00016	0,00089	0,00331	0,00903	0,01943	0,03472	0,05335
16			0,00000	0,00005	0,00033	0,00145	0,00451	0,01093	0,02170	0,03668
17				0,00001	0,00012	0,00060	0,00212	0,00579	0,01276	0,02373

Окончание таблицы П. 1

m \ μ	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
18				0,00000	0,00004	0,00023	0,00094	0,00289	0,00709	0,01450
19					0,00001	0,00009	0,00040	0,00137	0,00373	0,00840
20					0,00000	0,00003	0,00016	0,00062	0,00187	0,00462
21						0,00001	0,00006	0,00026	0,00089	0,00242
22						0,00000	0,00002	0,00011	0,00040	0,00121
23							0,00001	0,00004	0,00018	0,00058
24							0,00000	0,00002	0,00007	0,00027
25								0,00001	0,00003	0,00012
26								0,00000	0,00001	0,00005
27									0,00000	0,00002

Таблица П. 2 – Значения функции

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,39894	0,39892	0,39886	0,39876	0,39862	0,39844	0,39822	0,39797	0,39767	0,39733
0,1	0,39695	0,39654	0,39608	0,39559	0,39505	0,39448	0,39387	0,39322	0,39253	0,39181
0,2	0,39104	0,39024	0,38940	0,38853	0,38762	0,38667	0,38568	0,38466	0,38361	0,38251
0,3	0,38139	0,38023	0,37903	0,37780	0,37654	0,37524	0,37391	0,37255	0,37115	0,36973
0,4	0,36827	0,36678	0,36526	0,36371	0,36213	0,36053	0,35889	0,35723	0,35553	0,35381
0,5	0,35207	0,35029	0,34849	0,34667	0,34482	0,34294	0,34105	0,33912	0,33718	0,33521
0,6	0,33322	0,33121	0,32918	0,32713	0,32506	0,32297	0,32086	0,31874	0,31659	0,31443
0,7	0,31225	0,31006	0,30785	0,30563	0,30339	0,30114	0,29887	0,29659	0,29431	0,29200
0,8	0,28969	0,28737	0,28504	0,28269	0,28034	0,27798	0,27562	0,27324	0,27086	0,26848
0,9	0,26609	0,26369	0,26129	0,25888	0,25647	0,25406	0,25164	0,24923	0,24681	0,24439
1,0	0,24197	0,23955	0,23713	0,23471	0,23230	0,22988	0,22747	0,22506	0,22265	0,22025
1,1	0,21785	0,21546	0,21307	0,21069	0,20831	0,20594	0,20357	0,20121	0,19886	0,19652
1,2	0,19419	0,19186	0,18954	0,18724	0,18494	0,18265	0,18037	0,17810	0,17585	0,17360
1,3	0,17137	0,16915	0,16694	0,16474	0,16256	0,16038	0,15822	0,15608	0,15395	0,15183
1,4	0,14973	0,14764	0,14556	0,14350	0,14146	0,13943	0,13742	0,13542	0,13344	0,13147
1,5	0,12952	0,12758	0,12566	0,12376	0,12188	0,12001	0,11816	0,11632	0,11450	0,11270
1,6	0,11092	0,10915	0,10741	0,10567	0,10396	0,10226	0,10059	0,09893	0,09728	0,09566
1,7	0,09405	0,09246	0,09089	0,08933	0,08780	0,08628	0,08478	0,08329	0,08183	0,08038
1,8	0,07895	0,07754	0,07614	0,07477	0,07341	0,07206	0,07074	0,06943	0,06814	0,06687
1,9	0,06562	0,06438	0,06316	0,06195	0,06077	0,05959	0,05844	0,05730	0,05618	0,05508

Окончание таблицы П. 2

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,0	0,05399	0,05292	0,05186	0,05082	0,04980	0,04879	0,04780	0,04682	0,04586	0,04491
2,1	0,04398	0,04307	0,04217	0,04128	0,04041	0,03955	0,03871	0,03788	0,03706	0,03626
2,2	0,03547	0,03470	0,03394	0,03319	0,03246	0,03174	0,03103	0,03034	0,02965	0,02898
2,3	0,02833	0,02768	0,02705	0,02643	0,02582	0,02522	0,02463	0,02406	0,02349	0,02294
2,4	0,02239	0,02186	0,02134	0,02083	0,02033	0,01984	0,01936	0,01888	0,01842	0,01797
2,5	0,01753	0,01709	0,01667	0,01625	0,01585	0,01545	0,01506	0,01468	0,01431	0,01394
2,6	0,01358	0,01323	0,01289	0,01256	0,01223	0,01191	0,01160	0,01130	0,01100	0,01071
2,7	0,01042	0,01014	0,00987	0,00961	0,00935	0,00909	0,00885	0,00861	0,00837	0,00814
2,8	0,00792	0,00770	0,00748	0,00727	0,00707	0,00687	0,00668	0,00649	0,00631	0,00613
2,9	0,00595	0,00578	0,00562	0,00545	0,00530	0,00514	0,00499	0,00485	0,00470	0,00457
3,0	0,00443	0,00430	0,00417	0,00405	0,00393	0,00381	0,00370	0,00358	0,00348	0,00337
3,1	0,00327	0,00317	0,00307	0,00298	0,00288	0,00279	0,00271	0,00262	0,00254	0,00246
3,2	0,00238	0,00231	0,00224	0,00216	0,00210	0,00203	0,00196	0,00190	0,00184	0,00178
3,3	0,00172	0,00167	0,00161	0,00156	0,00151	0,00146	0,00141	0,00136	0,00132	0,00127
3,4	0,00123	0,00119	0,00115	0,00111	0,00107	0,00104	0,00100	0,00097	0,00094	0,00090
3,5	0,00087	0,00084	0,00081	0,00079	0,00076	0,00073	0,00071	0,00068	0,00066	0,00063
3,6	0,00061	0,00059	0,00057	0,00055	0,00053	0,00051	0,00049	0,00047	0,00046	0,00044
3,7	0,00042	0,00041	0,00039	0,00038	0,00037	0,00035	0,00034	0,00033	0,00031	0,00030
3,8	0,00029	0,00028	0,00027	0,00026	0,00025	0,00024	0,00023	0,00022	0,00021	0,00021
3,9	0,00020	0,00019	0,00018	0,00018	0,00017	0,00016	0,00016	0,00015	0,00014	0,00014
4,0	0,00013	0,00013	0,00012	0,00012	0,00011	0,00011	0,00011	0,00010	0,00010	0,00009
4,1	0,00009	0,00009	0,00008	0,00008	0,00008	0,00007	0,00007	0,00007	0,00006	0,00006
4,2	0,00006	0,00006	0,00005	0,00005	0,00005	0,00005	0,00005	0,00004	0,00004	0,00004
4,3	0,00004	0,00004	0,00004	0,00003	0,00003	0,00003	0,00003	0,00003	0,00003	0,00003
4,4	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002
4,5	0,00002	0,00002	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001
4,6	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001
4,7	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Таблица П. 3 – Значения функции Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,00000	0,37	0,14431	0,73	0,26730	1,10	0,36433
0,01	0,00399	0,38	0,14803	0,74	0,27035	1,11	0,36650
0,02	0,00798	0,39	0,15173	0,75	0,27337	1,12	0,36864
0,03	0,01197	0,40	0,15542	0,76	0,27637	1,13	0,37076
0,04	0,01595	0,41	0,15910	0,77	0,27935	1,14	0,37286
0,05	0,01994	0,42	0,16276	0,78	0,28230	1,15	0,37493
0,06	0,02392	0,43	0,16640	0,79	0,28524	1,16	0,37698
0,07	0,02790	0,44	0,17003	0,80	0,28814	1,17	0,37900
0,08	0,03188	0,45	0,17364	0,81	0,29103	1,18	0,38100
0,09	0,03586	0,46	0,17724	0,82	0,29389	1,19	0,38298
0,10	0,03983	0,47	0,18082	0,83	0,29673	1,20	0,38493
0,11	0,04380	0,48	0,18439	0,84	0,29955	1,21	0,38686
0,12	0,04776	0,49	0,18793	0,85	0,30234	1,22	0,38877
0,13	0,05172	0,50	0,19146	0,86	0,30511	1,23	0,39065
0,14	0,05567	0,51	0,19497	0,87	0,30785	1,24	0,39251
0,15	0,05962	0,52	0,19847	0,88	0,31057	1,25	0,39435
0,16	0,06356	0,53	0,20194	0,89	0,31327	1,26	0,39617
0,17	0,06749	0,54	0,20540	0,90	0,31594	1,27	0,39796
0,18	0,07142	0,55	0,20884	0,91	0,31859	1,28	0,39973
0,19	0,07535	0,56	0,21226	0,92	0,32121	1,29	0,40147
0,20	0,07926	0,57	0,21566	0,93	0,32381	1,30	0,40320
0,21	0,08317	0,58	0,21904	0,94	0,32639	1,31	0,40490
0,22	0,08706	0,59	0,22240	0,95	0,32894	1,32	0,40658
0,23	0,09095	0,60	0,22575	0,96	0,33147	1,33	0,40824
0,24	0,09483	0,61	0,22907	0,97	0,33398	1,34	0,40988
0,25	0,09871	0,62	0,23237	0,98	0,33646	1,35	0,41149
0,26	0,10257	0,63	0,23565	0,99	0,33891	1,36	0,41308
0,27	0,10642	0,64	0,23891	1,00	0,34134	1,37	0,41466
0,28	0,11026	0,65	0,24215	1,01	0,34375	1,38	0,41621
0,29	0,11409	0,66	0,24537	1,02	0,34614	1,39	0,41774
0,30	0,11791	0,67	0,24857	1,03	0,34849	1,40	0,41924
0,31	0,12172	0,675	0,25016	1,04	0,35083	1,41	0,42073
0,32	0,12552	0,68	0,25175	1,05	0,35314	1,42	0,42220
0,33	0,12930	0,69	0,25490	1,06	0,35543	1,43	0,42364
0,34	0,13307	0,70	0,25804	1,07	0,35769	1,44	0,42507
0,35	0,13683	0,71	0,26115	1,08	0,35993	1,45	0,42647
0,36	0,14058	0,72	0,26424	1,09	0,36214	1,46	0,42785

Продолжение таблицы П. 3

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,47	0,42922	1,87	0,46926	2,27	0,48840	2,67	0,49621
1,48	0,43056	1,88	0,46995	2,28	0,48870	2,68	0,49632
1,49	0,43189	1,89	0,47062	2,29	0,48899	2,69	0,49643
1,50	0,43319	1,90	0,47128	2,30	0,48928	2,70	0,49653
1,51	0,43448	1,91	0,47193	2,31	0,48956	2,71	0,49664
1,52	0,43574	1,92	0,47257	2,32	0,48983	2,72	0,49674
1,53	0,43699	1,93	0,47320	2,33	0,49010	2,73	0,49683
1,54	0,43822	1,94	0,47381	2,34	0,49036	2,74	0,49693
1,55	0,43943	1,95	0,47441	2,35	0,49061	2,75	0,49702
1,56	0,44062	1,96	0,47500	2,36	0,49086	2,76	0,49711
1,57	0,44179	1,97	0,47558	2,37	0,49111	2,77	0,49720
1,58	0,44295	1,98	0,47615	2,38	0,49134	2,78	0,49728
1,59	0,44408	1,99	0,47670	2,39	0,49158	2,79	0,49736
1,60	0,44520	2,00	0,47725	2,40	0,49180	2,80	0,49744
1,61	0,44630	2,01	0,47778	2,41	0,49202	2,81	0,49752
1,62	0,44738	2,02	0,47831	2,42	0,49224	2,82	0,49760
1,63	0,44845	2,03	0,47882	2,43	0,49245	2,83	0,49767
1,64	0,44950	2,04	0,47932	2,44	0,49266	2,84	0,49774
1,65	0,45053	2,05	0,47982	2,45	0,49286	2,85	0,49781
1,66	0,45154	2,06	0,48030	2,46	0,49305	2,86	0,49788
1,67	0,45254	2,07	0,48077	2,47	0,49324	2,87	0,49795
1,68	0,45352	2,08	0,48124	2,48	0,49343	2,88	0,49801
1,69	0,45449	2,09	0,48169	2,49	0,49361	2,89	0,49807
1,70	0,45543	2,10	0,48214	2,50	0,49379	2,90	0,49813
1,71	0,45637	2,11	0,48257	2,51	0,49396	2,91	0,49819
1,72	0,45728	2,12	0,48300	2,52	0,49413	2,92	0,49825
1,73	0,45818	2,13	0,48341	2,53	0,49430	2,93	0,49831
1,74	0,45907	2,14	0,48382	2,54	0,49446	2,94	0,49836
1,75	0,45994	2,15	0,48422	2,55	0,49461	2,95	0,49841
1,76	0,46080	2,16	0,48461	2,56	0,49477	2,96	0,49846
1,77	0,46164	2,17	0,48500	2,57	0,49492	2,97	0,49851
1,78	0,46246	2,18	0,48537	2,58	0,49506	2,98	0,49856
1,79	0,46327	2,19	0,48574	2,59	0,49520	2,99	0,49891
1,80	0,46407	2,20	0,48610	2,60	0,49534	3,00	0,49865
1,81	0,46485	2,21	0,48645	2,61	0,49547	3,01	0,49869
1,82	0,46562	2,22	0,48679	2,62	0,49560	3,02	0,49874
1,83	0,46638	2,23	0,48713	2,63	0,49573	3,03	0,49878
1,84	0,46712	2,24	0,48745	2,64	0,49585	3,04	0,49882
1,85	0,46784	2,25	0,48778	2,65	0,49598	3,05	0,49886
1,86	0,46856	2,26	0,48809	2,66	0,49609	3,06	0,49889

Окончание таблицы П. 3

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
3,07	0,49893	3,13	0,49913	3,19	0,49929	3,70	0,49989
3,08	0,49896	3,14	0,49916	3,20	0,49931	3,80	0,49993
3,09	0,49900	3,15	0,49918	3,30	0,49952	3,90	0,49995
3,10	0,49903	3,16	0,49921	3,40	0,49966	4,00	0,499968
3,11	0,49906	3,17	0,49924	3,50	0,49977	4,50	0,499997
3,12	0,49910	3,18	0,49926	3,60	0,49984	5,00	0,499999

Таблица П. 4 – Значение χ^2 распределения

В таблице представлены значения $\chi^2_{\alpha,\nu}$ в зависимости от числа степеней свободы ν и вероятности α

ν / α	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
1	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635	10,827
2	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210	13,815
3	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345	16,266
4	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277	18,467
5	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086	20,515
6	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812	22,457
7	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475	24,322
8	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090	26,125
9	12,242	14,684	16,919	19,669	21,666	27,877
10	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209	29,588
11	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725	31,264
12	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217	32,909
13	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688	34,528
14	18,151	21,064	23,685	26,783	29,141	36,123
15	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578	37,697
16	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000	39,252
17	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409	40,790
18	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805	42,312
19	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191	43,820
20	25,038	28,412	31,410	35,020	37,556	45,315
21	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932	46,797
22	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289	48,268
23	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638	49,728
24	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980	51,179
25	30,675	34,382	37,652	41,556	44,314	52,620
26	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642	54,052
27	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963	55,476
28	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278	56,893
29	35,139	38,087	42,557	46,693	49,588	58,302
30	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892	59,703

Таблица П. 5 – Распределение Стьюдента

Значения $t_{\alpha,\nu}$ удовлетворяют условию $P\left(t \geq t_{\alpha,\nu}\right) = \int\limits_{t_{\alpha,\nu}}^{\infty} S\left(t,\nu\right) dt = \alpha$.

В таблице представлены значения квантилей $t_{\alpha,\nu}$ в зависимости от числа степеней свободы ν и вероятности α.

α / ν	0,40	0,30	0,20	0,10	0,050	0,025	0,010	0,005	0,001	0,0005
1	0,325	0,727	1,376	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	381,3	636,6
2	0,289	0,617	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,33	31,60
3	0,277	0,584	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,22	12,94
4	0,271	0,569	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	0,267	0,559	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	5,032	5,893	6,859
6	0,265	0,553	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	0,263	0,549	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,765	5,405
8	0,262	0,546	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	6,041
9	0,261	0,543	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	0,260	0,542	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	0,260	0,540	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	0,259	0,539	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	0,259	0,538	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	0,258	0,537	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	3,977	3,787	4,140
15	0,258	0,536	0,866	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	0,258	0,535	0,865	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	0,257	0,534	0,863	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	0,257	0,534	0,862	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,611	3,922
19	0,257	0,533	0,861	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	0,257	0,533	0,860	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,562	3,850
21	0,257	0,532	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	0,256	0,532	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	0,256	0,532	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,767
24	0,256	0,531	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	0,256	0,531	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	0,256	0,531	0,856	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	0,256	0,531	0,855	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
28	0,256	0,530	0,855	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	0,256	0,530	0,854	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
30	0,256	0,530	0,854	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
40	0,255	0,529	0,851	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
50	0,255	0,528	0,849	1,298	1,676	2,009	2,403	2,678	3,262	3,495
60	0,254	0,527	0,848	1,293	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
80	0,254	0,527	0,846	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195	3,415
100	0,254	0,526	0,845	1,290	1,660	1,984	2,365	2,626	3,174	3,389
200	0,254	0,525	0,843	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601	3,131	3,339
500	0,253	0,525	0,842	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586	3,106	3,310
∞	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

Таблица П. 6 – Распределение Фишера

В таблице приведены критические значения (квантили) F_{α,ν_1,ν_2} в зависимости от числа степеней свободы ν_1 и ν_2 для значения $\alpha = 0,05$:

$$P\left(F \geq F_{\alpha,\nu_1,\nu_2}\right) = 0,05.$$

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161,45	199,50	215,72	224,57	230,17	233,97	238,89	243,91	249,04	254,32
2	18,512	18,999	19,163	19,248	19,298	19,329	19,371	19,414	19,453	19,496
3	10,129	9,552	9,276	9,118	9,014	8,941	8,844	8,774	8,638	8,527
4	7,710	6,945	6,591	6,388	6,257	6,164	6,041	5,912	5,774	5,628
5	6,607	5,785	5,410	5,192	5,050	4,950	4,818	4,678	4,527	4,365
6	5,987	5,143	4,756	4,534	4,388	4,284	4,147	4,000	3,841	3,669
7	5,591	4,737	4,347	4,121	3,972	3,866	3,725	3,574	3,410	3,230
8	5,317	4,459	4,067	3,838	3,688	3,580	3,438	3,284	3,116	2,928
9	5,117	4,256	3,863	3,633	3,482	3,374	3,230	3,073	2,900	2,707
10	4,965	4,103	3,708	3,478	3,326	3,217	3,072	2,913	2,737	2,538
11	4,844	3,982	3,587	3,357	3,204	3,094	2,948	2,788	2,609	2,405
12	4,747	3,885	3,490	3,259	3,106	2,999	2,848	2,686	2,505	2,296
13	4,667	3,805	3,410	3,179	3,025	2,915	2,767	2,604	2,420	2,207
14	4,600	3,739	3,344	3,112	2,958	2,848	2,699	2,534	2,349	2,131
15	4,543	3,683	3,287	3,056	2,901	2,790	2,641	2,475	2,288	2,066
16	4,494	3,634	3,239	3,007	2,853	2,741	2,591	2,424	2,235	2,010
17	4,451	3,592	3,197	2,965	2,810	2,699	2,548	2,381	2,190	1,961
18	4,414	3,555	3,160	2,928	2,773	2,661	2,510	2,342	2,150	1,917
19	4,381	3,522	3,127	2,895	2,740	2,629	2,477	2,308	2,114	1,878
20	4,351	3,493	3,098	2,866	2,711	2,599	2,447	2,278	2,083	1,843
21	4,325	3,467	3,072	2,840	2,685	2,573	2,421	2,250	2,064	1,812
22	4,301	3,443	3,049	2,817	2,661	2,549	2,397	2,226	2,028	1,783
23	4,279	3,422	3,028	2,795	2,640	2,528	2,375	2,203	2,005	1,757
24	4,260	3,403	3,009	2,777	2,621	2,508	2,355	2,183	1,984	1,733
25	4,242	3,385	2,991	2,759	2,603	2,490	2,337	2,165	1,965	1,711
26	4,225	3,369	2,975	2,743	2,587	2,474	2,321	2,148	1,947	1,691
27	4,210	3,354	2,961	2,728	2,572	2,459	2,305	2,132	1,930	1,672
28	4,196	3,340	2,947	2,714	2,558	2,445	2,992	2,118	1,915	1,654
29	4,183	3,328	2,934	2,702	2,545	2,432	2,278	2,104	1,901	1,638
30	4,171	3,316	2,922	2,690	2,534	2,421	2,266	2,092	1,887	1,622
40	4,085	3,232	2,839	2,605	2,449	2,336	2,180	2,004	1,793	1,509
60	4,001	3,151	2,758	2,525	2,368	2,254	2,097	1,918	1,700	1,389
120	3,920	3,072	2,680	2,447	2,290	2,175	2,106	1,834	1,608	1,254
∞	3,841	2,996	2,605	2,372	2,214	2,098	1,938	1,752	1,517	1,000

Таблица П. 7 – Таблица производных основных элементарных функций

1)	$C' = 0$, где $C = Const$;	2)	$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$
3)	$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$, где $a > 0$, $a \neq 1$;	4)	$(e^x)' = e^x$
5)	$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \cdot \ln a}$, где $a > 0$, $a \neq 1$, $x > 0$;	6)	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$, где $x > 0$;
7)	$(\sin x)' = \cos x$;	8)	$(\cos x)' = -\sin x$;
9)	$(\mathrm{tg}\, x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, где $x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$;	10)	$(\mathrm{ctg}\, x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$, где $x \neq \pi k$, $k \in Z$;
11)	$(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, где $\lvert x \rvert < 1$;	12)	$(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, где $\lvert x \rvert < 1$;
13)	$(\mathrm{arctg}\, x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;	14)	$(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$;
15)	$(\mathrm{sh}\, x)' = \mathrm{ch}\, x$;	16)	$(\mathrm{ch}\, x)' = \mathrm{sh}\, x$;
17)	$(\mathrm{th}\, x)' = \dfrac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$;	18)	$(\mathrm{cth}\, x)' = -\dfrac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$, где $x \neq 0$.

Таблица П. 8 – Таблица основных неопределённых интегралов

1)	$\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$, $n \neq -1$;	2)	$\int \dfrac{dx}{x} = \ln\lvert x \rvert + C$;
3)	$\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0$, $a \neq 1, x > 0$;	4)	$\int e^x dx = e^x + C$;
5)	$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$;	6)	$\int \cos x\, dx = \sin x + C$;
7)	$\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg}\, x + C$;	8)	$\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg}\, x + C$;
9)	$\int \dfrac{dx}{\sin x} = \ln\left\lvert \mathrm{tg}\dfrac{x}{2} \right\rvert + C$;	10)	$\int \dfrac{dx}{\cos x} = \ln\left\lvert \mathrm{tg}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}\right) \right\rvert + C$;
11)	$\int \dfrac{dx}{a^2+x^2} = \dfrac{1}{a}\mathrm{arctg}\dfrac{x}{a} + C\ a \neq 0$;	12)	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\dfrac{x}{a} + C, \lvert x \rvert < \lvert a \rvert$;
13)	$\int \dfrac{dx}{a^2-x^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left\lvert \dfrac{x+a}{x-a} \right\rvert + C$;	14)	$\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left\lvert x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right\rvert + C$;
16)	$\int \mathrm{sh}x\, dx = \mathrm{ch}x + C$;	17)	$\int \mathrm{ch}x\, dx = \mathrm{sh}x + C$;
18)	$\int \dfrac{dx}{\mathrm{ch}^2 x} = \mathrm{th}x + C$;	19)	$\int \dfrac{dx}{\mathrm{sh}^2 x} = -\mathrm{th}x + C$, где $x \neq 0$.

СОДЕРЖАНИЕ