

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

**Учреждение образования
«Витебский государственный технологический университет»**

**ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
Числовые и функциональные ряды.
Случайные события в теории вероятностей**

**Методические указания к практическим занятиям для студентов
второго курса экономических специальностей**

**ВИТЕБСК
2015**

УДК 517 (076.1) (075.8)

Высшая математика. Числовые и функциональные ряды. Случайные события в теории вероятностей: методические указания к практическим занятиям для студентов второго курса экономических специальностей.

Витебск: Министерство образования Республики Беларусь, УО “ВГТУ”, 2014.

Составители: ст. преп. Коваленко А. В.,
доц., к. ф.-м. н. Денисов В. С.,
ст. преп. Дмитриев А. П.,
ст. преп. Завацкий Ю. А.,
доц., к. ф.-м. н. Загурский В. Н.,
доц., д. т. н. Джежора А. А.

Методические указания содержат основные теоретические сведения, задания к практическим занятиям, примеры для самостоятельного выполнения, вопросы к экзамену и зачёту по шести разделам курса “Высшая математика” и предназначены для проведения практических занятий у студентов второго курса экономического факультета дневной и заочной форм обучения.

Одобрено кафедрой теоретической и прикладной математики УО “ВГТУ”
20 октября 2014 г., протокол № 3.

Рецензент: ст. преп. Статковский Н. С.
Редактор: доц., к.ф.-м.н. Никонова Т. В.

Рекомендовано к опубликованию редакционно-издательским советом
УО “ВГТУ” "27" ноября 2014 г., протокол № 8.

Ответственный за выпуск: Шалапухо Е. А.

Учреждение образования “Витебский государственный технологический университет”

Подписано к печати 23.03.15. Формат 60x90 1/16. Уч.-изд. лист. 6,3.
Печать ризографическая. Тираж 160 экз. Заказ № 103.

Отпечатано на ризографе учреждения образования “Витебский государственный технологический университет”.

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/172 от 12 февраля 2014 г.
210035, Витебск, Московский проспект, 72.

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания составлены на основе практических занятий, которые авторы проводили на протяжении многих лет преподавания дисциплины «Высшая математика» в Витебском государственном технологическом университете. Приведённый материал проверен на нескольких поколениях студентов и содержит необходимые сведения для будущих экономистов. Среди рассмотренных в указаниях типовых примеров есть задачи, имеющие практическую направленность и связанные с дисциплинами, которые будут изучать студенты-экономисты в следующих семестрах.

Данные учебно-методические материалы предназначены для студентов экономического факультета. В работе приведены теоретические вопросы для сдачи экзамена или зачёта, содержание и тематика практических занятий по указанному курсу. Методические указания написаны в соответствии с учебной программой дисциплины «Высшая математика» для студентов экономических специальностей второго года обучения.

В методических указаниях рассмотрены шесть разделов курса «Высшая математика»: числовые ряды с положительными членами, знакопеременные и знакопеременяющиеся ряды, функциональные ряды, степенные ряды, классическое вероятностное пространство, зависимые и независимые случайные события. Согласно учебной программе курса «Высшая математика» для студентов экономических специальностей на третий семестр обучения, все эти темы студент должен изучить на десяти аудиторных занятиях. Каждое практическое занятие представляет собой методический материал для его проведения, содержит решения типовых примеров и подборку рекомендуемых к решению задач по теме занятия. В начале каждого практического занятия приведён краткий теоретический материал, который необходимо знать студенту при подготовке к аудиторной и самостоятельной работе по заданной теме, однако, этих сведений недостаточно для сдачи экзамена или зачёта по предмету. Прежде чем приступать к решению задач практического занятия или выполнению домашнего задания, студенту необходимо изучить теоретический курс лекционного материала или обратиться к академическим изданиям для более детального изучения разделов курса, которые его интересуют. Наименование занятий, а также их структура построены в соответствии с учебной программой дисциплины «Высшая математика» для студентов экономических специальностей, а также могут применяться на усмотрение преподавателя на практических занятиях студентами других специальностей различных форм обучения. Студенты заочной формы обучения могут применять изложенный теоретический и практический материал для самостоятельной работы по предмету «Высшая математика».

Предложенные методические указания также помогут студентам подготовиться к прохождению теста по отдельным темам и разделам курса, так как проведение зачёта или экзамена может подразумевать электронный контроль знаний.

ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ ПО КУРСУ “ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА” ДЛЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ (ТРЕТИЙ СЕМЕСТР)

1. Числовой ряд. Сходимость числового ряда. Примеры сходящихся рядов (геометрический ряд).
2. Числовой ряд. Сходимость числового ряда. Примеры сходящихся рядов (гармонический ряд).
3. Необходимый признак сходимости и достаточный признак расходимости числового ряда.
4. Свойства сходящихся рядов.
5. Ряды с положительными членами. Достаточные признаки сходимости (признак сравнения).
6. Ряды с положительными членами. Достаточные признаки сходимости (предельный признак сравнения).
7. Ряды с положительными членами. Достаточные признаки сходимости (признак Даламбера).
8. Ряды с положительными членами. Достаточные признаки сходимости (радикальный признак Коши).
9. Ряды с положительными членами. Достаточные признаки сходимости (интегральный признак Коши).
10. Знакопеременные ряды. Условная и абсолютная сходимость знакопеременного ряда.
11. Знакопеременные ряды. Признак Лейбница и следствие из него.
12. Функциональные ряды. Область сходимости функционального ряда.
13. Равномерно сходящиеся ряды и их свойства.
14. Степенной ряд. Теорема Абеля и следствие из неё.
15. Степенной ряд. Радиус и область сходимости степенного ряда.
16. Теорема существования и единственности разложения функции в степенной ряд.
17. Необходимое и достаточное условие разложения функции в степенной ряд.
18. Разложение элементарных функций в степенной ряд.
19. Вычисление приближённых значений функции с помощью степенных рядов.
20. Вычисление определенного интеграла с помощью степенных рядов.
21. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью степенных рядов.
22. Вероятностный эксперимент. Предмет и задачи теории вероятностей.
23. Основные формулы комбинаторики.
24. Пространство элементарных событий. Алгебра событий.

25. Классификация событий.
26. Аксиоматическое, классическое, геометрическое и статистическое определение вероятностей случайных событий.
27. Свойства вероятностей случайных событий.
28. Условная вероятность. Теорема умножения вероятностей.
29. Формула полной вероятности.
30. Формула Байеса.
31. Последовательность независимых испытаний. Схема Бернулли.
32. Наивероятнейшее число.
33. Теорема Пуассона.
34. Локальная теорема Муавра-Лапласа.
35. Интегральная теорема Муавра-Лапласа.
36. Закон больших чисел в схеме Бернулли.
37. Понятие случайной величины
38. Функция распределения, её свойства.
39. Плотность вероятности, её свойства.
40. Дискретные случайные величины.
41. Непрерывные случайные величины.
42. Характеристики, описывающие центр распределения случайной величины (математическое ожидание, мода и медиана), их свойства.
43. Характеристики, описывающие рассеивание случайной величины (дисперсия и среднее квадратическое отклонение), их свойства.
44. Одноточечное и двухточечное распределение.
45. Геометрическое и гипергеометрическое распределение.
46. Биномиальный закон распределения.
47. Равномерный закон распределения.
48. Показательный закон распределения.
49. Нормальный закон распределения.
50. Правило трех сигм для нормального закона распределения.
51. Определение многомерных случайных величин. Понятие о моделях распределения многомерных случайных величин.
52. Распределение вероятностей многомерных дискретных случайных величин.
53. Функция распределения многомерной случайной величины.
54. Непрерывные многомерные случайные величины. Плотность распределения вероятностей многомерной случайной величины.
55. Распределения составляющих многомерной случайной величины.
56. Условные распределения составляющих многомерных случайных величин.
57. Зависимые и независимые случайные величины.
58. Числовые характеристики многомерных случайных величин.
59. Функции (преобразования) двумерной случайной величины
60. Двумерное нормальное распределение.

ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

1 ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ.

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ

(практическое занятие № 1)

Содержание: определение числового ряда, частичная сумма ряда, сходимость ряда, необходимый и достаточный признаки сходимости ряда, свойства сходящихся рядов, необходимое и достаточное условия сходимости рядов с положительными членами, достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами (признак сравнения, предельный признак сравнения, признак Даламбера, радикальный признак Коши).

1.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Рассмотрим числовую последовательность $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$, где $a_n = f(n)$ – функция натуральных чисел.

Определение 1.1.1 Бесконечным числовым рядом называется выражение вида $a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n + \dots$, где $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$ некоторые действительные или комплексные числа, которые называются членами ряда, а $a_n = f(n)$ – общим или n -м членом ряда.

Ряд считается вполне определённым, если задан общий член ряда. Числовой ряд часто записывают в виде $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Например, гармонический ряд имеет вид: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$, а геометрический ряд может быть записан в виде $\sum_{n=1}^{\infty} bq^{n-1} = b + bq + bq^2 + \dots + bq^{n-1} + \dots$, где b и q – числа отличные от нуля.

Определение 1.1.2 Сумма конечного числа первых членов ряда называется *частичной суммой* ряда.

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n$ – n частичная сумма ряда.

Частичные суммы ряда представляют числовую последовательность.

Определение 1.1.3 Числовой ряд называется *сходящимся*, если существует предел последовательности частичных сумм ряда, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, при этом число S называется суммой ряда. Если указанный предел не существует или, в частности, равен бесконечности, то ряд называется *расходящимся*.

Пример 1.1.1 Гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ – расходится.

Пример 1.1.2 *Обобщённый гармонический ряд (ряд Дирихле)* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$ – рас-
ходится, если $\alpha \leq 1$, и сходится, если $\alpha > 1$. Сумма обобщённого гармоническо-
го ряда порядка α равна значению дзета-функции Римана $\zeta(\alpha) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}}$. Для
чётных чисел α значение выражается через число π , например $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$, а для
 $\alpha = 3$ его значение аналитически неизвестно.

Пример 1.1.3 *Геометрический ряд* $\sum_{n=1}^{\infty} bq^{n-1}$ – расходится, если $|q| \geq 1$, и
сходится, если $|q| < 1$, а его сумма равна $S = \frac{b}{1-q}$.

Теорема 1.1.1 (необходимый признак сходимости ряда). Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
сходится, то предел n -го члена равен нулю, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

Этот признак является необходимым, но не достаточным, так, например,
гармонический ряд расходится, но предел n -го члена равен нулю.

Теорема 1.1.2 (достаточный признак расходимости ряда). Если
 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ – расходится.

Сформулируем основные свойства числовых рядов:

1) если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и его сумма равна числу S , то будет схо-
диться ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha a_n$, причём сумма последнего ряда равна αS ;

2) если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся и их суммы равны S и σ , соответ-
ственно, то будет сходиться ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$, причём сумма последнего ряда
равна $S \pm \sigma$;

3) сходимость или расходимость числового ряда не изменится, если в
нём приписать или отбросить конечное число слагаемых.

Рассмотрим ряды с положительными членами.

Теорема 1.1.3 Для того, чтобы числовой ряд с положительными членами
сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных
сумм была ограничена.

Перечислим основные достаточные признаки сходимости и расходимости
рядов с положительными членами.

Теорема 1.1.4 (признак сравнения). Пусть дан ряд (1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и ряд

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, причём для каждого члена рядов выполняется неравенство $0 < a_n \leq b_n$.

Тогда из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1). Из расходимости ряда (1) следует расходимость ряда (2).

Признак остаётся в силе, если соответствующее неравенство выполняется не с первых членов ряда, а лишь начиная с некоторого члена N .

Теорема 1.1.5 (предельный признак сравнения). Пусть дан ряд (1) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$

и ряд (2) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ и существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ ($c \neq 0, c \neq \infty$). Тогда ряды сходятся и расходятся одновременно. Если $c = 0$, то из сходимости ряда (2) следует сходимость ряда (1). Если $c \rightarrow \infty$, то из расходимости ряда (2) следует расходимость ряда (1).

Теорема 1.1.6 (предельный признак Даламбера). Пусть дан ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с

положительными членами и существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l$. Тогда

- 1) если $l < 1$, ряд сходится;
- 2) если $l > 1$, ряд расходится;
- 3) если $l = 1$, сомнительный случай, требуются дополнительные исследования.

Теорема 1.1.7 (предельный радикальный признак Коши). Пусть дан

ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами и существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$. Тогда

- 1) если $l < 1$, ряд сходится;
- 2) если $l > 1$, ряд расходится;
- 3) если $l = 1$, сомнительный случай, требуются дополнительные исследования.

Экономические приложения числовых рядов

Формула наращенной суммы по дискретно изменяющимся процентным ставкам (нормам). Если P – первоначальная сумма, r_j ($j = \overline{1, k}$) – j -я ставка, действующая t_j времени, то итоговая сумма равна:

$$S = P(1 + r_1 t_1 + r_2 t_2 + \dots + r_k t_k) = P(1 + \sum_{j=1}^k r_j t_j).$$

Множитель наращения в этом случае равен: $\mu = 1 + \sum_{j=1}^k r_j t_j$.

1.2 Примеры решения типовых задач

1.2.1 Написать первые четыре члена ряда, общий член которого задан формулой $a_n = (-1)^{n-1} n^2$.

Решение. Полагая в данной формуле $n = 1, 2, 3, 4$, находим первые четыре члена числового ряда: $a_1 = (-1)^{1-1} 1^2 = 1$, $a_2 = (-1)^{2-1} 2^2 = -4$, $a_3 = (-1)^{3-1} 3^2 = 9$, $a_4 = (-1)^{4-1} 4^2 = -16$. Таким образом, данный числовой ряд можно записать в виде $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot n^2 = 1 - 4 + 9 - 16 + \dots + (-1)^{n-1} n^2 + \dots$.

1.2.2 Найти общий член ряда $2 + \frac{4}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \frac{2}{81} + \frac{4}{243} + \dots$, считая, что последующие члены подчиняются тому же закону, по которому образованы первые члены ряда.

Решение. Каждый член ряда представляет собой дробь, числитель которой равен двойке для членов с нечётными номерами и четырём для членов с чётными номерами, а знаменатель – соответствующей степени числа три. Следовательно, числитель можно представить формулой $3 + (-1)^n$, а знаменатель – формулой 3^{n-1} , поэтому формула n -го члена ряда имеет вид: $a_n = \frac{3 + (-1)^n}{3^{n-1}}$.

1.2.3 Найти сумму ряда $\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \dots$

Решение. Составим n -ю частичную сумму данного ряда:

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)}.$$

Чтобы упростить выражение для частичной суммы S_n , преобразуем формулу для общего члена ряда, разлагая a_n на элементарные дроби. Положим

$$\frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{A}{2n-1} + \frac{B}{2n+1},$$

отсюда

$$\frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{(2A+2B)n + (A-B)}{(2n-1) \cdot (2n+1)}.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях n в числителях обеих частей равенства, получаем: $2A + 2B = 0$, $A - B = 1$, откуда $A = 1/2$, $B = -1/2$.

Поэтому n -й член ряда имеет вид

$$a_n = \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right).$$

Запишем n -ю частичную сумму данного ряда и преобразуем её:

$$S_n = \frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 9} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot (2n+1)} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right).$$

Поскольку $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$, то данный ряд сходится и его сумма равна $S = 1/2$.

1.2.4 Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+5}{3n-7}$.

Решение. Воспользуемся достаточным признаком расходимости ряда.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+5}{3n-7} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+5/n}{3-7/n} = \frac{2}{3} \neq 0.$$

Согласно теореме 1.1.2 ряд расходится.

1.2.5 Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 5^n}$.

Решение. Воспользуемся признаком сравнения. Так как, для геометрического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n}$ значение $q = \frac{1}{5} < 1$, то он сходится. Для установления сходимости ряда используем неравенство $a_n = \frac{1}{n \cdot 5^n} \leq \frac{1}{5^n} = b_n$. Согласно признаку

сравнения (теорема 1.1.4) исходный ряд сходится.

1.2.6 Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2-1}{3n^3+2n^2-4}$.

Решение. Воспользуемся предельным признаком сравнения, сравнив исходный ряд с расходящимся гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2n^2-1}{3n^3+2n^2-4}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3-n}{3n^3+2n^2-4} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2-\frac{1}{n^2}}{3+\frac{2}{n}-\frac{4}{n^3}} = \frac{2}{3} \quad \left(\begin{array}{l} \neq 0; \\ \neq \infty \end{array} \right).$$

На основании предельного признака сравнения (теорема 1.1.5) ряды сходятся и расходятся одновременно, следовательно, исходный ряд расходится.

1.2.7 Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^2-n+5}{n^6+3n^4-2}$.

Решение. Воспользуемся предельным признаком сравнения, сравнив исходный ряд с обобщённо гармоническим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ ($p = 4 > 1$).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{4n^2 - n + 5}{n^6 + 3n^4 - 2}}{\frac{1}{n^4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^6 - n^5 + 5n^4}{n^6 + 3n^4 - 2} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 - \frac{1}{n} + \frac{5}{n^2}}{1 + \frac{3}{n^2} - \frac{2}{n^6}} = 4 \quad \left(\begin{array}{l} \neq 0; \\ \neq \infty \end{array} \right).$$

На основании предельного признака сравнения (теорема 1.1.5) ряды сходятся и расходятся одновременно, следовательно, исходный ряд сходится.

1.2.8 Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{3^n(2n+1)}$.

Решение. Воспользуемся признаком Даламбера.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{5^{n+1}}{3^{n+1}(2n+3)}}{\frac{5^n}{3^n(2n+1)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} \cdot 3^n \cdot (2n+1)}{5^n \cdot 3^{n+1} \cdot (2n+3)} = \frac{5}{3} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{2n+3} = \frac{5}{3} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{3}{n}} = \frac{5}{3} > 1.$$

На основании признака Даламбера (теорема 1.1.6) ряд расходится.

1.2.9 Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n+2}{n!}$.

Решение. Воспользуемся признаком Даламбера.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3n+5}{(n+1)!}}{\frac{3n+2}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot (3n+5)}{(n+1)! \cdot (3n+2)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+5}{3n^2+5n+2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{n} + \frac{5}{n^2}}{3 + \frac{5}{n} + \frac{2}{n^2}} = 0 < 1.$$

На основании признака Даламбера (теорема 1.1.6) ряд сходится.

1.2.10 Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \arccos^n \frac{\sqrt{3}n+5}{2n+12}$.

Решение. Воспользуемся радикальным признаком Коши (теорема 1.1.7).

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\arccos^n \frac{\sqrt{3}n+5}{2n+12}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \arccos \frac{\sqrt{3}n+5}{2n+12} = \\ &= \left(\arccos \left(\frac{\infty}{\infty} \right) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \arccos \frac{\sqrt{3} + 5/n}{2 + 12/n} = \arccos \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6} < 1. \end{aligned}$$

На основании радикального признака Коши ряд сходится.

1.2.11 Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{3n+5}{3n+1} \right)^{3n^2/4}$.

Решение. Воспользуемся радикальным признаком Коши (теорема 1.1.7).

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} \cdot \left(\frac{3n+5}{3n+1} \right)^{3n^2/4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3n+5}{3n+1} \right)^{3n/4} = (1^\infty) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3n+5}{3n+1} - 1 \right)^{3n/4} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3n+5-3n-1}{3n+1} \right)^{3n/4} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{3n+1} \right)^{3n/4} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(1 + \frac{1}{(3n+1)/4} \right)^{\frac{3n+1}{4}} \right)^{\frac{4 \cdot 3n}{3n+1}} = \frac{1}{2} \cdot e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n}{3n+1}} = \frac{1}{2} \cdot e^{\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{3+1/n}} = \frac{1}{2} \cdot e > 1.
\end{aligned}$$

На основании радикального признака Коши ряд расходится.

1.2.12 Доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$.

Решение. Для доказательства воспользуемся необходимым признаком сходимости ряда (теорема 1.1.1). Рассмотрим числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n!}$, у которого

n -й член равен $a_n = \frac{2^n}{n!}$. Исследуем числовой ряд на сходимость, воспользовавшись признаком Даламбера.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{2^n}{n!}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! \cdot 2^{n+1}}{(n+1)! \cdot 2^n} = 2 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 2 \cdot 0 = 0 < 1.$$

По признаку Даламбера (теорема 1.1.6) ряд сходится. На основании необходимого признака сходимости ряда: если ряд сходится, то предел n -го члена равен нулю, то есть $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^n}{n!} = 0$.

1.3 Задания для решения на практическом занятии

1.3.1 Написать первые шесть членов ряда по заданному общему члену:

$$\text{1.3.1.1 } a_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \left(\frac{5}{6} \right)^n. \quad \text{1.3.1.2 } a_n = \frac{2^n}{n!}. \quad \text{1.3.1.3 } a_n = \sin \frac{\pi(n-1)}{4}.$$

1.3.2 Найти общий член ряда $\frac{1}{2} + \frac{3}{4 \cdot 5} + \frac{5}{6 \cdot 25} + \frac{7}{8 \cdot 125} + \frac{9}{10 \cdot 625} + \dots$, считая,

что последующие члены подчиняются тому же закону, по которому образованы первые члены ряда.

$$\text{1.3.2.1 } \frac{1}{2} + \frac{3}{4 \cdot 5} + \frac{5}{6 \cdot 25} + \frac{7}{8 \cdot 125} + \frac{9}{10 \cdot 625} + \dots$$

$$\text{1.3.2.2 } \frac{3}{1 \cdot 4} + \frac{5}{4 \cdot 9} + \frac{7}{9 \cdot 16} + \frac{9}{16 \cdot 25} + \frac{11}{25 \cdot 36} + \dots$$

$$\text{1.3.2.3 } 2 + \frac{3}{2} + \frac{4}{6} + \frac{5}{24} + \frac{6}{120} + \frac{7}{720} + \frac{8}{5040} + \dots$$

1.3.3 Найти сумму ряда, считая, что последующие его члены образованы по усматриваемому правилу:

$$1.3.3.1 \quad \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots$$

$$1.3.3.2 \quad \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 8} + \frac{1}{5 \cdot 8 \cdot 11} + \frac{1}{8 \cdot 11 \cdot 14} + \frac{1}{11 \cdot 14 \cdot 17} + \frac{1}{14 \cdot 17 \cdot 20} + \dots$$

$$1.3.3.3 \quad \frac{3+4-6}{12} + \frac{9+16-36}{144} + \frac{27+64-216}{1728} + \frac{81+256-1296}{20736} + \dots$$

1.3.4 Используя достаточный признак расходимости числового ряда, доказать, что каждый из следующих рядов является расходящимся:

$$1.3.4.1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + 5n - 3}{2n^2 - 3n + 4}.$$

$$1.3.4.2 \quad \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot \sin \frac{1}{5n}.$$

$$1.3.4.3 \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(1 - 1/n)^n}.$$

1.3.5 Используя достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами, исследовать на сходимость указанные ряды:

$$1.3.5.1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \cdot 3^n}.$$

$$1.3.5.2 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{1 + 4^{2n}}.$$

$$1.3.5.3 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+5)}.$$

$$1.3.5.4 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^3 + 2n}{3n^4 - 7}.$$

$$1.3.5.5 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{n} + 7}{5\sqrt[6]{n^{13}} + 3}.$$

$$1.3.5.6 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[6]{n^5}}{\sqrt{n} - \sqrt[3]{n}}.$$

$$1.3.5.7 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(2n+3)}{4^n(7n+8)}.$$

$$1.3.5.8 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{n^n}.$$

$$1.3.5.9 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{n!}.$$

$$1.3.5.10 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{2n+1}{4n+1}.$$

$$1.3.5.11 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{n+7}{n+4} \right)^{5n^2+n}.$$

$$1.3.5.12 \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^n \sin^n \frac{1}{3n}.$$

$$1.3.6 \text{ Доказать, что } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\arctg \frac{2n^3 + 7n^2 + 2n + 6}{2n^3 + 4n^2 - 5n + 1} \right)^n = 0.$$

1.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

1.4.1 Доказать сходимость числового ряда и найти его сумму.

$$1.4.1.1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1) \cdot (2n+3)}.$$

$$1.4.1.2 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n - 4^n}{12^n}.$$

$$1.4.1.3 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \cdot (n+5)}.$$

$$1.4.1.4 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+2) \cdot (2n+4)}.$$

$$1.4.1.5 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 4^n + 5^n}{60^n}.$$

$$1.4.1.6 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdot (n+3)}.$$

$$1.4.1.7 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+2) \cdot (3n+5)}.$$

$$1.4.1.8 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n + 5^n - 6^n}{60^n}.$$

$$1.4.1.9 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \cdot (n+5)}.$$

$$1.4.1.10 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+5) \cdot (2n+7)}.$$

$$1.4.1.11 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + 6^n + 7^n}{210^n}.$$

$$1.4.1.12 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3) \cdot (n+6)}.$$

$$\begin{array}{lll}
1.4.1.13 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+1) \cdot (3n+4)} & 1.4.1.14 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n - 7^n - 8^n}{168^n} & 1.4.1.15 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+4) \cdot (n+7)} \\
1.4.1.16 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+7) \cdot (2n+9)} & 1.4.1.17 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 5^n - 4^n}{20^n} & 1.4.1.18 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+5) \cdot (n+8)} \\
1.4.1.19 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n-1) \cdot (3n+2)} & 1.4.1.20 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n + 4^n}{6^n} & 1.4.1.21 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+6) \cdot (n+9)} \\
1.4.1.22 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(4n-1) \cdot (4n+3)} & 1.4.1.23 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n + 3^n - 2^n}{30^n} & 1.4.1.24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1) \cdot (n+3)} \\
1.4.1.25 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(5n-2) \cdot (5n+3)} & 1.4.1.26 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n - 2^n - 8^n}{12^n} & 1.4.1.27 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+2) \cdot (n+4)} \\
1.4.1.28 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(6n-1) \cdot (6n+5)} & 1.4.1.29 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n + 4^n - 2^n}{24^n} & 1.4.1.30 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+3) \cdot (n+5)}
\end{array}$$

1.4.2 Используя достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами, исследовать на сходимость указанные ряды.

$$\begin{array}{lll}
1.4.2.1 & \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 5}{2n^4 - n}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{5^n (3n+2)}; & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^n} \left(\frac{3n^2 + 3}{3n^2 - 1} \right)^{2n^3 - 5n} \\
1.4.2.2 & \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n3^n}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{7^n n!}; & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{\sqrt{3} n^4 + 2n + 2}{2n^4 - n^3 + 7} \\
1.4.2.3 & \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^2 + n}{5n^4 - 2}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{6^n (4n+1)}; & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{2} \right)^n \sin^n \frac{5}{n} \\
1.4.2.4 & \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n5^n}{2^n}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{2^n (n+1)!}; & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n}{3} \right)^{2n} \left(1 - \cos \frac{2}{5n} \right)^n \\
1.4.2.5 & \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{4\sqrt[3]{n^4 - n}}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n-1}{6^{2n-1}}; & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left(\frac{2n+5}{2n-3} \right)^{3n^2 + 2n} \\
1.4.2.6 & \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)4^n}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)!}{7^n (6n+5)}; & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n^3 - 5n^2 + 2n + 1}{7n^3 + 4n^2 + 3n - 2} \right)^{n+2} \\
1.4.2.7 & \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^5 + 2}{2n^8 - n^6}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n (4n-3)}{3^n (2n-1)}; & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \arctg^n \frac{\sqrt{3} n^2 - 3n}{n^2 + 2n + 1} \\
1.4.2.8 & \text{a) } \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \sin \frac{1}{n+1}; & \text{в) } \log_2^n \left(\frac{16n^2 + 3n - 1}{4n^2 + 7n + 2} \right) \\
1.4.2.9 & \text{a) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)6^n}{5^n}; & \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n-2}{5^{5n+2}}; & \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg}^n \frac{\sqrt{3} n^3 - 5n}{n^3 - 3n + 2}
\end{array}$$

1.4.2.10 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4\sqrt[7]{n^6} + 4}{3n^2 - 2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n(n^2 + 1)}{9^n(3n^2 + 1)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{4n^3 + 7}{4n^3 - 5} \right)^{3n^3 - 3n^2}$.

1.4.2.11 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 + 4}{3n^5 - 2n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n \sin \frac{1}{n+2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \arccos^n \frac{3n^4 + 2n + 5}{6n^4 - 6n^3 + 12}$.

1.4.2.12 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)4^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)^{n+2}}{4^n(n+2)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{n^3 + 3n^2 + 2}{2n^3 - n^2 + 11}$.

1.4.2.13 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^3 + n^2}{6n^5 - 3}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n}{9^n(2n+3)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{3} \right)^n \sin^n \frac{6}{n+1}$.

1.4.2.14 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)5^n}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+3)^{n+3}}{5^n(n+3)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{4} \right)^{2n} \left(1 - \cos \frac{6}{n+1} \right)^n$.

1.4.2.15 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{3\sqrt[3]{n^7} + n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5^{3n}(7n+2)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{5n+1}{5n+3} \right)^{-2n^2+3n}$.

1.4.2.16 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n+2)5^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3n^3 + 2n^2 - 2n - 1}{2n^3 + 5n^2 + 6n - 3} \right)^{2n+3}$.

1.4.2.17 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4n^6 + 3}{3n^9 - n^7}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n} \operatorname{tg} \frac{1}{n}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{n^2 + 2n + 5}{\sqrt{3}n^2 + 2n + 1}$.

1.4.2.18 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+1)}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n(2n-1)}{3^n(3n+2)}$; в) $\log_3^n \left(\frac{\sqrt{3}n^2 + n - 5}{n^2 + 7n + 2} \right)$.

1.4.2.19 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+4)7^n}{6^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+2)!}{7^n(3n-2)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arcctg}^n \frac{n^4 + 2n^2 + 5}{\sqrt{3}n^4 - 7n + 1}$.

1.4.2.20 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5\sqrt[8]{n^7} + 5}{4n^2 - 2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n(n^2 + 2)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n} \left(\frac{6n^3 - 2}{6n^3 + 2} \right)^{4n^4 + 3n}$.

1.4.2.21 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^5 + 6}{4n^6 - n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{2^n} \operatorname{tg} \frac{1}{2n+1}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \arccos^n \frac{\sqrt{3}n^3 + 2n^2}{2n^3 - 4n^2 + 13}$.

1.4.2.22 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n}{(n+2)5^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+4)^{n+4}}{8^n(n+4)!}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin^n \frac{n^4 + n^3 + n}{n^4 - n^2 + 8}$.

1.4.2.23 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5n^4 - n}{3n^8 + 2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(n^2 + 2)}{4^n(n^2 + 8)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+2}{5} \right)^n \sin^n \frac{8}{n+2}$.

1.4.2.24 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+5)8^n}{3^n}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+3}{8} \right)^{2n} \left(1 - \cos \frac{4}{n+3} \right)^n$.

1.4.2.25 a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{3\sqrt[4]{n^5} + 1}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{7^n} \sin \frac{1}{n^2}$; в) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6^n} \left(\frac{7n-6}{7n+2} \right)^{5n^2-4n}$.

$$\begin{aligned}
1.4.2.26 \quad & \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{(n+5)9^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (5n-3)}{1 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (4n-3)}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{5n^3 + n^2 - 9n - 10}{6n^3 + 5n^2 + 4n + 3} \right)^{2n+5}. \\
1.4.2.27 \quad & \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7n^2 + 5}{5n^5 - n^4}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n(n^3 + 1)}{5^n(n^3 + 6)}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg}^n \frac{n^2 + 2n + 3}{n^2 - 2n - 3}. \\
1.4.2.28 \quad & \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\ln(n+2)}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} 4^n \operatorname{tg} \frac{1}{n^2}; \quad \text{в) } \log_4^n \left(\frac{64n^2 + n + 5}{2n^2 + 3n - 2} \right). \\
1.4.2.29 \quad & \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+4)8^n}{7^n}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (4n-1)}{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arccctg}^n \frac{n^5 + 2n^4 + 5}{n^5 - 7n^3 + 2}. \\
1.4.2.30 \quad & \text{а) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8\sqrt[8]{n^7} + 8}{4n^2 - 3}; \quad \text{б) } \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(n^2 + 1)}{n^2 + 3n + 1}; \quad \text{в) } \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arccos}^n \frac{\sqrt{2}n^3 - n^2 + n}{2n^3 + n^2 + 12}.
\end{aligned}$$

2 ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ.

ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ С ПОЛОЖИТЕЛЬНЫМИ ЧЛЕНАМИ. ЗНАКОПЕРЕМЕННЫЕ И ЗНАКОЧЕРЕДУЮЩИЕСЯ РЯДЫ (практическое занятие № 2)

Содержание: интегральный признак Коши рядов с положительными членами, знакопеременные ряды, абсолютная и условная сходимость, знакочередующиеся ряды, признак Лейбница и следствие из него.

2.1 Теоретический материал по теме практического занятия

В продолжение темы предыдущего практического занятия приведём ещё один важный достаточный признак сходимости рядов с положительными членами.

Теорема 2.1.1 (интегральный признак Коши). Если функция $f(x)$ непрерывная, положительная и монотонно убывающая на интервале $[1; +\infty)$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, где $a_n = f(n)$ сходится или расходится в зависимости от того, является ли несобственный интеграл $\int_1^{\infty} f(x) dx$ сходящимся или расходящимся.

Признак остаётся в силе, если соответствующие условия для функции начинают выполняться не со значения равного 1, а с некоторого значения $x > 1$.

Определение 2.1.1 Числовой ряд называется *знакопеременным*, если он содержит положительные и отрицательные члены.

Пусть задан знакопеременный ряд $a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$ (1), где a_i ($i = 1, 2, 3, \dots, n, \dots$) могут принимать как отрицательные, так и положительные значения. Рассмотрим ряд (2), составленный из абсолютных величин знакопеременного ряда, то есть ряд вида $|a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots$. Возможны три случая:

- 1) ряд (1) сходится, а ряд (2) расходится;
- 2) ряд (1) сходится и ряд (2) сходится;
- 3) ряд (1) расходится и ряд (2) расходится.

Теорема 2.1.2 Если ряд составленный из абсолютных величин знакопеременного ряда сходится, то сходится и сам знакопеременный ряд.

Определение 2.1.2 Если ряд, составленный из абсолютных величин знакопеременного ряда, сходится, то знакопеременный ряд называется *абсолютно сходящимся*. Если ряд, составленный из абсолютных величин знакопеременного ряда, расходится, а знакопеременный ряд сходится, то знакопеременный ряд называется *условно сходящимся*.

Частным случаем знакопеременного ряда является знакочередующийся ряд.

Определение 2.1.3 Знакопеременный ряд называется *знакочередующимся*, если произведение двух его соседних членов величина отрицательная.

Знакочередующийся ряд можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots,$$

где все $a_i \ (i = \overline{1; \infty})$ либо положительные, либо отрицательные числа. Для определённости в дальнейшем будем считать, что все члены $a_i \ (i = 1, 2, 3, \dots, n, \dots)$ являются положительными числами. Все определения и теоремы для знакопеременного ряда справедливы и для знакочередующегося ряда.

Теорема 2.1.3 (признак Лейбница). Если члены знакочередующегося ряда по абсолютной величине монотонно убывают и предел n -го члена равен нулю, то знакочередующийся ряд сходится, причём его сумма не превосходит первого члена по абсолютной величине.

Таким образом, для доказательства сходимости знакочередующегося ряда необходимо проверить выполнение двух условий:

- 1) $a_1 > a_2 > \dots > a_n > a_{n+1} > \dots$;
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

При этом, согласно теореме Лейбница, выполняется неравенство $S \leq |a_1|$, где S – сумма знакочередующегося сходящегося ряда.

Следствие из теоремы Лейбница: остаток ряда по абсолютной величине не превосходит модуля первого из отброшенных членов.

Рассмотрим знакочередующийся ряд $a_1 - a_2 + \dots + (-1)^{n-1} a_n + (-1)^n a_{n+1} + \dots$. Выражение вида $r_n = (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + \dots$ называется *остатком ряда*. Тогда согласно следствию из теоремы Лейбница будет выполняться неравенство $|r_n| \leq a_{n+1}$.

2.2 Примеры решения типовых задач

2.2.1 С помощью интегрального признака Коши доказать сходимость ря-

да $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$.

Решение. Общий член ряда определяется формулой $a_n = f(n) = \frac{1}{1+n^2}$.

Рассмотрим функцию $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Эта функция удовлетворяет условиям интегрального признака Коши (теорема 2.1.2): она принимает положительные значения и монотонно убывает на промежутке $[1; +\infty)$. Вычислим несобственный интеграл

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x \Big|_1^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \arctg x - \arctg 1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$$

Так как несобственный интеграл сходится, то сходится исходный ряд.

2.2.2 С помощью интегрального признака Коши исследовать, сходится

или расходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+3}{n^2}$.

Решение. Функция $f(x) = \frac{x+3}{x^2}$ удовлетворяет условиям интегрального признака Коши (теорема 2.1.2). Поскольку

$$\int_1^{\infty} \frac{x+3}{x^2} dx = \int_1^{\infty} \left(\frac{1}{x} + \frac{3}{x^2} \right) dx = \left(\ln|x| - \frac{3}{x} \right) \Big|_1^{\infty} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\ln|x| - \frac{3}{x} \right) - 0 + 3 = \infty,$$

то несобственный интеграл расходится, то есть будет расходиться и заданный ряд.

2.2.3 Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2 n}$.

Решение. Общий член ряда определяется формулой $a_n = f(n) = \frac{1}{n \ln^2 n}$,

где $n \geq 2$. Обратим внимание на то, что суммирование начинается со значения $n = 2$ (если $n = 1$, то соответствующий член не определён, так как в знаменателе содержится множитель $\ln 1 = 0$). Из формулы для общего члена ряда находим

функцию $f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln^2 x}$, которая удовлетворяет условиям интегрального при-

знака Коши на промежутке $[2; +\infty)$. Вычислим интеграл

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \cdot \ln^2 x} = \int_2^{\infty} \frac{d \ln x}{\ln^2 x} = -\frac{1}{\ln x} \Big|_2^{\infty} = -\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln x} + \frac{1}{\ln 2} = 0 + \frac{1}{\ln 2} = \frac{1}{\ln 2}.$$

Несобственный интеграл сходится, а, следовательно, сходится и ряд.

2.2.4 Исследовать на сходимость знакопеременный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2}$.

Решение. Составляем ряд из абсолютных величин членов данного ряда:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2}$. Так как $|\cos n| \leq 1$, то каждый член последнего ряда не превышает соответствующего члена, сходящегося обобщённо гармонического ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Согласно признаку сравнения (теорема 1.1.4), ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\cos n|}{n^2}$ сходится. Поэтому сходится и данный ряд, причём абсолютно (теорема 2.1.2).

2.2.5 Исследовать на сходимость знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$.

Решение. Составляем ряд из абсолютных величин членов данного ряда:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n-1}}$. Полученный геометрический ряд сходится (пример 1.1.3 и $q = \frac{1}{2} < 1$).

Следовательно, сходится и исходный ряд, причём абсолютно (теорема 2.1.2).

2.2.6 Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n+2}{3n+5}$.

Решение. Составляем ряд из абсолютных величин членов данного ряда:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{3n+5}$. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{3n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1+2/n}{3+5/n} = \frac{1}{3} \neq 0$, то, согласно необходи-

мому признаку сходимости (теорема 1.1.1), ряд расходится. Рассмотрим исходный ряд. Предел его n -го члена равен $1/3$, если значения числа n является нечётным. Если число n - чётное, то предел его n -го члена равен $(-1/3)$. Следовательно, предела n -го члена не существует, в виду свойства единственности предела числовой последовательности. На основании необходимого признака сходимости числовых рядов (теорема 1.1.1), заданный числовой ряд расходится.

2.2.7 Исследовать на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n \cdot 2^n}$.

Решение. Составляем ряд из абсолютных величин членов данного ряда:

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot 2^n}$. Воспользуемся признаком Даламбера.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{(n+1) \cdot 2^{n+1}}}{\frac{1}{n \cdot 2^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot 2^n}{(n+1) \cdot 2^{n+1}} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1.$$

Следовательно, по теореме Даламбера, ряд, составленный из абсолютных величин, является сходящимся. Согласно теореме 2.1.2, исходный ряд сходится абсолютно.

2.2.8 Исследовать на сходимость $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$.

Решение. Поскольку ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, то есть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$, расходится, то о сходимости исходного ряда пока ничего нельзя сказать (пример 1.1.2). Применим к данному ряду признак Лейбница. Условия признака Лейбница в данном случае выполнены:

$$1 > \frac{1}{\sqrt[3]{2}} > \frac{1}{\sqrt[3]{3}} > \frac{1}{\sqrt[3]{4}} > \dots, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n}} = 0.$$

Следовательно, этот ряд сходится. Так как ряд из абсолютных величин расходится, то исходный ряд сходится условно.

2.2.9 Вычислить сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n \cdot 2^n}$ с точностью $\varepsilon = 0,001$.

Решение. Данный знакочередующийся ряд является абсолютно сходящимся (пример 2.2.7). На основании следствия из признака Лейбница, величина отброшенного при вычислении остатка ряда не превосходит первого отброшенного члена. Необходимое число членов n находим путём подбора из неравенства $\frac{1}{n \cdot 2^n} \leq 0,001$. При значении $n = 8$ последнее неравенство справедливо.

Следовательно, если отбросить в исходном ряде все члены, начиная с восьмого, то требуемая точность будет достигнута. Таким образом,

$$S \approx S_7 = \frac{1}{2} - \frac{1}{8} + \frac{1}{24} - \frac{1}{64} + \frac{1}{160} - \frac{1}{384} + \frac{1}{896} = 0,406.$$

2.3 Задания для решения на практическом занятии

2.3.1 С помощью интегрального признака Коши исследовать на сходимость ряд.

2.3.1.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(3n+2) \ln^3(3n+2)}.$

2.3.1.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+1}.$

2.3.1.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+9}.$

2.3.2 Исследовать на сходимость знакопеременные ряды.

2.3.2.1 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{1+(-2)^{2n}}.$

2.3.2.2 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n\alpha}{n^3}.$

2.3.2.3 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n^2}{n^3+4}.$

2.3.2.4 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+7) \cdot \ln(2n+7)}.$

2.3.2.5 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}.$

2.3.2.6 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 5^n}.$

2.3.2.7 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}.$

2.3.2.8 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n+3}}.$

2.3.2.9 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \ln^5 n}.$

2.3.3 Вычислить сумму указанного ряда с точностью $\varepsilon = 0,001$.

$$2.3.3.1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3}.$$

$$2.3.3.2 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 3^n}.$$

$$2.3.3.3 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n!}.$$

2.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

2.4.1 Исследовать на сходимость указанные ряды. В пункте а) необходи-

мо исследовать ряд $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$, используя интегральный признак Коши, а в пункте б)

указать характер сходимости знакопеременующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (условная или абсолютная сходимость), если ряд сходится.

$$2.4.1.1 \quad \text{а) } a_n = \frac{n}{n^2 + 2}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{5n}. \quad 2.4.1.2 \quad \text{а) } a_n = \frac{1}{n \cdot \ln^2 n}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}.$$

$$2.4.1.3 \quad \text{а) } a_n = \frac{1}{n \cdot \ln \sqrt{n}}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n!}. \quad 2.4.1.4 \quad \text{а) } a_n = \frac{e^{-\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+1)}.$$

$$2.4.1.5 \quad \text{а) } a_n = \frac{n}{e^{-n^2}}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}n}{5n+4}. \quad 2.4.1.6 \quad \text{а) } a_n = \frac{1}{n^2} \sin \frac{1}{n}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}n}{7^n}.$$

$$2.4.1.7 \quad \text{а) } a_n = \frac{1}{n^2} \cos \frac{1}{n}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{4n^2 + 9}. \quad 2.4.1.8 \quad \text{а) } a_n = \frac{1}{n^2} \operatorname{tg} \frac{1}{n}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[3]{n^4}}.$$

$$2.4.1.9 \quad \text{а) } a_n = \frac{1}{n^2} \operatorname{ctg} \frac{1}{n}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}n^2}{2n^2 + 1}. \quad 2.4.1.10 \text{ а) } a_n = \frac{1}{n^2 + 9}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^n}.$$

$$2.4.1.11 \text{ а) } a_n = \frac{n+5}{n^2}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[5]{n}}. \quad 2.4.1.12 \text{ а) } a_n = \frac{1}{(n+1)^5}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{4n}.$$

$$2.4.1.13 \text{ а) } a_n = \frac{1}{n \cdot \ln \sqrt[3]{n}}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+2)}. \quad 2.4.1.14 \text{ а) } a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n+2}}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!}.$$

$$2.4.1.15 \text{ а) } a_n = \frac{3n}{n^2 + 5}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}n}{6^n}. \quad 2.4.1.16 \text{ а) } a_n = \frac{e^{-\sqrt[3]{n}}}{\sqrt{n^2}}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}n}{2n+3}.$$

$$2.4.1.17 \text{ а) } a_n = \frac{1}{n^3} \sin \frac{1}{n^2}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[5]{n^6}}. \quad 2.4.1.18 \text{ а) } a_n = \frac{1}{n^3} \cos \frac{1}{n^2}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{3n^3 + 8}.$$

$$2.4.1.19 \text{ а) } a_n = \frac{1}{n^3} \operatorname{tg} \frac{1}{n^2}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(3n-2)^n}. \quad 2.4.1.20 \text{ а) } a_n = \frac{1}{n^3} \operatorname{ctg} \frac{1}{n^2}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}n^3}{4n^3 + 8}.$$

$$2.4.1.21 \text{ а) } a_n = \frac{1}{(n+3)^7}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{10n}. \quad 2.4.1.22 \text{ а) } a_n = \frac{1}{\sqrt[4]{2n+5}}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[9]{n^2}}.$$

$$2.4.1.23 \text{ а) } a_n = \frac{n^4}{n^5 + 32}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(n+2)!}. \quad 2.4.1.24 \text{ а) } a_n = \frac{n^2}{e^{-n^3}}; \quad \text{б) } u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n+3)}.$$

$$\begin{aligned}
 &2.4.1.25a) a_n = \frac{1}{n^9} \operatorname{tg} \frac{1}{n^8}; \quad б) u_n = \frac{(-1)^{n-1} n}{7n+8}. \quad 2.4.1.26a) a_n = \frac{1}{n^5} \sin \frac{1}{n^4}; \quad б) u_n = \frac{(-1)^{n-1} n}{9^n}. \\
 &2.4.1.27a) a_n = \frac{1}{n^4} \operatorname{ctg} \frac{1}{n^3}; \quad б) u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{5n^4+3}. \quad 2.4.1.28a) a_n = \frac{1}{n \cdot \ln \sqrt[6]{n}} \quad б) u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[9]{n^{10}}}. \\
 &6.4.1.29a) a_n = \frac{1}{\sqrt[5]{5n+9}}; \quad б) u_n = \frac{(-1)^{n-1} n^5}{5n^5+7}. \quad 6.4.1.30a) a_n = \frac{1}{n^7} \cos \frac{1}{n^6}; \quad б) u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(8n-3)^n}.
 \end{aligned}$$

3 ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ И СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ (практическое занятие № 3)

Содержание: функциональные ряды, область сходимости функционального ряда, равномерно сходящиеся ряды, степенные ряды, теорема Абеля и следствие из неё, радиус и область сходимости степенного ряда.

3.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Пусть на некотором множестве I задано бесконечное множество функций $\{u_n(x)\}$, где $x \in I$, $n = 1, 2, 3, \dots$

Определение 3.1.1 Функциональным рядом называется ряд вида $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots$, где $u_n(x)$ – функция от переменной x .

Определение 3.1.2 Функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется *сходящимся* в точке x_0 , если в этой точке сходится числовой ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$.

Определение 3.1.3 Функциональный ряд называется *сходящимся на промежутке I* , если он сходится в каждой точке этого интервала.

Определение 3.1.4 Множество всех точек сходимости функционального ряда называется *областью сходимости* этого ряда.

Каждому значению из области сходимости I соответствует определённое значение величины $\lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k u_n(x)$. Эту величину, являющейся функцией от переменной x , называют *суммой функционального ряда* и обозначают $S(x)$.

Для определения области сходимости функционального ряда можно использовать предельный признак Даламбера $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| = |l(x)|$ или предельный радикальный признак Коши $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = |l(x)|$.

Решение неравенства $|l(x)| < 1$ представляет собой интервал сходимости функционального ряда. Для определения области сходимости необходимо ис-

следовать ряд на концах интервала сходимости, то есть в точках решения уравнения $|I(x)| = 1$.

Представим сумму ряда $S(x)$ в виде $S(x) = S_n(x) + R_n(x)$, где $S_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x)$, $R_n(x) = u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots$ — остаток функционального ряда.

Определение 3.1.5 Сходящийся функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ называется *равномерно сходящимся* в некоторой области I , если каждого сколь угодно малого положительного числа ε найдётся такое натуральное число N , что при всех $n \geq N$ выполняется неравенство $|R_n(x)| < \varepsilon$ для любого $x \in I$.

Сформулируем достаточный признак сходимости функционального ряда.

Теорема 3.1.1 (признак Вейерштрасса). Если члены функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ по абсолютной величине для всех $x \in I$ не превосходят соответствующих членов сходящегося числового ряда с положительными членами $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, то есть $|u_n(x)| \leq a_n$, для любого натурального n , то данный функциональный ряд равномерно сходится на промежутке I .

Сформулируем три теоремы, относящиеся к непрерывности, дифференцированию и интегрированию функциональных рядов.

Теорема 3.1.2 Если члены функционального ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ непрерывны на интервале I и на этом интервале ряд является равномерно сходящимся, то его сумма на этом интервале является непрерывной функцией.

Теорема 3.1.3 (о почленном дифференцировании). Если функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ сходится на промежутке I и его сумма равна $S(x)$, а ряд, составленный из производных членов данного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$, равномерно сходится на промежутке I , то производная суммы данного ряда равна сумме ряда, составленных из производных, то есть $S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u'_n(x)$.

Теорема 3.1.4 (о почленном интегрировании). Если функциональный ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ на промежутке I сходится равномерно и имеет сумму $S(x)$, то на

любом отрезке $[a; b] \subseteq I$ его можно интегрировать, причём сумма полученного ряда равна $\int_a^b S(x) dx$.

Рассмотрим степенные ряды, как один из важных видов функциональных рядов.

Определение 3.1.6 *Степенным рядом* называется функциональный ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n = c_0 + c_1(x - x_0) + c_2(x - x_0)^2 + \dots + c_n(x - x_0)^n + \dots$ (1), где x_0 – произвольная точка, $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ – коэффициенты степенного ряда.

Если $x_0 = 0$, то полученный ряд принимает вид $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots$ (2).

Каждый член указанных рядов представляет собой степенную функцию, поэтому ряды называются степенными. Область сходимости степенных рядов не являются пустым множеством. Ряд (1) всегда сходится в точке x_0 , а ряд (2) в точке нуль, причём их суммы в этом случае равны c_0 . Ряд (1) всегда можно свести к ряду (2), если выполнить замену $x - x_0 = t$.

Теорема 3.1.5 (Абеля). Если степенной ряд (2) сходится в точке x_1 , то он сходится на промежутке решения неравенства $|x| < |x_1|$.

Следствие 3.1.1 Если степенной ряд (2) расходится в точке x_2 , то он расходится на промежутке решения неравенства $|x| > |x_2|$.

Для определения области сходимости степенных рядов (1) и (2), на основании теоремы Абеля, определяем радиус сходимости $R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right|$ или

$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$. Тогда интервал сходимости ряда (2): $(-R; R)$. Для определения

области сходимости ряда (2) необходимо исследовать ряд на концах интервала, то есть в точках $x = \pm R$. Интервал сходимости ряда (1) имеет вид $(x_0 - R; x_0 + R)$. Для определения области сходимости ряда (1) необходимо исследовать ряд на концах интервала, то есть в точках $x = x_0 \pm R$.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, которая является бесконечно дифференцируемой на промежутке $(x_0 - R; x_0 + R)$. Эта функция, на этом интервале, может быть представлена в виде сходящегося к ней *бесконечного степенного ряда Тейлора*:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \dots,$$

если в этом интервале выполняется условие

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-x_0)^{n+1} = 0,$$

где $R_n(x)$ – остаточный член формулы Тейлора, а $c = x_0 + \Theta(x-x_0)$ и $0 < \Theta < 1$.

При значении $x_0 = 0$ получаем так называемый *ряд Маклорена*:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Если в некотором интервале, содержащем точку x_0 , при любом значении n выполняется неравенство $|f^{(n)}(x)| < M$, где M положительная постоянная величина, то $\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$ и функция $f(x)$ разложима в ряд Тейлора.

Рассмотрим разложение в ряд Тейлора некоторых основных функций.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (3.1.1)$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (3.1.2)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (3.1.3)$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{x}{1!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \dots, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (3.1.4)$$

$$\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \dots, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (3.1.5)$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots, \quad -1 < x \leq 1. \quad (3.1.6)$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots, \quad -1 \leq x \leq 1. \quad (3.1.7)$$

$$\ln \frac{1+x}{1-x} = 2 \cdot \left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \dots \right), \quad -1 < x < 1. \quad (3.1.8)$$

$$(1+x)^m = 1 + \frac{m}{1!}x + \frac{m \cdot (m-1)}{2!}x^2 + \frac{m \cdot (m-1) \cdot (m-2)}{3!}x^3 + \dots, \quad (3.1.9)$$

которое возможно при $m \geq 0$, если $-1 \leq x \leq 1$; при $-1 < m < 0$, если $-1 < x \leq 1$; при $m \leq -1$, если $-1 < x < 1$.

Степенные ряды находят *применение при приближённых вычислениях значений функции*. Для вычисления приближённого значения функции $f(x)$ в её разложении в степенной ряд сохраняются первые n членов. Для оценки погрешности найденного приближённого значения необходимо оценить сумму отброшенных членов. Если данный ряд знакопостоянный, то ряд, составленный из отброшенных членов, сравнивают с бесконечно убывающей геометрической

прогрессией. В случае знакопеременного ряда, члены которого удовлетворяют признаку Лейбница, используется оценка $|R_n| < a_{n+1}$, где a_{n+1} – первый из отброшенных членов.

Для вычисления интегралов с помощью степенных рядов раскладывают подынтегральную функцию в степенной ряд, а затем ограничиваются в этом ряде конечным числом членов. Число членов выбирается из соображения обеспечения заданной точности. Также степенные ряды можно применять при решении дифференциальных уравнений.

3.2 Примеры решения типовых задач

3.2.1 Найти область сходимости ряда $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n 3^{nx}$.

Решение. Применим к ряду признак Коши, для чего найдём предел:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|u_n(x)|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n 3^{nx} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) 3^x = 3^x.$$

Интервал сходимости функционального ряда определяется неравенством: $3^x < 1$ или $x < 0$. Для определения области сходимости необходимо исследовать ряд на конце интервала, то есть в точке $x = 0$. В этой точке ряд имеет вид

$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$. Этот ряд расходится, так как для него не выполнен необходимый

признак сходимости ряда: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \neq 0$. Следовательно, областью сходимости ряда является интервал $(-\infty; 0)$.

3.2.2 Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n \sqrt{n}}$.

Решение. Найдём радиус сходимости степенного ряда:

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1/5^n \sqrt{n}}{1/5^{n+1} \sqrt{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5^{n+1} \sqrt{n+1}}{5^n \sqrt{n}} = 5 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{n}} = 5.$$

Следовательно, интервалом сходимости является интервал $(-5; 5)$.

Для определения области сходимости исследуем ряд на концах интервала, то есть в точках $x = \pm 5$. При значении $x = 5$ получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n}{5^n \sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, который является расходящимся обобщённо гармоническим рядом (пример 1.1.2, $\alpha = \frac{1}{2} < 1$). При значении $x = -5$ имеем знакочередующийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

Ряд, составленный из абсолютных величин знакочередующегося ряда, расхо-

дится. Применим к данному ряду признак Лейбница. Условия признака Лейбница в данном случае выполнены: $1 > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{4}} > \dots$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$. Следовательно, этот ряд сходится. Так как ряд из абсолютных величин расходится, то знакопередающийся ряд сходится условно. Таким образом, областью сходимости степенного ряда является интервал $[-5; 5)$.

3.2.3 Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+2)^n}{7^n n^2}$.

Решение. По определению 3.1.6 степенного ряда $x_0 = -2$. Рассмотрим степенной ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{7^n n^2}$ (*) и найдём его область сходимости. Находим радиус сходимости степенного ряда (*):

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{1/7^n n^2}{1/7^{n+1} (n+1)^2} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^{n+1} (n+1)^2}{7^n n^2} = 7 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^2 = 7.$$

Следовательно, интервалом сходимости ряда (*) является интервал $(-7; 7)$. Для определения области сходимости исследуем ряд на концах интервала, то есть в точках $x = \pm 7$. При значении $x = 7$ получаем ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n}{7^n n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, который является сходящимся обобщённо гармоническим рядом (пример 1.1.2, $\alpha = 2 > 1$). При значении $x = -7$ имеем знакопередающийся ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$. Ряд, составленный из абсолютных величин знакопередающегося ряда, сходится. Следовательно, этот знакопередающийся ряд сходится абсолютно (теорема 2.1.2 и определение 2.1.2). Таким образом, областью сходимости степенного ряда (*) является интервал $[-7; 7]$. Следовательно, областью сходимости исходного ряда будет интервал $[-7 - 2; 7 - 2]$ или $[-9; 5]$.

3.2.4 Разложить функцию $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$ в степенной ряд.

Решение. Находим разложение функции $\varphi(x) = (1+x^2)^{-1/2}$ в ряд, используя биномиальный ряд, определяемый формулой (3.1.9). Разложение функции имеет вид $\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}$. Полученный ряд сходится на отрезке $[-1; 1]$. Интегрируя его на промежутке $[0; x]$, где $0 < x < 1$ (что можно сделать, так как ряд сходится равномерно), находим $\int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

Поскольку $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$, то получаем искомое разложение в степенной ряд исходной функции:

$$\ln(x + \sqrt{1+x^2}) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Областью сходимости ряда является промежуток: $[-1;1]$.

3.2.5 Вычислить $\ln 2$ с точностью $\varepsilon = 0,000001$.

Решение. Воспользуемся формулой (3.1.8). Поскольку $\frac{1+x}{1-x} = 2$ выполняется при значении $x = \frac{1}{3}$, то, подставив это число в ряд, получим $\ln 2 = 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \dots \right)$. Для вычисления $\ln 2$ с заданной точностью необходимо найти такое число членов частичной суммы, при котором сумма остатка ряда $|R_n| < \varepsilon$.

$$\begin{aligned} R_n &= 2 \left(\frac{1}{(2n+1) \cdot 3^{2n+1}} + \frac{1}{(2n+3) \cdot 3^{2n+3}} + \dots \right) < \frac{2}{2n+1} \left(\frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{3^{2n+3}} + \dots \right) = \\ &= \frac{2}{(2n+1) \cdot 3^{2n+1}} \cdot \left(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{81} + \dots \right) = \frac{2}{(2n+1) \cdot 3^{2n+1}} \cdot \frac{1}{1-1/9} = \frac{1}{4 \cdot (2n+1) \cdot 3^{2n-1}}. \end{aligned}$$

В соответствии с условием задачи выберем n так, чтобы остаток был меньше $0,000001$, то есть $\frac{1}{4 \cdot (2n+1) \cdot 3^{2n-1}} < 0,000001$. Последнее неравенство выполняется с номера $n = 6$, так как при этом значении n справедливо неравенство $\frac{1}{4 \cdot (2 \cdot 6 + 1) \cdot 3^{2 \cdot 6 - 1}} = \frac{1}{4 \cdot 13 \cdot 3^{11}} = \frac{1}{9211644} < 0,000001$. Следовательно, в разложении ряда можно ограничиться шестью слагаемыми, чтобы получить значение $\ln 2$ с заданной точностью:

$$\ln 2 \approx 2 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{5 \cdot 3^5} + \frac{1}{7 \cdot 3^7} + \frac{1}{9 \cdot 3^9} + \frac{1}{11 \cdot 3^{11}} \right) = 0,6931471.$$

3.2.6 Вычислить $\sin 1$ с точностью $\varepsilon = 0,00001$.

Решение. Воспользуемся формулой (3.1.2) при значении $x=1$: $\sin 1 = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \frac{1}{9!} - \frac{1}{11!} + \dots$. Полученный ряд является знакочередующимся и удовлетворяет условиям признака Лейбница. Для определения числа членов в указанном ряде, для достижения заданной точности, воспользуемся следствием из теоремы Лейбница: погрешность при замене его суммой первых n членов не превысит первого отброшенного члена. Так как для пятого члена ря-

да выполняется требуемое неравенство $\frac{1}{9!} = \frac{1}{362880} \approx 0,000003 < 0,00001$, то достаточно взять сумму первых четырёх членов, чтобы получить искомое значение с заданной точностью. Следовательно,

$$\sin 1 \approx 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} = 1 - \frac{1}{6} + \frac{1}{120} - \frac{1}{5040} \approx 0,84147.$$

3.2.7 Вычислить интеграл $\int_0^{1/2} \sqrt[3]{1+x^3} dx$ с точностью $\varepsilon = 0,001$

Решение. Используя формулу (3.1.9), раскладываем подынтегральную функцию в степенной ряд $\sqrt{1+x^3} = 1 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^6}{8} + \frac{x^9}{16} - \frac{5x^{12}}{128} + \dots$ ($|x| < 1$).

Интегрируя этот ряд на промежутке $[0; 0,5]$, находим

$$\begin{aligned} \int_0^{0,5} \sqrt{1+x^3} dx &= \int_0^{0,5} \left(1 + \frac{x^3}{2} - \frac{x^6}{8} + \frac{x^9}{16} - \frac{5x^{12}}{128} + \dots \right) dx = \left(x + \frac{x^4}{8} - \frac{x^7}{56} + \frac{x^{10}}{160} - \frac{5x^{13}}{1664} + \dots \right) \Big|_0^{0,5} = \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2^4} - \frac{1}{56} \cdot \frac{1}{2^7} + \frac{1}{160} \cdot \frac{1}{2^{10}} - \frac{5}{1664} \cdot \frac{1}{2^{13}} + \dots \end{aligned}$$

Поскольку $\frac{1}{56} \cdot \frac{1}{2^7} = \frac{1}{7168} \approx 0,00014 < 0,001$, то для вычисления заданного интеграла с указанной точностью достаточно взять два первых члена полученного ряда, то есть $\int_0^{0,5} \sqrt{1+x^3} dx \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{128} \approx 0,508$.

3.2.8 Найти первые четыре члена разложения в ряд решения уравнения $y' = x^2 + y^2$, удовлетворяющего начальному условию $y(0) = 0,5$.

Решение. Запишем искомое решение в виде ряда Маклорена:

$$y(x) = y(0) + \frac{y'(0)}{1!}x + \frac{y''(0)}{2!}x^2 + \frac{y'''(0)}{3!}x^3 + \dots + \frac{y^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

Найдём выражения для двух последующих производных, дифференцируя исходное уравнение: $y'' = 2x + 2yy'$, $y''' = 2 + 2y'^2 + 2yy''$. Вычислим значения этих производных при заданных начальных условиях: $y'(0) = 0 + 0,5^2 = 0,25$, $y''(0) = 2 \cdot 0 + 2 \cdot 0,5 \cdot 0,25 = 0,25$, $y'''(0) = 2 + 2 \cdot 0,0625 + 2 \cdot 0,5 \cdot 0,25 = 2,375$. Следовательно, решение исходного уравнения имеет вид

$$y(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + \frac{19x^3}{48} + \dots$$

3.3 Задания для решения на практическом занятии

3.3.1 Найти область сходимости функциональных рядов.

$$3.3.1.1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-1}{2x+1} \right)^n. \quad 3.3.1.2 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x-1}{x+1} \right)^n. \quad 3.3.1.3 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln^n x.$$

3.3.2 Найти область сходимости степенных рядов.

$$3.3.2.1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}. \quad 3.3.2.2 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n x^n}{7^n}. \quad 3.3.2.3 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}. \\ 3.3.2.4 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^{n^2} \frac{(x-4)^n}{2^n}. \quad 3.3.2.5 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n \cdot (x-4)^n}{5 \cdot n^3}. \quad 3.3.2.6 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^n}{n \cdot 4^n}.$$

3.3.3 Разложить функцию $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ по степеням переменной x .

3.3.4 С точностью 0,0001 вычислить значения функций:

$$3.3.1.1 \quad \sqrt[5]{37}. \quad 3.3.1.2 \quad \cos 20^\circ. \quad 3.3.1.3 \quad \ln 3.$$

3.3.5 С точностью до 0,0001 вычислить интеграл $\int_0^{0,25} \frac{\sin 2x}{x} dx$.

3.3.6 Найти первые пять членов разложения в ряд решения уравнения $y' = x^3 + y^2$, удовлетворяющего начальному условию $y(0) = 0,5$.

3.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

3.4.1 Найти область сходимости степенного ряда.

$$3.4.1.1 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-2)^2}{2^n(2n+3)}. \quad 3.4.1.2 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-3)^2}{5^n(3n^2+4)}. \quad 3.4.1.3 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n(x-4)^n}{6^n(2\sqrt[3]{n}+3)}. \\ 3.4.1.4 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n(x-5)^n}{5^n(2n^7-6)}. \quad 3.4.1.5 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8^n(x-6)^n}{9^n(\sqrt[4]{n^3}-7)}. \quad 3.4.1.6 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n(x-7)^n}{3^n(2n-1)!}. \\ 3.4.1.7 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n(x-8)^n}{11^n(4\sqrt[5]{n^2}+2)}. \quad 3.4.1.8 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x-9)^n}{8^n(3n^8-8)}. \quad 3.4.1.9 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(x-1)^n}{8^n(2\sqrt[3]{n^7}-4)}. \\ 3.4.1.10 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(x+1)^n}{3^n(3n^2-8)}. \quad 3.4.1.11 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n(x+2)^n}{5^n(\sqrt[5]{n^8}+5)}. \quad 3.4.1.12 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{7^n(x+2)^n}{5^n(4n^2+5)}. \\ 3.4.1.13 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{4^n(n+1)!}. \quad 3.4.1.14 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n(x+4)^n}{7^n(8\sqrt{n}-1)}. \quad 3.4.1.15 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n(x+5)^n}{5^n(2n^3+4)}. \\ 3.4.1.16 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{9^n(x+6)^n}{4^n(4\sqrt{n}-3)}. \quad 3.4.1.17 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x+7)^n}{3^n(6n^2+4)}. \quad 3.4.1.18 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n(x+8)^n}{5^n(3\sqrt[4]{n^3}-1)}. \\ 3.4.1.19 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n(x+12)^n}{11^n(7n^4-5)}. \quad 3.4.1.20 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n(x+10)^n}{3^n\sqrt[3]{n^2}}. \quad 3.4.1.21 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n(x+11)^n}{5^n(4n^3+6)}.$$

$$3.4.1.22 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (x-11)^n}{3^n (7n^6 - 5)}.$$

$$3.4.1.23 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (x-12)^n}{9^n (n+2)!}.$$

$$3.4.1.24 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (x-13)^n}{4^n (3\sqrt[7]{n^2} - 8)}.$$

$$3.4.1.25 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! (x+13)^n}{4^n (2\sqrt[9]{n^8} - 6)}.$$

$$1.4.1.26 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (x+2)^n}{7^n (4n^5 - 9)}.$$

$$1.4.1.27 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (x+5)^n}{5^n (2\sqrt[5]{n^4} - 1)}.$$

$$3.4.1.28 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{6^n (x-18)^n}{11^n (4n^3 - 3)}.$$

$$3.4.1.29 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5^n (x+19)^n}{4^n \sqrt[6]{x+19}}.$$

$$3.4.1.30 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n (x-7)^n}{11^n (5\sqrt[9]{n^8} - 7)}.$$

4 ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ И ОПЕРАЦИИ НАД СОБЫТИЯМИ

(практическое занятие № 4)

Содержание: основное правило комбинаторики, перестановки, размещения, размещения с возвращением (повторением), сочетания, сочетания с возвращением (повторением), виды событий, основные операции над событиями, пространство элементарных событий, алгебра событий.

4.1 Теоретический материал по теме практического занятия

4.1.1 Элементы комбинаторики

Раздел математики, в которой изучаются задачи о подсчёте числа способов, с помощью которых осуществляется событие или числа способов, которыми можно упорядочить данную совокупность, называется *комбинаторикой*.

Основное правило комбинаторики. Пусть имеется m множеств: первое множество содержит n_1 элемент, второе – n_2 элемента, третье – n_3 элемента и так далее, m -ое множество содержит n_m элементов. Составляются комбинации из m элементов таким образом, чтобы в каждую комбинацию входило лишь по одному элементу из каждого множества. Число всех комбинаций такого типа определяется *основным правилом комбинаторики*:

$$N = n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \dots \cdot n_m. \quad (4.1.1.1)$$

Перестановки. Перестановкой P_n из n элементов называется расположение этих элементов в определённом порядке. Они вычисляются по формуле

$$P_n = n! \quad (4.1.1.2)$$

Размещение. Требуется составить комбинацию m элементов из n элементов, которые отличаются либо составом, либо порядком. *Размещение* вычисляется по формуле:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}. \quad (4.1.1.3)$$

Размещение с повторением (с возвращением). Если выбор m элементов из множества n элементов производится с возвращением и упорядочивания их в последовательную цепочку, то различными исходами будут m элементар-

ные наборы, которые отличаются, либо составом, либо порядком. *Размещение с повторением* вычисляется по формуле

$$N = n^m. \quad (4.1.1.4)$$

Сочетание. Требуется составить m элементарные наборы из множества n чисел, которые отличаются лишь составом, без учёта порядка. *Сочетание* вычисляется по формуле

$$C_n^m = \frac{n!}{m! \cdot (n - m)!}. \quad (4.1.1.5)$$

Пусть $m_1, m_2, \dots, m_k$ - натуральные числа, причём $\sum_{i=1}^k m_i = n$. Представим множество A из n элементов в виде суммы k множеств $A_1, A_2, \dots, A_k$, содержащих соответственно $m_1, m_2, \dots, m_k$ элементов. Число различных способов такого разбиения на группы определяется по формуле

$$C_n(m_1, m_2, \dots, m_k) = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \dots \cdot m_k!}. \quad (4.1.1.6)$$

Сочетания с повторением (с возвращением). Если выбор m элементов из множества n элементов производится с возвращением и упорядочивания их в последовательную цепочку, то различными исходами будут m элементарные наборы, которые отличаются, лишь составом, без учёта порядка. В этом случае число таких наборов определяется по формуле:

$$N = \bar{C}_n^m = C_{n+m-1}^m. \quad (4.1.1.7)$$

4.1.2 Операции над событиями

При проведении эксперимента E можно выделить некоторое элементарное событие (исход), которое характеризуется тем, что любой повторный эксперимент может закончиться одним и только одним из этих взаимно исключающихся элементарных событий.

Определение 4.1.2.1 *Элементарным событием* ω называется любой мыслимо возможный исход эксперимента.

Совокупность всех элементарных событий ω образуют множество Ω .

Определение 4.1.2.2 *Пространством элементарных событий*, которые отвечают эксперименту E , называется множество Ω всех его мыслимо взаимоисключающих исходов эксперимента.

Определение 4.1.2.3 *Событием* называется любое подмножество пространства элементарных событий.

Определение 4.1.2.4 *Достоверным событием* называется событие, которое совпадает с пространством элементарных событий.

Определение 4.1.2.5 *Невозможным событием* называется событие, которое совпадает с пустым множеством.

Математическая формализация модели случайного эксперимента включает в себя:

- 1) построение множества элементарных исходов Ω ;
- 2) описание поля событий для данного эксперимента;
- 3) задание вероятностного распределения на поле событий.

Построение Ω осуществляется на практике, исходя из требования, чтобы все интересующие нас результаты данного эксперимента могли быть однозначно описаны на основе построенного множества. Совокупность всех наблюдаемых событий составляет поле событий для данного эксперимента.

Так как Ω отождествляется с множеством, то над событием можно совершать все операции, выполняемые над множествами. Рассмотрим основные операции над событиями.

Определение 4.1.2.6 *Противоположным событием к событию A называется событие $\bar{A}$, состоящее из всех элементарных исходов, которые не входят в событие A , то есть событие $\bar{A} = \{\omega | \omega \notin A\}$.*

Определение 4.1.2.7 *Суммой двух событий A и B называется событие $A + B$, состоящее из элементарных исходов, которые принадлежат первому событию A или второму событию B , то есть событие $A + B = \{\omega | \omega \in A \vee \omega \in B\}$.*

Определение 4.1.2.8 *Произведением двух событий A и B называется событие $A \cdot B$, состоящее из элементарных исходов, которые принадлежат событию A и событию B , одновременно, то есть событие $A \cdot B = \{\omega | \omega \in A \wedge \omega \in B\}$.*

Определение 4.1.2.9 События называются A и B *несовместными*, если в результате эксперимента их произведение дает невозможное событие. В противном случае события называются *совместными*.

Определение 4.1.2.10 *Разностью двух событий A и B называется событие $A \setminus B$, состоящее из элементарных исходов, которые принадлежат событию A и не принадлежат событию B , то есть событие $A \setminus B = \{\omega | \omega \in A \wedge \omega \notin B\}$.*

Определение 4.1.2.11 Класс событий F называется *алгеброй событий*, если выполняются следующие два условия:

- 1) $\Omega \in F$;
- 2) если $A \in F$, $B \in F$, то сумма, произведение и разность этих событий также принадлежат F .

Определение 4.1.2.12 Класс событий F называется σ -*алгеброй событий*, если выполняются следующие три условия:

- 1) $\Omega \in F$;
- 2) если $A \in F$, $B \in F$, то сумма, произведение и разность этих событий также принадлежат F ;
- 3) если каждое событие A_k конечной или счетной последовательности событий $A_1, A_2, \dots$ принадлежит классу F , то и сумма этих событий принадлежит этому классу.

4.2 Примеры решения типовых задач

4.2.1 Бросают две игральные кости. Пусть A - событие, состоящее в том, что сумма очков не превосходит 5, B - событие, заключающееся в том, что хотя бы на одной из костей выпала 1. Составить пространство элементарных событий Ω , связанное с данным опытом, и описать события: $A \cdot B$, $A + B$, $A \setminus B$.

Решение. Пространство элементарных событий, связанное с данным опытом, состоит из конечного числа элементарных событий: $\Omega = \{(1,1), (1,2), \dots, (2,1), (2,2), \dots, (6,6)\}$. Опишем все события, которые отвечают проводимому опыту:

$$A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (4,1)\};$$

$$B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (3,1), (4,1), (5,1), (6,1)\};$$

$$A \cdot B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (2,1), (3,1), (4,1)\};$$

$$A + B = \{(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (2,1), (2,2), (2,3), (3,1), (3,2), (4,1), (5,1), (6,1)\};$$

$$A \setminus B = \{(2,2), (2,3), (3,2)\}.$$

4.2.2 Персональный менеджер обслуживает трёх клиентов. Событие A – первый клиент обратится к менеджеру в течение суток, B - второй клиент обратится к менеджеру в течение суток, C - третий клиент обратится к менеджеру в течение суток. Что означают события: а) $A + B + C$; б) ABC ; в) $\bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C$; г) $\bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C}$; д) $A + B + C - ABC$; е) $\bar{A}\bar{B}\bar{C}$.

Решение. Опишем указанные события:

а) $A + B + C = \{\text{хотя бы один клиент обратится к менеджеру в течение суток}\};$

б) $ABC = \{\text{все три клиента обратятся к менеджеру в течение суток}\};$

в) $\bar{A}\bar{B}C + A\bar{B}\bar{C} + A\bar{B}C = \{\text{два клиента обратятся к менеджеру в течение суток}\};$

г) $\bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + A\bar{B}\bar{C} = \{\text{один клиент обратится к менеджеру в течение суток}\};$

д) $A + B + C - ABC = \{\text{не менее одного, но не более двух клиентов обратятся к менеджеру в течение суток}\};$

е) $\bar{A}\bar{B}\bar{C} = \{\text{ни один клиент не обратился к своему менеджеру в течение суток}\}.$

4.2.3 Игральная кость подбрасывается два раза. Найти общее число исходов эксперимента.

Решение. Исход опыта состоит в выборе одного числа из шести $\{1, 2, \dots, 6\}$, два раза. По формуле (4.1.1.1), находим число исходов опыта: $N = 6 \cdot 6 = 36$.

4.2.4 Сколько существует различных шестизначных телефонных номеров, если в каждом номере нет повторяющихся цифр (могут быть все нули)?

Решение. Осуществляем выбор 6 цифр из 10 с учётом порядка. Число таких комбинаций равно $N = A_{10}^6 = \frac{10!}{(10-6)!} = \frac{10!}{4!} = 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 151200$.

4.2.5 Буквы азбуки Морзе образуются как последовательность точек и тире. Сколько различных букв можно образовать, если использовать 4 символа?

Решение. Так как используются четыре символа, то выборка содержит четыре элемента, которые могут повторяться. Таким образом, число различных выборок, каждая из которых представляет какую-нибудь букву, согласно формуле (4.1.1.4), равно $N = 2^4 = 16$.

4.2.6 В кредитном отделе банка работают 6 человек с высшей категорией и 4 – с первой. Сколькими способами из отдела на общее собрание можно отправить 5 человек, из которых три имеют высшую категорию.

Решение. Исход опыта состоит в выборе трёх человек из шести, которые имеют высшую категорию, и двух человек из четырёх, которые имеют первую категорию, причём порядок здесь не имеет значения. Следовательно, общее

число различных выборок определяем по формуле (4.1.1.5) $N = C_6^3 \cdot C_4^2 = \frac{6!}{3! \cdot 3!} \times \frac{4!}{2! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} = 4 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 2 = 120$.

4.2.7 В библиотеке имеются книги по 25 разделам науки. Сколькими способами можно выполнить 5 заказов на литературу?

Решение. Число всех исходов эксперимента равно числу сочетаний с повторениями из 25 элементов по 5 (формула 4.1.1.7), то есть $N = \bar{C}_{25}^5 = C_{25+5-1}^5 = C_{29}^5 = \frac{29!}{5! \cdot (29-5)!} = \frac{29!}{5! \cdot 24!} = \frac{25 \cdot 26 \cdot 27 \cdot 28 \cdot 29}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 5 \cdot 13 \cdot 9 \cdot 7 \cdot 29 = 118755$.

4.2.8 Сколько можно составить различных расписаний отправления автобусов на различные дни недели, если необходимо, чтобы: 3 дня отправлялось по 2 автобуса в день, 2 дня – по 1 автобусу в день, 2 дня – по 3 автобуса в день.

Решение. Количество автобусов, отправляемых в день (числа 1, 2, 3), - это три группы одинаковых элементов, из которых составляется выборка. При этом в расписании на неделю число 1 повторяется 2 раза, число 2 повторяется 3 раза, а число 3 повторяется 2 раза. Тогда число различных расписаний (формула 4.1.1.7) равно $N = C_7(2, 3, 2) = \frac{7!}{2! \cdot 3! \cdot 2!} = \frac{4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2} = 5 \cdot 6 \cdot 7 = 210$.

4.3 Задания для решения на практическом занятии

4.3.1 Относительно событий, которые указаны в каждой из задач, определить, образуют ли они полную группу событий. Являются ли в данном эксперименте события несовместными и равновозможными?

1. Эксперимент – бросание монеты; события: $A_1 = \{\text{выпал герб}\}$; $A_2 = \{\text{выпала решка}\}$.

2. Эксперимент – бросание двух монет; события: $B_1 = \{\text{выпало два герба}\}$; $B_2 = \{\text{выпали две решки}\}$.

3. Эксперимент – бросание двух игральных костей; события: $C_1 = \{\text{на одной из костей выпала четвёрка, на другой - нет}\}$; $C_2 = \{\text{на обеих костях выпала четвёрка}\}$; $C_3 = \{\text{четвёрка не выпала ни на одной из костей}\}$.

4. Эксперимент – передача двух сигналов по каналу связи; события: $D_1 = \{\text{хотя бы один сигнал искажён}\}$; $D_2 = \{\text{хотя бы один сигнал не искажён}\}$.

5. Эксперимент – извлечение двух карт из колоды; $E_1 = \{\text{обе карты чёрной масти}\}$; $E_2 = \{\text{среди вынутых карт есть король пик}\}$; $E_3 = \{\text{среди вынутых карт есть шестёрка треф}\}$.

6. Эксперимент – бросание двух монет; события: $B_1 = \{\text{выпало два герба}\}$; $B_2 = \{\text{выпали две решки}\}$, $B_3 = \{\text{выпали один герб и одна решка}\}$.

7. Эксперимент – выстрел по мишени; события: $F_1 = \{\text{попадание}\}$; $B_2 = \{\text{промах}\}$.

4.3.2 Событие A – хотя бы одно из четырёх изделий бракованное, B – все четыре изделия доброкачественные. Что означает событие: а) $A + B$; б) $A \cdot B$.

4.3.3 Бросают две игральные кости. Пусть A – событие, состоящее в том, что сумма очков не превосходит 8, B – произведение числа очков на двух костях, не менее 10.

4.3.4 Контактная схема, состоящая из трёх элементов a , b и c , построена согласно логической формуле $a \vee (b \wedge c)$. Выход из строя элемента a представляет собой событие A , элемента b – событие B , элемента c – событие C . Составить пространство элементарных событий Ω , связанное с данным экспериментом. Записать выражение для D и $\bar{D}$, если D означает разрыв цепи.

4.3.5 На предприятии имеются три склада готовой продукции. Событие A – в течение суток товар отгружается с первого склада, B – в течение суток товар отгружается со второго склада, C – в течение суток товар отгружается с третьего склада. Найти выражения для событий, состоящих в том, что: а) в течение суток товар отгружали со всех трёх складов; б) в течение суток товар отгружали хотя бы с одного склада; в) в течение суток товар отгружали хотя бы с двух складов; г) в течение суток товар отгружали ровно с двух складов; д) в течение суток товар отгружали ровно с одного склада; е) в течение суток товар был не отгружен со складов.

4.3.6 Сколькими способами можно расставить 4 книги на полке?

4.3.7 Сколько существует различных шестизначных телефонных номеров?

4.3.8 Сколько существует различных семизначных телефонных номеров, если все цифры номера различны?

4.3.9 В колоде 36 карт. Сколькими способами можно сдать 6 карт так, чтобы среди них оказалось два короля?

4.3.10 Сколько различных наборов по 8 пирожных в каждом можно составить, используя 4 сорта пирожных?

4.3.11 Сколько различных комбинаций букв можно получить из слова «СТАТИСТИКА»?

4.3.12 На книжной полке стоит собрание сочинений в 10 томах. Сколькими различными способами их можно переставить, чтобы: а) тома 1 и 2 стояли рядом; б) тома 9 и 10 рядом не стояли?

4.3.13 Сколькими различными способами могут сесть 5 человек за стол?

4.3.14 Пусть буквы некоторой азбуки образуются как последовательность точек, тире и пробелов. Сколько различных букв можно образовать, если использовать пять символов?

4.3.15 В теннисном турнире участвуют 12 мужчин и 10 женщин. Сколькими способами можно составить 4 смешанные пары?

4.3.16 В аудитории находятся 15 студентов, из которых 5 юношей. Сколько различных групп по пять человек можно составить из студентов, чтобы в группе оказалось ровно 2 юноши?

4.3.17 На складах предприятия находятся 16 видов продукции. Сколькими способами можно сделать 4 заказа на продукцию предприятия?

4.3.18 При игре в бридж между четырьмя игроками распределяется колода в 52 карты по 13 карт каждому. Сколько существует способов раздать карты?

4.3.19 Сколько существует таких перестановок восьми студентов, при которых 3 определённых студента находятся рядом друг с другом?

4.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

4.4.1 Решить предложенную задачу своего варианта.

4.4.1.1 Переплётчик должен переплести 15 различных книг в синий, зеленый и красный переплёт. Сколькими способами он может это сделать?

4.4.1.2 Сколько различных шестизначных чисел можно составить из цифр 0, 1, 2, 3, 4 и 5, если цифры не повторяются?

4.4.1.3 Сколько различных комбинаций букв можно получить из букв слова «ФИНАНСИСТ»?

4.4.1.4 Сколько трёхкнопочных комбинаций существует на кодовом замке из 10 цифр, если все три кнопки нажимаются одновременно?

4.4.1.5 В кондитерском магазине продаются пять видов пирожных. Сколькими способами можно купить девять пирожных?

4.4.1.6 Сколькими способами четыре юноши могут пригласить четверых из шести девушек на танец?

4.4.1.7 Сколько трёхзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4 и 5?

4.4.1.8 Сколько существует пятизначных чисел, которые одинаково читаются слева направо и справа налево?

4.4.1.9 Восемнадцать студентам выданы два варианта контрольной работы. Сколькими способами можно посадить студентов в два ряда так, чтобы у сидящих рядом не было одинаковых вариантов, а у сидящих друг за другом был одинаковый вариант?

4.4.1.10 Сколькими способами при бросании 12 игральных костей каждое из значений 1, 2, 3, 4, 5 выпадет дважды?

4.4.1.11 У одного студента имеется 5 книг по экономике, а второго – восемь. Сколькими способами они могут обменять друг у друга две книги на две книги?

4.4.1.12 Лифт с шестью пассажирами останавливается на 11 этажах. Каждый пассажир может равновозможно выйти на любом этаже. Сколько может быть различных вариантов освобождения лифта?

4.4.1.13 В железнодорожном вагоне имеется 9 купе. Сколькими способами можно рассадить в вагон 6 пассажиров, чтобы они ехали в различных купе?

4.4.1.14 Клавиатура содержит 45 клавиш. Определить число попыток, необходимых для того, чтобы напечатать строку из 30 знаков, не имеющих повторений. Расположение клавиш на клавиатуре для пользователя не известно.

4.4.1.15 На шахматную доску ставятся две ладьи – белая и чёрная. Сколькими способами можно их расставить, чтобы они не смогли сбить друг друга?

4.4.1.16 Сколько шестибуквенных слов можно образовать из слова «КОРОНА» так, чтобы две буквы «О» не стояли рядом?

4.4.1.17 Сколько различных комбинаций букв можно получить из слова «РЕФРИЖЕРАТОР»?

4.4.1.18 При игре в домино четыре игрока делят поровну между собой 28 костей. Сколькими способами они могут это сделать?

4.4.1.19 Сколько различных букетов по 7 цветков в каждом можно составить, используя цветы 5 имеющихся видов?

4.4.1.20 В лотереи разыгрывается 20 билетов, из которых 8 являются выигрышными. Сколькими способами участник лотереи из четырёх билетов достанет хотя бы один выигрышный?

4.4.1.21 Сколько существует различных шестизначных номерных знаков автомобиля, который содержит две буквы из алфавита в 26 буквы и 4 цифры?

4.4.1.22 Сколькими способами можно расставить на шахматной доске 8 ладей так, чтобы ни одна из них не могла сбить друг друга? Каждая из ладей может сбить другую ладью по обычным правилам шахмат.

4.4.1.23 На полке стоят 24 книги, причём 21 книга – разных авторов, а три книги – одного автора. Сколькими способами можно расставить эти книги так, чтобы книги одного автора стояли рядом?

4.4.1.24 Сколько различных испытаний могут привести к 52 выпадениям герба при 100 подбрасывании монеты? Испытанием считается серия опытов из 100 подбрасываний. Два испытания считаются различными, если не совпадают результаты хотя бы двух подбрасываний?

4.4.1.25 Из колоды, содержащей 52 карты, вынули 10 карт. В скольких случаях среди этих карт окажется хотя бы одна восьмёрка?

4.4.1.26 Сколько различных наборов по 9 мороженных в каждом можно составить, используя 5 видов мороженных?

4.4.1.27 Сколькими способами можно распределить 8 операторов по пяти перенумерованным приборам, которые они могут обслуживать?

4.4.1.28 Сколькими способами можно распределить 5 телеграмм по 8 каналам связи?

4.4.1.29 На одной книжной полке стоят 6 книг, а на второй – 12. Сколькими способами можно выбрать две книги, одну с первой полки, а вторую – со второй полки?

4.4.1.30 Сколько различных браслетов можно сделать из 6 одинаковых изумрудов, 5 одинаковых рубинов и 4 одинаковых сапфиров (в браслет входят все 15 камней)?

5 КЛАССИЧЕСКОЕ ВЕРОЯТНОСТНОЕ ПРОСТРАНСТВО (практическое занятие № 5)

Содержание: аксиоматическое определение вероятностей, классическое определение вероятностей, вычисление вероятностей элементарных событий.

5.1 Теоретический материал по теме практического занятия

5.1.1 Аксиоматическое определение вероятностей

Пусть пространство элементарных событий Ω есть произвольное множество. Выделим систему подмножеств множества Ω , которое образует σ -алгебру событий F . Если определено множество Ω и σ -алгебра его подмножеств, то говорят, что построено измеримое пространство (Ω, F) .

Определим на измеримом пространстве (Ω, F) числовую функцию (*вероятностную меру*) $\mu(A)$ для измерения объективной возможности наступления события $A \in F$, таким образом, чтобы она удовлетворяла следующим условиям:

- 1) $\mu(A) \geq 0$;
- 2) $\mu(\Omega) = 1$;
- 3) $\mu(A + B) = \mu(A) + \mu(B)$;
- 4) $\mu\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$.

Определение 5.1.1.1 Вероятностью на измеримом пространстве (Ω, F) называется числовая функция P , которая определена на множестве из алгебры событий F и удовлетворяет аксиомам Колмогорова:

- 1) для любого события $A \in F$ справедливо неравенство $0 \leq P(A) \leq 1$;
- 2) $P(\Omega) = 1$;
- 3) для любого конечного или счётного множества попарно несовместных событий $A_i \in F$ справедливо равенство $P\left(\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$.

Определение 5.1.1.2 Пространство элементарных событий Ω с выделенной в нём σ -алгеброй событий F и определённой на измеримом пространстве (Ω, F) вероятностью $P(A)$, где $A \in F$ называется *вероятностным пространством* (Ω, F, P) .

5.1.2 Классическое определение вероятностей

Несколько событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ образуют *полную группу событий*, если $\sum_{i=1}^n A_i = \Omega$, то есть их сумма есть достоверное событие или в результате опыта произойдет хотя бы одно из этих событий.

Аксиомы теории вероятностей позволяют вычислять вероятности любых событий с помощью вероятностей элементарных событий. Но при этом вопрос о том, как определить вероятности элементарных событий не рассматривается. Дадим классическое определение вероятности.

Пусть $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n\}$ пространство элементарных событий с конечным числом исходов n . Так как, элементарные события образуют полную группу событий, то $\sum_{i=1}^n \omega_i = \Omega$. Вследствие того, что элементарные события несовместны, то по аксиоме (3), сложения вероятностей получаем следующее равенство:

$$P\left(\sum_{i=1}^n \omega_i\right) = P(\Omega) = \sum_{i=1}^n P(\omega_i) = 1.$$

Так как элементарные исходы равновозможные, то вероятность наступления каждого из них одна и та же, а именно $P(\omega_i) = \frac{1}{n}$. Пусть событие $A = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_m\}$ содержит m элементарных исходов. Следовательно, по аксиоме сложения вероятностей, имеем: $P(A) = P(\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_m) = \sum_{\omega_i \in A} \frac{1}{n} = \frac{m}{n}$.

Определение 5.1.2.1 (классическое определение вероятностей) Если все элементарные события ω_i равновозможные, то вероятность наступления любого события $A \in F$ равна отношению числа элементарных исходов, благоприятствующих событию A , к общему числу всех элементарных исходов.

Согласно классическому определению вероятностей получаем формулу вычисления вероятностей элементарных событий:

$$P(A) = \frac{m}{n}, \quad (5.1.2.1)$$

где n – общее число исходов эксперимента, а m – число исходов эксперимента, благоприятствующих данному событию.

5.2 Примеры решения типовых задач

5.2.1 В студенческой группе, состоящей из 24 студентов, шесть студентов занимаются научной деятельностью. Какова вероятность того, что наудачу выбранный студент группы занимается научной деятельностью?

Решение. Рассмотрим событие: $A = \{\text{наудачу выбранный студент, из 24 студентов группы, занимается научной деятельностью}\}$. Исход опыта состоит в выборе одного студента из 24 студентов группы. Одного студента из 24 выбираем $n = 24$ способами. Благоприятный исход состоит в выборе одного студен-

та, который занимается научной деятельностью, из шести студентов, занимающихся этим видом деятельности. Одного студента из шести студентов, которые занимаются научной деятельностью, выбираем $m = 6$ способами. Тогда, согласно классическому определению вероятностей, вероятность исходного события равна: $P(A) = m/n = 6/24 = 1/4 = 0,25$.

5.2.2 Бросают две игральные кости. Какое событие более вероятно: сумма очков на выпавших гранях равна 10 (событие A) или сумма очков на выпавших гранях равна 6 (событие B)?

Решение. Исход эксперимента: выбор одной цифры из 6, при первом бросании кости, и выбор одной цифры из шести, при втором бросании кости ($n = 6 \cdot 6 = 36$). Благоприятный исход событию A : выбор одной пары из трёх возможных пар (4;6), (5;5) и (6;4). Число таких исходов равно $m_A = 3$. Тогда вероятность наступления события A равна: $P(A) = m_A/n = 3/36 = 1/12 = 0,08(3)$. Благоприятный исход событию B : выбор одной пары из четырёх возможных пар (1;5), (2;4), (3;3), (4;2) и (5;1). Число таких исходов равно $m_B = 5$. Тогда вероятность наступления события B равна $P(B) = m_B/n = 5/36 = 0,13(8)$. Так как, $P(B) = 0,13(8) > P(A) = 0,08(3)$, то событие B более вероятно.

5.2.3 Какова вероятность того, что при случайном расположении в ряд карточек, на которых написаны буквы а, а, а, н, н, с, получается слово ананас?

Решение. Рассмотрим событие $A = \{\text{из шести букв (а, а, а, н, н, с), может быть составлено слово ананас}\}$. Исход эксперимента: расположение 6 карточек на 6 мест в ряд ($n = P_6 = 6!$). Благоприятный исход эксперимента: расположение трёх карточек с буквой «а» на три места и расположение двух карточек с буквой «н» на два места, и расположение одной карточки с буквой «с» на одно место ($m = P_3 \cdot P_2 \cdot P_1 = 3! \cdot 2! \cdot 1!$). Тогда вероятность заданного события равна

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{3! \cdot 2! \cdot 1!}{6!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{1}{2 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{1}{120} \approx 0,0083.$$

5.2.4 Из 20 строительных рабочих 12 – штукатуры, а 8 – маляры. Наудачу отбирается бригада из 6 рабочих. Какова вероятность того, что среди них 4 штукатура и 2 маляра?

Решение. Событие $A = \{\text{в бригаде из 6 человек присутствуют 4 штукатура и 2 маляра}\}$. Исход эксперимента: осуществляем выбор 6 рабочих из 20 ($n = C_{20}^6$). Благоприятный исход эксперимента: осуществляем выбор четырёх штукатуров из 12 штукатуров и двух маляров из 8 имеющихся маляров ($m = C_{12}^4 \cdot C_8^2$). В данном эксперименте выбор рабочих осуществляется без повторений и не учитывается порядок выбора рабочих. Находим вероятность того, что в бригаде из шести рабочих окажется 4 штукатура и два маляра:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_{12}^4 \cdot C_8^2}{C_{20}^6} = \frac{\frac{12!}{4! \cdot 8!} \cdot \frac{8!}{2! \cdot 6!}}{\frac{20!}{6! \cdot 14!}} = \frac{\frac{9 \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \cdot \frac{7 \cdot 8}{1 \cdot 2}}{\frac{15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 19 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}} = \frac{9 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 7 \cdot 4}{15 \cdot 8 \cdot 17 \cdot 19} \approx 0,36.$$

5.3 Задания для решения на практическом занятии

5.3.1 Какова вероятность того, что наудачу вырванный листок из нового календаря не високосного года соответствует первому числу месяца?

5.3.2 Найти вероятность того, что наудачу выбранное число от единицы до двадцати четырёх окажется делителем числа двадцать четыре?

5.3.3 Какова вероятность того, что наудачу выбранное двузначное число делится на 5?

5.3.4 Бросают две игральные кости. Пусть A – событие, состоящее в том, что сумма очков чётная; B – событие, заключающееся в том, что хотя бы на одной кости выпала 5; C – событие, состоящее в том, что сумма числа очков не менее 8; D – событие, заключающееся в том, что произведение числа очков не менее 7. Найти вероятности указанных событий.

5.3.5 В урне 7 синих и 8 жёлтых шаров. Из урны вынимают наугад один шар. Найти вероятность того, что этот шар – синий.

5.3.6 В урне 7 синих и 8 жёлтых шаров. Из урны вынимают наугад один шар и откладывают в сторону. Этот шар оказался синим. После этого из урны берут ещё один шар. Найти вероятность того, что этот шар тоже будет синим.

5.3.7 В урне 7 синих и 8 жёлтых шаров. Из урны вынули один шар и не глядя отложили в сторону. После этого из урны взяли ещё один шар. Найти вероятность того, что этот шар будет синим.

5.3.8 В урне 7 синих и 8 жёлтых шаров. Из урны вынули один шар и не глядя отложили в сторону. После этого из урны взяли ещё один шар. Он оказался синим. Найти вероятность того, что первый шар, отложенный в сторону, тоже синий.

5.3.9 В урне 7 синих и 8 жёлтых шаров. Из урны вынимают один шар за другим, кроме одного и не глядя откладывают в сторону. Найти вероятность того, что последний оставшийся в урне шар будет синим.

5.3.10 В урне 7 синих и 8 жёлтых шаров. Из урны не глядя вынимают подряд все находящиеся в ней шары. Найти вероятность того, что будет, третий по порядку, вынут синий шар.

5.3.11 В урне 7 синих и 8 жёлтых шаров. Из урны вынимают сразу пять шаров. Найти вероятность того, что три из них будут синими, а два – жёлтыми.

5.3.12 В кредитный отдел банка поступило 15 кредитных заявок, из которых 5 не одобрено отделом безопасности банка. Найти вероятность того, что при случайной проверке 6 заявок две оказались одобренные банком, а 4 – нет.

5.3.13 В розыгрыше первенства по футболу участвуют 16 команд, из которых случайным образом формируются две группы по 8 команд в каждой.

Среди участников первенства имеется 4 команды высокого класса. Найти вероятность следующих событий: $A = \{\text{все команды высокого класса попадут в одну и ту же группу}\}$; $B = \{\text{три команды высокого класса попадут в одну группу, а одна – в другую}\}$.

5.3.14 Из полной колоды карт (52 листа) вынимают сразу несколько карт. Сколько карт необходимо вынуть для того, чтобы с вероятностью, большей 0,4, утверждать, что среди них будут карты одной и той же масти?

5.3.15 Некоторый человек купил карточку лотереи и отметил в ней 6 из имеющихся 36 номеров, после чего в тираже разыгрывается 6 «выигравших» номеров. Найти вероятность следующих событий: $A_3 = \{\text{верно угаданы 3 выигравших номера из 6}\}$; $A_4 = \{\text{верно угаданы 4 номера из 6}\}$; $A_5 = \{\text{верно угаданы 5 номеров из 6}\}$; $A_6 = \{\text{верно угаданы все 6 номеров}\}$.

5.3.16 На десяти карточках написаны буквы: $\{A, A, T, T, T, C, C, И, И, K\}$. После перестановки карточек, вынимают одну карточку за другой и раскладывают в том порядке, в каком они были вынуты. Найти вероятность того, что из карточек получится слово «СТАТИСТИКА».

5.3.17 Известно, что при 10-кратном бросании монеты 5 раз выпали гербы и 5 раз цифры. Какова вероятность того, что все гербы выпали при первом бросании?

5.3.18 На один ряд, состоящим из восьми мест, случайным образом садятся восемь студентов. Найти вероятность того, что три определённых студента окажутся рядом.

5.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

5.4.1 Решить предложенную задачу своего варианта.

5.4.1.1 Бросаются две игральные кости. Определить вероятность того, что сумма числа очков не превосходит 5.

5.4.1.2 В ящике имеется 16 деталей, шесть из которых окрашены. Наугад достаём 6 деталей. Найти вероятность того, что четыре из них окрашены, а две – нет.

5.4.1.3 В урне 10 белых и 7 чёрных шаров. Какова вероятность достать из урны чёрный шар?

5.4.1.4 В партии из 10 деталей 7 являются стандартными. Найти вероятность того, что среди выбранных наудачу 5 изделий два изделия стандартны?

5.4.1.5 Монету бросают три раза. Какова вероятность того, что все три раза выпала цифра?

5.4.1.6 Какова вероятность выигрыша в лотереи (угадать 3 номера из 45)?

5.4.1.7 Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что произведение числа очков на обеих костях не превосходят 8?

5.4.1.8 На книжной полке находятся 6 книг по менеджменту и 8 книг по маркетингу. Какова вероятность того, что книги по каждой дисциплине стоят рядом?

5.4.1.9 Какова вероятность получения одного туза при сдаче шести карт из колоды в 52 карты?

5.4.1.10 При перевозке 30 деталей, из которых 7 были забракованы, утеряна одна стандартная деталь. Найти вероятность того, что после этого наудачу извлечённая деталь оказалась стандартной?

5.4.1.11 В соревнованиях по баскетболу участвуют 12 команд. Случайным образом они делятся на две группы по 6 команд. Найти вероятность того, что две наиболее сильные команды при этом окажутся в одной группе?

5.4.1.12 Какова вероятность того, что при случайном расположении в ряд десяти карточек с буквами А, А, А, М, М, Т, Т, К, И, Е, получится слово «МАТЕМАТИКА»?

5.4.1.13 Имеются 8 билетов в театр, 5 из которых на места из первого ряда. Какова вероятность того, что из трёх наудачу выбранных билетов два окажутся на места первого ряда?

5.4.1.14 Имеются 7 изделий первого сорта, 8 изделий второго сорта, 5 изделий третьего сорта и 6 изделий четвёртого сорта. Для контроля наудачу берут 10 изделий. Найти вероятность того, что среди них 2 изделия первого сорта, 3 – второго, 4 – третьего и одно изделие четвёртого сорта.

5.4.1.15 Среди 12 лотерейных билетов 7 выигрышных. Наудачу выбрали 5 билетов. Определить вероятность того, что среди них 3 выигрышных.

5.4.1.16 Брошены две игральные кости. Какова вероятность того, что произведение числа очков на обеих костях делится на 4?

5.4.1.17 Из партии, содержащей 14 изделий, среди которых 3 бракованных, наудачу извлекают 5 изделий. Найти вероятность того, что среди них хотя бы одно изделие бракованное.

5.4.1.18 Бросается 8 игровых костей. Найти вероятность того, что выпадут три единицы, три тройки и две пятёрки.

5.4.1.19 В шахматном турнире участвуют 8 гроссмейстеров, 5 международных мастеров и 7 мастеров. Соперники для первого тура и номер столика для каждой пары участников определяется путём жеребьёвки. Найти вероятность того, что за столиком № 1 встретятся между собой шахматисты одной и той же категории.

5.4.1.20 На складе хранится 1000 аккумуляторов. Известно, что после года хранения 40 штук выходит из строя. После шести месяцев хранения было изъято 12 аккумуляторов, ставших неисправными. Найти вероятность того, что наугад взятый после года хранения аккумулятор окажется исправным.

5.4.1.21 Среди 24 студентов группы, в которой 13 юношей, разыгрывается пять билетов. Найти вероятность того, что среди обладателей билетов окажется три девушки.

5.4.1.22 Группа состоит из пяти мужчин и десяти женщин. Найти вероятность того, что при случайной группировке по три человека в каждой группе будет мужчина.

5.4.1.23 Какова вероятность выигрыша в лотереи (угадать 4 номера из 49)?

5.4.1.24 В урне 12 зелёных и 8 синих шаров. Из урны достаём 5 шаров. Какова вероятность того, что среди них окажется ровно 2 синих шара?

5.4.1.25 Из шести карточек с буквами А, Б, В, Г, Д, Е наугад одну за другой выбирают три карточки и располагают их в порядке извлечения. Какова вероятность того, что получится слово «ЕДА».

5.4.1.26 Наудачу называется одна из 10 цифр. Какова вероятность того, что она является корнем уравнения $x^3 - 10x^2 + 21x = 0$.

5.4.1.27 В мастерскую для ремонта поступило 15 телевизоров, семь из которых нуждаются в общей настройке. Мастер берёт любые 7 телевизоров. Какова вероятность того, что 2 из них нуждаются в общей настройке?

5.4.1.28 Наудачу называется трёхзначное натуральное число. Какова вероятность того, что последовательность цифр этого числа возрастает?

5.4.1.29 На десяти карточках написаны различные цифры (на каждой карточке одна цифра). Найти вероятность того, что случайно составленное с помощью этих карточек двузначное число делится на 12.

5.4.1.30 В группе спортсменов 8 конькобежцев и 12 лыжников. Найти вероятность того, что среди случайно выбранных пяти человек ровно три лыжника.

6 МЕТОДЫ ЗАДАНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ

(практическое занятие № 6)

Содержание: классический (лапласовский) метод задания вероятностей, геометрический метод задания вероятностей, статистический метод задания вероятностей, метод экспертных оценок.

6.1 Теоретический материал по теме практического занятия

6.1.1 Классический (лапласовский) метод задания вероятностей

Теоретический материал по данному вопросу рассмотрен на практическом занятии №5.

6.1.2 Геометрическое определение вероятностей

Пусть пространство Ω эксперимента E содержит несчётное множество элементарных событий ω . Предположим, что элементарные события можно трактовать, как координаты точки в пространстве $\mathbb{R}^n$, а события, как некоторые области этого пространства. Пусть Ω , а, следовательно, и событие $A \subseteq F$ имеют конечную геометрическую меру: $\mathbb{R}^1$ - длина, $\mathbb{R}^2$ - площадь, $\mathbb{R}^3$ - объём.

Геометрические меры множеств $A \subseteq F$ можно принять за вероятностные меры этих множеств. Необходимо только, чтобы геометрические меры удовлетворяли аксиомам Колмогорова. Для этого геометрические меры нормируют, то есть принимают геометрическую меру Ω за единицу, а вероятностная мера события $A \subseteq F$ будет пропорциональна мере области A . Тогда

$$P(A) = \frac{\mu(A)}{\mu(\Omega)} = \frac{\text{мера области } A}{\text{мера области } \Omega}.$$

6.1.3 Статистическое определение вероятностей

Часто не всегда известно число элементарных событий пространства элементарных событий Ω , которые необходимы при классическом методе задания вероятности. Также не всегда известны геометрические меры множеств, которые необходимы для геометрического метода задания вероятностей. Статистический метод задания вероятностей не требует знания задания этих величин.

Рассмотрим пространство элементарных событий Ω , которое отвечает условиям эксперимента E . Если эксперимент продублировать n раз при одних и тех же условиях S , то относительная частота появления события A определяется по формуле $W(A) = \frac{m}{n}$. Тогда относительную частоту принимают за

оценку вероятности появления события A : $P(A) = P(A|S) \approx W(A|S) = \frac{m}{n}$. Таким

образом, статистический метод задания вероятностей состоит в том, что в качестве оценки вероятностей появления события $A \subseteq F$ принимаем с некоторой точностью ε относительную частоту появления этого события: $P(A) = W(A) + \varepsilon$.

6.2 Примеры решения типовых задач

6.2.1 Рассмотрим множество, составленное из первых десяти букв русского алфавита. Выбираем из этого множества 4 буквы без возвращения и записываем слово в порядке поступления букв. Найти вероятность того, что наудачу составленное слово будет оканчиваться буквой а?

Решение. Рассмотрим событие $A = \{\text{наудачу составленное четырёхбуквенное слово из алфавита в 10 букв будет оканчиваться буквой а}\}$. Исход эксперимента: осуществляем выбор 4-х различных букв из десяти буквенного алфавита без возвращения. Это можно сделать $n = A_{10}^4$ способами. Благоприятный исход эксперимента: размещение на последнее место в четырёхбуквенном слове единственной буквы «а» и размещение на три оставшихся места по одному символу из 9 (символ «а» исключён из рассмотрения). Число благоприятных исходов опыта равно $m = A_9^3 \cdot 1 = A_9^3$. Находим вероятность заданного события:

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{A_9^3}{A_{10}^4} = \frac{9!/(9-3)!}{10!/(10-4)!} = \frac{9! \cdot 6!}{10! \cdot 6!} = \frac{1}{10} = 0,1.$$

6.2.2 Четыре телеграммы случайным образом распределяются по 6 каналам связи. Найти вероятность того, что на каждый канал придётся не больше одной телеграммы.

Решение. Событие $A = \{\text{на каждый из 6-и каналов придётся не более одной телеграммы}\}$. Исход опыта: выбор одного канала связи из шести для каждой из 4 телеграмм. Число исходов опыта равно $n = 6^4$. Благоприятный исход опыта: выбор четырёх каналов связи из 6 возможных, и распределение каждой

из 4-х телеграмм на 4 выбранных канала связи. Число благоприятных исходов опыта равно $m = C_6^4 \cdot 4!$. Вероятность исходного события равна

$$P(A) = \frac{m}{n} = \frac{C_6^4 \cdot 4!}{6^4} = \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot \frac{4!}{6^4} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 6}{6^4} = \frac{5 \cdot 2}{6^2} = \frac{10}{36} = \frac{5}{18} \approx 0,278.$$

6.2.3 В библиотеке имеются книги по 18 разделам экономических дисциплин. Студент делает 5 заказов на литературу. Считая, что любой состав заказанной литературы равновозможен, найти вероятности следующих событий: $A = \{\text{заказаны книги из одного и того же раздела}\}$, $B = \{\text{заказаны книги из различных разделов}\}$.

Решение. Исход опыта: выполнить с повторением 5 заказов на литературу из имеющихся 18 разделов ($n = \bar{C}_{18}^5 = C_{18+5-1}^5 = C_{22}^5$). Благоприятный исход эксперимента для события A : выбрать один раздел из 18 возможных ($m_A = C_{18}^1$). Тогда вероятность того, что будут заказаны книги из одного и того же раздела, равна $P(A) = \frac{m_A}{n} = \frac{C_{18}^1}{C_{22}^5} = \frac{18! / 1! \cdot 17!}{22! / 5! \cdot 17!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{19 \cdot 20 \cdot 21 \cdot 22} = \frac{1}{19 \cdot 7 \cdot 11} = \frac{1}{1463} \approx 0,00068$.

Благоприятный исход эксперимента для события B : выбрать 5 различных разделов без возвращения из 18 возможных разделов ($m_B = C_{18}^5$). Тогда вероятность того, что будут заказаны книги из различных разделов, равна $P(A) = \frac{m_B}{n} = \frac{C_{18}^5}{C_{22}^5} = \frac{18! / 5! \cdot 13!}{22! / 5! \cdot 17!} = \frac{14 \cdot 15 \cdot 16 \cdot 17 \cdot 18}{18 \cdot 19 \cdot 20 \cdot 21 \cdot 22} = \frac{4 \cdot 17}{19 \cdot 11} = \frac{68}{209} \approx 0,325$.

6.2.4 В купе вагона находятся 4 пассажира. Каждый из них с равной вероятностью выходит на одной из восьми станций. Какова вероятность того, что на одной из станций выйдут три пассажира, а один на какой-то другой?

Решение. Событие $A = \{\text{на одной из станций выйдут три пассажира из четырёх, а один на какой-то другой станции}\}$. Исход эксперимента: выбор каждым пассажиром одной станции из 8 имеющихся станций ($n = 8^4$). Благоприятный исход опыта: выбор одной станции из 8 и выбор второй станции из 7, и выбор трёх пассажиров из четырёх, и выбор одного пассажира из одного ($m = 8 \cdot 7 \cdot C_4^3 \cdot 1$). Вероятность исходного события равна $P(A) = \frac{8 \cdot 7 \cdot C_4^3}{8^4} \approx 0,055$.

6.2.5 Имеется 13 игральных карт одной масти от «двойки» до «туза». Карты раскладывают на столе случайным образом в одну линию. Какова вероятность того, что между картами «двойка» и «туз» будут находиться ровно четыре другие карты?

Решение. Событие $A = \{\text{между картами «двойка» и «туз» находятся ровно четыре другие карты}\}$. Исход опыта: расположение 13 карт на 13 мест ($n = 13!$).

Благоприятный исход эксперимента: расположение карты «двойка» на шестое, седьмое или восьмое место ряда, и карты «туз» на два возможных при

этом места, или расположение карты «двойка» на оставшиеся десять мест и карты «туз» на одно возможное при этом место, и расположение оставшихся 11 карт на любое из 11 свободных мест ($m = (3 \cdot 2 + 10 \cdot 1) \cdot 11! = 16 \cdot 11!$).

Вероятность заданного события равна $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{16 \cdot 11!}{13!} = \frac{4}{39} \approx 0,103$.

6.2.6 На бесконечную шахматную доску со стороной квадрата 6 см наудачу бросается монета радиуса 2 см. Найти вероятность того, что при случайном бросании монеты на бесконечную шахматную доску монета попадёт целиком внутрь одного квадрата.

Решение. Пусть $(x; y)$ - координаты центра упавшей монеты. В силу бесконечности шахматной доски можно считать, что элементарные исходы данного эксперимента полностью определяются положением центра упавшей монеты относительно вершин квадрата, содержащего этот центр. Помещая начало координат в одну из вершин указанного квадрата, записываем множество элементарных исходов пространства элементарных событий, которое соответствует данному эксперименту: $\Omega = \{(x; y) | 0 \leq x \leq 6, 0 \leq y \leq 6\}$. Множество элементарных исходов, которые соответствуют заданному событию A , имеет вид $A = \{(x; y) | 2 \leq x \leq 4, 2 \leq y \leq 4\}$, то есть является квадратом со стороной 2 см. По

формуле геометрической вероятности находим $P(A) = \frac{S(A)}{S(\Omega)} = \frac{2^2}{6^2} = \frac{1}{9}$.

6.3 Задания для решения на практическом занятии

6.3.1 Найти вероятность того, что все студенты группы, состоящей из 25 человек, родились в разные дни года (считать, что все студенты группы родились в один и тот же не високосный год).

6.3.2 Телефонный номер состоит из десяти цифр (номер может состоять из всех нулей). Найти вероятность того, что все цифры телефонного номера различны (событие A) и все цифры номера нечётные (событие B).

6.3.3 В студенческой столовой имеется десять видов пирожных. Студент выбил чек на 6 пирожных. Считая, что любой заказываемый набор пирожных равновероятен, вычислить вероятность того, что студент заказал: а) пирожные разных видов; б) пирожные одного вида; в) по два пирожных различных видов.

6.3.4 В почтовом отделении продаются открытки 20 видов. Очередному покупателю необходимо приобрести 14 поздравительных открыток. Считая, что любой набор поздравительных открыток равновозможен, найти вероятности следующих событий: $A = \{\text{приобретены открытки различных видов}\}$, $B = \{\text{приобретены открытки одного вида}\}$.

6.3.5 10 человек случайным образом рассаживаются за круглым столом. Найти вероятность того, что два фиксированных лица окажутся рядом.

6.3.6 Та же задача, но стол прямоугольный, и 10 человек рассаживаются случайно вдоль одной из его сторон.

6.3.7 На десяти карточках написаны цифры 0, 1, 2, ..., 9. Карточки раскладывают на столе случайным образом в одну линию. Какова вероятность того, что между карточками с номерами 0 и 9 будут находиться ровно три другие карточки?

6.3.8 В лифт десятиэтажного дома на первом этаже вошли 5 человек. Каждый из них с одинаковой вероятностью выходит на любом этаже, начиная со второго. Найти вероятность того, что все пассажиры выйдут: а) на одном и том же этаже; б) на четвёртом этаже; в) на разных этажах.

6.3.9 В условии задачи 6.3.8 найти вероятность того, что на одном из этажей выйдут два пассажира, а на другом – три.

6.3.10 Пятнадцать шаров размещают случайным образом в 6 лузах бильярдного стола. В каждую лузу можно поместить любое число шаров. Какова вероятность того, что в одной из луз будет 4 шара, в другой – 5, а в третьей – 6?

6.3.11 На отрезок единичной длины наудачу бросается материальная точка. Найти вероятность того, что расстояние от точки до концов отрезка превосходит величину $1/7$.

6.3.12 В круг радиуса 16 см наудачу ставится материальная точка. Найти вероятность того, что она попадёт в одну из непересекающихся фигур, расположенных в круге, площади которых равны 2,6 и 8,4 кв. см.

6.3.13 Два студента X и Y договорились встретиться в определённом месте между 13 и 14 часами. Пришедший первым ждёт второго в течение 15 мин, после чего уходит. Найти вероятность встречи, если время прихода каждого независимо и равновозможно в течение указанного часа.

6.3.14 Стержень длины 1 произвольным образом разламывается на три части. Определить вероятность того, что из получившихся частей можно составить треугольник.

6.3.15 Найти вероятность того, что сумма двух наугад взятых положительных правильных дробей не больше 1, а их произведение не больше $3/16$.

6.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

6.4.1 Решить предложенную задачу своего варианта.

6.4.1.1 Наудачу взятый телефонный номер состоит из 5 цифр (номер может состоять из одних нулей). Какова вероятность того, что в нём все цифры различные?

6.4.1.2 Шесть различных книг случайным образом расставляют на полке. Найти вероятность того, что две определенные книги окажутся рядом.

6.4.1.3 Десять человек независимо друг от друга садятся в электропоезд, состоящий из 10 вагонов. Найти вероятность того, что все они окажутся в разных вагонах.

6.4.1.4 В отрезке длиной 4 см наудачу появляется точка. Определить вероятность того, что расстояние от точки до концов отрезка превосходит 0,25 см.

6.4.1.5 Зенитная батарея, состоящая из 3 орудий, производит залп по группе, состоящей из 4 самолётов. Каждое из орудий выбирает себе цель наудачу независимо от остальных. Найти вероятность того, что все орудия выстрелят по разным самолётам?

6.4.1.6 В течение 30 минут студент X в случайный момент звонит по городскому телефону студенту Y и ждёт 2 минуты, после чего кладёт трубку. В течение тех же 30 минут в случайный момент времени студент Y приходит домой, где остаётся в течение 10 минут, после чего уходит. Какова вероятность того, что разговор между студентами X и Y состоится?

6.4.1.7 На автобусной остановке находятся 5 человек. К остановке одновременно подъехало и остановилось сразу четыре автобуса. Каждый человек может с равной вероятностью зайти в любой из 4-х автобусов. Какова вероятность того, что в один из автобусов войдут три человека, а в другой – два.

6.4.1.8 Телефонная линия, соединяющая два пункта, отстоящих на расстоянии 3 км, оборвалась в неизвестном месте. Найти вероятность того, что обрыв произошёл не далее чем в 550 метрах от первого пункта.

6.4.1.9 Определить вероятность того, что серия наудачу выбранной облигации не содержит одинаковых цифр, если номером серии может служить любое пятизначное число, начиная с 00001.

6.4.1.10 На полке случайным образом расставляются 8 книг. Найти вероятность того, что при этом три определённые книги окажутся стоящими рядом.

6.4.1.11 Маршрутное такси, в котором находятся 9 пассажиров, делает остановки в 12 пунктах. Каждый из пассажиров выходит с равной вероятностью на любой из остановок. Какова вероятность того, что на одной из остановок выйдут 4 пассажира, на другой – 3, а на третьей – 2 пассажира?

6.4.1.12 На паркетный пол наудачу бросается монета диаметра 5 см. Паркет имеет форму квадратов со стороной 25 см. Найти вероятность того, что монета не пересечёт ни одной из сторон квадратов паркета?

6.4.1.13 Случайным образом из всех букв русского алфавита выбираются 5 букв без возвращения. Слово записывается в порядке поступления букв. Найти вероятность того, что полученное слово будет оканчиваться буквой я?

6.4.1.14 На книжной полке случайным образом расставляются семь книг по 7 различным разделам высшей математике, в том числе по линейной алгебре и дифференциальному исчислению. Найти вероятность того, что книги по линейной алгебре и дифференциальному исчислению окажутся рядом на полке.

6.4.1.15 Восемь шаров размещаются случайным образом в 10 коробках. В каждую коробку можно поместить любое число шаров. Какова вероятность того, что в одной из коробок будет 4 шара, в другой – 3, а в третьей – 1 шар?

6.4.1.16 Минное поле заграждения устроено так, что мины поставлены вдоль некоторой прямой с интервалами между минами 100 м. Найти вероятность то-

го, что корабль шириной 20 м, проходящий минное поле заграждения под прямым углом, подорвётся на mine?

6.4.1.17 В библиотеке имеются книги по математике, истории, географии и т.д., всего по 15 изучаемым дисциплинам. Поступило 6 заказов на литературу. Найти вероятность того, что заказаны книги по различным дисциплинам, если любой состав заказанной литературы равновозможен.

6.4.1.18 13 карт одной масти и джокер (полная колода карт: 54 листа, 4 масти по 13 карты, два джокера) раскладываются по кругу случайным образом. Найти вероятность того, что между картами джокер и туз расположены ровно три другие карты.

6.4.1.19 На четыре полки необходимо поставить 10 коробок с обувью, причём на каждую полку можно поставить любое число коробок. Найти вероятность того, что только на двух полках окажется по 5 коробок с обувью.

6.4.1.20 Наудачу взяты два положительных числа x и y , не превышающие единицы. Найти вероятность того, что $y^2 \leq x$

6.4.1.21 Какова вероятность того, что в группе из 24 случайно отобранных студентов, одного не високосного года рождения, хотя бы у двоих окажется один и тот же день рождения?

6.4.1.22 На стоянке авторынка в один ряд необходимо случайным образом поставить 15 автомобилей различных цветов. Какова вероятность того, что между автомобилями, окрашенными в цвета «охра золотистая» и «баклажан», будут поставлены ровно два других автомобиля?

6.4.1.23 Пять студентов условились ехать определённым рейсом электрички с 8 вагонами, но не договорились о номере вагона. Какова вероятность того, что ни один из них не встретится с другим до окончания поездки, если возможности в размещении студентов по вагонам равновероятны и переход из вагона в вагон во время поездки невозможен?

6.4.1.24 Выбираются наудачу два действительных числа из отрезка $[0,1]$. Какова вероятность того, что их сумма не больше 1, а их произведение не больше $2/9$?

6.4.1.25 Путём жеребьёвки разыгрывается 5 подписных изданий среди 15 работников, причём каждый работник, получивший подписку, не участвует в дальнейшей жеребьёвке. Найти вероятность того, что первые 5 человек получит каждый по одной подписке?

6.4.1.26 13 карт одной масти и джокер (полная колода карт: 54 листа, 4 масти по 13 карты, два джокера) раскладываются в ряд случайным образом. Найти вероятность того, что между картами дама и король расположены ровно четыре другие карты.

6.4.1.27 Студент забыл четыре последние цифры номера сокурсника и набрал их наугад, помня только, что эти цифры чётные и различные. Найти вероятность того, что номер набран правильно.

6.4.1.28 Два человека договорились встретиться в определенном месте с 12 до 14 часов. Пришедший первым ждет другого в течение 20 минут и, если встреча не состоялась, уходит. Приход их не зависит друг от друга и равновозможен в любой момент из указанного промежутка времени. Найти вероятность того, что встреча состоится.

6.4.1.29 Набирая номер телефона, абонент забыл последние четыре цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

6.4.1.30 В «секретном» замке на общей оси 4 диска, каждый из которых разделён на 5 секторов, на которых написаны цифры 1, 2, 3, 4, 5. Замок открывается только в том случае, если диски установлены так, что цифры образуют определённую комбинацию. Найти вероятность того, что при произвольной установке дисков замок будет открыт.

7 СВОЙСТВА ВЕРОЯТНОСТЕЙ (практическое занятие № 7)

Содержание: основные свойства вероятностей, теоремы сложения, условная вероятность, теорема умножения вероятностей.

7.1 Теоретический материал по теме практического занятия

7.1.1 Основные свойства вероятностей

1. Для любого события A выполняется неравенство $0 \leq P(A) \leq 1$.
2. Вероятность достоверного события равна 1, т. е. $P(\Omega) = 1$.
3. Вероятность невозможного события равна 0, т. е. $P(\emptyset) = 0$.
4. Для любых двух несовместных событий A и B вероятность суммы равна сумме вероятностей, т. е. $P(A + B) = P(A) + P(B)$.
5. Если событие $A \subseteq B$, то $P(A) \leq P(B)$ и $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.
6. Вероятность противоположного события равна разности достоверного события и вероятности самого события: $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
7. Теорема сложения. Вероятность суммы двух произвольных событий равна сумме вероятностей этих событий минус вероятность их совместного наступления, т. е. $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(A \cdot B)$.
8. Вероятность суммы трёх произвольных событий равна сумме вероятностей этих событий и вероятности одновременного их наступления минус вероятности попарного наступления этих событий:
$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cdot B) - P(A \cdot C) - P(B \cdot C) + P(A \cdot B \cdot C).$$
9. Вероятность суммы m произвольных событий равна вероятности достоверного события минус вероятность одновременного наступления этих событий: $P(A_1 + A_2 + \dots + A_m) = 1 - P(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \dots \cdot \bar{A}_m)$.

7.1.2 Условная вероятность. Теорема умножения

Пусть (Ω, F, P) - математическая модель вероятностного эксперимента.

Это означает, что наступление любого события будет иметь некоторую вероятность. Вероятность любого события A связано с комплексом условий эксперимента и может менять свою величину с изменением этого комплекса условий.

Например, при бросании игральной кости вероятность выпадения числа очков больше трёх, равна $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$. Если при этом произошло событие, выпадение чётного числа очков, то вероятность изменится и станет равна $\frac{2}{3}$.

Определение 7.1.2.1 Пусть задано вероятностное пространство (Ω, F, P) , и A, B произвольные события. Если $P(B) > 0$, то *условной вероятностью* события A , при условии, что событие B произошло, называется вероятность, которое определяется по формуле $P_B(A) = \frac{P(A \cdot B)}{P(B)}$.

Аналогично определяется условная вероятность события B , при условии, что событие A произошло: $P_A(B) = \frac{P(A \cdot B)}{P(A)}$.

Легко показать, что условная вероятность обладает всеми свойствами вероятности.

Если умножить последние два равенства на знаменатели правых частей, то приходим к теореме умножения.

Теорема 7.1.2.1 Вероятность совместного наступления двух событий равна произведению одного из них на условную вероятность второго события при условии, что первое событие произошло.

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_B(A) = P(B) \cdot P_A(B). \quad (7.1.2.1)$$

Если событие A не зависит от события B , то $P_B(A) = P(A)$. В данном случае события называются *независимыми*. Если события A и B являются независимыми, то независимыми будут события A и $\bar{B}$, $\bar{A}$ и B , $\bar{A}$ и $\bar{B}$. Тогда теорему умножения записываем в виде

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B). \quad (7.1.2.2)$$

Для n произвольных событий $A_1, A_2, \dots, A_n$ теорему умножения можно записать в виде:

$$\begin{aligned} P(A_1 \cdot A_2 \cdot A_3 \cdot \dots \cdot A_n) &= P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2 \cdot A_3 \cdot \dots \cdot A_n) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3 \cdot \dots \cdot A_n) = \dots \\ &= P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \cdot P_{A_1 A_2 A_3}(A_4) \cdot \dots \cdot P_{A_1 A_2 \dots A_{n-1}}(A_n). \end{aligned}$$

7.2 Примеры решения типовых задач

7.2.1 В отделе банка по работе с корпоративными клиентами работают 4 менеджера по продажам, причём каждый из них независимо друг от друга об-

служивают клиентов в течение часа с вероятностями 0,7, 0,8, 0,9 и 0,6, соответственно. Найти вероятности следующих событий: $A = \{\text{в течение часа клиентов будет обслуживать ровно один менеджер по продажам}\}$, $B = \{\text{в течение часа клиентов будут обслуживать не менее двух, но не более трёх менеджеров}\}$, $C = \{\text{клиентов будут обслуживать не более трёх менеджеров по продажам}\}$, $D = \{\text{клиентов будет обслуживать, по крайней мере, один менеджер по продажам}\}$.

Решение. Обозначим через A_i событие, состоящее в обслуживании клиентов в течение часа i -м менеджером по продажам ($i = \overline{1;4}$). По условию, вероятности этих событий равны: $P(A_1) = 0,7$, $P(A_2) = 0,8$, $P(A_3) = 0,9$, $P(A_4) = 0,6$.

Тогда событие A можно записать в следующем виде: $A = A_1\bar{A}_2\bar{A}_3\bar{A}_4 + \bar{A}_1A_2\bar{A}_3\bar{A}_4 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3\bar{A}_4 + \bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3A_4$. Все события, которые стоят в каждом слагаемом суммы, несовместны. На основании 4-го свойства вероятностей, вероятность суммы равна сумме вероятностей. В каждом слагаемом суммы стоит произведение событий, которые являются независимыми, а, следовательно, вероятность произведения равна произведению вероятностей (формула 7.1.2.2). При вычислении вероятностей воспользуемся свойством 6, нахождения вероятностей противоположного события: $P(\bar{A}_i) = 1 - P(A_i)$. Тогда вероятность события A того, что клиентов будет обслуживать один менеджер по продажам, равна $P(A) = P(A_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)P(\bar{A}_4) + P(\bar{A}_1)P(A_2)P(\bar{A}_3)P(\bar{A}_4) + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(A_3)P(\bar{A}_4) + P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3)P(A_4) = 0,7 \cdot 0,2 \cdot 0,1 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 0,8 \cdot 0,1 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 0,2 \cdot 0,9 \cdot 0,4 + 0,3 \cdot 0,2 \cdot 0,1 \cdot 0,6 = 0,0056 + 0,0096 + 0,0216 + 0,0036 = 0,0404$.

Событие $B = \{\text{в течение часа клиентов будут обслуживать не менее двух, но не более трёх менеджеров}\}$ означает, что в течение часа клиентов будет обслуживать либо только два менеджера, либо только три менеджера. Представим событие B в виде суммы попарно несовместных событий: $B = A_1A_2\bar{A}_3\bar{A}_4 + A_1\bar{A}_2A_3\bar{A}_4 + \bar{A}_1A_2A_3\bar{A}_4 + \bar{A}_1\bar{A}_2\bar{A}_3A_4 + A_1\bar{A}_2\bar{A}_3A_4 + \bar{A}_1A_2\bar{A}_3A_4 + \bar{A}_1\bar{A}_2A_3A_4 + A_1A_2A_3\bar{A}_4 + A_1\bar{A}_2A_3A_4 + \bar{A}_1A_2A_3A_4$, причём в каждом произведении суммы события независимы. Используя теорему сложения для несовместных событий и теорему умножения для независимых событий, находим вероятность заданного события B : $P(B) = 0,6548$.

Событие $C = \{\text{клиентов будут обслуживать не более трёх менеджеров по продажам}\}$ означает, что клиентов банка в течение часа будут обслуживать либо один, либо два, либо три из четырёх менеджеров по продажам, либо все четыре менеджера не обслуживали клиентов в течение часа. Для вычисления вероятности данного события перейдём к противоположному событию $\bar{C} = \{\text{все четыре менеджера по продажам будут обслуживать клиентов в течение часа}\}$. Вероятность события C определяем по свойству 6: $P(C) = 1 - P(\bar{C}) = 1 - P(A_1A_2A_3A_4) = 1 - P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4) = 1 - 0,7 \cdot 0,8 \cdot 0,9 \cdot 0,6 = 0,6976$.

Аналогично, как и для события C , для определения вероятности события D переходим к противоположному событию $\bar{D} = \{\text{ни один менеджер по продажам не будет обслуживать клиентов в течение часа}\}$. Тогда вероятность события D равна: $P(D) = 1 - P(\bar{D}) = 1 - P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3 \bar{A}_4) = 1 - 0,3 \cdot 0,2 \cdot 0,1 \cdot 0,4 = 0,9976$.

7.2.2 В студенческой группе из 25 человек 12 студентов занимаются футболом (событие A_1), 9 – биатлоном (событие A_2) и 8 – шахматами (событие A_3). Футболом и биатлоном занимаются 4 студента, футболом и шахматами – 3 студента, биатлоном и шахматами – 2 студента. Всеми тремя видами спорта занимаются 3 студента. Один из студентов группы выбран на профсоюзную конференцию вуза. Найти вероятности следующих событий: $A = \{\text{студент, который выбран на конференцию, занимается футболом или биатлоном}\}$; $B = \{\text{студент, который выбран на конференцию, не занимается ни одним вида спорта}\}$; $C = \{\text{студент занимается только футболом}\}$.

Решение. Событие A записываем в виде суммы двух совместных событий: $A = A_1 + A_2$. Для определения вероятности этого события воспользуемся теоремой сложения (свойство 7): $P(A) = P(A_1 + A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 A_2) = 12/25 + 9/25 - 4/25 = 17/25 = 0,68$. Для вычисления вероятности события $B = \bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$ используем формулу перехода к противоположному событию (свойство 6) и формулу вероятности суммы трёх событий (свойство 8): $P(B) = P(\bar{A}_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) = P(\overline{A_1 + A_2 + A_3}) = 1 - P(A_1 + A_2 + A_3) = 1 - (P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) - P(A_1 A_2) - P(A_1 A_3) - P(A_2 A_3) + P(A_1 A_2 A_3)) = 1 - (12/25 + 9/25 + 8/25 - 4/25 - 3/25 - 2/25 + 3/25) = 1 - 23/25 = 2/25 = 0,08$.

Событие C можно представить в виде $C = A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3$. Используя теорему умножения 7.1.2.1, свойства условной вероятности и теорему сложения (свойство 7), получим $P(C) = P(A_1 \bar{A}_2 \bar{A}_3) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(\bar{A}_2 \bar{A}_3) = P(A_1) \cdot (1 - P_{A_1}(A_2 + A_3)) = P(A_1) - P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2 + A_3) = P(A_1) - P(A_1 A_2 + A_1 A_3) = P(A_1) - P(A_1 A_2) - P(A_1 A_3) + P(A_1 A_2 A_3) = 12/25 - 4/25 - 3/25 + 3/25 = 8/25 = 0,32$.

7.2.3 На станцию связи за день поступило 20 телеграмм, адресованных в четыре различных пункта (по 5 в каждый пункт). Из всех телеграмм выбирается наугад 4. Найти вероятности событий: $A = \{\text{все телеграммы адресованы в разные пункты}\}$; $B = \{\text{все телеграммы адресованы в один и тот же пункт}\}$.

Решение. Обозначим через A_i событие, состоящее в доставке телеграммы в любой пункт i , где $i = \overline{1;4}$. Чтобы выполнялось событие A , адрес первой телеграммы может быть совершенно произвольным; второй – не таким, как у первой; третьей – не таким, как у первых двух; у четвёртой – не таким, как у

первых трёх. По теореме умножения вероятностей $P(A) = P(A_1 A_2 A_3 A_4) = P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \cdot P_{A_1 A_2}(A_3) \cdot P_{A_1 A_2 A_3}(A_4) = \frac{20}{20} \cdot \frac{15}{19} \cdot \frac{10}{18} \cdot \frac{5}{17} = \frac{125}{969} \approx 0,129$.

Обозначим через B_j событие, состоящее в доставке j -ой телеграммы в один из пунктов, где $j = \overline{1;4}$. Чтобы выполнялось событие B , адрес первой телеграммы может быть совершенно произвольным; второй – таким же, как у первой; третьей – таким же, как у первых двух; у четвёртой – таким же, как у первых трёх. По теореме умножения вероятностей $P(B) = P(B_1 B_2 B_3 B_4) = P(B_1) \times P_{B_1}(B_2) \cdot P_{B_1 B_2}(B_3) \cdot P_{B_1 B_2 B_3}(B_4) = \frac{20}{20} \cdot \frac{4}{19} \cdot \frac{3}{18} \cdot \frac{2}{17} = \frac{4}{969} \approx 0,004128$.

7.3 Задания для решения на практическом занятии

7.3.1 Студент во время сессии может получить удовлетворительную оценку по «Высшей математике» с вероятностью 0,8, по «Макроэкономике» с вероятностью 0,75, по «Экономике организации (предприятия)» с вероятностью 0,95, по «Компьютерным информационным технологиям» с вероятностью 0,85 и по предмету «Денежное обращение и кредит» с вероятностью 0,9. Какова вероятность того, что во время сессии студент не сдаст ровно один экзамен?

7.3.2 На автомобильный рынок одновременно пришли 3 покупателя, причём каждый из них может приобрести автомобиль с вероятностями соответственно 0,3, 0,4 и 0,6. Какова вероятность того, что автомобиль приобретут не менее одного, но не более двух покупателей?

7.3.3 В магазин поступило три партии швейных изделий. В первой партии изделия первого сорта составляют 95 %, во второй – 94% и в третьей – 96%. Из каждой партии наудачу берут по одному изделию. Какова вероятность того, что среди этих изделий, по крайней мере, одно изделие второго сорта?

7.3.4 В фойе установлены 100 лампочек трёх мощностей: 20 лампочек мощности 60W, 30 лампочек мощностью 100W и 50 лампочек мощностью 150W. За неделю перегорело три лампочки. Найти вероятность того, что за эту неделю перегорело не менее двух лампочек мощностью 150W.

7.3.5 На обувной фабрике в отдельных цехах производятся подмётки, каблуки и верхи сапог. Дефектными оказываются 3 % подмёток, 2 % каблуков и 4 % верхов. Произведённые подмётки, каблуки и верхи сапог случайно комбинируются в цехе, где шьются сапоги. После производства, предприятие отправляет произведённую продукцию в свой фирменный магазин. Найти вероятность того, что покупатель, купив пару сапог, на них обнаружит дефект.

7.3.6 Истребитель атакует бомбардировщик и даёт по нему две независимые очереди. Вероятность сбить бомбардировщик первой очередью равна 0,3, второй – 0,4. Если бомбардировщик не сбит, он ведёт по истребителю стрельбу из орудий кормовой установки и сбивает его с вероятностью 0,15. Какова веро-

ятность того, что в результате воздушного боя будет сбит истребитель или бомбардировщик?

7.3.7 Имеется связка из 9 ключей, четырьмя из которых можно открыть замок. Человек наудачу выбирает один ключ из связки и пытается с его помощью открыть замок. Какова вероятность того, что замок откроется с четвертой попытки, если после каждой неудачной попытки выбранный ключ: а) возвращается обратно в связку; б) извлекается из связки и откладывается в сторону?

7.3.8 Студент поочередно обращается в отдел кадров четырех предприятий, для получения направления на работу при распределении. Студент обращается в первое предприятие и если ему отказывают, он идет во второе и больше к первому предприятию не возвращается, и так далее. В случае предложения о трудоустройстве студент прекращает поиски. Вероятность того, что первое предприятие откажет студенту в трудоустройстве, равна 0,8; для второго, третьего и четвертого предприятия соответствующие вероятности равны 0,7, 0,9 и 0,6. Найти вероятность того, что студент сможет устроиться на работу на одно из данных четырех предприятий.

7.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

7.4.1 Решить предложенную задачу своего варианта.

7.4.1.1 Надёжность каждого из четырех блоков устройства, соответственно равны 0,7, 0,5, 0,6 и 0,9 (т. е. заданы вероятности безотказной работы каждого блока устройства в течение какого-то промежутка времени T). Определить вероятность того, что в течение времени T откажут ровно два блока.

7.4.1.2 Вероятность выигрыша по лотерейному билету лотереи A равна 0,4, лотереи B - 0,3, а лотереи C - 0,2. Имеются по одному лотерейному билету каждой из лотерей. Найти вероятность того, что выиграет ровно один билет.

7.4.1.3 Студент выполняет расчётно-графическую работу, пользуясь тремя справочниками. Вероятности того, что интересующие его формулы находятся в первом, втором, третьем справочниках, равны соответственно 0,5, 0,6, 0,7. Найти вероятность того, что интересующие студента формулы находятся не менее чем в одном, но не более чем в двух справочниках.

7.4.1.4 Студенту необходима для решения задачи формула, которая находится в одном из 5 справочников, которые имеются у него. Студент открывает наудачу один из справочников. Если формулы там нет, то он откладывает справочник в сторону. После этого весь процесс повторяется. Какова вероятность того, что студент найдёт необходимую формулу в последней книге?

7.4.1.5 На склад оптовой базы поступило три партии трикотажных изделий. В первой партии брак составляет 1 %, во второй 0,5 % и в третьей 0,25 %, от общего числа изделий соответствующей партии. Из каждой партии наудачу берут по одному изделию. Найти вероятность того, что среди взятых изделий ровно три являются бракованными.

7.4.1.6 Три станка в цехе работают независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы станков в течение смены равны 0,9, 0,95, 0,98, соответственно.

Найти вероятность того, что в течение смены не менее двух станков будут работать безотказно.

7.4.1.7 Вероятность того, что студент во время сессии сдаст первый экзамен, равна 0,8, второй – 0,9, третий – 0,7 и четвёртый – 0,6. Во время сессии студент сдавал четыре экзамена. Какова вероятность того, что во время сессии студент сдал все экзамены?

7.4.1.8 В кошельке находятся в произвольном порядке только купюры номиналом 50 и 20 тысяч рублей (10 купюр и 12 купюр, соответственно). Из кошелька случайным образом достаются купюры, до появления купюры достоинством 50 тыс. руб. Какова вероятность того, что купюру достоинством 50 тысяч рублей достанут ровно с 4-го раза, если: а) купюру, после того как достали из кошелька, возвращают обратно в кошелёк; б) купюру откладывают в сторону.

7.4.1.9 В первом ящике из двенадцати деталей восемь являются стандартными, во втором из 14 деталей десять деталей стандартные, а в третьем 6 деталей из 7 стандартны. Из каждого ящика берут по одной детали. Найти вероятность того, что среди выбранных трёх деталей не более одного стандартного.

7.4.1.10 Над изготовлением кольца последовательно работают три ювелира. Первый ювелир может допустить брак в работе с вероятностью 0,001, второй – 0,0004, третий – 0,0006. Какова вероятность того, что случайный покупатель, купивший кольцо, изготовленное ювелирами, обнаружит в нём брак?

7.4.1.11 На каждой из выбранных трёх кафедр университета работают по 10 человек. На первой кафедре пять преподавателей имеют учёную степень, на второй – шесть, а на третьей – семь. На профсоюзную конференцию от каждой кафедры выдвинут один кандидат. Найти вероятность того, что среди выдвинутых кандидатов не более двух преподавателей имеют учёную степень.

7.4.1.12 Три бомбардировщика преодолевают зону ПВО. Вероятность того, что будет сбит первый бомбардировщик средствами ПВО, равна 0,3, второй – 0,6, третий – 0,9. Вычислить вероятность того, что средствами ПВО будет сбит, по крайней мере, один бомбардировщик.

7.4.1.13 Для сигнализации об аварии установлены три независимо работающих сигнализатора. Вероятность того, что при аварии сработает первый сигнализатор, равна 0,95, второй – 0,96 и третий – 0,99. Какова вероятность того, что при аварии сработает, по крайней мере, два сигнализатора.

7.4.1.14 Два стрелка стреляют дважды по одной и той же мишени. Вероятность попасть в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,6, а для второго – 0,5. Найти вероятность того, что оба стрелка поразят мишень ровно по одному разу.

7.4.1.15 В читальном зале имеется 10 учебников по дисциплине «Менеджмент», из которых 4 учебника в красном переплёте, а 6 – в зелёном. Библиотекарь наудачу взял два учебника. Какова вероятность того, что оба учебника оказались в красном переплёте?

7.4.1.16 Редуктор состоит из трёх основных узлов. В первом узле брак может составить 1 %, во втором – 2 %, а в третьем – 1,5 %. Какова вероятность того, что человек, купивший два редуктора, обнаружит дефект.

7.4.1.17 Имеется связка из 18 ключей, десять из которых могут открыть замок. Берём наудачу два ключа и с их помощью пытаемся открыть замок. В каждой попытке достаём по два ключа. Какова вероятность того, что замок откроется ровно с третьей попытки, если проверенные ключи откладываются в сторону?

7.4.1.18 Прибор, состоящий из четырёх узлов, работает только в том случае, если исправны все четыре узла. Вероятности выхода из строя узлов в течение часа соответственно равны 0,1; 0,2; 0,3; 0,4. Найти вероятность того, что прибор работает.

7.4.1.19 Двум отделам поставлена задача: решить некоторую проблему, используя компьютерную технику. Первый отдел решает задачу с использованием двух компьютеров, причём первый решает задачу с вероятностью 0,7, второй – с вероятностью 0,9. Если первый отдел не решает поставленной задачи, то второй отдел её решает с вероятностью 0,8. Какова вероятность того, что проблема будет решена первым или вторым отделом?

7.4.1.20 На складе универсама находятся 22 телевизора марки «Витязь» и 24 телевизора марки «Горизонт». Со склада в торговый зал доставляются по три телевизора до появления телевизора марки «Витязь». Какова вероятность того, что будет сделано ровно три доставки телевизоров в торговый зал?

7.4.1.21 Вероятность успешной попытки выполнить упражнение для каждого из четырёх спортсменов соответственно равна 0,6; 0,65; 0,7; 0,75. Спортсмены выполняют попытки по очереди. Найти вероятность того, что выполняют успешно упражнение один или три спортсмена.

7.4.1.22 На стеллаже библиотеки в случайном порядке расставлены 20 учебников, причём 7 из них по экономическим дисциплинам. Библиотекарь берёт наудачу 4 учебника. Найти вероятность того, что хотя бы один из взятых учебников окажется по экономическим дисциплинам.

7.4.1.23 В трёх партиях изделий, число изделий высшего качества относятся 5:8, 4:7 и 9:10. Из каждой партии товаровед берёт по одному изделию. Какова вероятность того, что среди них ровно 2 изделия высшего качества.

7.4.1.24 Для разрушения моста достаточно попадание ровно одной авиационной бомбы. Найти вероятность того, что мост будет разрушен, если на него будут сброшены 3 авиационные бомбы с вероятностями попадания 0,2; 0,3; 0,7.

7.4.1.25 Зенитная батарея атакует танк и даёт по нему два независимых выстрела. Вероятность подбить танк первым выстрелом равна 0,4, вторым – 0,3. Если танк не подбит двумя выстрелами зенитной батареи, то он ведёт огонь по ней и уничтожает её с вероятностью 0,5. Найти вероятность того, что в результате боя будет уничтожен танк или зенитная батарея.

7.4.1.26 На стеллаже библиотеки в случайном порядке расставлены 26 учебников, из которых 12 в твёрдом переплёте, а 14 книг в мягком переплёте. Библиотекарь берёт наудачу один учебник. Если этот учебник оказывается в мягком

переплётё, то библиотекарь берёт следующий учебник, отложив первый в сторону. Найти вероятность того, что учебник в твёрдом переплётё библиотекарь возьмёт с полки ровно в четвёртой попытке.

7.4.1.27 Имеется группа из трёх космических объектов, каждый из которых может быть обнаружен радиолокационной станцией, соответственно с вероятностью 0,7; 0,4; 0,5. Найти вероятность того, что не менее двух объектов будут зафиксированы радиолокационной станцией.

7.4.1.28 Два мастера могут произвести ремонт двигателя. Первый мастер ремонтирует двигатель в 80 % случаев, второй – в 70 % случаев, от общего числа. Какова вероятность того, что двигатель будет отремонтирован, по крайней мере, одним мастером?

7.4.1.29 Первый трактор за некоторое время может вспахать поле с вероятностью 0,8, а второй – с вероятностью 0,9. Найти вероятность того, что поле будет вспахано при работе, по крайней мере, одного трактора.

7.4.1.30 Предприятие «Атлант» после проверки на качество отправило на склад холодильники трёх модификаций: 8 холодильников модификации ХМ6001-007, 12 – модификации ХМ4307, 14 – модификации ХМ4007. Со склада предприятия в случайном порядке, по три холодильника за один раз, продукция направляется в свой фирменный магазин. Найти вероятность того, что холодильники модификации ХМ6001-007 будут отправлены в магазин с шестого раза.

8 НЕЗАВИСИМЫЕ И ЗАВИСИМЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

(практическое занятие № 8)

Содержание: формула полной вероятности, формула Байеса.

8.1 Теоретический материал по теме практического занятия

8.1.1 Формула полной вероятности

Предположим, что событие A может произойти с одним из несовместных событий H_i , где $i = \overline{1, n}$, объединение которых совпадает с пространством элементарных событий Ω . То есть, $\Omega = \{H_1 + H_2 + \dots + H_n\}$ и $H_i \cdot H_j = \emptyset$, если $i \neq j$. События H_i , которые удовлетворяют указанным выше условиям, называются *гипотезами*. Предположим, что заданы вероятности гипотез $P(H_i)$ и условные вероятности $P_{H_i}(A)$ наступления события A при осуществлении каждой из указанных гипотез. Вероятность события A можно вычислить по следующей теореме.

Теорема 8.1.1.1 Вероятность события A , которое может произойти одновременно с одной из гипотез H_i , где $i = \overline{1, n}$, равна сумме попарных произведений вероятностей каждой из гипотез на соответствующие им условные вероятности наступления события A .

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + \dots + P(H_n) \cdot P_{H_n}(A), \quad (8.1.1.1)$$

или используя знак суммирования, получаем

$$P(A) = \sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P_{H_i}(A). \quad (8.1.1.2)$$

Формулы (8.1.1.1) и (8.1.1.2) называются формулами полной вероятности.

8.1.2 Формула Байеса

Формула Байеса даёт возможность определить условные вероятности гипотез, после проведения эксперимента, если известны вероятности гипотез до проведения эксперимента, причём гипотезы образуют полную группу событий.

Теорема 8.1.2.1 Вероятность гипотезы $H_k (k = \overline{1, n})$, после проведения эксперимента равна произведению вероятности этой гипотезы до проведения эксперимента на условную вероятность события, которое произошло при испытании, делённому на полную вероятность данного события.

$$P_A(H_k) = \frac{P(H_k) \cdot P_{H_k}(A)}{P(A)} = \frac{P(H_k) \cdot P_{H_k}(A)}{\sum_{i=1}^n P(H_i) \cdot P_{H_i}(A)}. \quad (8.1.2.1)$$

Формула (8.1.2.1) называется формулой Байеса (или Бейеса).

8.2 Примеры решения типовых задач

8.2.1 Прибор может работать в двух режимах: нормальном и экономном. Нормальный режим наблюдается в 60 % всех случаев работы прибора, а экономный – в 40 % случаев. Вероятность выхода прибора из строя за время T в нормальном режиме равна 0,04, а в экономном режиме – 0,02. Найти вероятность выхода прибора из строя за время T .

Решение. Рассмотрим событие $A = \{\text{прибор выйдет из строя за время } T\}$. Данное событие может произойти одновременно с одной из гипотез: $H_1 = \{\text{прибор работает в нормальном режиме}\}$, $H_2 = \{\text{прибор работает в экономном режиме}\}$. Гипотезы попарно несовместны и образуют полную группу событий. Исходя из статистических данных задачи, вероятности гипотез равны: $P(H_1) = 60/100 = 0,6$, $P(H_2) = 40/100 = 0,4$. Согласно условию задачи, соответствующие условные вероятности события A , при условии, что каждая гипотеза произошла, равны: $P_{H_1}(A) = 0,04$, $P_{H_2}(A) = 0,02$. Для определения вероятности события A воспользуемся формулой полной вероятности (формула 8.1.1.1):

$$P(A) = P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) = 0,6 \cdot 0,04 + 0,4 \cdot 0,02 = 0,032.$$

8.2.2 В магазин, в продаже которого не было электрических лампочек, поставили лампочки трёх мощностей: 200 лампочек по 40W, 500 лампочек по 60W и 300 лампочек по 100W. Вероятности того, что для каждой указанной мощности, лампочка является бракованной, равна 0,1, 0,2 и 0,3, соответственно. Без проверки некоторый покупатель купил стандартную лампочку. Какова вероятность того, что покупатель приобрёл лампочку мощностью 100W?

Решение. Рассмотрим событие $A = \{\text{покупатель приобрёл стандартную лампочку}\}$. Данное событие может произойти одновременно с одной из гипотез: $H_1 = \{\text{лампочка имеет мощность } 40\text{W}\}$, $H_2 = \{\text{лампочка имеет мощность } 60\text{W}\}$, $H_3 = \{\text{лампочка имеет мощность } 100\text{W}\}$. Гипотезы попарно несовместны и образуют полную группу событий. По условию вероятности гипотез равны: $P(H_1) = 200/1000 = 0,2$, $P(H_2) = 500/1000 = 0,5$, $P(H_3) = 300/1000 = 0,3$. Условные вероятности события A , при условии, что каждая из гипотез произошла заданы: $P_{H_1}(A) = 0,1$, $P_{H_2}(A) = 0,2$, $P_{H_3}(A) = 0,3$. Для определения вероятности события A/H_3 воспользуемся формулой Байеса (формула 8.1.2.1):

$$P_A(H_3) = \frac{P(H_3) \cdot P_{H_3}(A)}{P(H_1) \cdot P_{H_1}(A) + P(H_2) \cdot P_{H_2}(A) + P(H_3) \cdot P_{H_3}(A)} =$$

$$= \frac{0,3 \cdot 0,3}{0,2 \cdot 0,1 + 0,5 \cdot 0,2 + 0,3 \cdot 0,3} = \frac{0,09}{0,21} = \frac{3}{7} \approx 0,429.$$

8.3 Задания для решения на практическом занятии

8.3.1 Два автоматических станка производят детали, которые поступают на общий конвейер. Вероятность получения стандартной детали на первом станке равна 0,88, а на втором – 0,96. Производительность первого станка в три раза меньше, чем второго. Найти вероятность того, что взятая с конвейера деталь является нестандартной.

8.3.2 Имеются две урны. В первой урне 3 синих и 5 красных шаров, во второй – 4 синих и 8 красных. Из первой и второй урн случайным образом берут по одному шару и кладут их в третью урну. Шары в третьей урне перемешивают и берут из неё наугад один шар. Найти вероятность того, что этот шар синий.

8.3.3 Комиссия проверяет работу трёх торговых сетей из трёх имеющихся в городе. Обнаружить нарушения работы в каждой из торговых сетей равны 0,1, 0,2 и 0,15, соответственно. Какова вероятность того, что комиссия не обнаружит нарушения работы в торговых сетях?

8.3.4 Студенческая группа из 15 человек сдаёт тестирование по «Высшей математике». Из них 4 человека знают указанный предмет на 9 баллов, 6 студентов – на 7 баллов, и 5 – на 5 баллов. Вероятность сдать тест с первого раза для студента знающего предмет на 9 баллов равна 0,9; для студентов, знающих предмет на 7 баллов – 0,7, для студентов, знающих предмет на 5 баллов – 0,4. Для сдачи теста вызываются 2 студента. Они проходят тест. Найти вероятность того, что оба сдававших тест смогли его сдать.

8.3.5 Один из трёх стрелков вызывается на линию огня и производит два выстрела. Вероятность промаха при одном выстреле для первого стрелка равна 0,1, для второго – 0,2, для третьего – 0,3. Мишень поражена. Найти вероятность того, что выстрелы произведены вторым стрелком.

8.3.6 Найти вероятность того, что в условии задачи 8.3.1 нестандартная деталь произведена вторым станком.

8.3.7 Число грузовых автомашин, проезжающих по автостраде, на которой стоит автозаправка, относится к числу легковых машин как 3:7. Вероятность того, что будет заправляться легковая машина, равна 0,8; для грузовой машины эта вероятность равна 0,3. На автозаправке произведена заправка автомобиля. Какова вероятность, что этот автомобиль является легковым?

8.3.8 В областную больницу города поступают в среднем 45 % больных с заболеванием *АГ*, 35 % с заболеванием *ИБС* и 20 % с заболеванием *БА*. В больницу больные с другими заболеваниями не поступают. Нормализация состояния здоровья после лечения болезни *АГ* составляет 80 %, после болезни *ИБС* – 70 %, после болезни *БА* – 75 %. У больного, поступившего в областную больницу, после лечения наступила нормализация состояния здоровья. Найти вероятность того, что этот больной страдал заболеванием *АГ*.

8.3.9 В урне находятся две неотличимые по внешнему виду и по весу игральные кости: одна правильная, с одинаковыми вероятностями выпадения всех шести цифр при случайном подбрасывании; другая неправильная, с неравномерным распределением массы по объёму. При случайном подбрасывании неправильной игровой кости двойка появляется с вероятностью $1/7$, а тройка – с вероятностью $2/9$, остальные цифры выпадают с одинаковой вероятностью. Наудачу извлечённая из урны игральная кость была подброшена. Найти вероятность того, что выпадет: а) пять очков, б) два очка; в) три очка.

8.3.10 В условии предыдущей задачи, найти вероятность того, что была подброшена: а) правильная игральная кость, б) неправильная кость.

8.3.11 При переливании крови необходимо учитывать группу крови больного и донора. Больному, имеющему четвёртую группу крови, можно переливать кровь любой группы; больному со второй или третьей группой крови можно переливать кровь либо той же группы, либо первой; больному с первой группой крови можно переливать только кровь первой группы. Среди населения 33,5 % имеют первую, 37,9 % -вторую, 20,7 % - третью и 8,1 % - четвёртую группу крови. Найти вероятность того, что случайно выбранному больному можно перелить кровь случайно выбранного донора.

8.3.12 В условии предыдущей задачи, определить вероятность того, что переливание крови можно осуществить, если имеются два донора; три донора.

8.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

8.4.1 Решить предложенную задачу своего варианта. Дать описание события, которое отвечает условию эксперимента. Выдвинуть гипотезы, которые могут произойти одновременно с указанным событием. Оценить вероятности гипотез после проведения эксперимента.

8.4.1.1 В урне лежат три шара, цвета которых неизвестны (каждый шар может быть либо синим, либо красным). В урну кладут синий шар. Из урны достают один шар. Какова вероятность того, что он синий?

8.4.1.2 Из 7 винтовок, из которых 3 винтовки обычные и 4 с оптическим прицелом, наудачу выбирается одна, и из неё производится выстрел по мишени. Найти вероятность попадания в мишень, если вероятность попадания из винтовки с оптическим прицелом равна 0,98, а из обычной винтовки – 0,75.

8.4.1.3 Изделие проверяется на стандартность одним из трёх товароведов. Вероятность того, что изделие будет признано стандартным первым товароведом, равна 0,97, вторым – 0,98, третьим – 0,96. Соответствующие вероятности, что изделие попадёт на проверку к имеющимся товароведам, равны 0,5, 0,7 и 0,9. Найти вероятность того, что изделие окажется нестандартным.

8.4.1.4 Имеется три партии деталей по 15 деталей в каждой. Число нестандартных деталей в первой, второй и третьей партиях соответственно равно 4, 5, 3. Из наудачу взятой партии наудачу извлекаются 2 детали. Найти вероятность того, что эти две детали являются стандартными.

8.4.1.5 Имеется три спортивные группы. В первой группе из 10 спортсменов, четыре имеют звание мастера спорта, во второй из 13 – 5 мастеров спорта, в третьей из 12 – 6 мастеров спорта. Спорткомитет наудачу отправляет одного спортсмена на соревнование из наудачу выбранной спортивной группы. Какова вероятность того, что он не является мастером спорта?

8.4.1.6 Счётчик регистрирует частицы трёх типов H , G и F . Частица H появляется в три раза чаще, чем частица G , которая появляется в два раза чаще, чем частица F . Частицы каждого из этих типов счётчик улавливает с вероятностями 0,7, 0,5 и 0,6, соответственно. Найти вероятность того, что счётчик уловит частицу.

8.4.1.7 Имеются две партии одинаковых изделий по 10 и 15 штук, причём в первой партии три, а во второй – два нестандартных изделия. Наугад взятое изделие из второй партии переложено в первую, после чего наугад выбирается одно изделие из первой партии. Найти вероятность того, что выбранное изделие является стандартным.

8.4.1.8 На наблюдательной станции установлены три радиолокатора различных конструкций. Вероятности обнаружения цели каждым из локаторов, соответственно, равны 0,95, 0,90 и 0,85. Наблюдатель наугад включает один из радиолокаторов. Какова вероятность обнаружения цели?

8.4.1.9 Один из трёх стрелков вызывается на линию огня и производит один выстрел по мишени. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле для первого стрелка равна 0,4, для второго – 0,6, для третьего – 0,8. Найти вероятность поражения цели.

8.4.1.10 На распределительной базе находятся электрические лампочки, изготовленные на трёх заводах. Среди них 50 % изготовлено на первом заводе и 30 % – на втором. Известно, что из каждых 100 лампочек, изготовленных на первом заводе, 95 соответствуют стандарту, на втором – 90, а на третьем – 85.

Найти вероятность того, что взятая наугад лампочка с базы будет соответствовать стандарту.

8.4.1.11 Известно, что 95 % выпускаемых заводом изделий отвечает стандарту. Упрощённая схема контроля признаёт пригодной стандартную продукцию с вероятностью 0,96 и нестандартную с вероятностью 0,06. Определить вероятность того, что изделие пройдёт упрощённый контроль.

8.4.1.12 Некоторая фирма занимается установкой систем спутникового телевидения «НТВ Плюс». В наличии имеются 10 систем с тюнером X-540 и 12 систем с тюнером X-740 PVR. В городе отличный приём в 94 % случаев обеспечивают системы спутникового телевидения «НТВ Плюс» с тюнером X-540 и в 96 % случаев системы с тюнером X-740 PVR. Фирма произвела три установки систем спутникового телевидения со случайным выбором тюнера. Какова вероятность того, что все системы будут обеспечивать отличный приём?

8.4.1.13 На оптовой базе имеются телевизоры «Горизонт» трёх моделей: 10 телевизоров модели 32CD840 Classic, 12 – модели 32LCD826 Nero E, 16 – модели 26LCD840 Inspirit. Вероятность того, что корпус телевизора первой, второй, третьей марки имеет серебристый цвет, соответственно равна 0,5; 0,4; 0,3. Какова вероятность того, что взятые случайным образом два телевизора не будут иметь серебристый цвет корпуса?

8.4.1.14 В аудитории установлены ноутбуки, которые произведены тремя фирмами «HP», «Acer» и «ASUS». Их общее количество в аудитории относится как 2:3:4. Вероятность того, что ноутбук «HP» находится в системе «ожидания», равна 0,3, ноутбук «Acer» – 0,4, ноутбук «ASUS» – 0,2. Человек зайдя в аудиторию, случайным образом выбирает один ноутбук. Найти вероятность того, что человек выберет ноутбук, который находится в системе «ожидания».

8.4.1.15 На площадке находятся восемь автомобилей «Ford», десять автомобилей «BMW» и четыре автомобиля «Opel». Вероятность того, что заведётся с первого раза автомобиль «Ford», «BMW», «Opel», соответственно равна 0,95; 0,94; 0,91. Какова вероятность того, что случайно выбранный автомобиль заведётся с первого раза?

8.4.1.16 Два автомата производят однотипные детали, которые поступают на общий конвейер. Вероятность изготовления стандартного изделия I автоматом равна 0,90, II автоматом – 0,95. Производительность второго автомата в четыре раза больше, чем первого. С конвейера наугад берут два изделия. Какова вероятность того, что эти изделия стандартны?

8.4.1.17 В торговом зале выставлены на продажу телевизоры «Витязь» двух модификаций: 14 телевизоров марки 21CTV 790-7 Delta и 11 телевизоров марки 37CTV 730-3 Mica. Вероятность того, что телевизор первой марки произведён бригадой № 1 телевизионного завода, равна 0,3, второй марки – 0,6. Некоторое предприятие сделало заказ на два телевизора произвольной марки. Какова вероятность того, что предприятие приобретёт телевизоры, которые произведены бригадой № 1?

8.4.1.18 В продаже имеются 10 телефонных аппаратов марки «Горизонт ТА 852» и 15 аппаратов марки «Горизонт ТА 2185». Аппараты указанных марок имеют зелёный цвет корпуса с вероятностями 0,3 и 0,2, соответственно. Найти вероятность того, что среди случайно выбранных трёх аппаратов все три не имеют зелёный цвет корпуса.

8.4.1.19 С применением интегральных схем монтируются 70 % приборов, а остальные – с применением микромодулей. Надёжность работы с применением интегральных схем составляет 0,9, а с применением микромодулей – 0,95. Найти вероятность надёжной работы наугад взятого прибора.

8.4.1.20 В компьютерном классе кафедры установлены персональные компьютеры трёх модификаций A , B и C , численное число которых находится в соотношении 2:5:9. Вероятность того, что за время работы на компьютере типа A не произойдёт сбоя, равна 0,95; на компьютере типа B - 0,90; на компьютере типа C - 0,85. Найти вероятность того, что на случайно выбранном компьютере произойдёт сбой во время работы.

8.4.1.21 Некоторый человек наудачу покупает акции одного из трёх предприятий. Получить дивиденды в течение года с момента покупки акций для каждого предприятия равны 0,8, 0,6 и 0,7, соответственно. Какова вероятность того, что в течение года человек не получил дивиденды?

8.4.1.22 Для сигнализации о том, что режим работы отклоняется от нормального состояния, используются сигнализаторы только трёх типов. Вероятность того, что сигнализатор относится к первому типу, равна 0,5, а ко второму – 0,3. При нарушении работы вероятности срабатывания сигнализаторов, равны $5/6$, $6/7$ и $7/8$, соответственно. Найти вероятность того, что наугад выбранный сигнализатор сработает при отклонении от нормального состояния режима работы.

8.4.1.23 В студенческой группе из 14 студентов имеются 3 человека, которые учатся на «отлично», 6 студентов учатся на «хорошо», а остальные учатся «средсвенно». Вероятность решить случайно выбранную задачу по «Теории вероятностей» для каждого студента, указанных групп, равны 0,9, 0,6 и 0,4, соответственно. Задача по «Теории вероятностей» предложена двум студентам. Какова вероятность того, что обе задачи будут решены студентами?

8.4.1.24 В пакете для шаров лежат 18 теннисных шаров, в том числе 10 новых и 8 иггранных. Для игры наудачу выбираются два шара и после игры возвращаются обратно в ящик. После этого, для второй игры наудачу из того же пакета выбираются опять два шара. Какова вероятность того, что вторая игра будет проводиться шарами, которые были использованы в предыдущих играх?

8.4.1.25 В продажу поступило 8 радиоприёмников «Philips AE2160» и 7 радиоприёмников «Philips AJ3138». Вероятность того, что радиоприёмник «Philips AE2160» сможет принимать передачи на коротких волнах, равна 0,9, а для радиоприёмника «Philips AJ3138» эта вероятность равна 0,8. Товаровед наугад выбирает два радиоприёмника. Найти вероятность того, что эти радиоприёмники принимают передачи на коротких волнах.

8.4.1.26 После обработки и анализа сейсмографических записей, для поиска месторождения нефти, вся территория поделена на три района. Для поиска месторождения нефти в наугад выбранный район организовано три геологоразведочных экспедиции. Возможность выбор первого района в два раза меньше, чем второго, и в три раза больше, чем третьего. Каждая экспедиция независимо от других обнаруживает нефть с вероятностями 0,1, 0,15 и 0,2, соответственно. Какова вероятность того, что нефть в выбранном районе будет обнаружена?

8.4.1.27 Заготовка может поступить для обработки на один из трёх станков с вероятностями 0,2, 0,3 и 0,5, соответственно. При обработке на первом станке вероятность брака составляет 4 %, на втором – 3 %, на третьем – 2 %. Найти вероятность того, что взятое после обработки изделие окажется стандартным.

8.4.1.28 В мастерской по ремонту телевизоров имеются 8 кинескопов класса A , 7 кинескопов класса B и 5 кинескопов класса C . Вероятности выдержать гарантийный срок для указанных кинескопов равны соответственно 0,9, 0,8 и 0,7. Найти вероятность того, что взятый наугад кинескоп выдержит гарантийный срок.

8.4.1.29 В ящике находятся три неотличимые по внешнему виду и по весу игральные кости: две правильные, с одинаковыми вероятностями выпадения всех шести цифр при случайном подбрасывании; и одна неправильная, с неравномерным распределением массы по объёму. При случайном подбрасывании неправильной игровой кости единица появляется с вероятностью $1/2$, а остальные цифры выпадают с одинаковой вероятностью. Наудачу извлечённая из ящика игральная кость была подброшена. Найти вероятность того, что выпадет шесть очков.

8.4.1.30 В стройотряде 20 % первокурсников, 50 % второкурсников и 30 % третьекурсников. Среди первокурсников девушки составляют 3 %, среди второкурсников – 10 %, а среди студентов третьего курса – 7 %. Какова вероятность того, что все девушки поочерёдно дежурят на кухне?

9 СХЕМА БЕРНУЛЛИ

(практическое занятие № 9)

Содержание: последовательность независимых испытаний, формула Бернулли, нахождение вероятностей событий в условиях схемы Бернулли, наивероятнейшее число наступления события в условиях схемы Бернулли.

9.1 Теоретический материал по теме практического занятия

9.1.1 Формула Бернулли

На практике часто встречаются задачи, которые связаны с многократно повторяющимися испытаниями, в результате которых может произойти или не произойти некоторое событие A .

Событие A называется независимым в данной системе испытаний, если вероятность наступления этого события в каждом отдельно взятом испытании не зависит от исходов наступления этого события в других испытаниях.

Если в серии повторных испытаний событие A имеет одну и ту же вероятность $P(A) = p$, которая не зависит от номера испытания, то данная серия называется схемой Бернулли. Таким образом, в схеме Бернулли для каждого испытания имеется только два исхода:

- а) событие A - «успех»;
- б) событие $\bar{A}$ - «неудача».

События наступают с постоянными вероятностями $P(A) = p$, $P(\bar{A}) = q$, а так как, события A и $\bar{A}$ образуют полную группу событий, то $p + q = 1$.

Рассмотрим задачу: в условиях схемы Бернулли определить вероятность $P_n(m)$, где $0 \leq m \leq n$, того, что при n испытаниях событие A , имеющее одну и ту же вероятность $P(A) = p$ для каждого отдельного испытания, появится ровно m раз.

Благоприятные серии испытаний, для события A , можно записать в виде:

$$A_{\alpha_1} \cdot A_{\alpha_2} \cdot A_{\alpha_3} \cdot \dots \cdot A_{\alpha_n} \quad (i = \overline{1, n}),$$

где A_{α_i} совпадает с событием A или событием $\bar{A}$. Причём событие A встречается ровно m раз, а событие $\bar{A}$ ровно $n - m$ раз. Так как испытания независимы, то вероятность реализации одной такой благоприятной серии равна $p^m q^{n-m}$, где $p = P(A)$, $q = P(\bar{A}) = 1 - p$. Все благоприятные серии получаются в результате выбора различных m номеров из общего количества n номеров, а, следовательно, число серий таких испытаний равно C_n^m .

Тогда, по теореме сложения вероятностей, для случая несовместных событий, получаем, что вероятность наступления события A ровно m раз в серии из n независимых испытаний определяется по формуле Бернулли:

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}. \quad (9.1.1.1)$$

Эта формула называется биномиальной, так как её правая часть представляет собой $(m+1)$ -й член бинома Ньютона:

$$(q + p)^n = C_n^0 \cdot q^n + C_n^1 \cdot q^{n-1} \cdot p + C_n^2 \cdot q^{n-2} \cdot p^2 + \dots + C_n^n \cdot p^n.$$

Если числу m придавать значения $0, 1, 2, 3, \dots, n$ получим соответствующую последовательность вероятностей: $P_n(0), P_n(1), P_n(2), \dots, P_n(n)$. Совокупность данной последовательности вероятностей называют биномиальным законом распределения вероятностей. Так как множество $\{0, 1, 2, 3, \dots, n\}$ числа появления события при n независимых испытаниях образуют полную группу событий, то $P_n(0) + P_n(1) + P_n(2) + \dots + P_n(n) = 1$.

Биномиальный закон распределения вероятностей даёт возможность определить вероятность того, что событие A , в n независимых испытаниях появится не менее m_1 раз, но не более m_2 раза:

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) = P_n(m_1) + P_n(m_1 + 1) + \dots + P_n(m_2 - 1) + P_n(m_2). \quad (9.1.1.2)$$

Если событие A в каждом опыте может наступить с вероятностью p , то количество n опытов, которые необходимо произвести для того, чтобы с вероятностью P можно было утверждать, что данное событие A произойдет, по крайней мере, один раз, находится по формуле

$$n \geq \frac{\ln(1-P)}{\ln(1-p)} \quad (9.1.1.3)$$

9.1.2 Наивероятнейшее число наступления события

Определение 9.1.2.1 Число m_0 называется *наиболее вероятным* или *наивероятнейшим числом* появления события A в серии n испытаний, если вероятность того, что событие наступит в этих испытаниях m_0 раз, превышает (или, по крайней мере, не меньше) вероятности остальных возможных исходов испытаний.

Наивероятнейшее число появления события определяем из неравенства:

$$n \cdot p - q \leq m_0 \leq n \cdot p + p. \quad (9.1.2.1)$$

Так как $p + q = 1$, то в решении последнего неравенства найдется, по крайней мере, одно целое число m_0 .

9.1.3 Полиномиальное распределение

Предположим, что в результате каждого из n независимых испытаний может произойти одно из k попарно несовместных событий $A_1, A_2, \dots, A_k$ с вероятностями $p_1, p_2, \dots, p_k$ соответственно ($p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$). Обозначим через m_i число тех испытаний, в которых произошло событие A_i , где $i = \overline{1, k}$ и $m_1 + m_2 + \dots + m_k = n$. Тогда вероятность того, что событие A_1 наступит ровно m_1 раз, событие A_2 наступит ровно m_2 раза, ..., событие A_k наступит m_k раз, в серии n независимых испытаниях определяется равенством

$$P_n(m_1, m_2, \dots, m_k) = \frac{n!}{m_1! \cdot m_2! \cdot \dots \cdot m_k!} p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_k^{m_k}. \quad (9.1.3.1)$$

При значении $k = 2$ полиномиальное распределение становится биномиальным распределением.

9.2 Примеры решения типовых задач

9.2.1 Для стрелка, выполняющего упражнение в тире, вероятность попадания в «яблочко» при одном выстреле не зависит от результатов предшествующих выстрелов и равна 0,2. Стрелок сделал шесть выстрелов. Найти вероятности следующих событий: $A = \{\text{ровно одно попадание}\}$, $B = \{\text{ровно два попадания}\}$, $C = \{\text{не менее трёх, но не более пяти попаданий}\}$, $D = \{\text{не более пяти попаданий}\}$.

Решение. В каждом отдельно взятом эксперименте вероятность попадания стрелком в «яблочко» при одном выстреле одна и та же, и равна $p = 0,2$. Соответственно, вероятность промаха стрелком при одном выстреле равна $q = 1 - p = 1 - 0,2 = 0,8$. При этом, попадание стрелком в «яблочко», при одном отдельно взятом выстреле, не зависит от попаданий в цель при других выстрелах. Поэтому данный опыт подчиняется схеме Бернулли. При нахождении вероятностей заданных событий воспользуемся формулой Бернулли (9.1.1.1). Всего произведено $n = 6$ выстрелов.

$$P(A) = P_6(1) = C_6^1 \cdot 0,2^1 \cdot 0,8^{6-1} = \frac{6!}{1! \cdot 5!} \cdot 0,2 \cdot 0,8^5 = 6 \cdot 0,2 \cdot 0,32768 = 0,393216.$$

$$P(B) = P_6(2) = C_6^2 \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^{6-2} = \frac{6!}{2! \cdot 4!} \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^4 = 15 \cdot 0,04 \cdot 0,4096 = 0,24576.$$

$$\begin{aligned} P(C) = P_6(3 \leq m \leq 5) &= P_6(3) + P_6(4) + P_6(5) = C_6^3 \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^{6-3} + C_6^4 \cdot 0,2^4 \cdot 0,8^{6-4} + \\ &+ C_6^5 \cdot 0,2^5 \cdot 0,8^{6-5} = \frac{6!}{3! \cdot 3!} \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^3 + \frac{6!}{4! \cdot 2!} \cdot 0,2^4 \cdot 0,8^2 + \frac{6!}{5! \cdot 1!} \cdot 0,2^5 \cdot 0,8^1 = \\ &= 20 \cdot 0,008 \cdot 0,512 + 15 \cdot 0,0016 \cdot 0,64 + 6 \cdot 0,00032 \cdot 0,8 = 0,098816. \end{aligned}$$

$$P(D) = P_6(0 \leq m \leq 5) = 1 - P_6(6) = 1 - C_6^6 \cdot 0,2^6 \cdot 0,8^{6-6} = 1 - 1 \cdot 0,000064 \cdot 1 = 0,999936.$$

9.2.2 Вероятность изготовления стандартного изделия равна 0,9. Какова вероятность того, что среди восьми изделий не более одного нестандартного?

Решение: Пусть событие $A = \{\text{среди восьми изделий не более одного нестандартного}\}$, событие $B = \{\text{среди восьми изделий нет ни одного нестандартного}\}$, а событие C состоит в том, что среди восьми изделий только одно нестандартное. Тогда событие A можно представить в виде суммы двух несовместных событий: $A = B + C$. Воспользуемся теоремой суммы для несовместных событий и формулой Бернулли ($q = 0,9$, $p = 1 - q = 0,1$, $n = 8$).

$$\begin{aligned} P(A) = P(B + C) &= P(B) + P(C) = C_8^0 \cdot 0,1^0 \cdot 0,9^8 + C_8^1 \cdot 0,1^1 \cdot 0,9^7 = \\ &= 1 \cdot 1 \cdot 0,9^8 + 8 \cdot 0,1 \cdot 0,9^7 = 0,43046721 + 0,38263752 = 0,81310473. \end{aligned}$$

9.2.3 В коридоре учебного здания установлено 6 сигнализаторов пожарной безопасности. Каждый сигнализатор срабатывает с вероятностью 0,95 на дым. Какова вероятность того, что во время задымления работает, по крайней мере, один из сигнализаторов?

Решение. Пусть событие $A = \{\text{во время задымления работает, по крайней мере, один из сигнализаторов}\}$. В данной задаче $n = 6$, $1 \leq m \leq 6$, $p = 0,95$, $q = 1 - p = 0,05$. Переходя к противоположному событию $\bar{A} = \{\text{во время задымления не работает ни один из сигнализаторов}\}$, получаем

$$P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - P_6(0) = 1 - C_6^0 \cdot 0,95^0 \cdot 0,05^6 = 1 - 0,05^6 = 0,999999984375.$$

9.2.4 За один час на станке изготавливается 61 деталь. За сколько часов с вероятностью 0,975 изготавливается, по крайней мере, одна бракованная де-

таль, если каждая деталь, изготовленная на станке, может не удовлетворять стандарту с вероятностью 0,02?

Решение. Применяя формулу (9.1.1.3), находим вначале количество изготавливаемых деталей, чтобы с вероятностью $P = 0,975$ можно было утверждать наличие, по крайней мере, одной бракованной детали, если вероятность брака одной детали равна $p = 0,02$:

$$n \geq \frac{\ln(1 - 0,975)}{\ln(1 - 0,02)} = \frac{\ln 0,025}{\ln 0,98} \approx 183.$$

Следовательно, за время $t = 183/61 = 3$ часа на станке с вероятностью 0,975 изготавливают, по крайней мере, одну бракованную деталь.

9.2.5 На каждый лотерейный билет с вероятностью 0,1 может выпасть крупный выигрыш, с вероятностью 0,2 – мелкий выигрыш и с вероятностью 0,7 билет может оказаться без выигрыша. Куплено 15 билетов. Найти вероятность получения трёх крупных и двух мелких выигрышей.

Решение. Рассмотрим событие $A = \{\text{получение трёх крупных и двух мелких выигрышей}\}$. Так как куплено всего 15 билетов, то десять билетов не подразумевают выигрыша. Условие задачи соответствует полиномиальному распределению вероятностей: $p_1 = 0,1$, $p_2 = 0,2$, $p_3 = 0,7$, $p_1 + p_2 + p_3 = 1$, $n = 15$, $m_1 = 3$, $m_2 = 2$, $m_3 = n - m_1 - m_2 = 15 - 3 - 2 = 10$. Найдём вероятность события A :

$$P(A) = P_{15}(3, 2, 10) = \frac{15!}{3! \cdot 2! \cdot 10!} \cdot 0,1^3 \cdot 0,2^2 \cdot 0,7^{10} = 0,033930926.$$

9.2.6 85 % всей произведённой продукции предприятием оказывается продукцией первого сорта. Найти наивероятнейшее число изделий первого сорта в партии из 893 случайно выбранных изделий.

Решение. Для определения невероятнейшего числа изделий первого сорта из 893 случайно выбранных изделий воспользуемся формулой (9.1.2.1), при условии $p = 0,85$, $q = 1 - p = 1 - 0,85 = 0,15$.

$$893 \cdot 0,85 - 0,15 \leq m_0 \leq 893 \cdot 0,85 + 0,85 \text{ или } 758,9 \leq m_0 \leq 759,75.$$

Так как, число изделий может быть только целым числом, то наивероятнейшее число m_0 изделий первого сорта равно 759.

9.2.7 Сколько раз надо подбросить игральную кость, чтобы наивероятнейшее число выпадений шестёрки было равно 50?

Решение. Вероятность выпадения шестёрки при бросании игральной кости равна $p = 1/6$, а её не выпадения - $q = 5/6$, при однократном бросании игральной кости. Наивероятнейшее число выпадения 6, по условию задачи, равно $m_0 = 50$. Для определения числа испытаний воспользуемся формулой (9.1.2.1):

$$n \cdot \frac{1}{6} - \frac{5}{6} \leq 50 \leq n \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \text{ или } n - 5 \leq 300 \leq n + 1.$$

От двойного неравенства переходим к системе неравенств:

$$\begin{cases} n - 5 \leq 300, \\ n + 1 \geq 300, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} n \leq 305, \\ n \geq 299. \end{cases}$$

Число бросков игральной кости может быть только целым числом. Поэтому, для того чтобы, наивероятнейшее число выпадения шестёрки равнялось 50, игральную кость необходимо подбросить от 299 до 305 раз.

9.3 Задания для решения на практическом занятии

9.3.1 Монету подбрасывают шесть раз. Найти вероятности того, что герб выпадет: а) ровно один раз; б) ровно пять раз; в) не менее двух, но не более трёх раз; г) не более пяти раз.

9.3.2 Игральную кость бросают пять раз. Найти вероятности того, что число три выпадет: а) ровно пять раз; б) ровно два раза; в) не менее двух раз; г) менее двух раз. Вычислить вероятность того, что число 3 не выпадет ни одного раза.

9.3.3 Техническая система состоит из 6 узлов. Вероятность нарушения работы в течение времени T для каждого узла равна 0,2. Система выходит из строя, если нарушения режима работы происходит не менее чем в 4-х узлах. Найти вероятность выхода системы из строя за время T , если нарушение режима работы для каждого узла не зависит от состояния работы в других узлах.

9.3.4 По каналу связи передаются 8 сообщений. Каждое из сообщений независимо друг от друга искажаются помехами с вероятностью 0,15. Найти вероятности следующих событий: $A = \{\text{из восьми сообщений ровно три будут искажены помехами}\}$, $B = \{\text{не менее трёх из восьми сообщений будут переданы неискажёнными}\}$, $C = \{\text{не более половины всех передаваемых сообщений будут искажены}\}$, $D = \{\text{все сообщения будут приняты без искажений}\}$; $E = \{\text{не менее одного сообщения будет искажено}\}$.

9.3.5 При въезде в новую квартиру в осветительную сеть было включено десять новых электролампочек. Каждая электролампочка в течение года перегорает с вероятностью 0,6. Найти вероятность того, что в течение года не менее половины первоначально включённых лампочек придётся заменить новыми.

9.3.6 Человек, принадлежащий к определённой группе населения, с вероятностью 0,3 оказывается брюнетом, с вероятностью 0,4 – блондином, с вероятностью 0,2 – шатеном и с вероятностью 0,1 – рыжим. Выбирается наугад группа из шести человек. Найти вероятность того, что в составе группы будет: а) хотя бы один рыжий; б) не меньше пяти блондинов; в) равное число блондинов и брюнетов.

9.3.7 Вероятность попадания в «яблочко» при одном выстреле равна 0,4. Сколько необходимо произвести независимых выстрелов, чтобы вероятность, по крайней мере, одного попадания в «яблочко» была больше 0,95?

9.3.8 В каждой шестой из десяти анкет клиента не проставлен месяц её заполнения. В наличии имеется 285 анкет клиента предназначенных для запол-

нения. Среди этих анкет найти наивероятнейшее число анкет, в которых представлен месяц заполнения.

9.3.9 Вероятность того, что данный гандболист забросит мяч в ворота, равна 0,4. Гандболист сделал восемь бросков по воротам. Найти наивероятнейшее число попаданий и соответствующую вероятность.

9.3.10 Вероятность изготовления стандартного изделия равна 0,95. Сколько деталей должно быть в партии, чтобы наивероятнейшее число нестандартных деталей в ней было равно 60.

9.3.11 Производится стрельба из орудия по удаляющейся цели. При первом выстреле вероятность попадания равна 0,9, а при каждом следующем выстреле вероятность попадания уменьшается в три раза. Произведено три выстрела. Найти вероятности следующих событий: $A = \{\text{хотя бы одно попадание}\}$, $B = \{\text{ровно одно попадание}\}$.

9.3.12 По вертолёту производятся четыре независимых выстрела. Вероятность попадания в вертолёт при одном выстреле равна 0,2. Для выведения вертолёта из строя достаточно трёх попаданий. При одном попадании вероятность вывода вертолёта из строя равна 0,7, а при двух – 0,9. Найти вероятность того, что вертолёт будет выведен из строя.

9.3.13 На заводе производятся изделия, каждое из которых с вероятностью 0,02 являются нестандартными. Какой должен быть объём случайной выборки с возвращением, чтобы вероятность встретить в ней хотя бы одно нестандартное изделие была не менее 0,98?

9.3.14 На отрезок AB длиной 10 см наудачу брошены шесть точек. Найти вероятность того, что четыре точки будут находиться от точки A на расстоянии, меньшем 2 см, а две – на расстоянии, большем 2 см. В условии задачи предполагается, что вероятность попадания точки на отрезок пропорциональна длине отрезка и не зависит от его расположения.

9.3.15 На предприятии по выпуску инфокиосков производятся их испытание. При каждом испытании инфокиоск выходит из строя с вероятностью 0,12. После первого испытания инфокиоск ремонтируется, после второго – признаётся негодным. Найти вероятность того, что инфокиоск окончательно выйдет из строя точно при пятом испытании.

9.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

9.4.1 Решить предложенную задачу своего варианта.

9.4.1.1 Вероятность того, что банкнота имеет повреждение, равна 0,16. Для проверки наугад выбирается пятнадцать банкнот. Найти наивероятнейшее число банкнот с повреждением и соответствующую вероятность. Определить вероятность того, что среди выбранных пятнадцати банкнот будет находиться не менее шести, но не более десяти банкнот с повреждением.

9.4.1.2 Вероятность того, что в течение месяца на обезличенный металлический счёт клиент банка положит ровно десять грамм золота, равна 0,14. В течение месяца четырнадцать клиентов положили золото на свой счёт. Найти наиверо-

ятнейшее число клиентов, которые положили на свой счёт ровно десять граммов золота и соответствующую вероятность. Определить вероятность того, что не менее тринадцати клиентов положили на свой счёт десять граммов золота.

9.4.1.3 Вероятность того, что человек снимет в банкомате всю сумму пятидесятитысячными купюрами, равна 0,28. В банкомате сняли деньги тринадцать человек. Найти наивероятнейшее число человек, которым банкомат выдал всю сумму пятидесятитысячными купюрами и соответствующую вероятность. Определить вероятность того, что среди этих тринадцати человек, которые воспользовались банкоматом, будет не более двух человек, которые получили всю сумму пятидесятитысячными купюрами?

9.4.1.4 Клиенту банка для заполнения предлагается карточка обратной связи с вероятностью 0,6. В банк обратилось двенадцать клиентов. Найти наивероятнейшее число клиентов, которым была предложена для заполнения карточка обратной связи и соответствующую вероятность. Определить, что среди этих пятнадцати клиентов будут не менее двух клиентов, которым предложили заполнить карточку обратной связи.

9.4.1.5 Вероятность того, что клиент сделает в банке валютный вклад, равна 0,54. Вклады в банке осуществило одиннадцать клиентов. Найти наивероятнейшее число клиентов, которые сделали вклад в валюте, и соответствующую вероятность. Определить вероятность того, что среди одиннадцати клиентов, которые осуществили вклады в банке, будет не более девяти клиентов сделавших вклад в валюте.

9.4.1.6 Всхожесть семян некоторого растения составляет 0,98. Посеяно десять семян. Найти наивероятнейшее число семян, из случайно выбранных десяти семян данного растения, которые не взойдут, и соответствующую вероятность. Определить вероятность того, что из десяти посеянных семян не менее четырёх, но не более шести семян не взойдут.

9.4.1.7 Вероятность того, что человек приобретёт облигацию шестипроцентного займа, равна 0,18. Акции приобрели девять человек. Найти наивероятнейшее число человек, которые приобрели акции шестипроцентного займа, и соответствующую вероятность. Определить вероятность того, что акции шестипроцентного займа приобрели не менее семи человек.

9.4.1.8 Вероятность успешной сдачи студентом каждого из пяти экзаменов сессии равна 0,6. Найти наивероятнейшее число экзаменов, которые сдал студент во время сессии, и соответствующую вероятность. Определить вероятность того, что студент сдаст во время сессии не более трёх экзаменов.

9.4.1.9 Радиоприёмник не принимает радиоволны с диапазоном 5,9 – 26,1 МГц с вероятностью 0,14. Наудачу выбирают пятнадцать радиоприёмников. Найти наивероятнейшее число радиоприёмников, принимающих радиоволны с диапазоном 5,9 – 26,1 МГц, и соответствующую вероятность. Определить, что среди выбранных радиоприёмников будет не менее трёх, которые принимают этот диапазон.

9.4.1.10 Вероятность того, что изделие не пройдёт контроль, равна 0,28. Для контроля выбрано четырнадцать изделий. Найти наивероятнейшее число изделий, которые не пройдут контроль, и соответствующую вероятность. Определить вероятность того, что среди этих четырнадцати изделий будет не более двенадцати изделий, которые не прошли контроль.

9.4.1.11 Вероятность банкротства каждой из тринадцати торговых фирм в течение года, равна 0,17. Найти наивероятнейшее число торговых фирм, которые могут обанкротиться в течение года, и соответствующую вероятность. Определить вероятность того, что в течение года обанкротятся не менее трёх, но не более пяти торговых фирм.

9.4.1.12 Вероятность попадания футболистом мячом в ворота равна 0,6. Футболистом выполнено восемнадцать ударов в направлении футбольных ворот. Найти наивероятнейшее число попаданий в ворота и соответствующую вероятность попаданий. Определить вероятность того, что футболист поразит ворота не менее семнадцати раз.

9.4.1.13 На выставке трактор «Беларус-80.1» не может быть представлен с вероятностью 0,4. На выставку было представлено одиннадцать тракторов. Найти наивероятнейшее число тракторов «Беларус-80.1», которые представлены на выставке, и соответствующую вероятность. Определить вероятность того, что среди представленных на выставке тракторов будет не более двух тракторов «Беларус-80.1».

9.4.1.14 Вероятность получения заявки оптовой базой на данный день для каждого из десяти магазинов, равна 0,7. Найти наивероятнейшее число магазинов, которые сделали заявку на оптовую базу, и соответствующую вероятность. Определить, что не менее четырёх магазинов сделают заявки на оптовую базу.

9.4.1.15 Тридцать процентов студентов после окончания ВУЗа не работают по специальности. Наугад выбрано девять выпускников ВУЗа. Найти наивероятнейшее число выпускников работающих по специальности и соответствующую вероятность. Определить вероятность того, что среди этих выпускников не более семи будут работать по специальности.

9.4.1.16 Вероятность того, что ноутбук фирмы «Samsung» в течение рабочего дня не будет подключён к сети, равна 0,13. В организации установлено двенадцать ноутбуков. Найти наивероятнейшее число ноутбуков, которые подключены к сети в течение рабочего дня, и соответствующую вероятность. Определить вероятность того, что в сети будет работать не менее двух, но не более четырёх ноутбуков фирмы «Samsung».

9.4.1.17 Вероятность того, что телефон марки «LG» будет приобретен покупателем, равна 0,14. За некоторый фиксированный период времени приобретено пятнадцать телефонов. Найти наивероятнейшее число телефонов, которые приобретены за этот фиксированный период времени, и соответствующую вероятность. Определить вероятность того, что за этот период времени было приобретено не менее тринадцати телефонов марки «LG».

9.4.1.18 Вероятность того, что у частного предпринимателя находятся в наличии джемпера фирмы «DEVIR», равна 0,46. Найти наивероятнейшее число джемперов фирмы «DEVIR», из двенадцати приобретённых у частного предпринимателя джемперов, и соответствующую вероятность. Определить вероятность того, что среди приобретённых двенадцати джемперов не более трёх джемперов произведены фирмой «DEVIR».

9.4.1.19 Вероятность перевыполнения плана для одного рабочего бригады, равна 0,67. В бригаде работают двенадцать рабочих. Найти наивероятнейшее число рабочих этой бригады, которые перевыполнили план, и соответствующую вероятность. Определить вероятность того, что в бригаде будет не менее одиннадцати рабочих, которые перевыполняют план.

9.4.1.20 Вероятность того, что брюки имеют сорок шестой размер, равна 0,54. Найти наивероятнейшее число брюк сорок шестого размера среди предложенных на продажу одиннадцать брюк, и соответствующую вероятность. Найти вероятность того, что среди этих одиннадцати брюк окажется не более девяти брюк, которые имеют сорок шестой размер.

9.4.1.21 Каждая из семнадцати книг на книжной полке может иметь брак в переплёте с вероятностью 0,11. Найти наивероятнейшее число книг, которые не имеют брака в переплёте, и соответствующую вероятность. Определить вероятность того, что на полке находятся не менее десяти, но не более двенадцати книг, которые не имеют брака в переплёте.

9.4.1.22 Вероятность того, что автомобиль «Ford» будет поставлен на автостоянку, равна 0,3. На автостоянку поставлено пятнадцать автомобилей. Найти наивероятнейшее число автомобилей «Ford», которые поставлены на автостоянку, и соответствующую вероятность. Определить вероятность того, что на автостоянке будет оставлено не менее четырнадцати автомобилей «Ford».

9.4.1.23 Каждый третий посетитель банка обращается на ресепшен для консультации сотрудника банка. За некоторое фиксированное время банк посетило пятнадцать клиентов. Найти наивероятнейшее число клиентов, которые за это фиксированное время обратились на ресепшен для консультации, и соответствующую вероятность. Определить вероятность того, что среди клиентов будет не более трёх, которые обратились на ресепшен для консультации сотрудника банка за выбранное время.

9.4.1.24 Вероятность того, что в телевизоре не установлен импортный кинескоп, равна 0,18. Наудачу выбирают двенадцать телевизоров. Найти наивероятнейшее число телевизоров с импортным кинескопом и соответствующую вероятность. Определить вероятность того, что среди выбранных телевизоров не менее четырёх имеют импортный кинескоп.

9.4.1.25 Вероятность рождения мальчика равна 0,515. Подростковая группа случайным образом составлена из двенадцати детей. Найти наивероятнейшее число мальчиков в этой группе, и соответствующую вероятность. Определить вероятность того, что в группе будет не более десяти девочек.

9.4.1.26 Каждый из четырнадцати автомобилей, которые находятся в гаражном боксе, не имеет марку «BMW» с вероятностью 0,74. Найти наивероятнейшее число автомобилей «BMW», которые находятся в боксе, и соответствующую вероятность. Определить вероятность того, что в боксе будет находиться не менее четырёх, но не более шести автомобилей марки «BMW».

9.4.1.27 Вероятность того, что холодильник не имеет маркировку «Атлант ХМ 4307», равна 0,43. С оптовой базы в торговые точки отправлено шестнадцать холодильников. Найти наивероятнейшее число холодильников марки «Атлант ХМ 4307», которые отправлены с оптовой базы, и соответствующую вероятность. Определить вероятность того, что оптовая база отправила в торговые точки не менее четырнадцати холодильников «Атлант ХМ 4307».

9.4.1.28 В течение недели фирма установила 12 спутниковых антенн «НТВ ПЛЮС». Вероятность того, что заказчик не сделает заказ на антенну с тюнером «Openbox X-540», равна 0,37. Найти наивероятнейшее число спутниковых антенн с тюнером «Openbox X-540», которые были установлены фирмой заказчиком, и соответствующую вероятность. Определить вероятность того, что среди установленных антенн будет не более 11 с тюнером «Openbox X-540».

9.4.1.29 В течение дня индивидуальным предпринимателем было продано 8 зарядных устройств. Вероятность продажи зарядного устройства «SAM D880» равна 0,37. Найти наивероятнейшее число зарядных устройств «SAM D880», проданных индивидуальным предпринимателем в течение дня, и соответствующую вероятность. Определить вероятность того, что среди проданных зарядных устройств будет не более 6 марки «SAM D880».

9.4.1.30 Каждый четвёртый студент, который сдаёт экзамен по предмету «Высшая математика», не доволен оценкой, полученной при сдаче экзамена. Группа из 13 студентов сдавали экзамен по предмету «Высшая математика». Найти наивероятнейшее число студентов, которые после сдачи экзамена, будут недовольны своей оценкой, и соответствующую вероятность. Определить вероятность того, что будут недовольны оценкой на экзамене по предмету «Высшая математика» не менее 8, но не более 10 студентов группы.

10 ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ В СХЕМЕ БЕРНУЛЛИ **(практическое занятие № 10)**

Содержание: теорема Пуассона, локальная теорема Муавра-Лапласа, интегральная теорема Муавра-Лапласа, закон больших чисел в схеме Бернулли.

10.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Если число испытаний велико, то вычисление по формуле Бернулли становится затруднительным. Поэтому возникает вопрос о вычислении таких вероятностей с помощью приближенных формул. Ответ на этот вопрос дают предельные теоремы в схеме Бернулли.

10.1.1 Теорема Пуассона

Если рассматривается большое число независимых испытаний при малой вероятности p (будем считать, что $p < 0,1$) наступления события в каждом отдельном взятом испытании, вероятность $P_n(m)$ вычисляется по формуле Пуассона.

Теорема (Пуассона) Если вероятность события A в каждом отдельно взятом испытании из серии n независимых испытаний равна $\frac{\mu}{n}$, где $\mu > 0$ не зависит от числа испытаний n , то вероятность того, что событие наступит ровно m раз, в $n \rightarrow \infty$ опытах равна

$$P_n(m) \approx \frac{\mu^m}{m!} \cdot e^{-\mu}, \quad (10.1.1.1)$$

где $\mu = n \cdot p$.

Значения распределения Пуассона можно определить по специальным таблицам (приложение 1). Иногда распределение Пуассона называют законом распределения больших чисел или законом редких явлений.

10.1.2 Локальная теорема Муавра-Лапласа

Если в условиях схемы Бернулли проводится большое число испытаний, а вероятность наступления события A , в каждом из отдельно взятых испытаний, не слишком близка к нулю и единице, то вычисление вероятностей событий по формуле Бернулли вызывают определённые технические затруднения при расчётах. В этом случае приближённую формулу вычисления вероятности $P_n(m)$, того, что событие A наступит ровно m раз в системе n независимых испытаниях, устанавливает теорема Муавра-Лапласа.

Теорема 10.1.2.1 (локальная теорема Муавра-Лапласа) Пусть $p = P(A)$ – вероятность наступления события A , в отдельно взятом испытании, в системе n независимых испытаниях, причем данная вероятность не слишком близко к нулю и к единице. Вероятность того, что событие A при значении $n \rightarrow \infty$ наступит, ровно m раз, определяется по формуле

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{npq}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \quad (10.1.2.1)$$

где $q = 1 - p$, а $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$.

Введя функцию: $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, получаем формулу

$$P_n(m) \approx \frac{1}{\sqrt{npq}} \cdot \varphi(x). \quad (10.1.2.2)$$

Значения функции $\varphi(x)$, определяются по таблицам (приложение 2), причем в таблице заданы значения функции $\varphi(x)$, только для переменных $x \geq 0$, так как, функция $\varphi(x)$ является четной и $\varphi(-x) = \varphi(x)$. При значениях переменной $x > 5$ функция $\varphi(x)$ практически равна нулю.

10.1.3 Интегральная теорема Мавра-Лапласа

Определим в условиях схемы Бернулли вероятность $P_n(m_1 \leq m \leq m_2)$ того, что событие A , наступающее с одной и той же вероятностью $P(A) = p$ (вероятность не слишком близка к нулю и единице) в одном испытании, в серии n независимых испытаниях, наступит не менее m_1 раз, но не более m_2 раза. В данном случае используется интегральная теорема Муавра-Лапласа.

Теорема 10.1.3.1 (интегральная теорема Муавра-Лапласа) Пусть m - число наступления события A в серии $n \rightarrow \infty$ независимых испытаний, а p - вероятность, которая не слишком близка к нулю и к единице, наступления этого события в одном отдельно взятом испытании. Тогда вероятность того, что событие наступит не менее m_1 раз, но не более m_2 , в данной серии из n независимых испытаний, равна

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} e^{-\frac{x^2}{2}} dx, \quad (10.1.3.1)$$

где $x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}$, $x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}$.

Введем функцию Лапласа $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, значение которой можно определить по таблице (приложение 3). Тогда формулу (10.1.3.1) можно записать в виде

$$P_n(m_1 \leq m \leq m_2) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1). \quad (10.1.3.2)$$

Укажем основные свойства функции Лапласа:

- 1) $\Phi(0) = 0$;
- 2) наиболее употребляемые значения: $\Phi(1) = 0,34134$, $\Phi(2) = 0,47725$, $\Phi(3) = 0,49865$, $\Phi(4) = 0,499968$;
- 3) $\Phi(x) = 0,5$, при $x > 5$;
- 4) функция Лапласа монотонно возрастает на множестве действительных чисел, то есть $\Phi(x_2) > \Phi(x_1)$ для всех $x_2 > x_1$;
- 5) функция Лапласа нечетная, то есть $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

10.1.4 Закон больших чисел в схеме Бернулли

Выясним, чему равна вероятность того, что в условиях схемы Бернулли, отклонение частоты m/n от вероятности $p = P(A)$ наступления события A не превосходит по абсолютной величине заданного числа ε , т. е. $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right)$.

Преобразуем неравенство, вероятность которого необходимо найти.

$$\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon \leftrightarrow -\varepsilon \leq \frac{m}{n} - p \leq \varepsilon \leftrightarrow -\varepsilon \leq \frac{m - np}{n} \leq \varepsilon \leftrightarrow -\varepsilon n \leq m - np \leq \varepsilon n.$$

Разделим последнее неравенство на величину $\sqrt{npq}$. В результате приходим к неравенству, которое равносильно данному: $-\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}} \leq \frac{m - np}{\sqrt{npq}} \leq \varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}$.

Введём обозначения $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}$, $x_1 = \varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}$.

Находим вероятность заданного события.

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) = P(-x_1 \leq x \leq x_1) \approx \Phi(x_1) - \Phi(-x_1) = \Phi(x_1) + \Phi(x_1) = 2\Phi(x_1).$$

Тогда справедливо приближённое равенство:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leq \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right). \quad (10.1.4.1)$$

Если $x > 5$, то значение функции Лапласа равно 0,5. Следовательно, при числе испытаний $n \rightarrow \infty$, получаем, что величина $2\Phi\left(\varepsilon \sqrt{\frac{n}{pq}}\right)$ стремится к единице.

Таким образом, в условиях схемы Бернулли, каким бы не было мало значение ε , с вероятностью сколь угодно близкой к единице, можно ожидать, что при достаточно большом числе испытаний, отклонение относительной частоты m/n появления события A от её вероятности $p = P(A)$ по абсолютной величине не превосходит заданного числа ε .

Данное правило называется *законом больших чисел* в условиях схемы Бернулли.

10.2 Примеры решения типовых задач

10.2.1 Мини АТС учреждения обслуживает 200 абонентов. Вероятность того, что в течение одного часа один абонент воспользуется услугами мини АТС, равна 0,02. Найти вероятность того, что в течение часа услугами мини АТС воспользуются: а) ровно три абонента; б) не менее двух, но не более четырёх абонентов; в) не менее одного абонента.

Решение. Поскольку число абонентов $n = 200$ велико, а вероятность $p = 0,02$, использования одним абонентом мини АТС, мала, то воспользуемся теоремой Пуассона. Находим значение $\mu = n \cdot p = 200 \cdot 0,02 = 4$.

а) Найдём вероятность того, что на мини АТС в течение часа позвонят ровно три ($m = 3$) абонента: $P_{200}(3) \approx \frac{4^3}{3!} \cdot e^{-4} \approx 0,1954$. Вероятность $P_{200}(3)$ при значении $\mu = 4$ находим по таблице (приложение 1).

б) Найдём вероятность того, что на мини АТС в течение часа позвонят не менее двух ($m_1 = 2$), но не более четырёх ($m_2 = 4$) абонентов:

$$P_{200}(2 \leq m \leq 4) = P_{200}(2) + P_{200}(3) + P_{200}(4) \approx \frac{4^2}{2!} \cdot e^{-4} + \frac{4^3}{3!} \cdot e^{-4} + \frac{4^4}{4!} \cdot e^{-4} \approx \\ \approx 0,1465 + 0,1954 + 0,1954 = 0,5373.$$

в) Найдём вероятность того, что на мини АТС в течение часа позвонят не менее одного ($m_1 = 1$) абонента:

$$P_{200}(1 \leq m \leq 200) = P_{200}(1) + P_{200}(2) + \dots + P_{200}(200) = 1 - P_{200}(0) \approx 1 - \frac{4^0}{0!} \cdot e^{-4} \approx 0,9817.$$

10.2.2 Из колоды игральных карт (36 карт, 4 масти) достаём наугад одну карту, записываем её масть и возвращаем её обратно в колоду. Повторяем опыт (достаём карту, а затем возвращаем обратно) 432 раза. Найти вероятность того, что карту бубновой масти достанем ровно сто двадцать три раза.

Решение. По условию $n = 432$, $m = 123$, $p = 0,25$, $q = 1 - p = 0,75$. Так как число испытаний ($n = 432$) - велико, а вероятность ($p = 0,25$), достать карту бубновой масти в отдельно взятом извлечении карт, не слишком близка к нулю и к единице, то воспользуемся локальной теоремой Муавра-Лапласа. Находим

значение $x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}} = \frac{123 - 432 \cdot 0,25}{\sqrt{432 \cdot 0,25 \cdot 0,75}} \approx 1,67$. По таблице (приложение 2) опре-

деляем значение функции $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ при значении $x = 1,67$:

$\varphi(1,67) = 0,09893$. Тогда вероятность того, что из 432 извлечений игральных карт, ровно 123 раза достанем карту бубновой масти, равна

$$P_{432}(123) \approx \frac{1}{\sqrt{432 \cdot 0,25 \cdot 0,75}} \cdot \varphi(1,67) \approx \frac{1}{9} \cdot 0,0989 \approx 0,011.$$

10.2.3 В условии предыдущей задачи определить вероятность того, что при четырёх сот тридцати двух разовом извлечении одной карты из колоды, карта бубновой масти появится не менее 100, но не более 130 раз.

Решение. Для определения вероятности указанного события воспользуемся интегральной теоремой Муавра-Лапласа. Находим x_1 и x_2 :

$$x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{100 - 432 \cdot 0,25}{\sqrt{432 \cdot 0,25 \cdot 0,75}} \approx -0,89, \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}} = \frac{130 - 432 \cdot 0,25}{\sqrt{432 \cdot 0,25 \cdot 0,75}} \approx 2,44.$$

Значения $\Phi(x_1)$ и $\Phi(x_2)$ определяем по таблице (приложение 3). Тогда вероятность исходного события равна $P_{432}(100 \leq m \leq 130) \approx \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = \Phi(2,44) - \Phi(-0,89) = \Phi(2,44) + \Phi(0,89) \approx 0,4927 + 0,3133 = 0,806$.

10.2.4 Вероятность того, что деталь нестандартная, равна $p = 0,15$. Найти вероятность того, что среди отобранных случайным образом 400 деталей относительная частота появления нестандартных деталей отклонится от вероятности $p = 0,15$ по абсолютной величине не более чем на 0,05.

Решение. По условию $n = 400$, $p = 0,15$, $q = 1 - p = 0,85$, $\varepsilon = 0,05$. Требуется найти вероятность $P\left(\left|\frac{m}{400} - 0,15\right| \leq 0,05\right)$. Используя формулу (10.1.4.1),

получаем $P\left(\left|\frac{m}{400} - 0,15\right| \leq 0,05\right) \approx 2 \cdot \Phi\left(0,05 \cdot \sqrt{\frac{400}{0,15 \cdot 0,85}}\right) = 2 \cdot \Phi(2,80)$. По таблице функции Лапласа (приложение 3) находим значение $\Phi(2,80) \approx 0,4987$.

Следовательно, $P\left(\left|\frac{m}{400} - 0,15\right| \leq 0,05\right) \approx 2 \cdot 0,4987 = 0,9974$.

Смысл полученного результата следующий: если взять достаточно большое число выборок по 400 деталей в каждой, то примерно в 99,74 % этих выборок отклонение относительной частоты от вероятности $p = 0,15$ по абсолютной величине не превысит 0,05.

10.2.5 Надёжность определения туберкулёза при рентгеновском просвечивании грудной клетки составляет 90 % (то есть 10 % носителей туберкулёза остаются неопознанными). Сколько человек должны пройти обследование, чтобы с вероятностью 0,9973, можно было утверждать, что относительная частота точного определения туберкулёза, среди людей, которые проходят обследование, отклонится от постоянной вероятности p по абсолютной величине не более чем на 0,01.

Решение. По условию $p = 0,9$, $q = 0,1$, $\varepsilon = 0,01$, $P\left(\left|\frac{m}{n} - 0,9\right| \leq 0,01\right) = 0,9973$. Требуется найти n . Воспользуемся формулой (10.1.4.1):

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - 0,9\right| \leq 0,01\right) \approx 2 \cdot \Phi\left(0,01 \cdot \sqrt{\frac{n}{0,9 \cdot 0,1}}\right) = 2 \cdot \Phi\left(\frac{1}{30} \sqrt{n}\right) = 0,9973.$$

Тогда $\Phi\left(\frac{1}{30}\sqrt{n}\right) = 0,49865$. По таблице функции Лапласа $\Phi(3) = 0,49865$.

Следовательно, $\frac{1}{30}\sqrt{n} = 3$, Решая полученное уравнение, имеем $n = 8100$.

Смысл полученного результата следующий: если взять достаточно большое число выборок по 8100 человек в каждой, то примерно в 99,73 % этих выборок отклонение относительной частоты от вероятности $p = 0,9$ по абсолютной величине не превысит 0,01.

10.2.6 Вероятность появления события A в каждом из независимых испытаний равна $p = 0,7$. Найти число испытаний n , при котором наивероятнейшее число появления события равно $m_0 = 85$. Вычислить вероятность $P_n(m_0)$.

Решение. Для определения числа испытаний воспользуемся формулой (9.1.2.1): $n \cdot 0,7 - 0,3 \leq 85 \leq n \cdot 0,7 + 0,7$. От двойного неравенства переходим к системе неравенств:

$$\begin{cases} n \cdot 0,7 - 0,3 \leq 85, \\ n \cdot 0,7 + 0,7 \geq 85, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} n \leq 121,86, \\ n \geq 120,43. \end{cases}$$

Число наступления события A может быть только целым числом. Поэтому для того чтобы наивероятнейшее число наступления события A равнялось 85, опыт надо провести 121 раз. Найдём вероятность $P_{121}(85)$. Так как число испытаний достаточно велико, а вероятность $p = 0,7$ наступления события в отдельном взятом испытании не слишком близка к нулю и к единице, то воспользуемся локальной теоремой Муавра-Лапласа:

$$P_{121}(85) \approx \frac{1}{\sqrt{121 \cdot 0,7 \cdot 0,3}} \varphi\left(\frac{85 - 121 \cdot 0,7}{\sqrt{121 \cdot 0,7 \cdot 0,3}}\right) \approx 0,198 \cdot \varphi(0,19) \approx 0,198 \cdot 0,392 \approx 0,078.$$

10.3 Задания для решения на практическом занятии

10.3.1 В некотором университете учатся 1830 студентов, которые родились в одном и том же високосном году. Полагая, что будущий студент может родиться с равной вероятностью в любой из дней года, найти вероятность того, что не менее четырёх студентов университета родились 29 февраля.

10.3.2 Вероятность покупки клиентом банка слитков золота равна 0,3. Найти вероятность того, что 40 клиентов банка приобретут слитки золота из 200 клиентов, которые обратились в банк.

10.3.3 Всхожесть семян пшеницы равна 0,8. Найти вероятность того, что из 1000 посаженных семян число проросших будет заключено между 780 и 840.

10.3.4 Отдел технического контроля проверяет 800 изделий на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно, равна 0,8. Найти с вероятностью 0,999936 границы, в которых будет заключено число стандартных изделий среди проверенных изделий.

10.3.5 По статистике каждый восьмой человек из десяти использует платёжную карту при расчётах в торговых сетях. Вычислить вероятность того, что из 2000 человек, которые произвели расчёты в торговых сетях, 1560 человек воспользовались платёжной карточкой.

10.3.6 Вероятность приобретения бриллианта в банке, для одного клиента, равна 0,0025. Найти вероятность того, что среди 800 клиентов банка бриллианты приобретут более двух клиентов.

10.3.7 Выписку по счёту банк выдаёт по первому требованию. Вероятность того, что клиент попросит выдать выписку по счёту, равна 0,3. Какова вероятность того, что из 2000 клиентов банков выписку по счёту попросят выдать не менее 580, но не более 640 клиентов банка.

10.3.8 Устройство для определения банкноты на платёжеспособность определяет фальшивую банкноту с вероятностью 0,9998. Специалист по операционно-кассовой работе проверил на устройстве 10000 купюр. Какова вероятность того, что ровно три фальшивые купюры устройство определило как платёжеспособные.

10.3.9 Вероятность рождения мальчика равна 0,515. Вычислить вероятность того, что из 10000 рождающихся детей мальчиков будет не менее 5000, но не более 5200.

10.3.10 Вероятность того, что человек при оплате коммунальных платежей воспользуется услугой «Интернет-банкинг», равна 0,45. Найти вероятность того, что из 4000 человек оплативших коммунальные услуги, ровно 1840 человек воспользовались услугой «Интернет-банкинг».

10.3.11 Каждый человек проходящий в банк с равной вероятностью может воспользоваться электронной очередью или стать в очередь в кассу. Найти такое положительное число ε , для которого с вероятностью 0,76986 абсолютная величина отклонения относительной частоты, использования клиентом банка электронной очереди, от вероятности этого события, не превысит ε .

10.3.12 В урне содержатся красные и синие шары в отношении 4:1. После извлечения шара отмечают его цвет, и шар возвращают в урну. Каково минимальное число извлечений, при котором с вероятностью, не меньшей 0,9836, можно ожидать, что отклонение относительной частоты появления красного шара от вероятности его появления в одном опыте не превысит величины $\varepsilon = 0,04$?

10.3.13 Игральную кость бросают 125 раз. Найти с вероятностью 0,999936 границы, в которых будет заключено число m выпадения тройки.

10.3.14 В одном из экспериментов Пирсона по моделированию на вычислительной машине опытов с подбрасыванием правильной монеты из общего числа 24000 «подбрасываний» герб выпал 12012 раз. Студент повторяет эксперимент. Какова вероятность того, что он получит тот же результат? Сколь вероятно при повторении эксперимента получить, по крайней мере, такое же отклонение относительной частоты успехов от вероятности успеха в данном опыте?

10.3.15 Вероятность того, что человек, забрав платёжную карту в банкомате, забудет взять деньги, равна 0,002. В течение некоторого времени банкоматом воспользовались 1000 человек. Найти вероятность того, что ровно один человек забудет забрать деньги в банкомате.

10.3.16 Вероятность того, что студент экономического факультета вуза станет хорошим специалистом, равна 0,8. Через несколько лет после окончания вуза произведена выборка из 100 бывших студентов. Найти вероятность того, что среди выбранных выпускников вуза хорошим специалистом стали: а) не менее 75 и не более 90 бывших студентов; б) не менее 75 бывших студентов; в) не более 74 бывших студентов; г) ровно 75 бывших студентов.

10.3.17 Вероятность появления положительного результата в каждом из n экспериментов равна 0,7. Сколько необходимо произвести опытов, чтобы с вероятностью 0,98758 можно было ожидать, что не менее 180 опытов дадут положительный результат?

10.3.18 Считается, что вероятность найти четырехлистный клевер составляет 0,0004. Некий ботаник исследовал 10000 растений клевера. Какова вероятность того, что не более двух из них являются четырехлистными?

10.3.19 В сети рыбака нацеплялось 1150 пиявок. В течение часа каждая пиявка может отвалиться с вероятностью 0,6. Какова вероятность того, что через час в сетях останется ровно 460 пиявки (отвалившиеся пиявки уползают)?

10.3.20 Напротив окна в течение одной секунды с вероятностью 0,38 пролетает воробей. Какова вероятность того, что количество воробьев, пролетевших напротив окна в течение часа, заключено между 1350 и 1380?

10.3.21 Отдел технического контроля проверяет 400 деталей на стандартность. Вероятность того, что деталь стандартна, равна 0,8. Найти такое положительное число ε , что с вероятностью 0,9912 абсолютная величина отклонения относительной частоты появления стандартной детали от вероятности 0,8 не превысит число ε .

10.3.22 В кулинарии выпекают булочки, которые с вероятностью 0,33 пахнут ванилью. Какова вероятность того, что в партии из 1000 булочек ровно 330 будут пахнуть ванилью?

10.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

10.4.1 Решить предложенную задачу своего варианта.

10.4.1.1 Завод отправил на оптовую базу 2000 изделий. Вероятность повреждения изделия в пути равна 0,00005. Найти вероятность того, что в пути будет повреждено не менее двух изделий.

10.4.1.2 Вероятность того, что кассовые аппараты имеют марку «Меркурий НТС-180 Ф», равна 0,45. Найти вероятность того, что ровно 950 из имеющихся 2000 кассовых аппаратов, имеют указанную марку.

10.4.1.3 В парке высажено 1000 деревьев. Берёза может быть посажена с вероятностью 0,4. Какова вероятность того, что в парке было посажено не менее 389, но не более 412 берёз?

10.4.1.4 Вероятность того, что деталь бракованная, равна 0,0004. Найти вероятность того, что из взятых на проверку 500 деталей не менее трёх окажутся бракованными.

10.4.1.5 POS-системы типа «POS-терминал FXP-8815» используются с вероятностью 0,8. Определить вероятность того, что из 1000 проверенных POS-систем 765 систем имеют тип «POS-терминал FXP-8815».

10.4.1.6 Через перекрёсток автомобиль марки «Volkswagen» проезжает с вероятностью 0,25. С какой вероятностью среди 1500 автомобилей, которые проехали через перекрёсток за некоторый период времени, будет не менее 440 автомобилей марки «Volkswagen»?

10.4.1.7 Тираж книги равен 1200000 экземпляров. Вероятность того, что книга сброшюрована неверно, равна 0,00000025. Какова вероятность того, что будет сброшюровано не менее четырёх книг тиража?

10.4.1.8 Каждый четвёртый денежный ящик, выпускаемый предприятием, имеет марку «Меркурий 100-12/24». За определённый период времени предприятие выпустило 1500 денежных ящиков. Какова вероятность того, что ровно 400 из них имеют марку «Меркурий 100-12/24»?

10.4.1.9 В приборе установлено 2000 одинаковых блоков, которые дублируют друг друга. Надёжность работы каждого из блоков в течение определённого времени равна 0,4. Вычислить вероятность того, что за этот период времени выйдут из строя не более 1150 блоков.

10.4.1.10 Устройство состоит из 800 элементов. Вероятность выхода любого элемента из строя за некоторое время равна 0,0005. Найти вероятность того, что за это время выйдет из строя, по крайней мере, пять элементов устройства.

10.4.1.11 Чековый принтер FXP RP-B-80AC отображает наименование фирмы, который выпустил принтер, с вероятностью 0,2. С какой вероятностью ровно 260 случайно выбранных чеков из 1600 напечатанных чеков будут содержать наименование фирмы?

10.4.1.12 При съёмке дорожного движения номер автомобиля не фиксируется с вероятностью 0,12. Определить вероятность того, что номер автомобиля не будет зафиксирован не менее 250, но не более 320 раз, если на камеру сняли 2500 автомобилей.

10.4.1.13 На железнодорожном вокзале установлены 500 автоматов, которые производят продажу билетов. В течение суток каждый автомат может выйти из строя с вероятностью 0,001. Какова вероятность того, что в течение суток выйдут из строя не более шести автоматов?

10.4.1.14 Вероятность того, что бетон марки М 200 отвечает стандарту, равна 0,88. Какова вероятность того, что ровно в 98 контейнерах из 100 будет находиться бетон, который отвечает стандарту?

10.4.1.15 Каждое из 1100 орудий поражает свою цель с вероятностью 0,63. Каждое из орудий произвело выстрел по своей цели. Определить вероятность того, что будет поражено не менее 666 целей.

10.4.1.16 Вероятность того, что купюра является фальшивой, равна 0,00015. Для проверки выбрано 4000. Найти вероятность того, что среди них окажется не менее трёх фальшивых купюр.

10.4.1.17 Каждый третий трактор из 540, которые расположены на стоянке, имеет марку «Беларус-1021». Случайным образом производится выбор 138 тракторов. Найти вероятность того, что выбраны 138 тракторов марки «Беларус-1021».

10.4.1.18 Вероятность того, что при перевозке будет повреждено изделие из фарфора, равна 0,15. Произведена перевозка 3500 изделий из фарфора. Найти вероятность того, что при перевозке будет повреждено не более 500 изделий.

10.4.1.19 Магазин продал партию 400 радиоприёмников. В мастерскую гарантийного ремонта радиоприёмник может попасть с вероятностью 0,00175. Какова вероятность того, что в мастерскую попадут не более двух радиоприёмников?

10.4.1.20 При массовом производстве резисторов ПТМН-1 вероятность брака равна 0,16. С какой вероятностью ровно 361 резистор из 2500 выбранных резисторов на проверку будет иметь брак?

10.4.1.21 При наборе текста вероятность сделать ошибку на одном листе равна 0,12. Было набрано 637 страниц. Вычислить вероятность того, что ошибки будут присутствовать не менее чем на 55, но не более чем на 80 листах.

10.4.1.22 Банкомат может не принять банковскую карточку с вероятностью 0,00025. За сутки банкомат произвёл операции с 3200 карточками. Найти вероятность того, что банкомат не принял не более четырёх карточек.

10.4.1.23 Вероятность того, что на автомобиле установлены рулевые наконечники фирмы «Asmetoll», равна 0,6. Найти вероятность того, что на 5870 автомобилях из 10000 установлены рулевые наконечники фирмы «Asmetoll».

10.4.1.24 Вероятность того, что расход электроэнергии не превысит ежедневную норму потребления для конкретной квартиры, равна 0,81. В течение суток была проведена запись показаний электросчётчиков в 1200 квартирах. Определить вероятность того, что не менее чем в 1000 квартирах не превышена ежедневная норма расхода электроэнергии.

10.4.1.25 Каждый второй из 1000 индивидуальных банковских сейфов фирмы DORS имеют серию IDS. Из этой партии выбирают наугад 450 индивидуальных банковских сейфов. Найти вероятность того, что среди 450 индивидуальных банковских сейфов, окажется не менее 200 серии IDS?

10.4.1.26 Каждый третий студент университета занимается спортом. Найти вероятность того, что при случайном выборе 980 студентов, ровно 270 из них занимаются спортом.

10.4.1.27 Девяносто процентов доверенностей, которые оформляются у нотариуса, верны. За некоторый период времени нотариус оформил 800 доверенностей. С какой вероятностью он оформил не менее 700, но не более 750 доверенностей, которые верно составлены?

10.4.1.28 Вероятность того, что аккумулятор разрядится в течение суток, равна 0,0014. Найти вероятность того, что при проверке 5000 аккумуляторов, не более шести окажутся разряженными.

10.4.1.29 Вероятность приобретения автомобиля «Volkswagen» в автосалоне равна 0,35. С какой вероятностью среди 780 приобретённых автомобилей за некоторый период времени ровно 299 автомобилей «Volkswagen»?

10.4.1.30 Каждый человек может отказаться от курения с вероятностью 0,33. Вычислить вероятность того, что среди 10000 когда-либо курящих человек не менее 3500 отказалось от курения.

10.4.2 Решить предложенную задачу своего варианта.

10.4.2.1 Студент по окончании ВУЗа работает по специальности с вероятностью 0,8. ВУЗ закончили 1000 студентов. Найти вероятность того, что по специальности будет работать не более 750 студентов.

10.4.2.2 За некоторый период времени фабрика выпустила 2000 джемперов. Допустить брак при пошиве одного джемпера возможно с вероятностью 0,001. Какова вероятность того, что не менее семи джемперов будут содержать брак?

10.4.2.3 На территории некоторой области в 32 % случаев банки устанавливают банкоматы DORS PTM-2010. Найти вероятность того, что из 20000 случайно выбранных банкоматов, ровно 6666 банкоматов окажутся банкоматами DORS PTM-2010.

10.4.2.4 На отдельно взятом предприятии должность главного бухгалтера занимает женщина с вероятностью 0,7. Проведена проверка 1150 предприятий. Какова вероятность того, что на этих предприятиях должность главного бухгалтера занимают не менее 780, но не более 880 женщин.

10.4.2.5 Кузов автомобиля «Audi» имеет васильковый цвет с вероятностью 0,0012. Через пост в течение некоторого времени проехало 2500 автомобилей «Audi». Определить вероятность того, что через пост проехало не более 6 автомобилей марки «Audi».

10.4.2.6 При массовом производстве терминалов сбора данных вероятность того, что терминал отвечает стандарту, равна 0,88. С какой вероятностью ровно 13250 терминал из 15000 терминалов, выбранных на проверку, будут отвечать стандарту?

10.4.2.7 Вероятность выхода на линию каждого из 100 троллейбусов трамвайно-троллейбусного парка равна 0,75. Какова вероятность нормальной работы парка, если для этого необходимо, чтобы на линии было не менее 66 троллейбусов?

10.4.2.8 Автомобиль загружается бетоном марки М150 с вероятностью 0,004. Найти вероятность того, что не менее четырёх автомобилей из 1000 автомобилей, которые загружены бетоном, имеют в кузове бетон марки М150.

10.4.2.9 Вероятность того, что двухступенчатый цилиндрический редуктор имеет маркировку Ц2У250, равна 0,53. С какой вероятностью, что среди выбранных наугад 1000 редукторов, ровно 599 имеют маркировку Ц2У250?

10.4.2.10 Игральная кость подбрасывается 800 раз. Найти вероятность того, что число 6 выпадет не более 100 раз.

10.4.2.11 Вдоль дороги установлены 4000 фонарей, каждый из которых может перегореть в течение месяца с вероятностью 0,0025. Какова вероятность того, что в течение месяца перегорят ровно 13 фонарей?

10.4.2.12 Каждый шестой гаечный ключ, который имеется в автомастерской, является рожковым. Найти вероятность того, что при случайном выборе 999 гаечных ключей ровно 199 из них окажутся рожковыми ключами.

10.4.2.13 Тестовое задание содержит 100 вопросов. Каждый вопрос содержит только один правильный ответ из пяти предложенных. Какова вероятность того, что методом простого угадывания удастся ответить не менее чем на 10, но не более чем на 30 вопросов тестового задания?

10.4.2.14 Вероятность потери кредитной карточки в течение месяца равна 0,002. Банк выдал 400 кредитных карточек. Определить вероятность того, что в течение месяца кредитную карточку потеряют не менее шести клиентов банка.

10.4.2.15 Износ жиклеров в карбюраторе происходит с вероятностью 0,2. С какой вероятностью ровно 99 карбюраторов из 560 проверенных будут иметь износ жиклёров?

10.4.2.16 Отдел технического контроля проверяет на качество партию деталей в количестве 900 штук. Вероятность того, что деталь отвечает стандарту, равна 0,86. С какой вероятностью в данной партии деталей будет не менее 800 стандартных изделий?

10.4.2.17 Вероятность того, что жители каждого из 20000 районов Земли смогут наблюдать солнечное затмение, равна 0,0003. С какой вероятностью солнечное затмение смогут наблюдать жители не менее восьми районов Земли?

10.4.2.18 В бензонасосе фильтр засоряется с вероятностью 0,3. Найти вероятность того, что из 500 проверенных бензонасосов ровно 110 имеют засорение фильтра.

10.4.2.19 Стиральная машина «Атлант MULTI FUNCTION» имеет маркировку ОМА-60С87 с вероятностью 0,64. На базу поставлено 240 стиральных машин «Атлант MULTI FUNCTION». Какова вероятность того, что среди них не более 150 стиральных машин с маркировкой ОМА-60С87?

10.4.2.20 Монетный двор за некоторый период времени выпустил 100000 монет. На монете можно обнаружить изъян с вероятностью 0,00007. Найти вероятность того, что в партии окажется не более шести монет с изъяном.

10.4.2.21 Болт из нержавеющей стали не имеет повреждений на резьбе с вероятностью 0,88. Определить вероятность того, что ровно 8888 из 10000 проверенных болтов не имеют повреждения на резьбе.

10.4.2.22 Вероятность того, что минеральная вода разлита на ООО «Дарида», равна 0,68. В магазин поступило 1600 бутылок минеральной воды. Найти вероятность того, что среди них на ООО «Дарида» разлито не менее 1000, но не более 1100 бутылок.

10.4.2.23 Телефонная станция обслуживает 7000 абонентов. Вероятность того, что абонент воспользуется телефоном в течение часа, равна 0,001. С какой вероятностью девятнадцать абонентов сделают телефонный звонок?

10.4.2.24 Вероятность того, что на автомобиле установлены не изношенные тормозные колодки, равна 0,78. Вычислить вероятность, что из проверенных 1024 колодок ровно 785 не имеют износа.

10.4.2.25 Вероятность приёма радиосигнала равна 0,025. Произведена передача 200 сигналов. Найти вероятность того, что будет принято не менее 4 сигналов.

10.4.2.26 Каждый третий из 3000 конденсаторов имеет марку А475. Из партии выбирают наугад 900 конденсаторов. Какова вероятность того, что среди выбранных наугад 900 конденсаторов не более четырёх имеют марку А475?

10.4.2.27 При продаже аккумулятор заряжен на 100 % с вероятностью 0,89. Какова вероятность того, что из 500 проверенных аккумуляторов ровно 450 будут заряжены на 100 %?

10.4.2.28 При массовом производстве заготовок ключей вероятность брака равна 0,21. Найти вероятность того, что при изготовлении 1480 заготовок не более 262 заготовок будут содержать брак.

10.4.2.29 Вероятность того, что рулевые наконечники, которые хранятся на складе, могут иметь брак, равна 0,01. Со склада в магазин отправлено 900 рулевых наконечников. С какой вероятностью со склада в магазин будет отправлено не менее четырёх рулевых наконечников с браком?

10.4.2.30 Холодильник фирмы «Атлант» имеет маркировку ХМ 6001-007 с вероятностью 0,47. Найти вероятность того, что ровно 170 холодильников из 300 имеющихся на складе имеют указанную марку.

10.4.3 Решить предложенную задачу своего варианта.

10.4.3.1 Вероятность выхода из строя каждого элемента из 1000 в течение некоторого времени равна 0,21. Какова вероятность того, что за указанное время выйдет из строя ровно 201 элемент?

10.4.3.2 Каждая четвёртая банка кофе имеет торговую марку «NESCAFE». На рынок поставлено 30000 банок кофе. С какой вероятностью среди них будет не менее 7200, но не более 7800 банок кофе с торговой маркой «NESCAFE».

10.4.3.3 Бетонная плита ФБС 9.4.6 имеет дефект с вероятностью 0,0002. Для проверки на качество проводят диагностику 500 плит. Определить вероятность того, что среди них окажется не более трёх плит с дефектом.

10.4.3.4 Поломка пульта дистанционного управления в течение времени t возможна с вероятностью 0,19. Найти вероятность того, что в течение этого времени выйдут из строя ровно 32 из 100 имеющихся пультов.

10.4.3.5 Компания «АНМАД ТЕА Ltd» поставляет чай в 64 страны мира. Коллекция «Достопримечательности Лондона», производства этой компании, поставляется в страну с вероятностью 0,8. Определить вероятность того, что коллекция будет поставлена не менее чем в 50 стран мира.

10.4.3.6 Вероятность после разговора оставить карту в телефонном аппарате равна 0,004. В течение недели телефоном воспользовались 50 абонентов. Какова вероятность того, что в течение недели телефоном воспользовались 3 абонента?

10.4.3.7 При массовом производстве триодов 6С19П вероятность того, что триод не отвечает стандарту, равна 0,13. С какой вероятностью ровно 1111 триодов, из 10000 триодов, выбранных на проверку, будут не отвечать стандарту?

10.4.3.8 Каждый третий автомобиль не придерживается рекомендуемого режима скорости, установленного на автостраде. Какова вероятность того, что из 10000 проехавших по автостраде автомобилей режима скорости не придерживались не более 3200 машин?

10.4.3.9 Студент выучил 196 формулы из двухсот необходимых. Экзаменатором на выбор предложено 150 формул. Найти вероятность того, что среди них окажется ровно две формулы, которые студент не выучил.

10.4.3.10 Телевизионное объединение «Витязь» выпустило 500 DVD проигрывателей различных марок. Вычислить вероятность того, что среди них будет ровно 210 DVD проигрывателей марки «DVD-016M», если каждый второй из пяти DVD проигрывателей, выпускаемых объединением, имеет эту марку.

10.4.3.11 Вероятность того, что собака породы «той-терьер» будет представлена на выставке собак, равна 0,11. На выставке было представлено 500 собак различной породы. Какова вероятность того, что в выставке участвовало не менее 50, но не более 60 собак породы «той-терьер»?

10.4.3.12 В хранилище музея находится 1000 картин. Любая картина может не иметь подписи автора с вероятностью 0,0004. С какой вероятностью ровно пять картин, которые находятся в хранилище, не имеют подписи автора?

10.4.3.13 Радиоприёмник «Vitek VT 3595» принимает волны метрового диапазона с вероятностью равной 0,6. Определить вероятность того, что из 1700 выпущенных радиоприёмников ровно 1000 принимают волны метрового диапазона?

10.4.3.14 Девяносто из ста энергосберегающих ламп не перегорают в течение гарантийного срока. Найти вероятность того, что в течение гарантийного срока не перегорят не менее 13600 из имеющихся 15000 энергосберегающих ламп.

10.4.3.15 Зал кинотеатра рассчитан на 1500 зрительских мест. Каждое кресло, которое находится в зале, может получить дефект после сеанса с вероятностью 0,0006. Какова вероятность того, что администратор после просмотра кинофильма обнаружит не более трёх кресел, имеющих дефект?

10.4.3.16 Мобильный телефон фирмы «Samsung» продаётся с вероятностью 0,54. Вычислить вероятность того, что среди проданных 700 телефонов ровно 300 телефонов, которые произведены фирмой «Samsung».

10.4.3.17 Вероятность того, что балкон остеклён рамами из ПВХ, равна 0,6. Определить вероятность, что не более 444 балкона из 700 балконов, осмотренных работником домоуправления, остеклены рамами из ПВХ.

10.4.3.18 Авиакомпания осуществляла грузоперевозки ровно один раз каждый день 2013 года. Город Томск принял 1460 самолётов этой компании. Найти вероятность того, что среди этих самолётов будет не более 5 самолётов, которые осуществляли грузоперевозку.

10.4.3.19 Девяносто процентов ноутбуков «Toshiba» не требуют ремонта в течение гарантийного срока. С какой вероятностью не потребуют ремонта 2300 ноутбуков «Toshiba» из 2500 ноутбуков этой марки?

10.4.3.20 Всхожесть семян данного сорта пшеницы оценивается с вероятностью, равной 0,78. Какова вероятность того, что из 1300 посеянных семян взойдёт не менее 950, но не более 1050 семян пшеницы.

10.4.3.21 Вероятность того, что оптический диск не соответствует стандарту, равна 0,007. На проверку выбрано 1000 оптических дисков. С какой вероятностью не менее шести из них не будут соответствовать стандарту?

10.4.3.22 Каждый шестой из десяти фотоаппаратов «Canon» имеет разрешение 4,0 mega pixels. Определить вероятность того, что ровно 800 из 1480 фотоаппаратов «Canon», которые имеются в наличии, имеют разрешение 4,0 mega pixels.

10.4.3.23 Тридцать процентов акций на аукционе продаются по первоначальной цене. На аукционе было продано 2200 акций. Какова вероятность того, что не менее 555 акций были проданы по первоначальной цене?

10.4.3.24 На реке имеется 300 мест, в которых баржа может сесть на мель. Баржа садится на мель с вероятностью 0,002. Найти вероятность того, что баржа сядет на мель не более двух раз, если она проходит реку по всей длине.

10.4.3.25 Вероятность того, что у фирмы будет заказ на установку спутниковой антенны с тюнером «Openbox X-730PVR», равна 0,8. За некоторое время фирма установила 300 спутниковых антенн. Какова вероятность, что ровно 222 антенны с тюнером «Openbox X-730PVR»?

10.4.3.26 Вероятность того, что после окончания школы школьник будет подавать документы в ВУЗ, равна 0,7. С какой вероятностью документы в ВУЗ подадут не более 1000 бывших школьников из 1500 выпускников?

10.4.3.27 На предприятиях региона имеется 10000 швейных машин. Вероятность того, что швейная машина имеет класс 1022, равна 0,001. С какой вероятностью на предприятиях региона установлено не менее шести швейных машин указанного выше класса?

10.4.3.28 Четыре телевизора из десяти имеют марку «Витязь 37CTV750-Zodiac». За некоторое время выпущено 600 телевизоров. Вычислить вероятность того, что среди выпущенных телевизоров 213 имеют марку «Витязь 37CTV750-Zodiac».

10.4.3.29 Вероятность, что станок находится в рабочем состоянии, равна 0,82. Найти вероятность того, что среди 150 проверенных станков в рабочем состоянии находятся не менее 100, но не более 120 станков.

10.4.3.30 В парке растёт 5000 деревьев. Ясень в парке мог быть посажен с вероятностью 0,0006. Определить вероятность того, что в парке растёт не более шести ясеней.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жевняк, Р. М. Высшая математика. В 5 ч. / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк., 1984. – Ч. 3 – 5.
2. Гуринович, С. Л. Математика. Задачи с экономическим содержанием / С. Л. Гуринович. – Минск : Новое знание, 2008. – 263 с.
3. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. В 3 ч. Ч. 3 / А. П. Рябушко [и др.]. – Минск : Выш. шк., 2009. – 352 с.
4. Индивидуальные задания по высшей математике: Операционное исчисление. Элементы теории устойчивости. Теория вероятностей. Математическая статистика / А. П. Рябушко [и др.]. – Минск : Выш. шк., 2006. – 336 с.: ил.
5. Руководство к решению задач по высшей математике. В 2 ч. / Е. И. Гурский [и др.]. – Минск : Выш. шк., 1989. – Ч. 1 – 2.
6. Чудесенко, В. Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (Типовые расчёты) / В. Ф. Чудесенко. – Москва : Высш. школа, 1983. – 111 с.
7. Кузнецов, Л. А. Сборник заданий по высшей математике. Типовые расчёты / Л. А. Кузнецов. – Москва : Высш. школа, 1983. – 168 с.
8. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 2 / П. Е. Данко, А. Г. Попов. – Москва : Высш. школа, 1967. – 350.
9. Кудрявцев, В. А. Краткий курс высшей математики / В. А. Кудрявцев, Б. П. Демидович. – Москва : Наука, 1989. – 655 с.
10. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. Дифференциальное исчисление функции одной переменной: методические указания к практическим занятиям для студентов первого курса экономических специальностей / А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2012. – 89 с.
11. Высшая математика. Функции нескольких переменных. Интегральное исчисление функции одной переменной. Дифференциальные уравнения: методические указания к практическим занятиям для студентов первого курса экономических специальностей / А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2014. – 99 с.
12. Высшая математика: задания для выполнения типовых расчётов для студентов второго курса механико-технологических специальностей / А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2011. – 68 с.
13. Теория вероятностей и математическая статистика: задания для выполнения типовых расчётов для студентов второго курса механико-технологических специальностей / А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2012. – 77 с.
14. Высшая математика : методические указания и контрольные задания для студентов заочной формы обучения. В 4 ч. / В. С. Денисов [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2006. – Ч. 3 – 4.

15. Карасёв, А. И. Курс высшей математики для экономических вузов. В 2 ч. Ч. 2 / А. И. Карасёв, З. М. Аксютин, Т. И. Савельева. – Москва : Высш. школа, 1990. – 272 с.
16. Ефимов, А. В. Сборник задач по математике для ВТУЗов. Специальные курсы / А. В. Ефимов [и др.]. – Москва : Наука, 1984. – 606 с.
17. Гурский, Е. И. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике / Е. И. Гурский. – Минск : Выш.шк., 1984. – 223 с.
18. Герасимович, А. И. Математическая статистика / А. И. Герасимович. – Минск : Выш. шк., 1983. – 280 с.
19. Руководство к решению задач по высшей математике. В 2 ч. Ч. 2 / Е. И. Гурский [и др.]. – Минск : Выш. шк., 1989. – 400 с.
20. Ершова, В. В. Импульсные функции. Функции комплексной переменной. Операционное исчисление / В. В. Ершова. – Минск : Выш. школа, 1976. – 256 с.
21. Гусак, А. А. Ряды и кратные интегралы / А. А. Гусак. – Минск : Выш. школа, 1970. – 384 с.
22. Индивидуальные задания по теории вероятностей и математической статистике: типовые расчёты / Ю. В. Муранов [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2000. – 66 с.
23. Высшая математика. Теория вероятностей. Методические указания к практическим занятиям для студентов дневной и заочной форм обучения / Д. Е. Дунина [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2009. – 102 с.
24. Высшая математика. Теория вероятностей и математическая статистика. Методические указания к практическим занятиям для студентов дневной и заочной форм обучения / Д. Е. Дунина [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2012. – 128 с.
25. Чистяков, В. П. Курс теории вероятностей / В. П. Чистяков. – Москва : Наука, 1982. – 243 с.
26. Прохоров, Ю. В. Теория вероятностей / Ю. В. Прохоров, Ю. А. Розанов. – Москва : Наука, 1973. – 496 с.
27. Карасёв, А. И. Теория вероятностей и математическая статистика / А. И. Карасёв. – Москва : Статистика, 1979. – 279 с.
28. Колемаев, В. А. Теория вероятностей и математическая статистика / В. А. Колемаев [и др.] – Москва : Высш. школа, 1991. – 400 с.
29. Гринберг, А. С. Теория вероятностей и математическая статистика. Курс лекций / А. С. Гринберг, О. Б. Плющ, Б. В. Новыш. – Академия управления при президенте Республики Беларусь, 2005. – 186 с.
30. Гусак, А. А. Теория вероятностей. Справочное пособие к решению задач / А. А. Гусак, Е. А. Бричикова. – Минск : ТетраСистемс, 2007. – 288 с.
31. Белько, И. В. Теория вероятностей и математическая статистика / И. В. Белько, Г. П. Свирид. – Минск : ООО «Новое знание», 2004. – 251 с.
32. Чернов, В. П. Теория массового обслуживания / В. П. Чернов, В. Б. Ивановский. – Москва : Инфра-М, 2000. – 158 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица П. 1 – Значения функции распределения Пуассона

$$P(X = m) = \frac{\mu^m}{m!} \cdot e^{-\mu}$$

При μ , равном 0,1; 0,2; ...; 1,0

$\mu \backslash m$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	0,90484	0,81873	0,74082	0,67032	0,60653	0,54881	0,49659	0,44933	0,40657	0,36788
1	0,09048	0,16375	0,22225	0,26813	0,30327	0,32929	0,34761	0,35946	0,36591	0,36788
2	0,00452	0,01637	0,03334	0,05363	0,07582	0,09879	0,12166	0,14379	0,16466	0,18394
3	0,00015	0,00109	0,00333	0,00715	0,01264	0,01976	0,02839	0,03834	0,04940	0,06131
4	0,00000	0,00005	0,00025	0,00072	0,00158	0,00296	0,00497	0,00767	0,01111	0,01533
5		0,00000	0,00002	0,00006	0,00016	0,00036	0,00070	0,00123	0,00200	0,00307
6			0,00000	0,00000	0,00001	0,00004	0,00008	0,00016	0,00030	0,00051
7					0,00000	0,00000	0,00001	0,00002	0,00004	0,00007
8							0,00000	0,00000	0,00000	0,00001
9										0,00000

При μ , равном 2; 3; 4; ...; 11

$\mu \backslash m$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0,13534	0,04979	0,01832	0,00674	0,00248	0,00091	0,00034	0,00012	0,00005	0,00002
1	0,27067	0,14936	0,07326	0,03369	0,01487	0,00638	0,00268	0,00111	0,00045	0,00018
2	0,27067	0,22404	0,14653	0,08422	0,04462	0,02234	0,01073	0,00500	0,00227	0,00101
3	0,18045	0,22404	0,19537	0,14037	0,08924	0,05213	0,02863	0,01499	0,00757	0,00370
4	0,09022	0,16803	0,19537	0,17547	0,13385	0,09123	0,05725	0,03374	0,01892	0,01019
5	0,03609	0,10082	0,15629	0,17547	0,16062	0,12772	0,09160	0,06073	0,03783	0,02242
6	0,01203	0,05041	0,10420	0,14622	0,16062	0,14900	0,12214	0,09109	0,06306	0,04109
7	0,00344	0,02160	0,05954	0,10444	0,13768	0,14900	0,13959	0,11712	0,09008	0,06458
8	0,00086	0,00810	0,02977	0,06528	0,10326	0,13038	0,13959	0,13176	0,11260	0,08879
9	0,00019	0,00270	0,01323	0,03627	0,06884	0,10140	0,12408	0,13176	0,12511	0,10853
10	0,00004	0,00081	0,00529	0,01813	0,04130	0,07098	0,09926	0,11858	0,12511	0,11938
11	0,00001	0,00022	0,00192	0,00824	0,02253	0,04517	0,07219	0,09702	0,11374	0,11938
12	0,00000	0,00006	0,00064	0,00343	0,01126	0,02635	0,04813	0,07277	0,09478	0,10943
13		0,00001	0,00020	0,00132	0,00520	0,01419	0,02962	0,05038	0,07291	0,09259
14		0,00000	0,00006	0,00047	0,00223	0,00709	0,01692	0,03238	0,05208	0,07275
15			0,00002	0,00016	0,00089	0,00331	0,00903	0,01943	0,03472	0,05335
16			0,00000	0,00005	0,00033	0,00145	0,00451	0,01093	0,02170	0,03668
17				0,00001	0,00012	0,00060	0,00212	0,00579	0,01276	0,02373

Окончание таблицы П. 1

μ m	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
18				0,00000	0,00004	0,00023	0,00094	0,00289	0,00709	0,01450
19					0,00001	0,00009	0,00040	0,00137	0,00373	0,00840
20					0,00000	0,00003	0,00016	0,00062	0,00187	0,00462
21						0,00001	0,00006	0,00026	0,00089	0,00242
22						0,00000	0,00002	0,00011	0,00040	0,00121
23							0,00001	0,00004	0,00018	0,00058
24							0,00000	0,00002	0,00007	0,00027
25								0,00001	0,00003	0,00012
26								0,00000	0,00001	0,00005
27									0,00000	0,00002

Таблица П. 2 – Значения функции

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,39894	0,39892	0,39886	0,39876	0,39862	0,39844	0,39822	0,39797	0,39767	0,39733
0,1	0,39695	0,39654	0,39608	0,39559	0,39505	0,39448	0,39387	0,39322	0,39253	0,39181
0,2	0,39104	0,39024	0,38940	0,38853	0,38762	0,38667	0,38568	0,38466	0,38361	0,38251
0,3	0,38139	0,38023	0,37903	0,37780	0,37654	0,37524	0,37391	0,37255	0,37115	0,36973
0,4	0,36827	0,36678	0,36526	0,36371	0,36213	0,36053	0,35889	0,35723	0,35553	0,35381
0,5	0,35207	0,35029	0,34849	0,34667	0,34482	0,34294	0,34105	0,33912	0,33718	0,33521
0,6	0,33322	0,33121	0,32918	0,32713	0,32506	0,32297	0,32086	0,31874	0,31659	0,31443
0,7	0,31225	0,31006	0,30785	0,30563	0,30339	0,30114	0,29887	0,29659	0,29431	0,29200
0,8	0,28969	0,28737	0,28504	0,28269	0,28034	0,27798	0,27562	0,27324	0,27086	0,26848
0,9	0,26609	0,26369	0,26129	0,25888	0,25647	0,25406	0,25164	0,24923	0,24681	0,24439
1,0	0,24197	0,23955	0,23713	0,23471	0,23230	0,22988	0,22747	0,22506	0,22265	0,22025
1,1	0,21785	0,21546	0,21307	0,21069	0,20831	0,20594	0,20357	0,20121	0,19886	0,19652
1,2	0,19419	0,19186	0,18954	0,18724	0,18494	0,18265	0,18037	0,17810	0,17585	0,17360
1,3	0,17137	0,16915	0,16694	0,16474	0,16256	0,16038	0,15822	0,15608	0,15395	0,15183
1,4	0,14973	0,14764	0,14556	0,14350	0,14146	0,13943	0,13742	0,13542	0,13344	0,13147
1,5	0,12952	0,12758	0,12566	0,12376	0,12188	0,12001	0,11816	0,11632	0,11450	0,11270
1,6	0,11092	0,10915	0,10741	0,10567	0,10396	0,10226	0,10059	0,09893	0,09728	0,09566
1,7	0,09405	0,09246	0,09089	0,08933	0,08780	0,08628	0,08478	0,08329	0,08183	0,08038
1,8	0,07895	0,07754	0,07614	0,07477	0,07341	0,07206	0,07074	0,06943	0,06814	0,06687
1,9	0,06562	0,06438	0,06316	0,06195	0,06077	0,05959	0,05844	0,05730	0,05618	0,05508

Окончание таблицы П. 2

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,0	0,05399	0,05292	0,05186	0,05082	0,04980	0,04879	0,04780	0,04682	0,04586	0,04491
2,1	0,04398	0,04307	0,04217	0,04128	0,04041	0,03955	0,03871	0,03788	0,03706	0,03626
2,2	0,03547	0,03470	0,03394	0,03319	0,03246	0,03174	0,03103	0,03034	0,02965	0,02898
2,3	0,02833	0,02768	0,02705	0,02643	0,02582	0,02522	0,02463	0,02406	0,02349	0,02294
2,4	0,02239	0,02186	0,02134	0,02083	0,02033	0,01984	0,01936	0,01888	0,01842	0,01797
2,5	0,01753	0,01709	0,01667	0,01625	0,01585	0,01545	0,01506	0,01468	0,01431	0,01394
2,6	0,01358	0,01323	0,01289	0,01256	0,01223	0,01191	0,01160	0,01130	0,01100	0,01071
2,7	0,01042	0,01014	0,00987	0,00961	0,00935	0,00909	0,00885	0,00861	0,00837	0,00814
2,8	0,00792	0,00770	0,00748	0,00727	0,00707	0,00687	0,00668	0,00649	0,00631	0,00613
2,9	0,00595	0,00578	0,00562	0,00545	0,00530	0,00514	0,00499	0,00485	0,00470	0,00457
3,0	0,00443	0,00430	0,00417	0,00405	0,00393	0,00381	0,00370	0,00358	0,00348	0,00337
3,1	0,00327	0,00317	0,00307	0,00298	0,00288	0,00279	0,00271	0,00262	0,00254	0,00246
3,2	0,00238	0,00231	0,00224	0,00216	0,00210	0,00203	0,00196	0,00190	0,00184	0,00178
3,3	0,00172	0,00167	0,00161	0,00156	0,00151	0,00146	0,00141	0,00136	0,00132	0,00127
3,4	0,00123	0,00119	0,00115	0,00111	0,00107	0,00104	0,00100	0,00097	0,00094	0,00090
3,5	0,00087	0,00084	0,00081	0,00079	0,00076	0,00073	0,00071	0,00068	0,00066	0,00063
3,6	0,00061	0,00059	0,00057	0,00055	0,00053	0,00051	0,00049	0,00047	0,00046	0,00044
3,7	0,00042	0,00041	0,00039	0,00038	0,00037	0,00035	0,00034	0,00033	0,00031	0,00030
3,8	0,00029	0,00028	0,00027	0,00026	0,00025	0,00024	0,00023	0,00022	0,00021	0,00021
3,9	0,00020	0,00019	0,00018	0,00018	0,00017	0,00016	0,00016	0,00015	0,00014	0,00014
4,0	0,00013	0,00013	0,00012	0,00012	0,00011	0,00011	0,00011	0,00010	0,00010	0,00009
4,1	0,00009	0,00009	0,00008	0,00008	0,00008	0,00007	0,00007	0,00007	0,00006	0,00006
4,2	0,00006	0,00006	0,00005	0,00005	0,00005	0,00005	0,00005	0,00004	0,00004	0,00004
4,3	0,00004	0,00004	0,00004	0,00003	0,00003	0,00003	0,00003	0,00003	0,00003	0,00003
4,4	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002
4,5	0,00002	0,00002	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001
4,6	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001
4,7	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Таблица П. 3 – Значения функции Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,00000	0,37	0,14431	0,73	0,26730	1,10	0,36433
0,01	0,00399	0,38	0,14803	0,74	0,27035	1,11	0,36650
0,02	0,00798	0,39	0,15173	0,75	0,27337	1,12	0,36864
0,03	0,01197	0,40	0,15542	0,76	0,27637	1,13	0,37076
0,04	0,01595	0,41	0,15910	0,77	0,27935	1,14	0,37286
0,05	0,01994	0,42	0,16276	0,78	0,28230	1,15	0,37493
0,06	0,02392	0,43	0,16640	0,79	0,28524	1,16	0,37698
0,07	0,02790	0,44	0,17003	0,80	0,28814	1,17	0,37900
0,08	0,03188	0,45	0,17364	0,81	0,29103	1,18	0,38100
0,09	0,03586	0,46	0,17724	0,82	0,29389	1,19	0,38298
0,10	0,03983	0,47	0,18082	0,83	0,29673	1,20	0,38493
0,11	0,04380	0,48	0,18439	0,84	0,29955	1,21	0,38686
0,12	0,04776	0,49	0,18793	0,85	0,30234	1,22	0,38877
0,13	0,05172	0,50	0,19146	0,86	0,30511	1,23	0,39065
0,14	0,05567	0,51	0,19497	0,87	0,30785	1,24	0,39251
0,15	0,05962	0,52	0,19847	0,88	0,31057	1,25	0,39435
0,16	0,06356	0,53	0,20194	0,89	0,31327	1,26	0,39617
0,17	0,06749	0,54	0,20540	0,90	0,31594	1,27	0,39796
0,18	0,07142	0,55	0,20884	0,91	0,31859	1,28	0,39973
0,19	0,07535	0,56	0,21226	0,92	0,32121	1,29	0,40147
0,20	0,07926	0,57	0,21566	0,93	0,32381	1,30	0,40320
0,21	0,08317	0,58	0,21904	0,94	0,32639	1,31	0,40490
0,22	0,08706	0,59	0,22240	0,95	0,32894	1,32	0,40658
0,23	0,09095	0,60	0,22575	0,96	0,33147	1,33	0,40824
0,24	0,09483	0,61	0,22907	0,97	0,33398	1,34	0,40988
0,25	0,09871	0,62	0,23237	0,98	0,33646	1,35	0,41149
0,26	0,10257	0,63	0,23565	0,99	0,33891	1,36	0,41308
0,27	0,10642	0,64	0,23891	1,00	0,34134	1,37	0,41466
0,28	0,11026	0,65	0,24215	1,01	0,34375	1,38	0,41621
0,29	0,11409	0,66	0,24537	1,02	0,34614	1,39	0,41774
0,30	0,11791	0,67	0,24857	1,03	0,34849	1,40	0,41924
0,31	0,12172	0,675	0,25016	1,04	0,35083	1,41	0,42073
0,32	0,12552	0,68	0,25175	1,05	0,35314	1,42	0,42220
0,33	0,12930	0,69	0,25490	1,06	0,35543	1,43	0,42364
0,34	0,13307	0,70	0,25804	1,07	0,35769	1,44	0,42507
0,35	0,13683	0,71	0,26115	1,08	0,35993	1,45	0,42647
0,36	0,14058	0,72	0,26424	1,09	0,36214	1,46	0,42785

Продолжение таблицы П. 3

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,47	0,42922	1,87	0,46926	2,27	0,48840	2,67	0,49621
1,48	0,43056	1,88	0,46995	2,28	0,48870	2,68	0,49632
1,49	0,43189	1,89	0,47062	2,29	0,48899	2,69	0,49643
1,50	0,43319	1,90	0,47128	2,30	0,48928	2,70	0,49653
1,51	0,43448	1,91	0,47193	2,31	0,48956	2,71	0,49664
1,52	0,43574	1,92	0,47257	2,32	0,48983	2,72	0,49674
1,53	0,43699	1,93	0,47320	2,33	0,49010	2,73	0,49683
1,54	0,43822	1,94	0,47381	2,34	0,49036	2,74	0,49693
1,55	0,43943	1,95	0,47441	2,35	0,49061	2,75	0,49702
1,56	0,44062	1,96	0,47500	2,36	0,49086	2,76	0,49711
1,57	0,44179	1,97	0,47558	2,37	0,49111	2,77	0,49720
1,58	0,44295	1,98	0,47615	2,38	0,49134	2,78	0,49728
1,59	0,44408	1,99	0,47670	2,39	0,49158	2,79	0,49736
1,60	0,44520	2,00	0,47725	2,40	0,49180	2,80	0,49744
1,61	0,44630	2,01	0,47778	2,41	0,49202	2,81	0,49752
1,62	0,44738	2,02	0,47831	2,42	0,49224	2,82	0,49760
1,63	0,44845	2,03	0,47882	2,43	0,49245	2,83	0,49767
1,64	0,44950	2,04	0,47932	2,44	0,49266	2,84	0,49774
1,65	0,45053	2,05	0,47982	2,45	0,49286	2,85	0,49781
1,66	0,45154	2,06	0,48030	2,46	0,49305	2,86	0,49788
1,67	0,45254	2,07	0,48077	2,47	0,49324	2,87	0,49795
1,68	0,45352	2,08	0,48124	2,48	0,49343	2,88	0,49801
1,69	0,45449	2,09	0,48169	2,49	0,49361	2,89	0,49807
1,70	0,45543	2,10	0,48214	2,50	0,49379	2,90	0,49813
1,71	0,45637	2,11	0,48257	2,51	0,49396	2,91	0,49819
1,72	0,45728	2,12	0,48300	2,52	0,49413	2,92	0,49825
1,73	0,45818	2,13	0,48341	2,53	0,49430	2,93	0,49831
1,74	0,45907	2,14	0,48382	2,54	0,49446	2,94	0,49836
1,75	0,45994	2,15	0,48422	2,55	0,49461	2,95	0,49841
1,76	0,46080	2,16	0,48461	2,56	0,49477	2,96	0,49846
1,77	0,46164	2,17	0,48500	2,57	0,49492	2,97	0,49851
1,78	0,46246	2,18	0,48537	2,58	0,49506	2,98	0,49856
1,79	0,46327	2,19	0,48574	2,59	0,49520	2,99	0,49891
1,80	0,46407	2,20	0,48610	2,60	0,49534	3,00	0,49865
1,81	0,46485	2,21	0,48645	2,61	0,49547	3,01	0,49869
1,82	0,46562	2,22	0,48679	2,62	0,49560	3,02	0,49874
1,83	0,46638	2,23	0,48713	2,63	0,49573	3,03	0,49878
1,84	0,46712	2,24	0,48745	2,64	0,49585	3,04	0,49882
1,85	0,46784	2,25	0,48778	2,65	0,49598	3,05	0,49886
1,86	0,46856	2,26	0,48809	2,66	0,49609	3,06	0,49889

Окончание таблицы П. 3

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
3,07	0,49893	3,13	0,49913	3,19	0,49929	3,70	0,49989
3,08	0,49896	3,14	0,49916	3,20	0,49931	3,80	0,49993
3,09	0,49900	3,15	0,49918	3,30	0,49952	3,90	0,49995
3,10	0,49903	3,16	0,49921	3,40	0,49966	4,00	0,499968
3,11	0,49906	3,17	0,49924	3,50	0,49977	4,50	0,499997
3,12	0,49910	3,18	0,49926	3,60	0,49984	5,00	0,499999

Таблица П. 4 – Значение χ^2 распределения

В таблице представлены значения $\chi^2_{\alpha, \nu}$ в зависимости от числа свободы ν и вероятности α

$\alpha \backslash \nu$	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
1	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635	10,827
2	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210	13,815
3	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345	16,266
4	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277	18,467
5	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086	20,515
6	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812	22,457
7	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475	24,322
8	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090	26,125
9	12,242	14,684	16,919	19,669	21,666	27,877
10	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209	29,588
11	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725	31,264
12	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217	32,909
13	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688	34,528
14	18,151	21,064	23,685	26,783	29,141	36,123
15	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578	37,697
16	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000	39,252
17	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409	40,790
18	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805	42,312
19	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191	43,820
20	25,038	28,412	31,410	35,020	37,556	45,315
21	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932	46,797
22	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289	48,268
23	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638	49,728
24	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980	51,179
25	30,675	34,382	37,652	41,556	44,314	52,620
26	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642	54,052
27	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963	55,476
28	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278	56,893
29	35,139	38,087	42,557	46,693	49,588	58,302
30	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892	59,703

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
Перечень вопросов учебной программы по курсу “Высшая математика” для экономических специальностей (третий семестр)	4
1 Числовые ряды. Числовые ряды с положительными числами	6
2 Числовые ряды. Числовые ряды с положительными членами. Знакопеременные и знакочередующиеся ряды	16
3 Функциональные и степенные ряды.....	22
4 Элементы комбинаторики и операции над событиями	31
5 Классическое вероятностное пространство	39
6 Методы задания вероятностей	45
7 Свойства вероятностей	52
8 Независимые и зависимые эксперименты	60
9 Схема Бернулли	67
10 Предельные теоремы в схеме Бернулли	77
Литература	93
Приложения.....	95