УДК 530.12; 530.145; 537.8

МЕТОД КОММУТИРУЮЩИХ ОПЕРАТОРОВ И ОБОБЩЕНИЕ МЕТОДА ФУРЬЕ

*Доц. Андрушкевич И.Е. (**ВГТУ**)*

Задача построения аналитических решений волновых уравнений методом разделения переменных остается по-прежнему актуальной. Библиография работ, посвященных развитию классического метода Фурье, является обширной (см, например, [1-3]). Однако следует признать, что наиболее полно и последовательно исследовались возможности разделения переменных в уравнении Дирака в присутствии гравитационных и векторных полей. Из всех существующих ныне подходов к решению данной проблемы следует выделить метод коммутирующих операторов (МКО), предложенный в [4] и получивший свое развитие в [5 - 8] (этот метод известен также как “алгебраический метод разделения переменных в уравнении Дирака”).

Суть МКО заключается в построении преобразования, приводящего к представлению оператора уравнения Дирака в виде суммы коммутирующих операторов, каждый из которых действует по "своим" переменным $\hat{L}\psi = 0 \leftrightarrow \left\{\hat{K}_1 + \hat{K}_2\right\}\Psi = 0,\ \hat{K}_1\hat{K}_2 - \hat{K}_2\hat{K}_1 = 0.$ Характерной особенностью МКО является тот факт, что задача разделения переменных решается в рамках классического метода Фурье и, как следствие, успех достигается в тех случаях, когда компоненты метрического тензора $g_{\mu\nu}$ оказываются разделенными [4, 9], т.е. $g_{\mu\nu}\left(x^1, x^2, x^3, x^4\right) = \left(g\left(x^1\right)g\left(x^2\right)g\left(x^3\right)g\left(x^4\right)\right)_{\mu\nu}$.

Данные исследования были посвящены выяснению вопроса о соотношении МКО и обобщенного метода Фурье (ОМФ) [10, 11]. Уравнение Дирака в пространстве с метрикой

$$ds^2 = A_1 \cdot \left(dx^1\right)^2 + A_2 \cdot \left(dx^2\right)^2 + A_3 \cdot \left(dx^3\right)^2 - A_4 \cdot \left(dx^4\right)^2 \tag{1}$$

имеет вид [4]

$$\left\{\sum_{i=1}^{4} \frac{\tilde{\gamma}^i}{\sqrt{A_i}}\left(\frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial \ln A_i}{4\partial x^i}\right) + m_0\right\}\Phi = 0 \cdot \tag{2}$$

В соответствии с МКО, для волновой функции Φ следует принять

$$\Phi = \begin{bmatrix} \Phi_{1,1}\left(x^1\right)\cdot\Phi_{1,2}\left(x^2\right)\cdot\Phi_{1,3}\left(x^3\right)\cdot\Phi_{1,4}\left(x^4\right) \\ \Phi_{2,1}\left(x^1\right)\cdot\Phi_{2,2}\left(x^2\right)\cdot\Phi_{2,3}\left(x^3\right)\cdot\Phi_{2,4}\left(x^4\right) \\ \Phi_{3,1}\left(x^1\right)\cdot\Phi_{3,2}\left(x^2\right)\cdot\Phi_{3,3}\left(x^3\right)\cdot\Phi_{3,4}\left(x^4\right) \\ \Phi_{4,1}\left(x^1\right)\cdot\Phi_{4,2}\left(x^2\right)\cdot\Phi_{4,3}\left(x^3\right)\cdot\Phi_{4,4}\left(x^4\right) \end{bmatrix} \tag{3}$$

Выбирая явный вид матриц Дирака

$$\tilde{\gamma}^1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -I \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{\gamma}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{\gamma}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \\ -I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I & 0 & 0 \end{bmatrix}, \tilde{\gamma}^4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ I & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (4)$$

из (2) приходим к системе уравнений

$$\begin{gathered}
\frac{-I}{\sqrt{A_1}}\left(\frac{\partial}{\partial x^1} - \frac{\partial \ln A_1}{4\partial x^1}\right)\Phi_{4,1}\Phi_{4,2}\Phi_{4,3}\Phi_{4,4} - \frac{1}{\sqrt{A_2}}\left(\frac{\partial}{\partial x^2} - \frac{\partial \ln A_2}{4\partial x^2}\right)\Phi_{3,1}\Phi_{3,2}\Phi_{3,3}\Phi_{3,4} + \\
+ \frac{I}{\sqrt{A_3}}\left(\frac{\partial}{\partial x^3} - \frac{\partial \ln A_3}{4\partial x^3}\right)\Phi_{3,1}\Phi_{3,2}\Phi_{3,3}\Phi_{3,4} + \frac{I}{\sqrt{A_4}}\left(\frac{\partial}{\partial x^4} - \frac{\partial \ln A_4}{4\partial x^4}\right)\Phi_{4,1}\Phi_{4,2}\Phi_{4,3}\Phi_{4,4} + \\
+ m_0\Phi_{1,1}\Phi_{1,2}\Phi_{1,3}\Phi_{1,4} = 0, \\
\frac{I}{\sqrt{A_1}}\left(\frac{\partial}{\partial x^1} - \frac{\partial \ln A_1}{4\partial x^1}\right)\Phi_{3,1}\Phi_{3,2}\Phi_{3,3}\Phi_{3,4} + \frac{1}{\sqrt{A_2}}\left(\frac{\partial}{\partial x^2} - \frac{\partial \ln A_2}{4\partial x^2}\right)\Phi_{4,1}\Phi_{4,2}\Phi_{4,3}\Phi_{4,4} + \\
+ \frac{I}{\sqrt{A_3}}\left(\frac{\partial}{\partial x^3} - \frac{\partial \ln A_3}{4\partial x^3}\right)\Phi_{4,1}\Phi_{4,2}\Phi_{4,3}\Phi_{4,4} + \frac{I}{\sqrt{A_4}}\left(\frac{\partial}{\partial x^4} - \frac{\partial \ln A_4}{4\partial x^4}\right)\Phi_{3,1}\Phi_{3,2}\Phi_{3,3}\Phi_{3,4} + \\
+ m_0\Phi_{2,1}\Phi_{2,2}\Phi_{2,3}\Phi_{2,4} = 0, \\
\frac{-I}{\sqrt{A_1}}\left(\frac{\partial}{\partial x^1} - \frac{\partial \ln A_1}{4\partial x^1}\right)\Phi_{2,1}\Phi_{2,2}\Phi_{2,3}\Phi_{2,4} - \frac{1}{\sqrt{A_2}}\left(\frac{\partial}{\partial x^2} - \frac{\partial \ln A_2}{4\partial x^2}\right)\Phi_{1,1}\Phi_{1,2}\Phi_{1,3}\Phi_{1,4} + \\
+ \frac{-I}{\sqrt{A_3}}\left(\frac{\partial}{\partial x^3} - \frac{\partial \ln A_3}{4\partial x^3}\right)\Phi_{1,1}\Phi_{1,2}\Phi_{1,3}\Phi_{1,4} + \frac{I}{\sqrt{A_4}}\left(\frac{\partial}{\partial x^4} - \frac{\partial \ln A_4}{4\partial x^4}\right)\Phi_{2,1}\Phi_{2,2}\Phi_{2,3}\Phi_{2,4} + \\
+ m_0\Phi_{3,1}\Phi_{3,2}\Phi_{3,3}\Phi_{3,4} = 0, \\
\frac{I}{\sqrt{A_1}}\left(\frac{\partial}{\partial x^1} - \frac{\partial \ln A_1}{4\partial x^1}\right)\Phi_{1,1}\Phi_{1,2}\Phi_{1,3}\Phi_{1,4} + \frac{1}{\sqrt{A_2}}\left(\frac{\partial}{\partial x^2} - \frac{\partial \ln A_2}{4\partial x^2}\right)\Phi_{2,1}\Phi_{2,2}\Phi_{2,3}\Phi_{2,4} + \\
+ \frac{-I}{\sqrt{A_3}}\left(\frac{\partial}{\partial x^3} - \frac{\partial \ln A_3}{4\partial x^3}\right)\Phi_{2,1}\Phi_{2,2}\Phi_{2,3}\Phi_{2,4} + \frac{I}{\sqrt{A_4}}\left(\frac{\partial}{\partial x^4} - \frac{\partial \ln A_4}{4\partial x^4}\right)\Phi_{1,1}\Phi_{1,2}\Phi_{1,3}\Phi_{1,4} + \\
+ m_0\Phi_{4,1}\Phi_{4,2}\Phi_{4,3}\Phi_{4,4} = 0.
\end{gathered} \quad (5)$$

В [4] сформулированы необходимые и достаточные условия разделения переменных в (5) МКО

(а)
$$A_1 = a_{1,1}(x^1)\cdot a_{2,1}(x^2);\ A_2 = a_{2,2}(x^2);\ A_3 = a_{2,3}(x^2)\cdot a_{3,3}(x^3)\cdot a_{4,3}(x^4); \quad (6)$$
$$A_4 = a_{2,3}(x^2)\cdot a_{4,4}(x^4).$$

(б)
$$A_1 = a_{1,1}(x^1)\cdot a_{2,1}(x^2)\cdot a_{4,1}(x^4);\ A_2 = a_{2,2}(x^2); \quad (7)$$
$$A_3 = a_{2,1}(x^2)\cdot a_{3,3}(x^3)\cdot a_{4,3}(x^4);\ A_4 = a_{2,1}(x^2)\cdot a_{4,4}(x^4).$$

(в)
$$A_1 = a_{1,1}(x^1)\cdot a_{2,1}(x^2)\cdot a_{4,1}(x^4);\ A_2 = a_{2,2}(x^2); \quad (8)$$
$$A_3 = a_{2,1}(x^2)\cdot a_{3,3}(x^3);\ A_4 = a_{2,1}(x^2)\cdot a_{3,1}(x^3)\cdot a_{4,4}(x^4).$$

(г)
$$A_1 = a_{1,1}(x^1)\cdot a_{4,1}(x^4);\ A_2 = a_{2,2}(x^2)\cdot a_{4,2}(x^4); \quad (9)$$
$$A_3 = a_{3,3}(x^3)\cdot a_{4,3}(x^4);\ A_4 = a_{4,4}(x^4).$$

Пусть условие (6) выполнено только в части возможности отделения МКО переменных x^1, x^2 [4], т.е.

$$A_1 = a_{1,1}(x^1)\cdot a_{2,1}(x^2);\ A_2 = a_{2,2}(x^2);\ A_3 = a_{2,3}(x^2)\cdot a_{34,3}(x^3,x^4);$$
$$A_4 = a_{2,3}(x^2)\cdot a_{34,4}(x^3,x^4). \tag{10}$$

Тогда после отделения переменных x^1, x^2 уравнение Дирака по переменным x^3, x^4 примет вид [4] (матрицы Дирака по-прежнему определены, как и в (6))

$$\frac{-1}{\sqrt{a_{34,3}}}\left(\frac{\partial}{\partial x^3}-\frac{\partial\ln a_{34,3}}{4\partial x^3}\right)\Phi_{4,3}\Phi_{4,4}+\frac{-1}{\sqrt{a_{34,4}}}\left(\frac{\partial}{\partial x^4}-\frac{\partial\ln a_{34,4}}{4\partial x^4}\right)\Phi_{3,3}\Phi_{3,4}-K_{3,4}\Phi_{1,3}\Phi_{1,4}=0,$$

$$\frac{-1}{\sqrt{a_{34,3}}}\left(\frac{\partial}{\partial x^3}-\frac{\partial\ln a_{34,3}}{4\partial x^3}\right)\Phi_{3,3}\Phi_{3,4}+\frac{-1}{\sqrt{a_{34,4}}}\left(\frac{\partial}{\partial x^4}-\frac{\partial\ln a_{34,4}}{4\partial x^4}\right)\Phi_{4,3}\Phi_{4,4}-K_{3,4}\Phi_{2,3}\Phi_{2,4}=0, \tag{11}$$

$$\frac{1}{\sqrt{a_{34,3}}}\left(\frac{\partial}{\partial x^3}-\frac{\partial\ln a_{34,3}}{4\partial x^3}\right)\Phi_{2,3}\Phi_{2,4}+\frac{-1}{\sqrt{a_{34,4}}}\left(\frac{\partial}{\partial x^4}-\frac{\partial\ln a_{34,4}}{4\partial x^4}\right)\Phi_{1,3}\Phi_{1,4}-K_{3,4}\Phi_{3,3}\Phi_{3,4}=0,$$

$$\frac{1}{\sqrt{a_{34,3}}}\left(\frac{\partial}{\partial x^3}-\frac{\partial\ln a_{34,3}}{4\partial x^3}\right)\Phi_{1,3}\Phi_{1,4}+\frac{-1}{\sqrt{a_{34,4}}}\left(\frac{\partial}{\partial x^4}-\frac{\partial\ln a_{34,4}}{4\partial x^4}\right)\Phi_{2,3}\Phi_{2,4}-K_{3,4}\Phi_{4,3}\Phi_{4,4}=0.$$

Пусть, далее, компоненты метрического тензора удовлетворяют условиям

$$a_{34,3}^2=\left\{f_1(x^3)\cdot h_1(x^4)+f_2(x^3)\cdot h_2(x^4)\right\}\cdot\varphi_3(x^3)\cdot q_3(x^4),$$
$$a_{34,4}^2=\left\{f_1(x^3)\cdot h_1(x^4)+f_2(x^3)\cdot h_2(x^4)\right\}\cdot\varphi_4(x^3)\cdot q_4(x^4). \tag{12}$$

Легко видеть, что условия (10), (12) менее "жесткие", нежели (6), и при их выполнении МКО не может разделить x^3, x^4. Попытаемся решить эту задачу с помощью ОМФ-2.

Для применения к уравнению (11) ОМФ-2 волновую функцию следует представить в виде

$$\Phi=\begin{bmatrix}\Phi_{1,1}(x^1)\cdot\Phi_{1,2}(x^2)\cdot\Phi_{1,3}(x^3)\cdot\Phi_{1,4}(x^4)+F_{1,1}(x^1)\cdot F_{1,2}(x^2)\cdot F_{1,3}(x^3)\cdot F_{1,4}(x^4)\\ \Phi_{2,1}(x^1)\cdot\Phi_{2,2}(x^2)\cdot\Phi_{2,3}(x^3)\cdot\Phi_{2,4}(x^4)+F_{2,1}(x^1)\cdot F_{2,2}(x^2)\cdot F_{2,3}(x^3)\cdot F_{2,4}(x^4)\\ \Phi_{3,1}(x^1)\cdot\Phi_{3,2}(x^2)\cdot\Phi_{3,3}(x^3)\cdot\Phi_{3,4}(x^4)+F_{3,1}(x^1)\cdot F_{3,2}(x^2)\cdot F_{3,3}(x^3)\cdot F_{3,4}(x^4)\\ \Phi_{4,1}(x^1)\cdot\Phi_{4,2}(x^2)\cdot\Phi_{4,3}(x^3)\cdot\Phi_{4,4}(x^4)+F_{4,1}(x^1)\cdot F_{4,2}(x^2)\cdot F_{4,3}(x^3)\cdot F_{4,4}(x^4)\end{bmatrix}. \tag{13}$$

В этом случае вместо (11) имеем систему из четырех уравнений вида

$$\frac{-1}{\varphi_3(x^3)\cdot q_3(x^4)}\left(\frac{\partial}{\partial x^3}-\frac{\varphi_3'(x^3)}{8\cdot\varphi_3(x^3)}+\frac{\left\{f_1'(x^3)\cdot h_1(x^4)+f_2'(x^3)\cdot h_2(x^4)\right\}}{8\cdot\left\{f_1(x^3)\cdot h_1(x^4)+f_2(x^3)\cdot h_2(x^4)\right\}}\right)\Phi_{4,3}\Phi_{4,4}+$$

$$\frac{-1}{\varphi_3(x^3)\cdot q_3(x^4)}\left(\frac{\partial}{\partial x^3}-\frac{\varphi_3'(x^3)}{8\cdot\varphi_3(x^3)}+\frac{\left\{f_1'(x^3)\cdot h_1(x^4)+f_2'(x^3)\cdot h_2(x^4)\right\}}{8\cdot\left\{f_1(x^3)\cdot h_1(x^4)+f_2(x^3)\cdot h_2(x^4)\right\}}\right)F_{4,3}F_{4,4}+$$

$$\frac{-1}{\varphi_4(x^3)\cdot q_4(x^4)}\left(\frac{\partial}{\partial x^4}-\frac{q_4'(x^4)}{8\cdot q_4(x^4)}+\frac{\left\{f_1(x^3)\cdot h_1'(x^4)+f_2(x^3)\cdot h_2'(x^4)\right\}}{8\cdot\left\{f_1(x^3)\cdot h_1(x^4)+f_2(x^3)\cdot h_2(x^4)\right\}}\right)\Phi_{3,3}\Phi_{3,4}+$$

$$\frac{-1}{\varphi_4(x^3)\cdot q_4(x^4)}\left(\frac{\partial}{\partial x^4}-\frac{q_4'(x^4)}{8\cdot q_4(x^4)}+\frac{\{f_1(x^3)\cdot h_1'(x^4)+f_2(x^3)\cdot h_2'(x^4)\}}{8\cdot\{f_1(x^3)\cdot h_1(x^4)+f_2(x^3)\cdot h_2(x^4)\}}\right)F_{3,3}F_{3,4}-$$

$$-K_{3,4}\{f_1(x^3)\cdot h_1(x^4)+f_2(x^3)\cdot h_2(x^4)\}\{\Phi_{1,3}\Phi_{1,4}+F_{1,3}F_{1,4}\}=0. \qquad (14)$$

Проведенные исследования показали, что с использованием идеологии ОМФ-2 в уравнении (14) удается разделить переменные, если только на компоненты метрического тензора (12) дополнительно наложить ограничения

$$\varphi_3(x^3)=\varphi_4(x^3). \qquad (15)$$

И в этом случае требования (6) являются более строгими, чем (10), (12), (15).

Таким образом, в результате проведенных исследований можно констатировать факт: МКО является частным случаем ОМФ-2. Задачи, решаемые МКО, легко могут быть решены и ОМФ-2, но не наоборот.

Литература:

1. Морс Ф.М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. М. 1958.
2. Миллер У. Симметрия и разделение переменных. М. 1981.
3. Багров В.Г., Носков М.Д. Новые точные решения уравнения Дирака. ХП // Изв. ВУЗов. 1985.№1. С.85.
4. Андрушкевич И.Е., Шишкин Г.В. О критериях разделимости переменных в уравнении Дирака в гравитационных полях // ТМФ. 1987. Т.70. №2. С.289-302.
5. Shishkin G.V., Andrushkevich I.E. The variables separation in the General Relativity Dirac's equation // Abstracts of contributed Papers 11th international conference on General Relativity and Gravitation. Stockholm, Sweden, July 6 - 12, 1986. Vol. 2. P. 436.
6. Schiskin G.V. Two-component neutrino in gravitational fied. Nuovo cim. B. 1994. 109. № 6. P.617 - 633.
7. Shishkin G.V., Villalba V.M. Dirac Equation in External Vector Fields: Separation of Variables. // J. Math. Phus.1989. V. 30. № 9. P. 2132-2142.
8. Shishkin G.V., Villalba V.M. Dirac Equation in External Vector Fields: New Exact Solution/ // J. Math. Phus.1989. V. 30. № 10. P. 2373-2381.
9. Андрушкевич И.Е. Разделение переменных в уравнении Дирака в гравитационных полях с недиагональным метрическим тензором. - Вестник ВГТУ, 1995, С.74 - 78.
10. Андрушкевич И.Е. Об одном обобщении метода Фурье разделения переменных. - ЭВ & ЭС., 1998, № 2.
11. Скоробогатько В.Я. Исследования по качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными. Киев. Наукова думка. 1980.