УДК 517.982

МЕТОД МАЖОРАНТНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ В МЕТРИЧЕСКИХ ПРОСТРАНСТВАХ

Доцент Трубников Ю.В. (ВГТУ)

Абстрактная схема метода мажорантных уравнений изложена в монографии [2], с. 671; дальнейшее развитие этот метод получил в работах Рейнболдта [3]. Рассмотрим практически важный случай, когда мажорирующая функция φ представима в виде ряда:

$$\varphi(t) = \sum_{0 \le K < \infty} C_K t^k \tag{1}$$

Рассмотрим операторное уравнение

$$x = T(x), \tag{2}$$

в котором оператор T действует в полном метрическом пространстве (X, ρ); инвариантное множество, на котором оператор T мог бы быть сжимающим, заранее не известно.

1. Теорема. Пусть мажорантное уравнение

$$t = \sum_{0 \le k < \infty} C_k t^k \quad (c_k \ge 0,\ 0 \le t \le \infty), \tag{3}$$

имеет два положительных корня:

$$0 < t_* < t_{**} < \infty; \tag{4}$$

кроме того, при некотором $x_0 \in X$ выполнены неравенства

$$\rho(T(x), x_0) \le \sum_{0 \le k < \infty} C_k t^k \rho^k(x, x_0), \tag{5}$$

$$\rho(T(x), T(y)) \le [c_1 + \sum_{2 \le k < \infty} C_k \ (\sum_{0 \le j \le k-1} p^{k-1-j}(x, x_0) \bullet \rho^j(y, x_0))]\ \rho(x, y) \tag{6}$$

Неравенство (6) выполняется с теми же постоянными c_k ($1 \le k < \infty$), что и неравенство (5), в шаре S:

$$\rho(x, x_0) \le t_*, \quad \rho(y, x_0) \le t_*, \tag{7}$$

где t_* - меньший корень мажорантного уравнения.

Тогда в шаре S уравнение (2) имеет единственное решение.

Доказательство. Установим, прежде всего, инвариантность шара S относительно преобразования T. Пусть $\rho(x, x_0) \le t_*$, тогда в силу условия (5)

$$\rho(T(x), x_0) \le \sum_{0 \le k < \infty} C_k p^k (x, x_0) \le \sum_{0 \le k < \infty} C_k t_*^k = t_*.$$

Далее воспользуемся условием (6). Пусть $x, y \in S$, тогда

$$\rho(T(x), T(y)) \le [c_1 + \sum_{2 \le k < \infty} C_k \ (\sum_{0 \le j \le k-1} t_*^{k-1-j} t_*^j)]\ \rho(x, y) =$$

$$= (c_1 + \sum_{2 \le k < \infty} K C_k t_*^{k-1})\, \rho(x, y) = \varphi'(t_*)\, \rho(x, y).$$

В силу выпуклости функции φ производная $\varphi'(t_*)$ удовлетворяет неравенству

$$0 \le \varphi'(t_*) < 1, \tag{8}$$

и, следовательно, оператор T является в шаре S сжимающим. Заметим, что если $\varphi(t) = c_0 + c_1 t$, то корня t_{**} может не существовать.

Применим теорему 1 для установления достаточных условий существования ω-периодических решений уравнения

$$x^{(n)} + a_{n-1} x^{(n-1)} + \ldots + a_1 x^{(1)} + a_0 x = f(t) + \sum_{1 \le j \le m} b_j(t) x^j \qquad (9)$$

с комплексными коэффициентами $a_{n-1}, a_{n-2}, \ldots, a_1, a_0$ и ω-периодическими непрерывными функциями $f(t)$, $b_j(t)$ $(1 \le j \le m)$ (возможно комплекснозначными).

Через P_ω обозначим банахово пространство ω-периодических непрерывных функций $f: R \to \Phi$ (Φ - поле комплексных чисел) с supremum-нормой, через L - оператор, порожденный дифференциальным выражением

$$x^{(n)}(t) + a_{n-1} x^{(n-1)}(t) + \ldots + a_1 x^{(1)}(t) + a_0 x(t),$$

через $F(t, x)$ - правую часть уравнения (9).

В соответствии с установившейся терминологией оператор L будем называть регулярным в P_ω, если уравнение

$$L x = g \qquad (10)$$

при любой функции $g \in P_\omega$ однозначно разрешимо. Известно [1], что необходимым и достаточным условием регулярности L в P_ω является следующее:

$$\sigma(L) \cap I_\omega = \varnothing, \qquad (11)$$

где $\sigma(L)$ - множество всех корней характеристического уравнения

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_1 \lambda + a_0 = 0,$$

$$I_\omega = \{2k\pi i / \omega, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\}.$$

Известно также, что в случае выполнения условия (11), т.е. регулярности оператора L, единственное ω-периодическое решение уравнения (10) представимо в виде

$$\varphi(t) = \int_0^\omega G_n(s)\, g(t-s)\, ds, \qquad (12)$$

а функция Грина $G_n(s)$ имеет следующий в

$$G_n(s) = \sum_{1 \le k < \gamma} \sum_{m=0}^{p_k - 1} \frac{g_{s,1}{}^{(p_k - m - 1)}(\lambda_k)}{m!(p_k - m - 1)!} \frac{d_m}{dz^m}\left[\frac{(z-\lambda_k)^{p_k}}{q(z)}\right] \qquad (13)$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_\gamma$ - корни характеристического многочлена с кратностями $p_1, p_2, \ldots, p_\gamma$;

$$p_1 + p_2 + \ldots + p_\gamma = n;$$

$$g_{s,1}(\lambda) = e^{\lambda s}(1 - e^{\lambda\omega})^{-1},$$

$$q(z) = (z-\lambda_1)^{p_1}(z-\lambda_2)^{p_2} \bullet \ldots \bullet (z-\lambda_\gamma)^{p_\gamma},$$

т.е. является разделенной разностью (n-1)-го порядка функции $g_{s,1}(\lambda)$.

2. Теорема. Пусть оператор L регулярен в пространстве P_ω. Тогда если скалярное уравнение

$$t = \|L^{-1}\| \left(\|f\| + \sum_{1 \le j \le m} \|b_j\| t^j\right)$$

имеет два различных положительных корня t_* и t_{**}, то уравнение (9) имеет по крайней мере одно ω-периодическое решение φ, причем $\|\varphi\| \le t_*$. Более того, в шаре $S\_(0, t_*) = \{u \in P_\omega: \|u\| \le t_*\}$ других ω-периодических решений уравнение (9) не имеет.

Доказательство. Введем в рассмотрение нелинейный оператор Q: $P_\omega \to P_\omega$, положив

$$(Qx)(t) = \int_0^\omega G_n(s)\ F[t-s, x(t-s)]\, ds.$$

Для произвольного $x \in S\_(0, t_*)$ справедлива оценка:

$$|(Qx)(t)| \le \int_0^\omega |G_n(s)|\ |F[t-s, x(t-s)]|\ ds \le$$

$$\le ||L^{-1}||\ (||f|| + \sum_{1\le j\le m} ||b_j||\ ||x||^j) \le$$

$$\le ||L^{-1}||\ (||f|| + \sum_{1\le j\le m} ||b_j||\ t_*^j),$$

после чего остается применить теорему 1.

Рассмотрим далее обобщение понятия спектрального радиуса линейного оператора на случай нелинейных операторов в метрических пространствах.

Пусть существует конечный

$$\overline{\lim_{j\to\infty}} \left(\sup_{x,y,x\ne y} \frac{\rho(f^j(x), f^j(y))}{\rho(x,y)} \right)^{1/j} = d \qquad (14)$$

3. **Теорема**. Пусть (X, ρ) - полное метрическое пространство, оператор $f: X \to X$ непрерывен. Тогда при любом $\varepsilon > 0$ можно построить метрику $\rho_{d+\varepsilon}(x, y)$, эквивалентную метрике $\rho(x, y)$, в которой оператор f является $(d+\varepsilon)$-липшицевым.

Доказательство. Пусть задано $\varepsilon > 0$. В силу (14) можно указать такое n, что

$$(\forall x, y \in X)\ \ \rho(f^n(x), f^n(y)) \le (d+\varepsilon)^n \rho(x, y). \quad (15)$$

Положим

$$\rho_{d+\varepsilon}(x,y) = \rho(x, y) + \frac{\rho(f(x), f(y))}{d+\varepsilon} + \frac{\rho(f^2(x), f^2(y))}{(d+\varepsilon)^2} + \ldots + \frac{\rho(f^{n-1}(y))}{(d+\varepsilon)^{n-1}} \qquad (16)$$

Так как

$$\rho(x, y) \le \rho_{d+\varepsilon}(x, y),$$

то из сходимости $\rho_{d+\varepsilon}(x_m, y) \to 0$ при $m \to \infty$ вытекает сходимость $\rho(x_m, y) \to 0$. Если же $\rho(x_m, y) \to 0$ при $m \to \infty$, то

$$\rho(f^j(x_m), f^j(y)) \to 0,\ \ m \to \infty\ (0 \le j \le n-1)$$

в силу непрерывности оператора f.

Далее, применяя равенство (16), получаем, что

$$\rho_{d+\varepsilon}(f(x), f(y)) \le (d+\varepsilon)\, \rho_{d+\varepsilon}(x, y).$$

Теорема доказана.

Литература:

1. Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве.- М.: Наука, 1970.- 536 с.
2. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ.- М.: Наука, 1977.- 741 с.
3. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными.- М.: Мир, 1975.- 558 с.