УДК 530.145

ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД ФУРЬЕ И РАЗДЕЛЯЮЩИЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Доц. Андрушкевич И.Е. (ВГТУ),
лаб. Малышев А.Л. (ВГУ)

1. Введение. Актуальность поиска решений волновых уравнений не вызывает сомнений. В ряде случаев из всех существующих ныне методов наиболее предпочтительным является метод разделения переменных (РП) или метод Фурье. Метод Фурье был предложен для решения волнового уравнения Ж. Д'Аламбером (1749); с достаточной полнотой развит в начале 19 в. Ж. Фурье и в полной общности сформулирован М. В. Остроградским (1828). Идея метода Фурье заключается в сведении дифференциального уравнения в частных производных к совокупности систем обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) по каждой из переменных.

Идея РП реализована применительно к уравнениям, имеющим вид $\hat{L}\Psi = 0$. Частное решение Ψ ищется в виде произведения функций от одной переменной. Иные возможные представления решения не использовались.

Разделение переменных в волновых уравнениях оказывается возможным только в некоторых весьма специфических криволинейных координатах, называемых разделяющими системами координат (РСК).

Проблематике разделения переменных посвящено ряд исследований [1-8]. Однако следует констатировать факт, что разделить переменные классическим методом Фурье удается только в простейших случаях и в 11 ортогональных РСК (ОСК).

Анализ результатов известных исследований по тематике разделения переменных показывает, что естественным и многообещающим направлением обобщения классического метода РП является подход, заключающийся в представлении решения в виде суммы произведений функций от одной переменной. В этом случае при условии разделимости дифференциального оператора решение уравнения в частных производных сводится к поиску решений систем билинейных функциональных уравнений вида $\sum_{q=1}^{n} f_q(X) g_q(Y) = 0$, где X, Y - условное обозначение переменных. Теория построения решений подобных уравнений достаточно хорошо развита в работах В.Я. Скоробогатько [9].

В случае обобщения метода Фурье снова встает вопрос о РСК. Есть все основания полагать, что для обобщенного метода Фурье все их многообразие не будет исчерпываться известными 11 ОСК. Поэтому данная работа посвящена проблематике классификации ОСК, позволяющих разделить переменные в волновом уравнении обобщенным методом Фурье. В качестве объекта исследования выбрано уравнение Гельмгольца.

2. Разделение переменных в уравнении Гельмгольца обобщенным методом Фурье. Уравнение Гельмгольца имеет вид:

$$\Delta\Psi + k^2\Psi = 0, \qquad (2.1)$$

где Δ - оператор Лапласа, Ψ - волновая функция, k - постоянная.

В произвольной ОСК (u, v, w) вместо (2.1) имеем:

$$\left(\partial_u\left(\frac{e_v e_w}{e_u}\right)\partial_u + \partial_v\left(\frac{e_u e_w}{e_v}\right)\partial_v + \partial_w\left(\frac{e_u e_v}{e_w}\right)\partial_w + k^2 e_u e_v e_w\right)\Psi = 0, \qquad (2.2)$$

где $\partial_\alpha = \dfrac{\partial}{\partial\alpha}$; e_α $(\alpha = u,v,w)$ - коэффициенты Ламе.

Решение уравнения (2.2) будем искать в виде

$$\Psi = \sum_{l=1}^{n_\Psi} U_l(u)\, V_l(v)\, W_l(w)\,. \qquad (2.3)$$

При этом на коэффициенты Ламе наложим ограничения

$$\frac{e_\alpha e_\beta}{e_\gamma} = \sum_{i_\gamma=1}^{n_\gamma} F_{\gamma i_\gamma}(u) G_{\gamma i_\gamma}(v) H_{\gamma i_\gamma}(w)\,, \qquad (2.4)$$

где $\alpha,\beta,\gamma = u,v,w$; $\alpha\neq\beta, \alpha\neq\gamma, \beta\neq\gamma$.

В этом случае уравнение (2.2) может быть приведено к виду

$$\sum_{q=1}^{n} f_q(u)\, g_q(v)\, h_q(w) = 0, \qquad (2.5)$$

где $n = (n_u + n_v + n_w)n_\Psi + n_u n_v n_w n_\Psi$, а матрица функций $\|f_q\, g_q\, h_q\|$ $(q=\overline{1,n})$ имеет вид:

$$\begin{bmatrix} \partial_u(F_{ui}\,\partial_u U_l) & G_{ui}\,V_l & H_{ui}\,W_l \\ F_{vj}\,U_l & \partial_v(G_{vj}\,\partial_v V_l) & H_{vj}\,W_l \\ F_{wk}\,U_l & G_{wk}\,V_l & \partial_w(H_{wk}\,\partial_w W_l) \\ F_{ui}\,F_{vj}\,F_{wk}\,U_l & G_{ui}\,G_{vj}\,G_{wk}\,V_l & k^2 H_{ui}\,H_{vj}\,H_{wk}\,W_l \end{bmatrix}, \qquad (2.6)$$

$$i=\overline{1,n_u}\,,\ j=\overline{1,n_v}\,,\ k=\overline{1,n_w}\,,\ l=\overline{1,n_\Psi}\,.$$

Путем двукратного применения общего метода построения решений билинейных функциональных уравнений [9], модифицированного авторами, получены линейные зависимости, связывающие между собой функции в каждом матрице $\|f_q\|$, $\|g_q\|$, $\|h_q\|$ $(q=\overline{1,n})$. Эти зависимости образуют совокупность систем вида:

$$A_f\,\|f_q\| = 0\,;\ A_g\,\|g_q\| = 0\,;\ A_h\,\|h_q\| = 0\,, \qquad (2.7)$$

где A_f, A_g, A_h- матрицы Скоробогатько размерности $n\times n$ $(q=\overline{1,n})$.

В соотношениях (2.5) - (2.7) неизвестными являются матрицы

$$\|f_q\| = \begin{bmatrix} U \\ F_{ui} \\ F_{vj} \\ F_{wk} \end{bmatrix},\ \|g_q\| = \begin{bmatrix} V \\ G_{ui} \\ G_{vj} \\ G_{wk} \end{bmatrix},\ \|h_q\| = \begin{bmatrix} W \\ H_{ui} \\ H_{vj} \\ H_{wk} \end{bmatrix}, \qquad (2.8)$$

Вышеизложенное означает, что в уравнении (2.2) при ограничениях (2.3), (2.4) осуществлено разделение переменных.

3. Решение полученных систем ОДУ. Системы ОДУ (2.7) с функциями (2.8) можно решить в аналитическом виде. При этом из этих систем можно выделить алгебраические подсистемы (АП) относительно функций

$$\begin{bmatrix} F_{ui} \\ F_{vj} \\ F_{wk} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} G_{ui} \\ G_{vj} \\ G_{wk} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} H_{ui} \\ H_{vj} \\ H_{wk} \end{bmatrix} \tag{3.1}$$

соответственно ($i = \overline{1,n_u}$, $j = \overline{1,n_v}$, $k = \overline{1,n_w}$). Эти подсистемы переопределены.

Решая АП методом исключения неизвестных, получаем набор решений относительно функций из (2.8) по каждой переменной. При этом можно получить такие решения, в которых часть функций

$$\|F_r\|,\ \|G_s\|,\ \|H_t\| \tag{3.2}$$

оказываются независимыми ($r = \overline{1,m_F}$, $s = \overline{1,m_G}$, $t = \overline{1,m_H}$). Такие решения являются нетривиальными и значимыми.

Кроме АП в данных системах ОДУ остаются дифференциальные подсистемы, из которых можно найти функции

$$\|U_l\|,\ \|V_l\|,\ \|W_l\| \tag{3.3}$$

($l = \overline{1,n_\Psi}$). После решения этих подсистем функции (3.3) оказываются выраженными через функции (3.2), и окончательное решение систем ОДУ (2.7) можно записать в виде:

$$\left\| \begin{aligned} \begin{bmatrix} U_l \\ F_{\alpha i_\alpha} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} U_l(F_1,\ldots,F_{m_F}) \\ F_{\alpha i_\alpha}(F_1,\ldots,F_{m_F}) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} V_l \\ G_{\alpha i_\alpha} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} V_l(G_1,\ldots,G_{m_G}) \\ G_{\alpha i_\alpha}(G_1,\ldots,G_{m_G}) \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} W_l \\ H_{\alpha i_\alpha} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} W_l(H_1,\ldots,H_{m_H}) \\ H_{\alpha i_\alpha}(H_1,\ldots,H_{m_H}) \end{bmatrix} \end{aligned} \right\|, \tag{3.4}$$

где $i_\alpha = \overline{1,n_\alpha}$, $l = \overline{1,n_\Psi}$, $\alpha = u,v,w$.

4.Классификация РСК. Из (2.4) для коэффициентов Ламе с необходимостью получаем:

$$e_\alpha^2 = \sum_{i_\alpha=1}^{n_{\beta\gamma}} R_{\alpha i_\alpha}(F_1,\ldots,F_{m_F}) S_{\alpha i_\alpha}(G_1,\ldots,G_{m_G}) T_{\alpha i_\alpha}(H_1,\ldots,H_{m_H}), \tag{4.1}$$

где $n_{\beta\gamma} = n_\beta n_\gamma$, $R_{\alpha i_\alpha}, S_{\alpha i_\alpha}, T_{\alpha i_\alpha}$ - некоторые функции соответствующих переменных ($\alpha,\beta,\gamma = u,v,w$, $\alpha \neq \beta, \alpha \neq \gamma, \beta \neq \gamma$).

Используя определение коэффициентов Ламе

$$e_\alpha^2 = (\partial_\alpha x)^2 + (\partial_\alpha y)^2 + (\partial_\alpha z)^2 \tag{4.2}$$

($\alpha = u,v,w$) и их вид (4.1), легко получить дифференциальные уравнения, решение которых будет задавать функциональную связь декартовых координат и РСК. Решить эти уравнения в общем виде нам пока не удается (а может и невозможно!?). Однако, если решение искать в виде

$$\xi=\sum_{i_\xi=1}^{n_\xi}\xi_{ui_\alpha}(u)\xi_{vi_\alpha}(v)\xi_{wi_\alpha}(w) \qquad , \tag{4.3}$$

где $\xi=x,y,z$, $\alpha=u,v,w$, то упомянутые дифференциальные уравнения сводятся к системам уже рассмотренных билинейных функциональных уравнений.

Рассмотрение уравнения Гельмгольца для случая $n_\Psi=1$, $n_u, n_v, n_w=2$ позволило получить все 11 известных РСК. Так, решения упомянутых систем билинейных уравнений для случая $n_x=1$, $n_y=1$, $n_z=3$ содержат как частный случай соотношения, соответствующие параболоидальной системе координат.

5.Заключение. Таким образом, разработанный метод классификации РСК, названный обобщенным методом Фурье, позволяет получать более широкие классы РСК, чем те, которые были получены до этого. Задача нахождения этих классов является предметом дальнейших исследований.

Литература:

1. Bocher M., Über die Reihenentwickelungen der Potentialtheorie, Leipzig, 1894 (диссертация).
2. Eisenhart L.P., Separable Systems of Staeckel, Ann. Math., 35, 284 (1934).
3. Eisenhart L.P., Separable Systems in Euclidean 3-space, Phys. Rev., 45, 427 (1934).
4. Eisenhart L.P., Potentials for Which Shroedinger Equations Are Separable, Phys. Rev., 74, 87 (1948).
5. Michel, Exhaustion of Newmann's Mode of Solution for the Motion of Solids of Revolution etc. Messenger of Mathematics, 19, 83 (1890).
6. Redheffer R.M., Separation of Laplace's Equation, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, 1948 (диссертация).
7. Robertson H.P., Bemerkung über separierbare Systems in der Wellenmechanic, Math. Ann., 98, 749 (1927).
8. Морс Ф.М., Фешбах Г. "Методы теоретической физики", Москва, ИИЛ, 1958.
9. Скоробогатько В.Я. "Исследования по качественной теории дифференциальных уравнений с частными производными", Киев, Навукова думка, 1980.