

СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН

Саркисян А. А., Саркисян С. О.

Основные уравнения динамических изгибных колебаний микрополярных упругих тонких пластин со свободным вращением с учетом всех вращательно-сдвиговых деформаций имеют вид [1]:

Уравнения движения

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial N_{23}}{\partial x_2} &= 2\rho h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - 2\tilde{p}_3, & L_{33} - \frac{\partial \Lambda_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \Lambda_{23}}{\partial x_2} - (M_{12} - M_{21}) + \frac{2Jh^3}{3} \frac{\partial^2 t}{\partial t^2} &= 2h\tilde{m}_3 \\ \frac{\partial L_{ii}}{\partial x_i} + \frac{\partial L_{jj}}{\partial x_j} + (-1)^j (N_{j3} - N_{3j}) &= 2Jh \frac{\partial^2 \Omega_i}{\partial t^2} - 2\tilde{m}_i, & N_{3i} - \frac{\partial M_{ii}}{\partial x_i} - \frac{\partial M_{jj}}{\partial x_j} + \frac{2\rho h^3}{3} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} &= 2h\tilde{p}_i \end{aligned} \quad (1)$$

Физические соотношения

$$\begin{aligned} N_{i3} &= 2h[(\mu + \alpha)\Gamma_{i3} + (\mu - \alpha)\Gamma_{3i}], & N_{3i} &= 2h[(\mu + \alpha)\Gamma_{3i} + (\mu - \alpha)\Gamma_{i3}] \\ M_{ii} &= \frac{2Eh^3}{3(1-\nu^2)}(K_{ii} + \nu K_{jj}), & M_{ij} &= \frac{2h^3}{3}[(\mu + \alpha)K_{ij} + (\mu - \alpha)K_{ji}] \\ L_{ii} &= 2h\left[\frac{4\gamma(\beta + \gamma)}{\beta + 2\gamma}\kappa_{ii} + \frac{2\beta\gamma}{\beta + 2\gamma}\kappa_{jj}\right] + \frac{\beta}{\beta + 2\gamma}L_{33}, & L_{ij} &= 2h[(\gamma + \varepsilon)\kappa_{ij} + (\gamma - \varepsilon)\kappa_{ji}] \\ \Lambda_{i3} &= \frac{2h^3}{3} \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon}l_{i3}, & L_{33} &= 2h[(\beta + 2\gamma)t + \beta(\kappa_{11} + \kappa_{22})] \end{aligned} \quad (2)$$

Геометрические соотношения

$$\begin{aligned} K_{ii} &= \frac{\partial \psi_i}{\partial x_i}, & K_{ij} &= \frac{\partial \psi_j}{\partial x_i} - (-1)^j t, & \Gamma_{3i} &= \psi_i - (-1)^j \Omega_j, & \Gamma_{i3} &= \frac{\partial w}{\partial x_i} + (-1)^j \Omega_j \\ \kappa_{ii} &= \frac{\partial \Omega_i}{\partial x_i}, & \kappa_{ij} &= \frac{\partial \Omega_j}{\partial x_i}, & l_{i3} &= \frac{\partial t}{\partial x_i}, & i, j &= 1, 2; i \neq j \end{aligned} \quad (3)$$

Рассмотрим граничные условия шарнирного опирания:

$$w = 0, \quad M_{ii} = 0, \quad L_{ij} = 0, \quad \Omega_i = 0, \quad \psi_j = 0, \quad \Lambda_{i3} = 0, \quad \text{при } x_i = 0; a \quad (4)$$

Основные уравнения микрополярных пластин со свободным вращением относительно w , ψ_i , Ω_i и t будут выражаться так (когда внешние усилия и моменты отсутствуют):

$$\begin{aligned} (\mu + \alpha)\nabla^2 w + (\mu - \alpha)\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}\right) + 2\alpha\left(\frac{\partial \Omega_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \Omega_1}{\partial x_2}\right) &= \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \\ (\mu + \alpha)\psi_i + (\mu - \alpha)\frac{\partial w}{\partial x_i} - (-1)^j 2\alpha\Omega_j - \frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)}\left[\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_i^2} + \nu \frac{\partial^2 \psi_j}{\partial x_i \partial x_j}\right] - \\ - \frac{h^2}{3}\left[(\mu + \alpha)\frac{\partial^2 \psi_i}{\partial x_j^2} + (\mu - \alpha)\frac{\partial^2 \psi_j}{\partial x_i \partial x_j} + (-1)^j 2\alpha \frac{\partial t}{\partial x_j}\right] + \frac{\rho h^2}{3} \frac{\partial^2 \psi_i}{\partial t^2} &= 0 \\ (\beta + 2\gamma)\frac{\partial^2 \Omega_i}{\partial x_i^2} + (\gamma + \varepsilon)\frac{\partial^2 \Omega_j}{\partial x_j^2} + (\beta + \gamma - \varepsilon)\frac{\partial^2 \Omega_j}{\partial x_i \partial x_j} + (-1)^j 2\alpha\left(\frac{\partial w}{\partial x_j} - \psi_j\right) - 4\alpha\Omega_i + \beta \frac{\partial t}{\partial x_i} &= J \frac{\partial^2 \Omega_i}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (5)$$

$$(\beta + 2\gamma)\iota + \beta \left(\frac{\partial \Omega_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \Omega_2}{\partial x_2} \right) - \frac{h^2}{3} \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \nabla^2 \iota - 2\alpha \frac{h^2}{3} \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \psi_1}{\partial x_2} - 2\iota \right) + \frac{Jh^2}{3} \frac{\partial^2 \iota}{\partial t^2} = 0$$

∇^2 - двумерный оператор Лапласа $\nabla^2 = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$.

К системе основных уравнений микрополярных пластин со свободным вращением и граничным условиям (4) нужно присоединить также соответствующие начальные условия для $w, \partial w/\partial t, \psi_i, \partial \psi_i/\partial t, \Omega_i, \partial \Omega_i/\partial t, \iota, \partial \iota/\partial t$ (которые, конечно, в случае свободных колебаний не используются).

Решение граничной задачи (5),(4) при изучении собственных колебаний представим в виде:

$$\begin{aligned} w &= A_{mn}^1 e^{ip_{mn}t} \sin \frac{m\pi}{a} x_1 \sin \frac{n\pi}{b} x_2, \quad \Omega_1 = A_{mn}^2 e^{ip_{mn}t} \sin \frac{m\pi}{a} x_1 \cos \frac{n\pi}{b} x_2 \\ \Omega_2 &= A_{mn}^3 e^{ip_{mn}t} \cos \frac{m\pi}{a} x_1 \sin \frac{n\pi}{b} x_2, \quad \psi_1 = A_{mn}^4 e^{ip_{mn}t} \cos \frac{m\pi}{a} x_1 \sin \frac{n\pi}{b} x_2 \\ \psi_2 &= A_{mn}^5 e^{ip_{mn}t} \sin \frac{m\pi}{a} x_1 \cos \frac{n\pi}{b} x_2, \quad \iota = A_{mn}^6 e^{ip_{mn}t} \cos \frac{m\pi}{a} x_1 \cos \frac{n\pi}{b} x_2, \quad m, n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (6)$$

где $A_{mn}^1, A_{mn}^2, A_{mn}^3, A_{mn}^4, A_{mn}^5, A_{mn}^6$ - постоянные; p_{mn} - частоты собственных колебаний микрополярной прямоугольной пластинки со свободным вращением. Решение (5) удовлетворяет граничным условиям (4). Удовлетворяя дифференциальным уравнениям (5), в результате получим однородные алгебраические уравнения. Потребовав ненулевое решение, относительно собственных частот получим

$$p_{00} = \sqrt{\frac{3(\beta + 2\gamma)}{Jh^2} + \frac{4\alpha}{J}} \quad (7)$$

$$\text{Det} |a_m^{sl}| = 0, \quad \text{Det} |a_n^{sl}| = 0, \quad s, l = 1, 2, 3, \quad \text{Det} |a_{mn}^{sl}| = 0, \quad s, l = 1, 2, 3, 4, 5, 6 \quad (8)$$

где

$$a_m^{11} = Jp_{m0}^2 - (\beta + 2\gamma) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 - 4\alpha, \quad a_m^{12} = -2\alpha, \quad a_m^{13} = -\beta \frac{m\pi}{a}$$

$$a_m^{22} = \frac{\rho h^2}{3} p_{m0}^2 - (\mu + \alpha) - \frac{h^2}{3} (\mu + \alpha) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2, \quad a_m^{23} = 2\alpha \frac{h^2}{3} \frac{m\pi}{a}$$

$$a_m^{33} = \frac{Jh^2}{3} p_{m0}^2 - (\beta + 2\gamma) - 4\alpha \frac{h^2}{3} - \frac{h^2}{3} \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2, \quad a_m^{ks} = a_m^{sk}, \quad k, s = 1, 2, 3$$

$$a_n^{11} = Jp_{0n}^2 - (\beta + 2\gamma) \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 - 4\alpha, \quad a_n^{12} = 2\alpha, \quad a_n^{13} = -\beta \frac{n\pi}{b}$$

$$a_n^{22} = \frac{\rho h^2}{3} p_{0n}^2 - (\mu + \alpha) - \frac{h^2}{3} (\mu + \alpha) \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2, \quad a_n^{23} = -2\alpha \frac{h^2}{3} \frac{n\pi}{b}$$

$$a_n^{33} = \frac{Jh^2}{3} p_{0n}^2 - (\beta + 2\gamma) - 4\alpha \frac{h^2}{3} - \frac{h^2}{3} \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2, \quad a_n^{ks} = a_n^{sk}, \quad k, s = 1, 2, 3$$

$$a_{mn}^{11} = \rho p_{mn}^2 - (\mu + \alpha) \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right], \quad a_{mn}^{12} = 2\alpha \frac{n\pi}{b}, \quad a_{mn}^{13} = -2\alpha \frac{m\pi}{a}, \quad a_{mn}^{14} = -(\mu - \alpha) \frac{m\pi}{a}$$

$$\begin{aligned}
 a_{mn}^{15} &= -(\mu - \alpha) \frac{n\pi}{b}, \quad a_{mn}^{16} = 0, \quad a_{mn}^{22} = Jp_{mn}^2 - (\beta + 2\gamma) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 - (\gamma + \varepsilon) \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 - 4\alpha \\
 a_{mn}^{23} &= -(\beta + \gamma - \varepsilon) \frac{m\pi}{a} \frac{n\pi}{b}, \quad a_{mn}^{24} = 0, \quad a_{mn}^{25} = -2\alpha, \quad a_{mn}^{26} = -\beta \frac{m\pi}{a}, \quad a_{mn}^{34} = 2\alpha, \quad a_{mn}^{35} = 0, \quad a_{mn}^{36} = -\beta \frac{n\pi}{b} \\
 a_{mn}^{33} &= Jp_{mn}^2 - (\beta + 2\gamma) \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 - (\gamma + \varepsilon) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 - 4\alpha, \quad a_{mn}^{45} = - \left[\frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)} \nu + \frac{h^2}{3} (\mu - \alpha) \right] \frac{m\pi}{a} \frac{n\pi}{b} \\
 a_{mn}^{44} &= \frac{\rho h^2}{3} p_{mn}^2 - \frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)} \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 - \frac{h^2}{3} (\mu + \alpha) \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 - (\mu + \alpha), \quad a_{mn}^{46} = -2\alpha \frac{h^2}{3} \frac{n\pi}{b} \\
 a_{mn}^{55} &= \frac{\rho h^2}{3} p_{mn}^2 - \frac{Eh^2}{3(1-\nu^2)} \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 - \frac{h^2}{3} (\mu + \alpha) \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 - (\mu + \alpha), \quad a_{mn}^{56} = +2\alpha \frac{h^2}{3} \frac{m\pi}{a} \\
 a_{mn}^{66} &= \frac{Jh^2}{3} p_{mn}^2 - (\beta + 2\gamma) - 4\alpha \frac{h^2}{3} - \frac{h^2}{3} \frac{4\gamma\varepsilon}{\gamma + \varepsilon} \left[\left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b} \right)^2 \right], \quad a_{mn}^{ks} = a_{mn}^{sk}, \quad k, s = 1, 2, 3, 4, 5, 6
 \end{aligned}$$

Проанализируем результаты численных вычислений. По сравнению с классической теорией, по микрополярной теории получают дополнительные спектры частот. Это объясняется новыми степенями свободы частиц, которое обусловлено их свободным вращением. Кроме того цитируем тот весьма важный факт, что по микрополярной теории получается частота, в основном практически не зависящая от размеров пластинки.

Изучалась зависимость частот колебаний микрополярной балки от основной физической константы α . Легко убедиться, что при повышении значения физического константа α , низкая частота колебаний микрополярной пластинки резко возрастает. Это означает, что в выборе микрополярного материала есть определенная возможность регулировать значение низкой частоты колебания пластинки, и тем самым, возможно достижение в значительном разnose частот собственных и вынужденных колебаний пластинки, что важно при явлении резонанса.

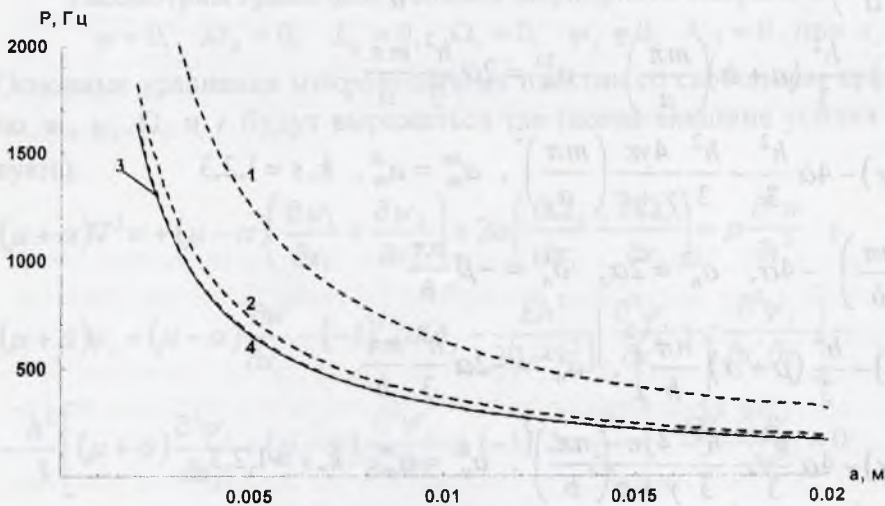


Рис. 1. Зависимость низкой частоты колебаний микрополярной пластинки от ее размера a при разных значениях α .

Можем делать также важный вывод. При более малых значениях физического параметра α (при $\alpha = 1,6 \cdot 10^2$) из микрополярной модели получают спектры частот собственных колебаний, весьма близкие получаемые по классической теории типа Тимошенко (также и дополни-

тельные частоты). На рис. 1 ($\mu = 2$ МПа, $\lambda = 3$ МПа, $\gamma = \varepsilon = 150$ Н, $\rho = 1114$ кг/м³,

$J=5,31 \cdot 10^{-6}$ кг/м) приведена зависимость низкой частоты колебания микро-полярных квадратной пластинки от ее размера a , при различных значениях физической константы α . Здесь пунктирные линии 1,2,3 соответствуют микрополярной модели, когда α имеет соответственно значения $\alpha = 1.6 \cdot 10^4$, $\alpha = 1.6 \cdot 10^3$, $\alpha = 1.6 \cdot 10^2$. Сплошная линия 4 соответствует классической модели.

Литература

1. Саркисян С. О. Общие математические модели микрополярных упругих тонких пластин // Известия НАН Армении. Механика. 2011. Т. 64. №1. С. 58-67.

ИЗДЕЛИЙ ИЗ ПОЛИМЕРНЫХ МАТЕРИАЛОВ: МОДЕЛИРОВАНИЕ И КИНЕТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ПРОЦЕССА

Ревяко М.М., Хрол Е.З.

Учреждение образования «Белорусский государственный технологический университет», г. Минск, Республика Беларусь, HZhenyaZ@mail.ru

Ротационное формование представляет собой процесс производства полых крупногабаритных пластмассовых изделий. Метод широко используется для изготовления резервуаров, контейнеров, баков.

В настоящее время подбор параметров технологического процесса на предприятиях производится опытным путем, что требует дополнительных материальных и энергетических затрат. Теории и точных математических зависимостей, которые бы описывали процесс ротационного формования, нет. Особый интерес ввиду этого связан с изучением и моделированием таких этапов процесса ротационного формования, как стадии нагрева и охлаждения в динамических и статических условиях.

В общем виде процесс ротационного формования можно представить следующим образом: дозированную порцию полимерного материала, соответствующую массе изготавливаемого изделия, помещают в полую, подобную оболочке форму. Оснастку закрывают и начинают вращать относительно двух взаимно перпендикулярных осей. Вращающуюся форму вместе с полимерным материалом помещают в камеру, где происходит их нагрев. В процессе нагревания пластмасса сплавляется, образуя на внутренней поверхности формирующего инструмента слой, при охлаждении которого образуется стенка готового изделия. После заданного времени охлаждения форму раскрывают, изделие извлекают, и цикл формования повторяют снова. Процесс ротационного формования можно представить в виде общей схемы (рисунок 1) [1, с. 222].

Одной из основных характеристик процесса является время формования. В работе более детально рассмотрена стадия спекания и произведен расчет времени t , необходимого для формования стенки изделия заданной толщины δ .

Схема процесса передачи тепла при ротационном формовании представлена на рисунке 2 [3].