

ПРЯМОЕ РЕШЕНИЕ ПЛОСКИХ ЗАДАЧ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ТЕРМОУПРУГОСТИ МЕТОДОМ ПОТЕНЦИАЛА

В.М. Хвисевич, А.И. Вермейчик

БрГТУ, г. Брест, Беларусь, E-mail: vmhvisевич@bstu.by

Потребности современной техники часто требуют исследований напряженно-деформированного состояния конструкций, которые подвергаются воздействию механических нагрузок и изменяющихся во времени температур. Особенно часто эти процессы необходимо исследовать при различных процессах термообработки поверхностного слоя конструктивных элементов машин и механизмов и выборе оптимальных способов и режимов процесса упрочнения. В инженерной практике существуют различные методы исследования напряженно-деформированного состояния. В настоящее время наиболее распространенными являются численные методы и в особенности метод конечных элементов (МКЭ). На основе его созданы различные программные продукты, реализующие широкий класс задач механики деформируемого твердого тела. В данной работе предлагается другой эффективный метод – метод граничных интегральных уравнений (ГИУ) теории потенциала, который обладает некоторыми преимуществами в сравнении с МКЭ [1, 2]. Основные из них: дискретизация только границы области, при сохранении точности решения; уменьшение затрат машинного времени.

Решение несвязанных нестационарных задач термоупругости осуществляется в 2 этапа. На первом этапе рассматривается нестационарная задача теплопроводности [3]:

$$\nabla^2 T = \frac{1}{a} \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (1)$$

где a – коэффициент температуропроводности, при соответствующих начальных и граничных условиях [4].

Решение этой задачи разыскиваем в виде потенциалов простого или двойного слоя [4], при соответствующих краевых условиях задачи.

При граничных условиях первого рода $F = F(y, t)$ получено интегральное уравнение для определения плотности потенциала $\mu(y, \tau)$:

$$\pm \frac{1}{2} \mu(x, t) + \frac{4a}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{d\tau}{(\sqrt{2a(t-\tau)})^5} \int_L K(y, x, t-\tau) \mu(y, \tau) dl = F(y, t). \quad (2)$$

Аналогичные уравнения получены при задании на поверхности граничных условий второго, третьего рода, а также смешанных граничных условий. В результате решения интегральных уравнений определяется плотность потенциалов и находится значение температуры в любой точке рассматриваемой области в данный момент времени. Следует отметить, что ядра интегральных уравнений имеют весьма сложный характер в силу их сингулярности.

После определения температурного поля на втором этапе реализуется краевая задача термоупругости, где необходимо решить дифференциальное уравнение [3]:

$$\Delta u_i + \frac{1}{1-2\nu} \text{grad div } u_i = \frac{2(1+\nu)}{1-2\nu} \alpha \text{ grad}(T - T_0), \quad (3)$$

при соответствующих граничных условиях. С помощью теории потенциала дифференциальные уравнения в частных производных заменяются интегральными уравнениями типа Фредгольма 2-го рода, которые удобны для численной реализации. Краевая задача сводится к задаче изотермической теории упругости. Получены ин-

тегральные уравнения для температурных добавок перемещений и напряжений. Численная реализация интегральных уравнений осуществляется с помощью метода механических квадратур. Интегралы вычисляются при помощи квадратурных формул Гаусса. По найденным значениям плотностей потенциала могут быть определены все компоненты тензора напряжений и деформаций в произвольной точке рассматриваемой области.

Разработанный алгоритм реализован на ПЭВМ. Может рассматриваться внешняя и внутренняя задача. Достоверность формул и точность алгоритма подтверждена решением тестовых задач. Рассмотрены некоторые задачи, решение которых можно провести аналитическими методами (прямоугольная пластина с отверстием, кольцевая область). Построены графики распределения температуры по контуру пластинки для различных моментов времени. Получены графики распределения компонентов напряжения и перемещения на контуре пластинки. На рисунке 1 приведено решение нестационарной задачи теплопроводности методом потенциала.

Граничные условия задачи Расчетная схема

Температура на внутренней поверхности $T_{R_1} = 100^\circ C$

Температура на наружной поверхности $T_{R_2} = 200^\circ C$

Начальная температура $T_0 = 0$

Коэффициент теплопроводности

$$\lambda = 15 \frac{Вт}{м \cdot ^\circ C}$$

Зависимость температуры от радиуса в момент времени 10 с

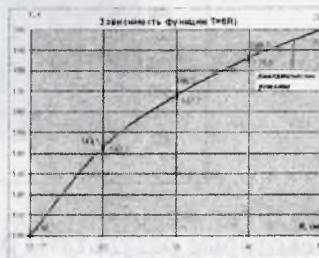


Рис.1. Решение задачи нестационарной теплопроводности для плоской области

Рассмотрено также плоское напряженно-деформированное состояние стальной прямоугольной пластинки с круглым отверстием. На контуре модели прикладывалась температурная нагрузка, которая действовала на протяжении 1 с. Затем приложенная нагрузка снималась и пластинка в течении 300 с находилась при комнатной температуре. При исследовании напряженно-деформированного состояния ставились следующие граничные условия: на внутреннем и внешнем контурах пластинки отсутствуют поверхностные силы, две внешние грани, а также нижняя и верхняя плоскости теплоизолированы, на двух других гранях происходит теплообмен с воздухом. Пластинка закреплена по нижней грани. В качестве исходных данных задавались также температуры на не теплоизолированных гранях (на наружной грани $T_H = 250^\circ C$, на внутренней $T_B = 50^\circ C$), характеристики материала (коэффициент

теплопроводности $\lambda = 60,5 \frac{Вт}{м \cdot ^\circ C}$, коэффициенты температурного расширения: на

наружной грани $\alpha_H = 15 \frac{Вт}{м^2 \cdot ^\circ C}$, на внутренней грани $\alpha_B = 30 \frac{Вт}{м^2 \cdot ^\circ C}$, модуль упру-

гости $E = 210 МПа$, коэффициент Пуассона $\nu = 0,3$), а также интервал времени нагружения (от 0 до 300 с). Симметрия рассматриваемой области позволяет ввести в рассмотрение $\frac{1}{4}$ часть пластинки, которая аппроксимировалась граничными элементами. Некоторые результаты решения задачи приведены на рисунке 2.

Расчетная схема

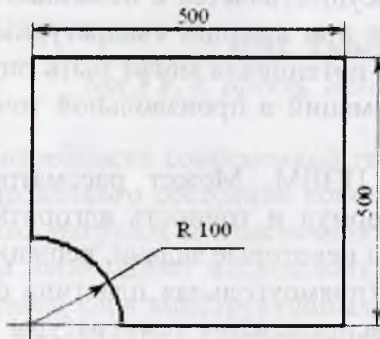


Рис. 2. Некоторые результаты решения нестационарной задачи термоупругости

Результаты определения перемещений, напряжений и температурных полей сравнивались с результатами расчетов, полученных с помощью программного комплекса ANSYS Workbench, построенного на базе метода конечных элементов [6], а также с результатами [3]. Точность численного решения высока для внутренних точек и удовлетворительна для точек, примыкающих к границе области. Небольшие затраты машинного времени для решения поставленной задачи методом ГИУ подтверждают эффективность метода и возможность его широкого использования в задачах теории упругости и термоупругости, в том числе и при термообработке деталей машин и механизмов.

Литература

1. Бреббия К., Телес Ж., Вроубел Л. Методы граничных элементов. – М.: Мир, 1987. – 524 с.
2. Крауч С., Старфилд А. Методы граничных элементов в механике твердого тела. – М.: Мир, 1987. – 328 с.
3. Коваленко А.Д. Основы термоупругости. – Киев: Наукова думка, 1970. – 239 с.
4. Коздоба Л.А. Методы решения нелинейных задач теплопроводности. – М.: Наука, 1975 г.
5. Веремейчик А.И. Граничные интегральные уравнения двумерных нестационарных краевых задач несвязанной термоупругости. // Актуальные проблемы динамики и прочности в теоретической механике: сб. научн. трудов / Белорус. нац. техн. ун-т; редкол.: Ю.В. Василевич [и др.]. – Минск: УП "Технопринт", 2001. – С. 99-103.
6. Веремейчик А.И., Юркевич К.С. Конечно-элементный расчет нестационарных полей температур в пластинке при воздействии сосредоточенного источника тепла. // Вестник БрГТУ. – 2007. – № 4: Машиностроение. – С. 44–46.