

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕЖИМОВ СТАЦИОНАРНОГО ДВИЖЕНИЯ ГИБКОЙ НЕРАСТЯЖИМОЙ НИТИ НА ВРАЩАЮЩЕМСЯ ШКИВЕ

В.Н. Сакевич, А.В. Щелкунов

Во многих машинах и приборах в качестве элементов конструкции или чувствительных упругих элементов используют абсолютно гибкие стержни, имеющие продольное движение. Классическим примером таких упругих элементов являются передачи с гибкой связью. В текстильной промышленности в последнее время значительно увеличилась скорость вращения при намотке в рулоны готовой продукции, которые могут достигать 50—70 м/с. Гибкие нити используют и в системах управления объектами, движущимися по проводам. Скорость движущегося объекта достигает 100 м/с и более, поэтому исследование условий устойчивого движения гибких нитей важно для разработки таких машин и механизмов. В работах [1-3] получены уравнения контурного стационарного движения нити в общем виде и приведены результаты их численного решения.

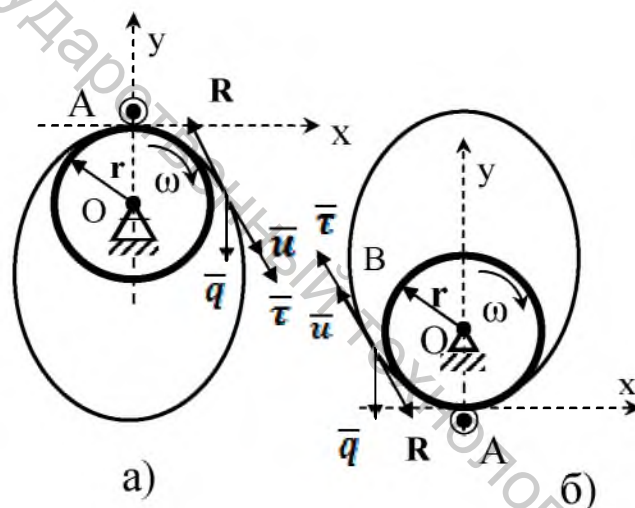


Рисунок 1 – Схема движения гибкой
нерастяжимой замкнутой нити

Целью настоящей работы является исследование влияния в вертикальной плоскости взаимного положения шкива и точки приложения равнодействующей сил тяжести замкнутого контура нити, а также больших сил сопротивления на устойчивость контурного движения нити [4].

Рассмотрим задачу о стационарном контурном движении гибкой нерастяжимой замкнутой нити, переброшенной через вращающийся шкив, как показано на рис. 1. Движение происходит в вертикальной плоскости, длина нити l . Пусть нить прижимается к вращающемуся с постоянной угловой скоростью ω шкиву роликом А, причем размером ролика в сравнении с радиусом r шкива можно пренебречь. Вне контакта со шкивом к нити приложены следующие силы, отнесенные к единице длины: сила тяжести $q = \frac{\rho g l}{l}$ где ρg – линейная плотность нити, и сила сопротивления движению R . Будем считать, что вектор R в каждой точке направлен по касательной к нити и постоянен по величине. Дуговую координату s будем отсчитывать от точки А по направлению движения нити. Дифференциальные уравнения в случае контурного стационарного движения нити имеют вид [1-3]

$$d(T^2(dx/ds))/ds + F_x = 0, \quad (1)$$

$$d(T^2(dy/ds))/ds + F_y = 0, \quad (2)$$

$$(dx/ds)^2 + (dy/ds)^2 = 1, \quad (3)$$

где $T^2 = \frac{1}{g}$, $dx/ds = \cos \alpha$, $dy/ds = \sin \alpha$, α и β – углы между касательной и осями координат x и y соответственно.

Будем рассматривать два случая положения прижимного ролика относительно шкива: сверху – рис. 1а и снизу – рис. 1б. Для обоих случаев (рис. 1а и рис. 1б)

$$F_x = R(dx/ds), \quad F_y = -R(dy/ds) - q. \quad (4)$$

Уравнения (1) и (2) с учетом проекций силы сопротивления движению нити (4) примут вид:

$$d(T^2(dx/ds))/ds - R(dx/ds) = 0, \quad (5)$$

$$d(T^2(dy/ds))/ds - R(dy/ds) - q = 0. \quad (6)$$

Отметим, что, как следует из уравнений (5) и (6), положение прижимного ролика относительно шкива не влияет на режимы движения нити. Это означает, что точка приложения равнодействующей силы тяжести выше или ниже точки подвеса замкнутой нити не влияет на стабилизацию замкнутого контурного движения.

Интегрируя уравнения (5) и (6), получим

$$T^2(dx/ds) - R \cdot x = C_1, \quad (7)$$

$$T^2(dy/ds) - R \cdot y - q \cdot s = C_2. \quad (8)$$

Умножая уравнение (5) на dx/ds , а (6) на dy/ds , затем складывая их с учетом соотношения (3) и интегрируя полученное выражение, найдем

$$T^2 - R \cdot s + q \cdot y + C_3. \quad (9)$$

Исключая натяжение T^2 из решений (7) и (8) и разрешая их относительно производных, получим

$$dx/ds = (C_1 + R \cdot x)/(C_3 + q \cdot y + R \cdot s), \quad (10)$$

$$dy/ds = (C_2 + q \cdot s + R \cdot y)/(C_3 + q \cdot y + R \cdot s). \quad (11)$$

Уравнение (11) сведем к однородному, вводя новые переменные:

$$s = \xi + h, \quad y = \eta + k, \quad (12)$$

где h и k – пока ещё неопределенные постоянные. Имеем $ds = d\xi$, $dy = d\eta$ подставляя их в уравнение (11), получим

$$d\eta/d\xi = (q \cdot \xi + R \cdot \eta + q \cdot h + R \cdot k + C_2)/(R \cdot \xi + q \cdot \eta + R \cdot h + q \cdot k + C_3). \quad (13)$$

Постоянные h и k есть решения системы линейных уравнений

$$\begin{cases} q \cdot h + R \cdot k + C_2 = 0 \\ R \cdot h + q \cdot k + C_3 = 0 \end{cases} \quad (14)$$

С учетом выражений (14) уравнение (13) приводится к однородному уравнению

$$d\eta/d\xi = (q \cdot \xi + R \cdot \eta)/(R \cdot \xi + q \cdot \eta). \quad (15)$$

Система (14) не имеет решения, если определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, равен нулю: $q^2 - R^2 = 0$. При $q^2 - R^2 \neq 0$ система (14) имеет решение

$$\begin{cases} h = (C_2 \cdot q - C_3 \cdot R)/(R^2 - q^2), \\ k = (C_3 \cdot q - C_2 \cdot R)/(R^2 - q^2). \end{cases} \quad (16)$$

В уравнении (15) делаем подстановку $\eta = z \cdot \xi$, $d\eta/d\xi = z + \xi \cdot (dz/d\xi)$. Оно примет вид $z + \xi(dz/d\xi) = (q + R \cdot z)/(R + q \cdot z)$ или $\xi(dz/d\xi) = (1 - z^2)/(R/q + z)$.

Переменные разделяются: $a \frac{ds}{s} + (u+s)/(s^2-1) ds = 0$, где $u = R/q$. Интегрируем уравнение и, переходя к переменным (12), получим

$$(y-N)^2 - (s-N)^2 = C_2 [(y-N) + (s-N)] / [(y-N) - (s-N)]^{\mu}. \quad (17)$$

Из выражений (7), (8), (9) с учетом соотношения (3) следует зависимость между величинами x , y и s :

$$(R \cdot x + q \cdot y + C_2)^2 = (C_1 + R \cdot x)^2 + (C_2 + q \cdot y + R \cdot y)^2. \quad (18)$$

Четыре постоянные находятся из краевых условий. Например для случая, показанного на рисунках 1а и 1б: $x(s=0) = 0$, $y(s=0) = 0$, $x(s=l) = 0$, $y(s=l) = 0$.

Получается система уравнений

$$C_1^2 + C_2^2 - C_3^2 = 0, \quad (19)$$

$$C_1^2 + C_2^2 - C_3^2 + 2C_2q - 2C_1R + (qQ^2 - (RQ)^2) = 0, \quad (20)$$

$$(q^2 - R^2)/(R^2 - (R-N)^2) = [(C_1 - R - N)(R - R - 0)/(R - N)(R - R - N)]^{\mu}. \quad (21)$$

При $\mu = 2/2$ и $R = 0$ выражение (21) обращается в тождество, и из соотношений (16) получим

$$C_2 = -q/2, \quad C_3 = -R/2. \quad (22)$$

При этих значениях (22) находится C_1 :

$$C_1 = \mp (q/2) \sqrt{\mu^2 - 1}. \quad (23)$$

Знак произвольной постоянной C_1 найдем из условий, что при $\mu = 2/2$ в точке В $dx/ds = 0$, а $q > 0$ для рисунка 1а, $q < 0$ для рис. 1б. Из уравнения (10) получаем $C_1 = \pm R \cdot C_2$, откуда следует, что C_1 должно быть отрицательным для схемы рисунка 1а и положительным для схемы рис. 1б. Произвольную постоянную C_2 найдем из уравнения (17):

$$C_2 = (-1)^{n+1} R^2 / 4. \quad (24)$$

Из уравнения (17) получается уравнение для определения $y(s)$

$$(y-N)^2 - (s-N)^2 = C_2 [(y-N) + (s-N)] / [(y-N) - (s-N)]^{\mu}. \quad (25)$$

Определив $y(s)$ находим $x(s)$ соотношением (18):

$$x = \left[\pm q \sqrt{\mu^2 - 1} \mp 2 \sqrt{(R + qy - R/2)^2 - (Ry + qz - q/2)^2} \right] / 2R. \quad (26)$$

Натяжение нити (9) $T^0 = R \cdot x + q \cdot y - R/2$, или с учетом, что $T^0 = T \cdot \sin \alpha$ получим

$$T = m_0 w^2 + R \cdot x + q \cdot y - R/2. \quad (27)$$

Дополнительным необходимым условием существования равновесных форм нити (кроме независимости всех величин от времени) является положительность натяжения T . Из выражения (27) следует, что натяжение достигает минимального значения при $s = 0$, $y = 0$, т. е. $T = m_0 w^2 - R/2$ для схем на рис. 1а и 1б. Предельное значение скорости движения нити, при которой возможен стационарный режим движения (возможна равновесная форма при стационарном движении в покоящейся вязкой среде) находим из условия $m_0 w^2 - R/2 \geq 0$, или, после преобразований, из условия

$$w^2 / g \mu (1 + 2) - 0,5 a \tau / m_0 = w^2 / g \mu (1 - 0,5 b) > 0. \quad (28)$$

Считаем, что сила сопротивления среды $R = c w^2$ пропорциональна квадрату скорости элемента нити [1]. Предельное значение скорости, при котором возможно стационарное движение, получим из (28), т. е. при $b < 2$ стационарное движение возможно при любой скорости.

Отметим, что из выражения (26) следует, что x принимает действительные значения при выполнении условия $|\mu| > 1$, или

$$u^2/gl > 1/\alpha l/m_0 = 1/\lambda. \quad (29)$$

Из соотношения (29) следует, что стационарное движение нити в поле сил тяжести возможно только при наличии вязкой среды ($\mu \neq 0$), что получено в работе [2] при других условиях стационарного контурного движения нити.

Рассмотрим движение нити по горизонтальной поверхности. В этом случае силы тяжести нити не дают проекций на ось y . Чтобы исследовать этот случай, необходимо изменить только уравнение (6), принимающее вид

$$d(T \cdot (dy/ds))/ds - R(dy/ds) = 0. \quad (30)$$

В полученных решениях положим $g = 0$.

Натяжение (9) принимает вид

$$T^2 = R \cdot s + C_2. \quad (31)$$

Из зависимости (18) получается

$$(R \cdot s + C_2)^2 = (C_1 + R \cdot x)^2 + (C_2 + R \cdot y)^2. \quad (32)$$

Из уравнения (8) с помощью натяжения (31) получим уравнение с разделяющимися переменными $dy/(C_2 + R \cdot y) = dx/(C_1 + R \cdot x)$. Его решение имеет вид

$$(C_2 + R \cdot y) = C_4(C_1 + R \cdot x). \quad (33)$$

Так как при $s = 0$ $x = 0$, $y = 0$; при $s = l$ $x = 0$, $y = 0$, из решения (33) получаем $C_2 = 0$. Исключая постоянную C_2 из решения (33), найдем

$$(C_2 + R \cdot y) = 0. \quad (34)$$

Из уравнений (32) и (34) следует

$$(R \cdot s + C_2)^2 = (C_1 + R \cdot x)^2. \quad (35)$$

Удовлетворяя краевым условиям по s , получаем из соотношения (35) два уравнения

$$\begin{cases} C_2 = R \cdot l, \\ (R \cdot l + C_2)^2 = C_1^2, \end{cases} \quad (36)$$

их решение

$$C_1 = \mp(Rl/2); C_2 = -Rl/2. \quad (37)$$

Удовлетворяя краевым условиям, получаем из решения (34) $C_2 = 0$. Полученные соотношения позволяют полностью описать стационарное движение нити.

Предельное значение скорости, при котором возможно стационарное движение в горизонтальной плоскости, получим из формулы (31) с учетом постоянных (37):

$$u^2/gl((1/2)l - 0,5\alpha l/m_0) = u^2/gl(1 - 0,5\lambda) > 0, \quad (38)$$

т.е. при $b < 2$ стационарное движение возможно при любой скорости. В работе [4] показаны графически области существования таких равновесных форм контурного движения нерастяжимой замкнутой нити в вертикальной и в горизонтальной плоскостях.

Для экспериментальной проверки обнаруженных теоретически динамических эффектов была спроектирована, изготовлена экспериментальная установка и поставлен эксперимент.

На рис. 2 показана экспериментальная установка. На шкиве 1 замкнутая нить 5 поджимается к шкиву роликами 2. Прижим роликов фиксируется упругим элементом, например, резиновым кольцом или пружиной. На рис. 2 упругий элемент не показан. Механизм 4 позволяет изменять углы наклона движения нити в вертикальной плоскости. Его устройство понятно из рис. 2. Конструкция установки позволяет ориентировать замкнутое кольцо нити как в вертикальной, так и в горизонтальной плоскости. С помощью источника питания возможно регулировать обороты электродвигателя 3 постоянного тока от 0 и до 12000 об/мин.

Установка работает следующим образом: на шкив 1 одевается замкнутая нить 5 и поджимается к шкиву роликами 2, вторым шкивом (на рис. 2 не показан) вручную создаем натяжение замкнутой нити и включаем электродвигатель, дождаввшись стационарного движения нити, аккуратно убираем натяжной шкив. Далее следим за контурным движением замкнутой нити. При заданных параметрах возможно или продолжение устойчивого контурного движения, или его срыв. Для изучения движения в жидкости применяется схема, показанная на рис. 1а, а под установкой ставилась ванна с жидкостью, куда погружалась нить.

Опишем параметры, которые позволяет получить экспериментальная установка.

Оценим величину сил сопротивления при движении нити в воздухе [1]. Модуль силы лобового сопротивления $R = C \cdot \rho \cdot d \cdot u^2 / 2$ ($a = C \cdot \rho \cdot d / 2$) пропорционален плотности обтекающей среды $\rho_{\text{воздуха}} = 1,29 \text{ кг/м}^3$, квадрату скорости u ($u = \pi \cdot \omega \cdot r = 2,5 \text{ м/с}$) и диаметру нити d ($d = 5 \cdot 10^{-3} \text{ м}$, $C = 1,1$). Оценим значение $\mu = R/q$ и b при $m_0 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ кг/м}$ (нить из лавсана): $\mu = (1,1 \cdot 1,29 \cdot 2,5^2 \cdot 5 \cdot 10^{-3}) / (5 \cdot 10^{-3} \cdot 10 \cdot 2) = 0,44 < 1$,

$$b = a l / m_0 = (l \cdot C \cdot \rho \cdot d) / (2 \cdot m_0) = (1 \cdot 1,1 \cdot 1,29 \cdot 5 \cdot 10^{-3}) / (2 \cdot 5 \cdot 10^{-3}) = 0,7, u^2 / q l = 2,5^2 / 10 \cdot 1 = 0,625.$$

Неравенство (29) не выполняется, неравенство (38) выполняется, т. е. при заданных параметрах устойчивое контурное движение нити в вертикальной плоскости невозможно, оно возможно только в горизонтальной плоскости. Этот вывод подтвержден в эксперименте.

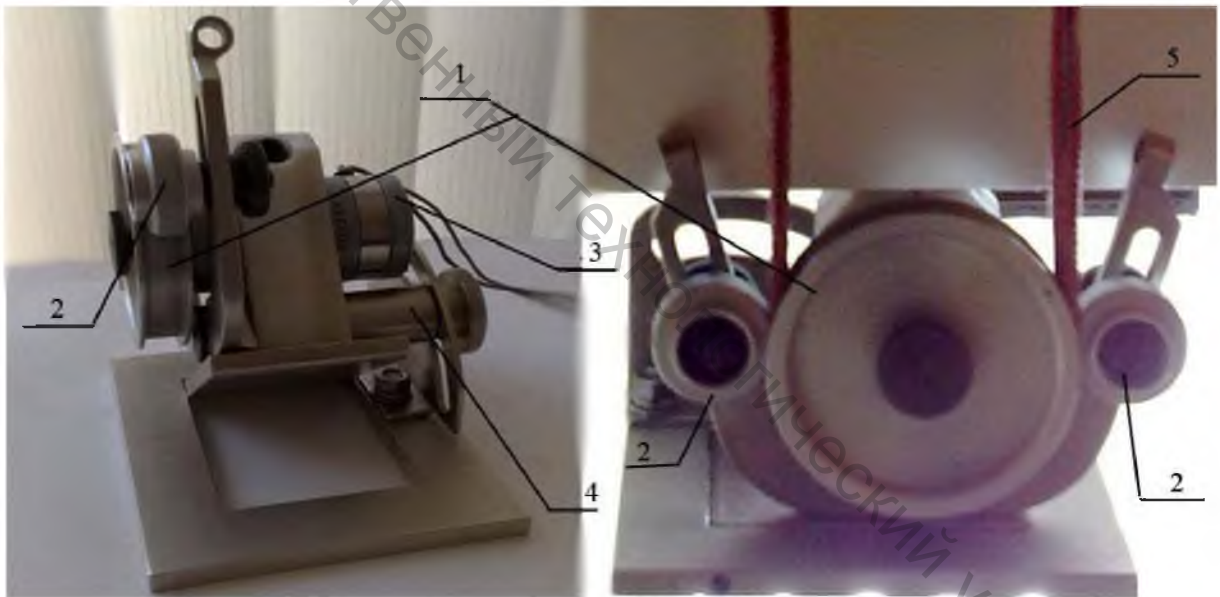


Рисунок 2 – Экспериментальная установка: 1 – шкив; 2 – поджимные ролики; 3 – электродвигатель постоянного тока; 4 – механизм для изменения начального угла наклона движения нити; 5 – замкнутая нить

ВЫВОДЫ

Исследовано теоретически и подтверждено экспериментально, что при контурном движении замкнутой гибкой нити в вертикальной плоскости положение шкива относительно замкнутого контура, т.е. контур нити находится над шкивом или под шкивом не влияет на устойчивость движения нити.

Показано, что только одним увеличением сил сопротивления добиться устойчивого контурного движения нити невозможно. Получены математические

выражения для границ областей существования устойчивых режимов движения в вертикальной и горизонтальной плоскостях.

Экспериментально обнаружено дестабилизирующее воздействие вибраций на устойчивость стационарных режимов. Источником вибраций являются удары утолщенных участков нити о прижимной ролик. Утолщения вызваны неравномерностью площади поперечного сечения по длине замкнутой нити и, в особенности, в местах её соединения.

Список использованных источников

1. Меркин, Д. Р. Введение в механику гибкой нити / Д. Р. Меркин. — Москва : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980. — 240 с.
2. Светлицкий, В. А. Механика гибких стержней и нитей / В. А. Светлицкий. — Москва : Машиностроение, 1978. — 222 с.
3. Основы механики нити / Ю. В. Якубовский [и др.]. — Москва : Легкая индустрия, 1973. — 271 с.
4. Сакевич, В. Н. Некоторые особенности стационарного движения замкнутой нити на вращающемся шкиве / В. Н. Сакевич, А. В. Щелкунов // Материалы докладов XLII научно-технической конференции преподавателей и студентов университета. — Витебск : УО «ВГТУ», 2009. — С.82-84.

SUMMARY

In work the problem about stationary planimetric movement of the flexible not extensible closed thread thrown through rotating pulley is solved theoretically. Areas of existence of such modes of movement are constructed. The basic theoretical conclusions are confirmed experimentally.

УДК 677.017.31

ПРОГНОЗИРОВАНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВОЛОКОН В ПОПЕРЕЧНЫХ СЕЧЕНИЯХ ХЛОПКОПОЛИПРОПИЛЕНОВОЙ ПРЯЖИ

Т.В. Силич, Д.Б. Рыклин

Информация о распределении разнородных волокон в поперечном сечении смешанной пряжи представляет большой интерес, поскольку позволяет не только выявить оптимальные условия формирования пряжи, но и прогнозировать ее структуру, а также потребительские свойства и фактуру тканей и трикотажных изделий. Существующие теоретические и статистические методы оценки распределения волокон в различных видах пряж постоянно совершенствуются. Однако до настоящего времени мало внимания уделялось исследованию структуры пряжи, полученной из смесей с вложением полипропиленового (ПП) волокна.

Полипропиленовое волокно – это сравнительно новый для отечественного хлопкопрядения вид сырья, имеет свои особенности с точки зрения физико-механических свойств волокон, их способности к окрашиванию и т.д. В связи с этим актуальной является задача разработки методики прогнозирования распределения хлопковых и полипропиленовых волокон по сечению пряжи. В данной работе в качестве объекта исследований была выбрана хлопкополипропиленовая пряжа линейной плотности 18,5 – 20 текс с вложением 20 – 30 % полипропиленового волокна.

На первом этапе работы была разработана математическая модель, описывающая процесс миграции разнородных волокон по сечению пряжи