ВЫЧИСЛЕНИЕ ГРАДИЕНТА ДЕФОРМАЦИИ ПРИ ЖЕСТКОМ НАГРУЖЕНИИ В ЭНДОХРОННОЙ ТЕОРИИ НЕУПРУГОСТИ ДЛЯ ПЛОСКОГО СЛУЧАЯ

Иванов Б. Ф., Кадашевич Ю. И., Помыткин С. П.

Технологический университет растительных полимеров,
Санкт-Петербург, Россия,
sppom@yandex.ru

В работах [1, 2] была предложена эндохронная теория неупругости, учитывающая большие деформации и повороты. Важную роль в этой теории играет градиент деформации [3], его структура и значение компонентов. Решается задача плоского жесткого нагружения, когда заданы постоянные ненулевые скорости деформаций

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тензор скоростей деформации D определяется классической формулой $D = (L + L^T)/2$, где $L = \dot{F}F^{-1}$ – скорость градиента деформации F. Пусть градиент деформации задан в форме (верхний индекс T обозначает операцию транспонирования)

$$F = \begin{pmatrix} a_1 & mb & 0 \\ b & a_2 & 0 \\ 0 & 0 & a_3 \end{pmatrix}.$$

Тогда, вычисляя последовательно F^{-1} (который всегда существует по условиям кинематики материальной точки), $\dot{F}$, L и D, получим дифференциальные уравнения

$$\dot{a}_1 a_2 - \dot{a}_2 a_1 = \Delta \cdot (D_{11} - D_{22}), \tag{1}$$

$$\dot{a}_1 a_2 + \dot{a}_2 a_1 - 2mb\dot{b} = \Delta \cdot (D_{11} + D_{22}), \tag{2}$$

$$\dot{b}(a_2 + m a_1) - b\left(\dot{a}_2 + m\dot{a}_1\right) = 2 \cdot \Delta \cdot D_{12}, \tag{3}$$

где $\Delta = a_1 a_2 - mb^2$. Четвертое уравнение системы – тривиальное: $\dot{a}_3 / a_3 = D_{33} = 0$. Система решается при естественных начальных условиях: $a_1(0) = 1$, $a_2(0) = 1$, $a_3(0) = 1$, $b(0) = b_0 \neq 0$ и $m = const$.

Соотношение (2) можно записать в виде $\dot{\Delta} = \Delta \cdot (D_{11} + D_{22})$, откуда

$$\Delta = \Delta_0 \cdot \exp((D_{11} + D_{22})\, t), \tag{4}$$

где $\Delta_0 = 1 - m b_0^2$.

Обозначим $(D_{11} + D_{22})/2 = q$ и будем искать решение (1), (3), (4) в виде: $a_1(t) = \exp(q\,t) \cdot u(t)$, $a_2(t) = \exp(q\,t) \cdot v(t)$, $b(t) = \exp(q\,t) \cdot w(t)$ при начальных условиях $u(0) = v(0) = 1$ и $w(0) = b_0$. Подставляя это в уравнения (1), (3) и (4), получим, что

$$\begin{cases} \dot{u}v - \dot{v}u = \Delta_0 \cdot (D_{11} - D_{22}) \\ \dot{w}(v + mu) - w\left(\dot{v} + m\dot{u}\right) = 2 \cdot \Delta_0 \cdot D_{12} \\ uv - mw^2 = \Delta_0 \end{cases}. \tag{5}$$

Введем обозначения $u/w = \xi$ и $v/w = \eta$. Тогда соотношения (5) примут вид

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\xi}{\eta}\right)^{\bullet} = \dfrac{1}{\eta^2}\left(\xi\,\eta - m\right)\left(D_{11} - D_{22}\right) \\ \left(\eta + m\,\xi\right)^{\bullet} = \left(\xi \cdot \eta - m\right) 2D_{12} \end{cases} \tag{6}$$

с начальными условиями: $\xi(0) = \xi_0 = 1/b_0$ и $\eta(0) = \eta_0 = 1/b_0$.

Пусть $D_{11} - D_{22} \neq 0$. Разделим второе уравнение в (6) на первое и получим, что

$$\frac{d\left(\eta + m\,\xi\right)}{d\left(\dfrac{\xi}{\eta}\right)} = \frac{2D_{12}}{D_{11} - D_{22}} \cdot \eta^2 .$$

Это уравнение можно свести к уравнению с разделяющимися переменными

$$\frac{d\left(\eta + m\,\xi\right)}{\left(\eta + m\,\xi\right)^2} = \frac{d\left(\dfrac{\xi}{\eta}\right)}{\left(1 + m\,\dfrac{\xi}{\eta}\right)^2} \cdot \frac{2D_{12}}{D_{11} - D_{22}} .$$

Его решение: $\dfrac{1 - M\,\eta}{\eta + m\,\xi} = \dfrac{b_0 - M}{1 + m}$, где $M = \dfrac{2D_{12}}{m\,(D_{11} - D_{22})}$. Отсюда следует, что

$$\eta = \frac{1 + m - m\,(b_0 - M)\,\xi}{b_0 + m\,M} . \tag{7}$$

Подставляя (7) в (6_1), можно получить дифференциальное уравнение

$$\overset{\bullet}{\omega} = \left[\omega - \frac{m\,(1 - B\,\omega)^2}{A^2}\right] \cdot (D_{11} - D_{22}) , \tag{8}$$

где $A = \dfrac{1 + m}{b_0 + m\,M}$, $B = \dfrac{m\,(M - b_0)}{b_0 + m\,M}$, $\eta = A + B\,\xi$, $\omega = \xi/\eta$. Раскрывая (8), получим

$$\overset{\bullet}{\omega} = \left(A_0\,\omega^2 + (1 + B_0)\,\omega + C_0\right) \cdot (D_{11} - D_{22}) . \tag{9}$$

Здесь

$$A_0 = -m^3\left(M_0 - d_0\right)^2 , \qquad B_0 = 2m^2\left(M_0 - d_0\right) \cdot \left(m\,M_0 + d_0\right),$$

$$C_0 = -m\left(d_0 - m\,M_0\right)^2 , \qquad d_0 = \frac{b_0}{1 + m} , \qquad M_0 = \frac{M}{1 + m} .$$

Чтобы решить дифференциальное уравнение (9), разложим правую часть на множители. Для этого приравняем правую часть к нулю и решим квадратное уравнение. Его корни таковы

$$\omega_{1,2} = \frac{1 + B_0 \mp \sqrt{1 + 2\,B_0}}{2m^3\left(M_0 - d_0\right)^2} . \tag{10}$$

В частности, если $M_0 = 0$, то есть если $D_{12} = 0$, то

$$\omega_{1,2} = \frac{1 - 2m^2 d_0^2 \pm \sqrt{1 - 4m^2 d_0^2}}{2m^3\,d_0^2} .$$

И если $d_0 = 1/(2m)$, то $\omega_1 = 1/m$. Тогда уравнение (9) принимает вид

$$\overset{\bullet}{\omega} = -\frac{m}{4} \cdot \left(1 - \frac{1}{m}\right)^2 (D_{11} - D_{22}) ,$$

и его решение имеет наиболее простую форму

$$\omega = \frac{1}{m}\left[1 + \frac{4(m-1)}{4 + (m-1)\left(D_{11} - D_{22}\right)t}\right].$$

Пусть решение уравнение (9) получено и $\omega = \varphi(t)$, тогда $\xi = \eta \cdot \varphi(t)$ и, воспользовавшись (7), можно получить, что

$$\xi = \frac{\varphi(t)}{d_0 + m M_0 + \varphi(t)(d_0 - M_0)m} = \varphi(t)\,\psi(t) \quad \text{и} \quad \eta = \frac{1}{d_0 + m M_0 + \varphi(t)(d_0 - M_0)m} = \psi(t).$$

Для вычисления функции $w(t)$ используем определения $u = \xi w$, $v = \eta w$ и (5_3). Тогда $\eta \xi w^2 - m w^2 = \Delta_0$ или $\left(\varphi(t)\psi^2(t) - m\right)\cdot w^2 = \Delta_0$, откуда следуют соотношения

$$w = \sqrt{\frac{\Delta_0}{\varphi(t)\psi^2(t) - m}}, \qquad u = \varphi(t)\psi(t)\cdot\sqrt{\frac{\Delta_0}{\varphi(t)\psi^2(t) - m}}, \qquad v = \psi(t)\sqrt{\frac{\Delta_0}{\varphi(t)\psi^2(t) - m}}.$$

1. Приведем решение для частного случая, когда $D_{11} = 1$, $D_{22} = 0$ и $D_{12} = 0$. Это соответствует одноосному растяжению в «жесткой» испытательной машине.

Если $b_0 = 0.75$ и $m = 2$, то $d_0 = 0.25$, $\Delta_0 = -0.125$. А затем последовательно:

$$\omega = \varphi(t) = \frac{8+t}{2(4+t)}, \quad \xi = \frac{4\varphi}{2\varphi+1}, \quad \eta = \frac{4}{2\varphi+1}, \quad w = \frac{2\varphi+1}{4(2\varphi-1)}, \quad u = \frac{\varphi}{2\varphi-1}, \quad v = \frac{1}{2\varphi-1},$$

$$a_1 = \frac{\varphi}{2\varphi-1}\cdot\exp\left(\frac{t}{2}\right), \quad a_2 = \frac{1}{2\varphi-1}\cdot\exp\left(\frac{t}{2}\right), \quad b = \frac{1}{2}\cdot\frac{2\varphi+1}{2\varphi-1}\cdot\exp\left(\frac{t}{2}\right).$$

2. Рассмотрим случай, когда $D_{11} - D_{22} = 0$. Из (6_1) видно, что $\xi = \eta$, а из (6_2) имеем $\frac{d\xi}{\xi^2 - m} = \frac{2D_{12}}{1+m}\,dt$. Решение имеет следующий вид

$$\xi = \sqrt{m}\left[\frac{\exp(N)\left(\xi_0 - \sqrt{m}\right) + \xi_0 + \sqrt{m}}{-\exp(N)\left(\xi_0 - \sqrt{m}\right) + \xi_0 + \sqrt{m}}\right] = \varphi_2(t),$$

причем $N = \frac{4\sqrt{m}\,D_{12}\,t}{1+m}$, если $\xi_0 > \sqrt{m}$ и $N = -\frac{4\sqrt{m}\,D_{12}\,t}{1+m}$, если $\xi_0 < \sqrt{m}$.

Из (6_3) находим $w = \sqrt{\frac{\Delta_0}{\varphi_2^2(t) - m}} = \varphi_3(t)$, тогда $u = v = \xi w = \varphi_2(t)\cdot\varphi_3(t)$. И, наконец, $a_1 = a_2 = u = v$, $b = w = \varphi_3(t)$. В частности, если $m = 4$, $b_0 = 3$, то

$$\xi = \frac{2\left(5 + \exp(1.6\,t)\right)}{5 - \exp(1.6\,t)}, \qquad 0 \le t \le t_0, \qquad t_0 = \frac{\ln 5}{1.6} \sim 1.$$

3. На рисунке приведены графики для компонентов градиента деформации $a_1(t)$, $a_2(t)$ и $b(t)$ в задаче чистого сдвига, когда $D_{11} = 0$, $D_{22} = 0$ и $D_{12} = 1$. В этом случае $a_1 = a_2 = a$. Компоненты вычислены для значений параметров $m = 2$, $b_0 = 0.75$.

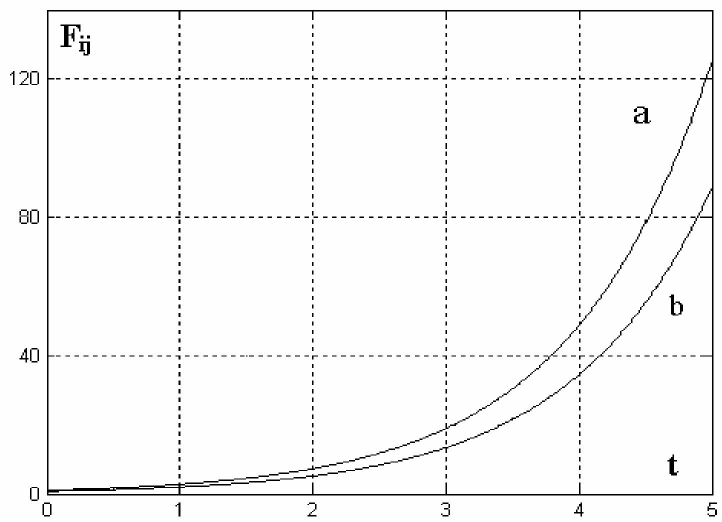
После того, как найдены все компоненты градиента деформаций F, записываются и решаются определяющие уравнения эндохронной теории неупругости для больших деформаций и поворотов [1, 2]

$$\alpha\tau\frac{\overset{\circ}{\sigma}}{2G} + |\dot{r}|\frac{\sigma}{2G} = \tau\overset{\circ}{r} + \frac{|\dot{r}|}{g+\alpha}r, \qquad \overset{\circ}{\varepsilon} = \dot{\varepsilon} + \varepsilon\Omega - \Omega\varepsilon = D, \qquad \overset{\circ}{\sigma} = \dot{\sigma} + \sigma\Omega - \Omega\sigma,$$

$$\Omega = \dot{R}\,R^T\,, \qquad \dot{r} = \dot{\varepsilon} - (1-\alpha)\frac{\dot{\sigma}}{2G}, \qquad \overset{\circ}{r} = D - (1-\alpha)\frac{\overset{\circ}{\sigma}}{2G}, \qquad \tau = \tau(\left|r\right|, \left|\overset{\bullet}{r}\right|)\,.$$

Здесь σ, ε, r – девиаторы тензора напряжений, тензора деформаций и вспомогательного параметрического тензора, соответственно, α – параметр эндохронности ($0 \le \alpha \le 1$), G – модуль сдвига, τ – аналог деформационного предела текучести, g – аналог коэффициента упрочнения, знаком модуля обозначены вторые инварианты девиаторов тензоров, K –объемный модуль. Из полярного разложения градиента $F = RU$ и, например, соотношения $U^2 = F^T F$ определяются правый тензор удлинения U и ортогональный тензор поворота R

$$R = \begin{pmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \text{причем} \qquad tg\,\beta = \frac{b\,(m-1)}{a_1 + a_2} \quad \text{и} \quad \varepsilon_{ii} = \frac{\sigma_{ii}}{K}.$$



Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 10-01-00705).

Авторы выражают благодарность Роману Владимировичу Пелюхову за проведение расчетов.

Список литературы

1. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. Анализ сложного нагружения при конечных деформациях по эндохронной теории неупругости // Прикладные проблемы прочности и пластичности. Москва: КМК, 1998. Вып.59. С.72-76.
2. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. Эндохронная теория ползучести, учитывающая конечные деформации // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия "Физико-математические науки". 2004. N 26. С.83-85.
3. Кадашевич Ю.И., Помыткин С.П. Вычисление ортогонального тензора поворота в задачах теории пластичности для конечных деформаций // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского. Серия "Механика". Нижний Новгород. 2004. Вып.1(6). С.73-80.