МОДЕЛЬ СВЯЗИ НАПРЯЖЕНИЯ, ДЕФОРМАЦИИ И ТЕМПЕРАТУРЫ В СПЛАВЕ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ: ПРОПОРЦИОНАЛЬНОЕ НАГРУЖЕНИЕ

Пряхин С. С., Рубаник В. В. мл.

Институт технической акустики НАН Беларуси, Витебск, Беларусь,
sspryakhin@yandex.by, jr@tut.by

В описании модели используем соотношения, вытекающие из возможности взаимно однозначного отображения симметричных тензоров a_{ij} второго ранга 3×3 ($i = x, y, z$; $j = x, y, z$) с шестью независимыми вещественными компонентами в 6-мерное пространство с базисными векторами $\vec{e}_k$ ($k = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) вида

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} a_{xx} & a_{xy} & a_{xz} \\ a_{yx} & a_{yy} & a_{yz} \\ a_{zx} & a_{zy} & a_{zz} \end{bmatrix} \Leftrightarrow \vec{a} = a_k = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{xx} & a_{yy} & a_{zz} & \sqrt{2}a_{xy} & \sqrt{2}a_{yz} & \sqrt{2}a_{xx} \end{pmatrix} \quad (1)$$

с постулированными соотношениями скалярных произведений базисных векторов $\left(\vec{e}_k \cdot \vec{e}_l\right) = \delta_{kl}$, где δ_{kl} – символ Кронекера. При этом модуль вектора $\vec{a}$ определяется как

$$\left|\ \vec{a}\ \right| = \sqrt{\left(\vec{a} \cdot \vec{a}\right)} = \sqrt{a_1^{\ 2} + a_2^{\ 2} + a_3^{\ 2} + a_4^{\ 2} + a_5^{\ 2} + a_6^{\ 2}}\ , \quad (2)$$

а свертка двух тензорных величин a_{ij} и b_{ij} равна скалярному произведению их векторных отображений $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в 6-мерном пространстве

$$a_{ij}b_{ij} = \vec{a} \cdot \vec{b} = a_{xx}b_{xx} + a_{yy}b_{yy} + a_{zz}b_{zz} + 2a_{xy}b_{xy} + 2a_{yz}b_{yz} + 2a_{zx}b_{zx}\,. \quad (3)$$

Операции над тензором: свертка, выделение объемной и девиаторной составляющих в векторном пространстве при таком отображении выполняются с использованием линейно алгебраических соотношений со следующими векторно-матричными объектами $\vec{b}$, I, B

$$\vec{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{I} = \begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&0 \\ 0&0&0&0&1&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1&1&1&0&0&0 \\ 1&1&1&0&0&0 \\ 1&1&1&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Примечательными атрибутами такого отображения является ортогональность объемной и девиаторной составляющих отображающего вектора $\vec{a} = \mathrm{dev}\,\vec{a} + \vec{a}_V$; $\mathrm{dev}\,\vec{a} \cdot \vec{a}_V = 0$ и пропорциональность модуля девиаторной составляющей квадратному корню из второго инварианта. Это приводит к выражениям для интенсивностей напряжения и деформаций

$$\sigma_{\mathrm{i}} = \sqrt{\frac{3}{2}}\left|\mathrm{dev}\,\vec{\sigma}\right|, \qquad \varepsilon_{\mathrm{i}} = \sqrt{\frac{2}{3}}\left|\mathrm{dev}\,\vec{\varepsilon}\right|. \quad (5)$$

Принятие гипотез пропорциональных изменений девиаторных составляющих нагрузок/деформаций, как для упруго-пластических деформаций, есть признание того, что эволюции этих девиаторов с изменением их модулей (интенсивностей) происходит вдоль определенно ориентированной линии в шестимерном пространстве.

В модели поведения сплавов с памятью формы (СПФ) [1] автор различает три типа превращений в материале: {a} – аустенитный, обусловленный мартенситноаустенитным превращением; {t} – температурно-индуцированный с образованием неориентированного мартенсита из аустенита, и {s} – напряженно-индуцированный процесс с образованием ориентированного мартенсита из аустенита или температурно-индуцированного мартенсита. Считается, что только изменения напряженно-индуцированного мартенсита вносят изменения неупругой составляющей деформации ε^{tr}, которую принято называть деформацией превращения. Мы относим переориентирование мартенсита к процессу {s}. Согласно нашей модели при пропорциональных нагружениях деформации превращения с одинаковыми интенсивностями могут реализоваться двумя противоположными по знаку деформациями. Мерой завершенности противоположно направленных напряженно-индуцированных процессов являются компоненты внутренней переменной ξ^+ и ξ^-

$$\xi = \xi^+ + \xi^- \le 1,\ \xi^+ \ge 0,\ \xi^- \ge 0, \tag{6}$$

отвечающие вкладам противоположно ориентированных ансамблей мартенсита в величину деформации превращения.

$$\varepsilon^{tr}{}_i = \left| \vec{\varepsilon}^{tr} \right| = \varepsilon_L \left| \xi^+ - \xi^- \right|, \tag{7}$$

где ε_L – предел восстанавливаемой деформации. Для одномерного случая с подобной концепцией разделения внутренней переменной модель описана нами в [2].

В основе пространственной модели поведения СПФ в условии изменения термомеханической нагрузки положены три гипотезы:

1. Полная деформация материала является суперпозицией ее составляющих: упругой деформации ε^{el}, термоупругой деформации ε^{T} и деформации превращения ε^{tr}. Соотношения между упругой деформацией и напряжением определяются обобщенным законом Гука, в котором фазовые изменения могут оказывать влияние только на модуль Юнга. Термоупругая деформация имеет только объемные компоненты, изменения которых пропорциональны изменению температуры.

2. Деформация превращения представлена только девиаторной компонентой. Интенсивность деформации превращения является функцией интенсивности напряжения и температуры, не зависящей от типа напряженного состояния.

3. В напряженно-индуцированном процессе компоненты деформации превращения изменяются пропорционально компонентам девиатора напряжений. В аустенитных процессах их изменения происходят пропорционально компонентам самой деформации превращения. Температурно-индуцированное аустенитно-мартенситное превращение, если не сопровождается напряженно-индуцированным процессом, на изменение интенсивности деформации превращения влияния не оказывает.

Суперпозиция деформаций дает

$$d\varepsilon = d\varepsilon^{el} + d\varepsilon^{tr} + d\varepsilon^{T}. \tag{8}$$

Приращения упругих деформаций можно определить из обобщенного закона Гука

$$\vec{\sigma} = 2G\vec{\varepsilon}^{el} + \lambda \mathrm{B}\vec{\varepsilon}^{el} = \left(2G\mathrm{I} + \lambda\mathrm{B}\right)\vec{\varepsilon}^{el}, \tag{9}$$

где G и λ – постоянные Ламе, I, B – определены в (4). С учетом модельной функции для модуля Юнга, к примеру $E = E(\xi) = E_A - \xi(E_A - E_M) = E_A - (\xi^+ + \xi^-)(E_A - E_M)$, E_A и E_M – значения модулей Юнга для аустенитного и мартенситного состояний, соответственно, эти приращения равны

$$d\vec{\varepsilon}^{el} = E\left(2G\mathrm{I} + \lambda\mathrm{B}\right)^{-1}\frac{d\vec{\sigma}}{E} + E\left(2G\mathrm{I} + \lambda\mathrm{B}\right)^{-1}\vec{\sigma}d\left(\frac{1}{E}\right) = \left(2G\mathrm{I} + \lambda\mathrm{B}\right)^{-1}\left(d\vec{\sigma} - \frac{1}{E}\frac{dE}{d\xi}\vec{\sigma}d\xi\right). \tag{10}$$

Изменения термоупругой деформации имеют только объемную составляющую

$$d\varepsilon^{T} = \alpha\ \vec{b}dT, \tag{11}$$

где α – коэффициент линейного термического расширения; $\vec{b}$ – определен в (4).

Изменения составляющих деформации превращения для процессов {a}, {t}, {s}, и {s&t}, представляющего комбинацию процессов {s} и {t}, с учетом (6) могут быть представлены уравнениями:

$$\{\mathbf{a}\}:\quad d\vec{\varepsilon}^{tr} = \begin{cases} 0, & \varepsilon_i^{tr} = 0 \\ -\dfrac{\vec{\varepsilon}^{tr}}{\varepsilon_i^{tr}}\varepsilon_L \left| d\xi^+ - d\xi^- \right|, & \varepsilon_i^{tr} > 0 \end{cases}, \tag{12}$$

$$\{\mathbf{s}\}:\quad d\vec{\varepsilon}^{tr} = \frac{3}{2}\frac{\operatorname{dev}\vec{\sigma}}{\sigma_i}\varepsilon_L \left| d\xi^+ - d\xi^- \right|, \tag{13}$$

$$\{\mathbf{t}\}:\quad d\vec{\varepsilon}^{tr} = 0, \tag{14}$$

$$\{\mathbf{s\&t}\}: d\vec{\varepsilon}^{tr} = \frac{3}{2}\frac{\operatorname{dev}\vec{\sigma}}{\sigma_i}\varepsilon_L \left| d\xi^+ - d\xi^- \right|. \tag{15}$$

Уравнение (12) отражает изменение в направлении противоположном текущей деформации превращения при ненулевой ее величине. (14) – в комментариях не нуждается. (13) и (15) отражает изменения в 6-мерном пространстве в направлении вектора девиатора напряжения.

Определяющие соотношения (8), (10)-(15) следует дополнить кинетическими соотношениями, описывающими связь с изменениями интенсивности напряжения и температуры пары компонентов внутренней переменной

$$\begin{aligned} \xi^+ &= F_1(\sigma_i, \xi^+, \xi^-, T), \\ \xi^- &= F_2(\sigma_i, \xi^+, \xi^-, T) \end{aligned} \tag{16}$$

и условиями их реализации. В настоящей работе ограничимся констатацией возможности использования кинетических соотношений из [2]. При их адаптации следует учесть, что процессы, сопровождающиеся напряженно-индуцированными превращениями, должны отвечать необходимому условию направленности скорости изменения деформации превращения по направлению девиатора напряжения

$$\operatorname{dev}\vec{\sigma} \cdot \operatorname{dev} d\vec{\varepsilon}^{tr} = \operatorname{dev}\vec{\sigma} \cdot d\vec{\varepsilon}^{tr} > 0. \tag{17}$$

Имеются отрывочные сведения об изменении объема в некоторых СПФ при аустенитно-мартенситных превращениях [3] и влиянии на процесс объемного напряжения, то есть о нарушении Гипотезы 2 настоящей модели. К нитиноловым сплавам это не относится. В этой работе для учета объемного напряжения предлагалось введение гидростатического коэффициента в уравнении кинетики. Для учета изменения объема в настоящей работе предлагаем использовать модельную функцию плотности

$$\rho = \rho(\xi) = \rho_A - \xi(\rho_A - \rho_M), \tag{18}$$

где ρ_A и ρ_M – модули Юнга аустенитной и мартенситной фазы и вытекающей из нее формулы для изменения объемной компоненты деформации превращения:

$$d\vec{\varepsilon}_V^{tr} = \vec{b}\, d\varepsilon^{tr}{}_V = \frac{2}{3}\frac{\rho_A - \rho_M}{\rho_A + \rho_M}\vec{b}\, d\xi. \tag{19}$$

Настоящая модель позволяет, хотя бы на качественном уровне, описывать широкий спектр явлений от псевдоупругости и памяти формы при мартенситно-аустенитных превращениях до явлений с ориентированием мартенсита и поведения материала при знакопеременных нагрузках, в частности, с переориентированием мартенсита.

Список литературы

1. Brinson L.C. One-dimensional constitutive behavior of shape memory alloys: thermomechanical derivation with non-constant material functions and redefined martensite internal variable. Journal of Intelligent Material Systems and Structures. 1993. 4(2): pp. 229-242.
2. Пряхин С.С., Рубаник В.В. мл. Концепция разделения компонентов внутренней переменной для описания термомеханического поведения сплава с памятью формы при знакопеременных нагрузках. / Современные методы и технологии создания и обработки материалов/ IV Междунар. научн.-техн. конф. (Минск, 19-21 октября 2009г.): сб. материалов. В 3 кн. Кн.1. Многофункциональные материалы в современной технике и методы их получения. Материалы для микро- и наноэлектроники / ред. коллегия: С.А. Астапчик (гл. ред.) и др. – Минск: ФТИ НАН Беларуси, 2009. –295 с. С. 190-195.
3. Brocca M., Brinson L.C., Bazant Z.P. Three dimensional constitutive model for shape memory alloys based on microplane model. J. Mech. Physics Solids, vol. 50, pp 1051-1077.

МЕХАНИЗМ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ЭПФ И ОБРАТИМАЯ ПАМЯТЬ ФОРМЫ

Вьюненко Ю. Н.

СПбГУ, Санкт-Петербург, Россия

Деформационные процессы ЭПФ, наблюдаемые при нагреве металлических материалов с переходом температурных интервалов трансформации кристаллической решетки, могут быть обусловлены полями остаточных напряжений, возникающими в процессе формоизменения образцов в мартенситном состоянии [1]. Охлаждение предварительно продеформированных в высокотемпературном состоянии изделий из сплава TiNi может сопровождаться как восстановлением первоначальной формы [2], так и противоположным эффектом. Результаты были получены в рамках математической модели, включающей в себя уравнение теплопроводности:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\Delta u\,, \tag{1}$$

где u – температура, $k = \dfrac{\lambda}{\rho \cdot c}$ – коэффициент температуропроводности, λ – коэффициент теплопроводности, ρ – плотность материала, c=$c(u)$ – теплоемкость, зависящая от температуры в интервале фазового превращения. При проведении численных экспериментов было принято, что

$$c(u) = c_0 + c_1 \frac{(u-u_н)(u_к-u)}{(u_к-u_н)^2}$$

$u_н$ и $u_н$ – температура, соответственно, начала и конца превращения. За пределами температурной зоны превращения теплоемкость принималась постоянной $c(u) = c_0$. Постоянную c_1 определяли из условия:

$$\int_{u_н}^{u_к} c_1 \frac{(u-u_н)(u_к-u)}{(u_к-u_н)^2}\,du = Q_{пр}$$

где $Q_{пр}$ – скрытая теплота превращения.

Второй составляющей математической модели является закон деформирования материала. Упругая стадия растяжения, как в мартенситном, так и в аустенитном состоянии подчиняется закону Гука: