МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МИКРОПОЛЯРНЫХ УПРУГИХ ОРТОТРОПНЫХ СЛОИСТЫХ ТОНКИХ БАЛОК

Алваджян Ш.И, Саркисян С.О., Фарманян А.Ж.

Гюмрийский гос. педагогический институт, г. Гюмри, Армения,
s_sargsyan@yahoo.com, alvajyanshushan@mail.ru

Введение. В работе [1] на основе метода гипотез построена общая прикладная теория микрополярных упругих изотропных тонких балок. В данной работе принимая гипотезы для слоистого пакета балки в целом и, в результате, построена прикладная модель микрополярных ортотропных упругих слоистых тонких балок.

1. Постановка задачи. Рассмотрим слоистый прямоугольник, число слоев-n (задача плоского напряженного состояния). Будем исходить из основных уравнений плоской статической задачи (для прямоугольной области) линейной теории микрополярной упругости с независимыми полями перемещений и вращений [1]:

Уравнения равновесия для k-ого слоя

$$\frac{\partial\sigma_{11}^{(k)}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{21}^{(k)}}{\partial x_2}=0,\qquad \frac{\partial\sigma_{12}^{(k)}}{\partial x_1}+\frac{\partial\sigma_{22}^{(k)}}{\partial x_2}=0,\qquad \frac{\partial\mu_{13}^{(k)}}{\partial x_1}+\frac{\partial\mu_{23}^{(k)}}{\partial x_2}+\sigma_{12}^{(k)}-\sigma_{21}^{(k)}=0. \qquad (1.1)$$

Физические соотношений упругости для k-ого слоя

$$\begin{gathered}\varepsilon_{11}^{(k)}=a_{11}^{(k)}\sigma_{11}^{(k)}+a_{12}^{(k)}\sigma_{22}^{(k)},\quad \varepsilon_{22}^{(k)}=a_{12}^{(k)}\sigma_{11}^{(k)}+a_{22}^{(k)}\sigma_{22}^{(k)},\quad \varepsilon_{12}^{(k)}=a_{77}^{(k)}\sigma_{12}^{(k)}+a_{78}^{(k)}\sigma_{21}^{(k)},\\ \varepsilon_{21}^{(k)}=a_{78}^{(k)}\sigma_{12}^{(k)}+a_{88}^{(k)}\sigma_{21}^{(k)},\qquad \chi_{13}^{(k)}=b_{66}^{(k)}\mu_{13}^{(k)},\qquad \chi_{23}^{(k)}=b_{44}^{(k)}\mu_{23}^{(k)}.\end{gathered} \qquad (1.2)$$

Геометрические соотношения для k-ого слоя

$$\begin{gathered}\varepsilon_{11}^{(k)}=\frac{\partial v_1^{(k)}}{\partial x_1},\qquad \varepsilon_{22}^{(k)}=\frac{\partial v_2^{(k)}}{\partial x_2},\qquad \varepsilon_{12}^{(k)}=\frac{\partial v_2^{(k)}}{\partial x_1}-\omega_3^{(k)},\\ \varepsilon_{21}^{(k)}=\frac{\partial v_1^{(k)}}{\partial x_2}+\omega_3^{(k)},\qquad \chi_{13}^{(k)}=\frac{\partial\omega_3^{(k)}}{\partial x_1},\qquad \chi_{23}^{(k)}=\frac{\partial\omega_3^{(k)}}{\partial x_2}.\end{gathered} \qquad (1.3)$$

Здесь $\sigma_{ms}^{(k)},\mu_{ms}^{(k)}$ $(m,s=1,2,3)$- компоненты силового и моментного тензоров напряжений; $\varepsilon_{ms}^{(k)},\chi_{i3}^{(k)}$ $(i=1,2)$ −компоненты тензоров деформаций и изгиба-кручений; $a_{11}^{(k)}$, $a_{12}^{(k)}$, $a_{22}^{(k)}$, $a_{77}^{(k)}$, $a_{78}^{(k)}$, $a_{88}^{(k)}$, $b_{66}^{(k)}$, $b_{44}^{(k)}$- упругие коэффициенты микрополярного ортотропного материала; $v_1^{(k)},v_2^{(k)}$ – компоненты вектора перемещения, $\omega_3^{(k)}$-независимый поворот точек прямоугольника: $0\le x_1\le a,\ -h\le x_2\le h$.

Ось x_1 расположим параллельно к линии раздела между слоями, ось x_2- будет нормальный к лицевым линиям прямоугольника ($x_2=z_0$ и $x_2=z_n$).

На лицевых линиях прямоугольника имеют место следующие граничные условия

$$\begin{gathered}\sigma_{21}^{(1)}\Big|_{x_2=z_0}=-q_1^-,\qquad \sigma_{21}^{(n)}\Big|_{x_2=z_n}=q_1^+,\qquad \sigma_{22}^{(1)}\Big|_{x_2=z_0}=-q_2^-,\qquad \sigma_{22}^{(n)}\Big|_{x_2=z_n}=q_2^+,\\ \mu_{23}^{(1)}\Big|_{x_2=z_0}=-m_2^-,\qquad \mu_{23}^{(n)}\Big|_{x_2=z_n}=m_2^+.\end{gathered} \qquad (1.4)$$

На боковых гранях прямоугольника ($x_1=0,\ x_1=a$) будем считать, что заданы либо усилия и моменты, либо перемещения и поворот, либо смешанные условия.

На линиях раздела между слоями примем условия полного контакта, т. е. непрерывны как силовые и моментные напряжения, так и перемещения и поворот.

2. Математическая модель микрополярных упругих ортотропных слоистых тонких балок. Будем считать, что общая толщина пакета прямоугольника на много раз меньше, чем его длина. Это означает, что при построении прикладной модели можем принимать

упрощающие гипотезы. Будем предполагать, что гипотезы (эти гипотезы разделяются на кинематические и статические), которые приняты при построении однослойной микрополярной изотропной балки [1], справедливы для всего пакета тонкого прямоугольника в целом. Будем ввести также интегральные по толщине пакета силовые и моментные характеристики. Тогда получим прикладная модель микрополярных упругих ортотропных слоистых тонких балок:

Уравнение равновесия

$$\frac{dN_{12}}{dx_1}=-(q_2^+ + q_2^-),\qquad \frac{dT_{11}}{dx_1}=-(q_1^+ + q_1^-),$$
$$\frac{dL_{13}}{dx_1}+N_{12}-N_{21}=-(m_2^+ + m_2^-),\qquad \frac{dM_{11}}{dx_1}-N_{21}=-(z_0q_1^- + z_nq_1^+). \tag{2.1}$$

Соотношения упругости

$$N_{12}=\sum_{k=1}^{n}(z_k-z_{k-1})\frac{a_{88}^{(k)}}{a_{77}^{(k)}a_{88}^{(k)}-\left(a_{78}^{(k)}\right)^2}\Gamma_{12}-\sum_{k=1}^{n}(z_k-z_{k-1})\frac{a_{78}^{(k)}}{a_{77}^{(k)}a_{88}^{(k)}-\left(a_{78}^{(k)}\right)^2}\Gamma_{21},$$
$$N_{21}=-\sum_{k=1}^{n}(z_k-z_{k-1})\frac{a_{78}^{(k)}}{a_{77}^{(k)}a_{88}^{(k)}-\left(a_{78}^{(k)}\right)^2}\Gamma_{12}+\sum_{k=1}^{n}(z_k-z_{k-1})\frac{a_{77}^{(k)}}{a_{77}^{(k)}a_{88}^{(k)}-\left(a_{78}^{(k)}\right)^2}\Gamma_{21},$$
$$L_{13}=\sum_{k=1}^{n}(z_k-z_{k-1})\frac{1}{b_{66}^{(k)}}\mathrm{k}_{13},T_{11}=\sum_{k=1}^{n}(z_k-z_{k-1})\frac{1}{a_{11}^{(k)}}\Gamma_{11}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{z_k^2}{2}-\frac{z_{k-1}^2}{2}\right)\frac{1}{a_{11}^{(k)}}\mathrm{K}_{11},$$
$$M_{11}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{z_k^2}{2}-\frac{z_{k-1}^2}{2}\right)\frac{1}{a_{11}^{(k)}}\Gamma_{11}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{z_k^3}{3}-\frac{z_{k-1}^3}{3}\right)\frac{1}{a_{11}^{(k)}}\mathrm{K}_{11}. \tag{2.2}$$

Геометрические соотношения

$$\Gamma_{11}=\frac{du_1}{dx_1},\quad \mathrm{K}_{11}=\frac{d\psi_1}{dx_1},\qquad \Gamma_{12}=\frac{dw}{dx_1}-\Omega_3,\qquad \Gamma_{21}=\psi_1+\Omega_3,\qquad \mathrm{k}_{13}=\frac{d\Omega_3}{dx_1}. \tag{2.3}$$

Граничные условия

$$M_{11}=M_{11}^* \text{ или } \psi_1=\psi_1^*;\quad N_{12}=N_{12}^* \text{ или } w=w^*;$$
$$L_{13}=L_{13}^* \text{ или } \Omega_3=\Omega_3^*;\quad T_{11}=T_{11}^* \text{ или } u_1=u_1^*, \tag{2.4}$$

где T_{11}, N_{12}, N_{21}- усредненные усилия; M_{11}- усредненный момент от силовых напряжений; L_{13}- усредненный момент от моментных напряжений; Γ_{11}- линейная деформация по линии x_1; Γ_{12},Γ_{21}- сдвиговые деформации; K_{11}- изгибание от силовых напряжений; k_{13}- изгибание от моментных напряжений; u_1-продольное перемещение; w- прогиб; ψ_1- полный угол поворота нормального элемента; Ω_3- свободный поворот нормального элемента.

В частном случае, когда имеем двухслойную балку, уравнения равновесия, геометрические соотношения остаются прежние ((2.1), (2.3)), а соотношения упругости будут иметь вид:

$$N_{12}=\left[(z_1-z_0)\frac{a_{88}^{(1)}}{a_{77}^{(1)}a_{88}^{(1)}-\left(a_{78}^{(1)}\right)^2}+(z_2-z_1)\frac{a_{88}^{(2)}}{a_{77}^{(2)}a_{88}^{(2)}-\left(a_{78}^{(2)}\right)^2}\right]\Gamma_{12}$$
$$-\left[(z_1-z_0)\frac{a_{78}^{(1)}}{a_{77}^{(1)}a_{88}^{(1)}-\left(a_{78}^{(1)}\right)^2}+(z_2-z_1)\frac{a_{78}^{(2)}}{a_{77}^{(2)}a_{88}^{(2)}-\left(a_{78}^{(2)}\right)^2}\right]\Gamma_{21},$$
$$N_{21}=-\left[(z_1-z_0)\frac{a_{78}^{(1)}}{a_{77}^{(1)}a_{88}^{(1)}-\left(a_{78}^{(1)}\right)^2}+(z_2-z_1)\frac{a_{78}^{(2)}}{a_{77}^{(2)}a_{88}^{(2)}-\left(a_{78}^{(2)}\right)^2}\right]\Gamma_{12}$$

$$+\left[(z_1-z_0)\frac{a_{77}^{(1)}}{a_{77}^{(1)}a_{88}^{(1)}-\left(a_{78}^{(1)}\right)^2}+(z_2-z_1)\frac{a_{77}^{(2)}}{a_{77}^{(2)}a_{88}^{(2)}-\left(a_{78}^{(2)}\right)^2}\right]\Gamma_{21},$$

$$L_{13}=(z_1-z_0)\frac{1}{b_{66}^{(1)}}\mathrm{k}_{13}+(z_2-z_1)\frac{1}{b_{66}^{(2)}}\mathrm{k}_{13}, \tag{2.5}$$

$$T_{11}=\left[(z_1-z_0)\frac{1}{a_{11}^{(1)}}+(z_2-z_1)\frac{1}{a_{11}^{(2)}}\right]\Gamma_{11}+\left[\left(\frac{z_1^2}{2}-\frac{z_0^2}{2}\right)\frac{1}{a_{11}^{(1)}}+\left(\frac{z_2^2}{2}-\frac{z_1^2}{2}\right)\frac{1}{a_{11}^{(2)}}\right]\mathrm{K}_{11},$$

$$\mathrm{M}_{11}=\left[\left(\frac{z_1^2}{2}-\frac{z_0^2}{2}\right)\frac{1}{a_{11}^{(1)}}+\left(\frac{z_2^2}{2}-\frac{z_1^2}{2}\right)\frac{1}{a_{11}^{(2)}}\right]\Gamma_{11}+\left[\left(\frac{z_1^3}{3}-\frac{z_0^3}{3}\right)\frac{1}{a_{11}^{(1)}}+\left(\frac{z_2^3}{3}-\frac{z_1^3}{3}\right)\frac{1}{a_{11}^{(2)}}\right]\mathrm{K}_{11}.$$

Когда имеем трехслойную балку симметричного строения, тогда уравнения равновесия (2.1) остаются неизменными, только в последнем уравнении правую часть нужно заменить на выражение $-z_0(q_1^- - q_1^+)$, а соотношения упругости имеют вид:

$$N_{12}=\left[2(z_1-z_0)\frac{a_{88}^{(1)}}{a_{77}^{(1)}a_{88}^{(1)}-\left(a_{78}^{(1)}\right)^2}-2z_1\frac{a_{88}^{(2)}}{a_{77}^{(2)}a_{88}^{(2)}-\left(a_{78}^{(2)}\right)^2}\right]\Gamma_{12}$$
$$-\left[2(z_1-z_0)\frac{a_{78}^{(1)}}{a_{77}^{(1)}a_{88}^{(1)}-\left(a_{78}^{(1)}\right)^2}-2z_1\frac{a_{78}^{(2)}}{a_{77}^{(2)}a_{88}^{(2)}-\left(a_{78}^{(2)}\right)^2}\right]\Gamma_{21},$$

$$N_{21}=-\left[2(z_1-z_0)\frac{a_{78}^{(1)}}{a_{77}^{(1)}a_{88}^{(1)}-\left(a_{78}^{(1)}\right)^2}-2z_1\frac{a_{78}^{(2)}}{a_{77}^{(2)}a_{88}^{(2)}-\left(a_{78}^{(2)}\right)^2}\right]\Gamma_{12}$$
$$+\left[2(z_1-z_0)\frac{a_{77}^{(1)}}{a_{77}^{(1)}a_{88}^{(1)}-\left(a_{78}^{(1)}\right)^2}-2z_1\frac{a_{77}^{(2)}}{a_{77}^{(2)}a_{88}^{(2)}-\left(a_{78}^{(2)}\right)^2}\right]\Gamma_{21},$$

$$L_{13}=2(z_1-z_0)\frac{1}{b_{66}^{(1)}}\mathrm{k}_{13}-2z_1\frac{1}{b_{66}^{(2)}}\mathrm{k}_{13},\qquad T_{11}=\left[2(z_1-z_0)\frac{1}{a_{11}^{(1)}}-2z_1\frac{1}{a_{11}^{(2)}}\right]\Gamma_{11}, \tag{2.6}$$

$$\mathrm{M}_{11}=\left[\frac{2}{3}(z_1^3-z_0^3)\frac{1}{a_{11}^{(1)}}-\frac{2}{3}z_1^3\frac{1}{a_{11}^{(2)}}\right]\mathrm{K}_{11};$$

геометрические соотношения остаются прежние (2.3).

На основе построенной прикладной-одномерной модели микрополярных ортотропных слоистых балок рассмотрены некоторые конкретные задачи, построены аналитические решения этих задач и выполнен численный анализ, показывающие эффективные свойства микрополярного материала по сравнению с классическими материалами. В частности, когда имеем двухслойную балку, материал нижнего слоя которого классический, а верхний слой- микрополярный изотропный (микрополярный материал-это образ наноматериала), расчеты показывают, что при покрытии микрополярным материалом (по сравнению с классическим случаем) повышаются прочностные и жесткостные свойства пакета балки.

Список литературы

1. Sargsyan S. H. Effective Manifestations of Characteristics of Strength and Rigidity of Micropolar Elastic Thin Bars. Journal of Materials Science and Engineering. Volume 2. № 1. 2012. P. 98-108.