МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Учреждение образования
«Витебский государственный технологический университет»

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕТРОЛОГИЯ

Методические указания **к практическим занятиям**
для студентов специальности 1-54 01 01-04 «Метрология, стандартизация и сертификация (легкая промышленность)»

Витебск
2018

УДК 658.516

Составители:

И. А. Петюль, В. Д. Борозна

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом
УО «ВГТУ», протокол № 7 от 27.10.2017.

Теоретическая метрология : методические указания к практическим занятиям / сост. И. А. Петюль, В. Д. Борозна. – Витебск : УО «ВГТУ», 2017. – 66 с.

Методические указания являются руководством по выполнению практических работ по курсу «Теоретическая метрология», содержат задания и необходимые сведения из теории и практики метрологии для их выполнения. Методические указания предназначены для студентов высших учебных заведений очной и заочной формы обучения по специальности 1-54 01 01-04 «Метрология, стандартизация и сертификация (легкая промышленность)».

УДК 658.516

СОДЕРЖАНИЕ

Практическая работа 1
ВЫЯВЛЕНИЕ И ИСКЛЮЧЕНИЕ ГРУБЫХ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Цели работы: изучить сущность критериев, применяемых для исключения грубых погрешностей, и освоить правила их применения.

1 Общие теоретические сведения

Грубая погрешность, или промах, – это погрешность результата отдельного измерения, входящего в ряд измерений, которая для данных условий резко отличается от остальных результатов этого ряда. Источниками грубых погрешностей бывают резкие изменения условий измерения, ошибки, допущенные оператором, оставшиеся незамеченными неисправности в аппаратуре.

При однократных измерениях обнаружить промах не представляется возможным. При многократных измерениях грубые погрешности устраняются путем повторных измерений или с помощью специальных критериев. Предварительно определяют, какому виду распределения подчиняется измеряемая величина.

Таблица 1 – Статистические критерии на наличие грубой погрешности

H_0: грубой погрешности (промаха) нет H_1: грубая погрешность (промах) есть			
Критерии			
$n \leq 25$	$n \leq 20$	$n > 20$	$n > 5…150$
Диксона	**Романовского**	**Трех сигм**	**Вариационного размаха**
Условие отклонения гипотезы H_0			Условие отклонения гипотезы H_1
$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1} > r_q$ для нормального ЗРВ	$\frac{\lvert\bar{x} - x_i\rvert}{S} \geq \beta_q$	$\lvert\bar{x} - x_i\rvert > 3S$ для нормального ЗРВ	$\overline{X} - z \cdot R_n < x_k < \overline{X} + z \cdot R_n$
-	*при расчете $\bar{x}$, S сомнительное значение исключено		
Критерии			
$n \leq 10$	$n \geq 25$	$n > 20$	$n > 20..100$
Шовене	**Смирнова**	**Ирвина**	**Шарлье**
Условие отклонения гипотезы H_0			
$n_{ож} \leq 0{,}5$ для нормального ЗРВ	$\frac{\max\lvert x_i - \bar{x}\rvert}{S} \geq \beta_q$ для нормального ЗРВ	$\frac{x_{n\pm1} - x_n}{S} > \lambda_q$ для нормального ЗРВ	$\lvert x_i - \bar{x}\rvert > K_Ш \cdot S$ для нормального ЗРВ
*при расчете $\bar{x}$, S сомнительное значение учитывается			-

Проверяемая гипотеза H_0 состоит в утверждении, что результат наблюдения x_i не является грубой погрешностью, т. е. является одним из возможных значений измеряемой величины X. Для опровержения выдвинутой гипотезы пользуются определенными статистическими критериями. Если это удается, то принимают альтернативную гипотезу H_1, результат наблюдений рассматривают как содержащий грубую погрешность и его исключают.

Для проверки гипотез задаются доверительной вероятностью P (или уровнем значимости q) того, что сомнительный результат действительно мог иметь место в данной совокупности результатов измерений. Обычно проверяют наибольшее и наименьшее значения результатов измерений.

При использовании **критерия Диксона** вычисляют коэффициент Диксона (наблюдаемое значение критерия) для проверки наибольшего или наименьшего экстремального значения в зависимости от числа измерений. В таблице 2 приведены формулы для вычисления коэффициентов. Коэффициент r_{10}, r_{11} применяют, когда имеется один выброс, а r_{21} и r_{22} – когда имеется два выброса.

Требуется первоначальное упорядочение результатов измерений (построение возрастающего вариационного ряда). Критерий применяется, когда выборка может содержать более одной грубой погрешности.

Таблица 2 – Формулы для вычисления коэффициентов Диксона

Число измерений n (объем выборки)	Коэффициент Диксона	Для наименьшего значения величины	Для наибольшего значения величины
3-7	r_{10}	$\frac{x_2 - x_1}{x_n - x_1}$	$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_1}$
8-10	r_{11}	$\frac{x_2 - x_1}{x_{n-1} - x_1}$	$\frac{x_n - x_{n-1}}{x_n - x_2}$
11-13	r_{21}	$\frac{x_3 - x_1}{x_{n-1} - x_1}$	$\frac{x_n - x_{n-2}}{x_n - x_2}$
14-25	r_{22}	$\frac{x_3 - x_1}{x_{n-2} - x_1}$	$\frac{x_n - x_{n-2}}{x_n - x_3}$

Вычисленные для выборки по формулам значения коэффициентов Диксона r сравнивают с принятым (табличным) значением критерия Диксона r_q (таблица 3).

Нулевая гипотеза об отсутствии грубой погрешности выполняется, если выполняется неравенство $r < r_q$.

Если $r > r_q$, то результат признается грубой погрешностью и исключается из дальнейшей обработки.

Таблица 3 – Критериальные значения коэффициентов Диксона (при принятом уровне значимости q)

Статистика	Число измерений	r_q при уровне значимости q			
		0,10	0,05	0,02	0,01
r_{10}	3	0,886	0,941	0,976	0,988
	4	0,679	0,765	0,846	0,899
	5	0,557	0,642	0,729	0,780
	6	0,482	0,560	0,644	0,698
	7	0,434	0,507	0,586	0,637
r_{11}	8	0,479	0,554	0,631	0,683
	9	0,441	0,512	0,587	0,636
	10	0,49	0,477	0,551	0,597
r_{21}	11	0,517	0,576	0,538	0,679
	12	0,490	0,546	0,605	0,642
	13	0,467	0,521	0,578	0,615
r_{22}	14	0,462	0,546	0,602	0,641
	15	0,472	0,525	0,579	0,616
	16	0,452	0,507	0,559	0,595
	17	0,438	0,490	0,542	0,577
	18	0,424	0,475	0,527	0,561
	19	0,412	0,462	0,514	0,547
	20	0,401	0,450	0,502	0,535
	21	0,391	0,440	0,491	0,524
	22	0,382	0,430	0,481	0,514
	23	0,374	0,421	0,472	0,505
	24	0,367	0,413	0,464	0,497
	25	0360	0,406	0,457	0,489

При анализе грубых промахов с использованием **критерия Романовского** рассчитанное по формуле из таблицы 1 значение β_p сравнивается с критерием β_q, выбранным по таблице 4. Если $\beta_\text{р} \geq \beta_\text{q}$, то результат считается промахом и отбрасывается.

Таблица 4 – Критерий Романовского β_q

q	n = 4	n = 6	n = 8	n = 10	n = 12	n = 15	n = 20
0,01	1,73	2,16	2,43	2,62	22,75	2,90	3,08
0,02	1,72	2,13	2,37	2,54	2,66	2,80	2,96
0,05	1,71	2,10	2,27	2,41	2,52	2,64	2,78
0,10	1,69	2,00	2,17	2,29	2,39	2,49	2,62

При использовании **критерия вариационного размаха** определяют размах вариационного ряда вида:

$$(x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_k \le \ldots \le x_n). \qquad (1)$$

Если какой-либо член вариационного ряда, например x_k, резко отличается от всех других, то производят проверку, используя следующее неравенство:

$$\overline{X} - z \cdot R_n < x_k < \overline{X} + z \cdot R_n \qquad (2)$$

где $\overline{X}$ – выборочное среднее арифметическое значение, вычисленное после исключения предполагаемого промаха; z – критериальное значение; $R_n = x_n - x_1$ – размах вариационного ряда.

Нулевую гипотезу (об отсутствии грубой погрешности) принимают, если указанное неравенство выполняется. Если x_k не удовлетворяет условию (2), то этот результат исключают из вариационного ряда.

Коэффициент z зависит от числа членов вариационного ряда n, что представлено в таблице 5.

Таблица 5 – Критерий вариационного размаха

n	5	6	7	8-9	10-11	12-15	16-22	23-25	26-63	64-150
z	1,7	1,6	1,5	1,4	1,3	1,2	1,1	1,0	0,9	0,8

Критерий Шовене строится на определении числа ожидаемых результатов наблюдений $n_{ож}$, которые имеют столь же большие погрешности, как и подозрительный.

Порядок проверки гипотезы следующий:

1) вычисляются среднее арифметическое $\overline{x}$ и СКО S результатов наблюдений для всей выборки;

2) из таблицы нормированного нормального распределения (интегральная функция нормированного нормального распределения) по величине

$$z = \frac{\left| x_{inno} - \overline{X}_{ц.р.} \right|}{S} \qquad (3)$$

определяется вероятность появления подозрительного результата в генеральной совокупности чисел n

$$P\left(z \cdot S < \left| x_{inno} - \overline{X}_{ц.р.} \right|\right); \qquad (4)$$

3) число ожидаемых результатов $n_{ож}$ определяется по формуле

$$n_{ож} = n \cdot P\,. \qquad (5)$$

При применении **критерия Смирнова** расчётное значение β_p, полученное по соответствующей формуле из таблицы 1, сравнивают с табличным β_q, приведённым в таблице 6. При $\beta_p > \beta_q$ результат x_i считают грубой ошибкой и отбрасывают.

Таблица 6 – Значения критерия Смирнова β_q

n	β_q		
	q = 0,1	q = 0,05	q = 0,01
25	2,59	2,82	3,28
30	2,70	2,93	3,40
40	2,70	3,02	3,48
50	2,86	3,08	3,54
100	3,08	3,29	3,72
250	3,34	3,53	3,95
500	3,53	3,70	4,11

Порядок применения **критерия Ирвина** следующий. Находят расчётное значение критерия

$$\lambda_{расч} = \frac{|x_{n\pm1} - x_n|}{S}, \tag{6}$$

где x_n – проверяемое сомнительное значение; x_{n-1} – предыдущее значение в вариационном ряду, если x_n оценивается от максимальных значений вариационного ряда; x_{n+1} – последующее значение в вариационном ряду, если x_n оценивается от минимальных значений вариационного ряда; S – среднеквадратическое отклонение (СКО) непрерывной нормально распределённой случайной величины.

Если $\lambda_{расч} > \lambda_{табл}$, то x_n – грубая ошибка. Табличные значения критерия Ирвина $\lambda_{табл}$ представлены в таблице 7.

Таблица 7 – Табличные значения критерия Ирвина

n	Уровень значимости q			n	Уровень значимости q		
	0,1	0,05	0,01		0,1	0,05	0,01
2	2,33*	2,77*	3,64*	40	0,91*	1,15*	1,63*
3	1,79*	2,17*	2,90*	50	0,88*	1,11*	1,59*
4	1,58	1,92	2,60	60	0,86*	1,08*	1,56*
5	1,45	1,77	2,43	70	0,84*	1,06*	1,53*
6	1,37	1,67	2,30	80	0,83*	1,04*	1,51*
7	1,31	1,60	2,22	90	0,82*	1,03*	1,49*
8	1,26	1,55	2,14	100	0,81*	1,02*	1,47*
9	1,22	1,50	2,09	200	0,75*	0,95*	1,38*
10	1,18*	1,46*	2,04*	300	0,72*	0,91*	1,33*
20	1,03*	1,27*	1,80*	500	0,69*	0,88*	1,28*

30	0,96*	1,20*	1,70*	1000	0,65*	0,83*	1,22*

Примечание: значения, помеченные звёздочкой, взяты из [1], остальные значения рассчитаны при статистическом компьютерном моделировании.

Пользуясь **критерием Шарлье**, отбрасывают результат, для значения которого в ряду из n наблюдений выполняется неравенство, указанное в таблице 1.

Значения критерия Шарлье $К_ш$ приведены в таблице 8.

Таблица 8 – Значения критерия Шарлье $К_ш$

n	5	10	20	30	40	50	100
$К_ш$	1,3	1,65	1,96	2,13	2,24	2,32	2,58

2 Задания

1. При измерении воздухопроницаемости трикотажного полотна W были получены следующие результаты:

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
W	242	243	250	245	242	243	239	230	240	243

Определите с помощью возможных критериев, не содержит ли ряд наблюдений грубых погрешностей.

2. При диагностировании топливной системы автомобиля результаты пяти измерений расхода топлива составили: 22, 24, 26, 28, 30 л на 100 км. Последний результат вызывает сомнение. Проверить по критерию Романовского, не является ли он промахом**.**

3. При измерении силы тока были получены следующие результаты (А): 10,07; 10,08; 10,10; 10,12; 10,13; 10,15; 10,16; 10,17; 10,20; 10,40. Определите наличие грубой погрешности с помощью критерия Ирвина.

4. При измерении радиального биения шейки вала были получены значения (мкм): 10; 11; 12; 12; 15. Определить, является ли результат 15 мкм промахом с помощью критерия Шовене.

5. Было проведено пять измерений напряжения в электросети. Получены следующие данные: 127,1; 127,2; 126,9; 127,6; 127,2 В. Результат 127,6 В существенно (на первый взгляд) отличается от остальных. Проверить, не является ли он промахом с помощью критерия Диксона.

6. При контроле размера вала Ø $40h11_{(-0,25)}$ штангенциркулем получен ряд однократных измерений: 39,72; 39,75; 39,76; 39,80; 39,81; 39,82; 39,82; 39,83; 39,85; 39,87; 39,88; 39,88; 39,90; 39,91; 39,92; 39,92; 39,93; 39,94; 39,96; 39,98; 39,99 мм. Поскольку размер 39,72 меньше наименьшего предельного размера и деталь может быть забракована, нужно определить, не содержит ли этот размер грубую погрешность с помощью критерия 3σ.

Контрольные вопросы

1. Что такое грубые погрешности (промахи)?
2. Расскажите о критерии «трех сигм».

3. Как применить критерий Романовского для исключения грубой погрешности из ряда наблюдений?

4. В чем суть критерия Шарлье?

5. Расскажите об использовании вариационного критерия Диксона для нахождения промахов.

6. Объясните, как исключаются грубые погрешности по критерию Шовене.

7. Объясните, как исключаются грубые погрешности, если случайные величины распределены по экспоненциальному закону.

Практическая работа 2
ВЫЯВЛЕНИЕ И ИСКЛЮЧЕНИЕ СИСТЕМАТИЧЕСКИХ ПОГРЕШНОСТЕЙ

Цель работы: изучить методы выявления систематических погрешностей.

1 Общие теоретические сведения

Систематическая погрешность – это составляющая погрешности измерения, остающаяся постоянной или же закономерно изменяющаяся при повторных измерениях одной и той же величины.

Для исключения систематических погрешностей используют различные методы.

Если известна последовательность, в которой были получены результаты измерений, то исключение *переменной систематической погрешности* можно провести **графическим методом** с последующим вычислением поправки и построением графика исправленных результатов.

Для этого вычисляют модуль переменной составляющей по формуле

$$\Theta = \frac{\Delta c}{n} \cdot i, \tag{7}$$

где Δc – разность между наибольшим и наименьшим значениями; n – общее число результатов; i – порядковый номер измерения.

Исправленный результат вычисляют по формуле

$$X_{ИСПР} = X_i - \Theta_i . \tag{8}$$

После внесения поправки получают ряд исправленных результатов измерений и строят новый график исправленных результатов измерений.

Дисперсионный метод (метод Фишера) более чувствителен к изменению средних, и его целесообразно использовать, когда многократные измерения проводятся в течение длительного времени, а сами измерения равноточные. Сущность метода состоит в следующем.

После проведения N измерений их разбивают на L групп по n_j результатов измерения в каждой группе ($L>3$), но так, чтобы выполнялось равенство $N=\sum_{j=1}^{L} n_j$. Затем анализируют изменение дисперсий в каждой из групп измерений по сравнению со средним рассеиванием измерений внутри каждой из групп.

Находят оценку внутригрупповой дисперсии (среднее рассеивание внутри групп)

$$S_{ВГ}^2=\frac{1}{N-L}\sum_{j=1}^{L}\sum_{i=1}^{n_j}\left(x_{ij}-\overline{x_j}\right)^2=\frac{1}{N-L}\sum_{j=1}^{L}\left(n_j-1\right)\cdot S_j^2=\frac{\sum_{j=1}^{L} k_j\cdot S_j^2}{\sum_{j=1}^{L} k_j}, \qquad (9)$$

где N – число проведенных измерений; L – число групп; n – число измерений в каждой группе; $\overline{x_j}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}$ – среднее результатов измерений в j-й группе; x_{ij}– результат i-ого измерения в j-й группе; S_j^2 – рассеяние (дисперсия) внутри каждой j-й группе; $\sum_{j=1}^{L} k_j=N-L$.

Результат внутригрупповой дисперсии целесообразно сравнить с межгрупповой дисперсией, вычисляемой как

$$S_{МГ}^2=\frac{1}{L-1}\sum_{j=1}^{L} n_j\cdot\left(\overline{x_j}-\overline{\overline{x}}\right)^2, \qquad (10)$$

где $\overline{\overline{x}}=\frac{1}{L}\sum_{j=1}^{L}\overline{x_j}=\frac{1}{L}\sum_{j=1}^{L}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i$ – среднее результатов измерений.

Межгрупповая дисперсия отражает влияние систематического различия между группами измерений.

Критерием оценки наличия систематической погрешностей является дисперсионный критерий Фишера

$$F = \frac{S_{МГ}^2}{S_{ВГ}^2}. \tag{11}$$

Значение F_q для различных уровней значимости q, числа измерений N и числа групп L приведены в приложении А при степени $k_1 = L - 1, k_2 = N - L$. Если полученное значение критерия Фишера $F > F_q$ (при заданных q, N, L), то гипотеза об отсутствии систематических смещений результатов измерений по группе отвергается, т. е. считается, что смещение среднего обусловлено систематической погрешностью. При числе групп менее трех используют другие методы оценки равенства математических ожиданий в группах.

Способ последовательных разностей (критерий Аббе) применяется для обнаружения изменяющейся во времени систематической погрешности и состоит в следующем. Дисперсию результатов наблюдений можно оценить двумя способами:

– *обычным*

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2; \tag{12}$$

– *вычислением суммы квадратов последовательных* (в порядке проведения измерений) *разностей* $(x_{i+1} - x_i)^2$

$$S_d^2 = \frac{1}{2(n-1)}\sum_{i=1}^{n-1}(x_{i+1} - x_i)^2. \tag{13}$$

Отношение $\nu = \frac{S_d^2}{S_x^2}$ и является критерием для обнаружения систематических смещений центра группирования результатов наблюдений.

Значения ν_q для различных уровней значимости q и числа наблюдений n приведены в приложении Б. Если полученное значение критерия Аббе ν меньше ν_q при заданных q и n, то гипотеза о постоянстве центра группирования результатов наблюдений отвергается, т. е. обнаруживается переменная систематическая погрешность результатов измерений.

Метод Стьюдента. Если необходимо установить наличие смещения в средних для двух групп (серий) измерений (при этом метод Фишера не применим) и число данных в каждой из групп невелико (менее 30), то для проверки гипотезы о равенстве средних вычисляется величина

(14)

$$t_{1-2} = \frac{\left|\overline{x_1} - \overline{x_2}\right|}{\sqrt{(n_1 - 1) \cdot S_{x1}^2 + (n_2 - 1) \cdot S_{x2}^2}} \cdot \sqrt{\frac{n_1 \cdot n_2 \cdot (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}$$

где $\overline{x_1}, \overline{x_2}$ – среднее значения измерений в первой и второй группе измерений; n_1, n_2 – число измерений в первой и во второй группе измерений; S_{x1}^2, S_{x2}^2 – дисперсия в первой и второй группе.

Далее, задаваясь определенным уровнем значимости q или доверительной вероятностью $P = 1-q$, по таблицам в приложениях В и Г при числе степеней свободы $k = n_1 + n_2 - 2$ находят соответствующее значение t_p, и если $t_{1-2} < t_p$, то гипотеза о равенстве средних (математических ожиданий) принимается. Этой оценкой можно пользоваться и для большего числа групп, попарно проверяя их однородность [2].

2 Задания

1. Для результатов контроля линейных размеров детали (в мм), представленных ниже, выполнить обработку результатов по исключению переменной систематической погрешности. Для обработки использовать графический метод с последующим вычислением поправки и построением графика исправленных результатов.

Результаты получены последовательно:
40,15; 40,15; 40,15; 40,17; 40,16; 40,16; 40,16; 40,15; 40,16; 40,16; 40,17; 40,17; 40,17; 40,17; 40,15; 40,18; 40,19; 40,18; 40,18; 40,18;'40,19; 40,19; 40,19; 40,18; 40,21; 40,19; 40,18; 40,19; 40,19; 40,19.

2. Результаты измерений величины x приведены в таблице. Используя метод Аббе, оценить наличие в результатах систематической погрешности при уровне значимости 0,05.

№	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
X_i	13,4	13,3	14,5	13,8	14,5	14,6	14,1	14,0	14,3	14,3	13,2

3. Используя исходные данные, указанные в задании 1, проверить гипотезу о наличии систематической погрешности, используя критерий Аббе.

4. Было сделано 40 измерений диаметра детали восемью различными штангенциркулями. Каждым из них проводились по пять измерений. Внутрисерийная дисперсия равна 0,054 мм^2, межсерийная – 0,2052 мм^2. Определить наличие систематической погрешности измерения диаметра детали с помощью критерия Фишера.

5. При определении среднего расстояния, пройденного автомобилем, на 1 л бензина получили следующие результаты измерений (средние и СКО) после

пробега пяти автомобилей по грунтовой (индекс 1) и асфальтовой (индекс 2) дорогам:

$$\overline{x_1} = 21{,}3 \ км/л, \ \overline{x_2} = 22{,}7 \ км/л$$

$$S_1 = 0{,}55 \ км/л; \ S_2 = 0{,}45 \ км/л$$

Проверить гипотезу о том, что характер дорожного покрытия дороги влияет на показатели среднего пробега на 1 л бензина, т. е. на появление систематического смещения в показателях расхода бензина при их оценке для различного дорожного покрытия.

Контрольные вопросы.

1. Что такое систематическая погрешность? Приведите примеры.
2. Дайте определение исправленного результата измерений.
3. Назовите способы выявления постоянных систематических погрешностей.
4. В чем состоит суть критерия Аббе?
5. Что такое дисперсионный анализ и как он применяется для устранения систематических погрешностей?

Практическая работа 3
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАНИЦ НЕИСКЛЮЧЕННОЙ СИСТЕМАТИЧЕСКОЙ ПОГРЕШНОСТИ

Цель работы: освоить методы определения границ неисключенной систематической погрешности.

1 Общие теоретические сведения

Систематические погрешности, оставшиеся после введения поправок, называются неисключенными систематическими погрешностями. Неисключенная систематическая погрешность результата образуется из составляющих, в качестве которых могут быть неисключенные систематические погрешности метода, средств измерений, а также вызванные другими источниками.

Неисключенная систематическая погрешность характеризуется её границами. В качестве границ составляющих неисключенной систематической погрешности принимают, например, пределы допускаемых основных и дополнительных погрешностей средств измерений, если случайные составляющие погрешности пренебрежимо малы.

При суммировании составляющих неисключенной систематической погрешности результата измерения неисключенные систематические погрешности средств измерения каждого типа и погрешности поправок рассматривают как случайные величины. При отсутствии данных о виде распределения случайных величин *их распределения принимают за равномерные*.

Границы неисключенной систематической погрешности Θ результата измерения вычисляют путем построения композиции неисключенных систематических погрешностей средств измерений, метода и погрешностей, вызванных другими источниками. При равномерном распределении неисключенных систематических погрешностей эти границы (без учета знака) можно вычислить по формуле

$$\Theta = k\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\Theta_i^2}\,, \tag{15}$$

где Θ_i – граница i-й неисключенной систематической погрешности; k – коэффициент, определяемый принятой доверительной вероятностью; m – число суммируемых погрешностей.

Если число суммированных неисключенных систематических погрешностей более четырех (m > 4), то коэффициент k принимают равным: при P = 0,9 k = 0,95; при P = 0,95 k = 1,12; при P = 0,99 k = 1,42.

Если число суммированных неисключенных систематических погрешностей менее или равно четырем (m ≤ 4), то коэффициент k определяют по графику зависимости $k = f\,(m\,,l)$, где $l = \dfrac{\Theta_1}{\Theta_2}$ – параметр, учитывающий различие в размерах границ суммируемых погрешностей (рис. 1).

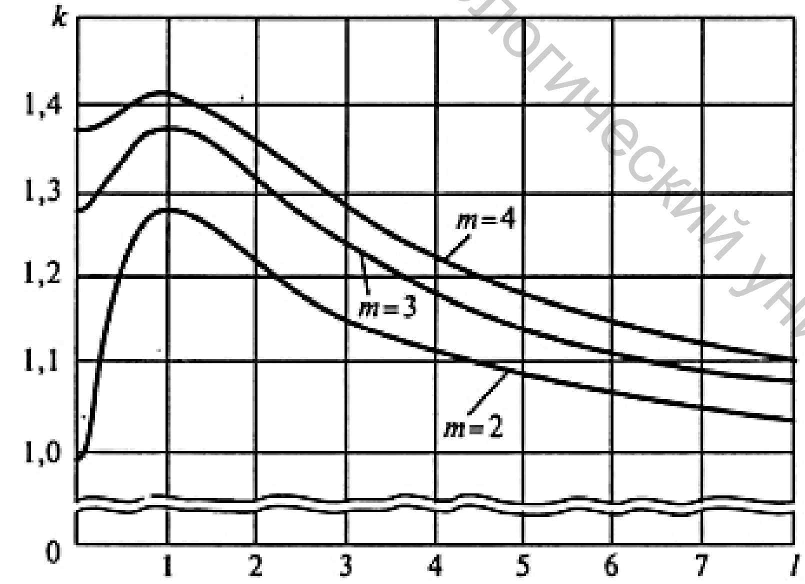


Рисунок 1 – График зависимости $k = f\,(m,\,l)$

При трех или четырех слагаемых в качестве Θ_1 принимают составляющую, по числовому значению наиболее отличающуюся от других, в качестве Θ_2 следует принять ближайшую к Θ_1 составляющую [3].

2 Задания

1. Определить доверительные границы при вероятности Р = 0,99 композиции трех неисключенных систематических погрешностей, имеющих симметричное равномерное распределение при границах $\Theta_1 = \pm 0{,}08$; $\Theta_2 = \pm 0{,}05$; $\Theta_3 = \pm 0{,}03$.

2. Граница композиции из пяти одинаковых неисключенных систематических погрешностей при вероятности P = 0,99 составляет 0,08. Определить границу этой композиции погрешностей при доверительной вероятности 0,95.

3. Пусть при сложении четырех деталей имеют место систематические погрешности, каждая из которых распределена равновероятно в интервале $\pm\Theta_0$. Определить доверительный интервал для суммарной погрешности измерения длины изделия, состоящего из четырех деталей, при вероятности P = 0,99.

4. Известны границы четырех составляющих неисключенных систематических погрешностей $\Theta_1 = \pm 0{,}01$; $\Theta_2 = \pm 0{,}02$; $\Theta_3 = \pm 0{,}03$, $\Theta_4 = \pm 0{,}04$. Определить доверительные границы композиции этих составляющих погрешностей при вероятности P = 1,0.

5. Известны границы трех составляющих неисключенных систематических погрешностей $\Theta_1 = \pm 0{,}01$; $\Theta_2 = \pm 0{,}03$; $\Theta_3 = \pm 0{,}04$. Определить доверительные границы композиции этих составляющих погрешностей при вероятности P = 1,0 и P = 0,95.

Контрольные вопросы

1. Как называются систематические погрешности, оставшиеся после введения поправок?

2. Чем характеризуется неисключенная систематическая погрешность?

3. По какой формуле вычисляют границы неисключенной систематической погрешности при равномерном распределении?

4. Как правильно определять коэффициент k по графику зависимости $k = f\,(m, l)$?

Практическая работа 4
ТОЧЕЧНЫЕ И ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Цель работы: изучение методов оценки точечных и интервальных характеристик результатов измерений.

1 Общие теоретические сведения

Из теории вероятности известно, что наиболее универсальным способом описания случайных величин является отыскание их интегральных или дифференциальных функций распределения. *Интегральной функцией результатов измерений* называется зависимость вероятности того, что результат измерения x_i в *i-м* опыте окажется меньше некоторого текущего значения *x* (рисунок 2, *а):*

$$F(x) = P(x_i \le x) = P\{-\propto < x_i \le x\}. \tag{16}$$

Интегральной функции распределения имеет следующие свойства:

– неотрицательная, т. е. $F(x) \ge O$;

– неубывающая, т. е. $F(x_2) \ge F(x_1)$, если $x_2 \ge x_1$;

– диапазон ее изменения простирается от 0 до 1, т. е. $F(-\infty) = 0$; $F(+\infty) = 0$;

– вероятность нахождения случайной величины x в диапазоне от x_1 до x_2 $P\{x_1 < x < x_2\} = F(x_2) - F(x_1)$.

Более наглядным является описание свойств результатов измерений и случайных погрешностей с помощью *дифференциальной функции распределения,* иначе называемой *плотностью распределения вероятностей* (рис. 2 *б*)

$$p(x) = \frac{dF(x)}{dx}. \tag{17}$$

Она всегда неотрицательна и подчиняется условию нормирования в виде:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(x)dx = 1, \tag{18}$$

что означает, что вероятность попадания величины x в интервал $(-\infty; +\infty)$ равна единице, т. е. представляет собой достоверное событие.

Учитывая взаимосвязь F(x) и p(x), вероятность попадания случайной величины в заданный интервал $(x_1; x_2)$ вычисляется

$$P\{x_1 < x < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx. \tag{19}$$

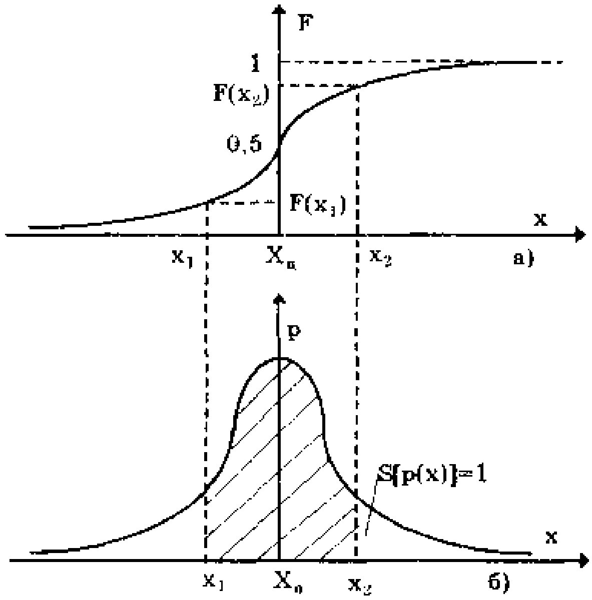


Рисунок 2 – Интегральная (а) и дифференциальная (б) функции нормального распределения результатов измерения

Доверительные границы результатов измерений определяются как наибольшее и наименьшее значения результатов измерений, ограничивающие интервал, внутри которого с заданной вероятностью находится искомое (истинное) значение результата измерений.

При *нормальном законе* распределения измеряемой величины, если проведено *достаточно большое количество измерений n (более 20)*, СКО заранее известно, то вероятность нахождения действительного значения измеряемой ФВ в доверительном интервале от x_1 до x_2 вычисляется через функцию Лапласа

$$P\left(\bar{x} - t_p \cdot \frac{S_x}{\sqrt{n}} < Q \le \bar{x} + t_p \cdot \frac{S_x}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi\left(t_p\right) - 1 \qquad (20)$$

где $t_p = \dfrac{\left|\bar{x} - m_x\right|}{S_{\bar{x}}}$.

$\Phi(t) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^t e^{-\frac{1}{2}t^2} dt$ – функция Лапласа.

Функция Лапласа используется для определения значений интегральных функций нормальных распределений. Функция нормального распределения связана с функцией Лапласа соотношением *F(t) = 0,5 + Φ(t),* где *F(t)* – интегральная функция нормированного нормального распределения [4]. Для вычисления вероятности используют табулированные значения интеграла вероятности, представленные в приложениях Д и Ж.

Аналогично (18) записывается вероятность P нахождения погрешности измерения среднего $\Delta = |x - Q|$ в заданном интервале

$$P\left(|\Delta| < t_p \cdot \frac{S_x}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t_p) - 1. \tag{21}$$

Половина доверительного интервала называется доверительной границей, и результат измерения представляется в виде

$$Q = \bar{x} \pm t_p S_{\bar{x}} \text{ при } P = \ldots.\% \tag{22}$$

Если произведено *небольшое (ограниченное) число измерений n (до 20)*, а сами измерения (предположительно) *распределены нормально*, то вероятность нахождения действительного значения измеряемой физической величины в доверительном интервале (при неизвестном СКО) будет определяться распределением Стьюдента

$$P\left[\left(\bar{x} - t_p \cdot S_{\bar{x}}\right) \le Q \le \left(\bar{x} + t_p \cdot S_{\bar{x}}\right)\right] = 2\int_0^{t_p} S(t,k)\,dt, \tag{23}$$

где $S_{\bar{x}}$ – оценка СКО; $S(t,k)$ – дифференциальная функция распределения Стьюдента, зависящая от параметра $t_p = (x-Q)/S_{\bar{x}}$ и числа степеней свободы $k = n-1$ (см. приложение В и Г).

Для погрешности измерения можно написать следующее соотношение:

$$P\left(|\bar{x} - Q| < t_p S_{\bar{x}}\right) = P\{|\Delta| < t_p S_{\bar{x}}\} = 2\int_0^{t_p} S(t,k)\,dt. \tag{24}$$

Результат измерения также записывается в виде (22).

Если *вид распределения погрешности неизвестен*, то оценить вероятность непревышения погрешности Δ некоторого заданного значения $\varepsilon > \Delta$, зная дисперсию или СКО S, можно с помощью **неравенства Чебышева**

$$P(|\Delta| < \varepsilon) \ge 1 - \left(\frac{S}{\varepsilon}\right)^2 \quad \text{или} \quad P(|\Delta| > \varepsilon) < \left(\frac{S}{\varepsilon}\right)^2, \tag{25}$$

где $|\Delta| = |x - m_x|$ – погрешность однократного измерения.

Первое соотношение (25) определяет вероятность не превышения случайной погрешности некоего наперед заданного значения ε, а второе – вероятность превышения погрешности ε.

2 Задания

1. Для некоторого случайного процесса зависимость плотности вероятности от значения переменной x подчиняется равномерному распределению. Найти величину a, дисперсию, среднее квадратическое отклонение случайной величины x.

2. Случайная величина подчинена треугольному закону распределения. Записать выражение для плотности распределения $f(x)$, найти математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение случайной величины x.

3. Для равномерного распределения результатов измерения, заключенных между значениями a и b, определить математическое ожидание и дисперсию $(a > 0, b > 0, b > a)$.

4. Погрешность измерения δ имеет равномерное распределение от –с до с и симметрична относительно начала координат. Определить математическое ожидание погрешности, дисперсию и СКО погрешности от среднего значения. Подсчитать СКО погрешности при с = 0,1 мм.

5. Погрешность δ измерения напряжения распределена по симметричному закону Симпсона (треугольный закон) в интервале от а = –1 мВ до b = 3 мВ. Определить систематическую погрешность, СКО результатов измерения, вероятность того, что измеряемое напряжение превысит истинное значение более чем на 2 мВ, а также вероятность того, что исправленный результат измерения не превысит 11 мВ.

6. В условиях нормального распределения результатов наблюдения получены следующие данные: n = 16, $\overline{X}$ = 94,238 мм; S_x = 0,048 мм. Верно ли утверждение: P{Q > 94,217} = 95 %

7. Радиоприемные устройства (РПУ), выпускаемые серийно на заводе, характеризуются порогом чувствительности x_n в некотором диапазоне принимаемых частот. Дисперсия результатов измерений, распределенных по нормальному закону, большой партии РПУ известна и составляет 100 мкВ^2 (СКО S = 10 мкВ). Измерение порога чувствительности x_n одного из образцов РПУ из серийной партии изделий дало результат x_n = 100 мкВ. Определить доверительный интервал, в котором находится действительное значение порога чувствительности с вероятностью 0,9, полагая, что систематическая погрешность отсутствует.

8. Погрешность измерения напряжения вольтметром распределена по нормальному закону. Систематическая погрешность равна нулю, а СКО резуль-

татов измерения составляет S_U= 60 мВ. Определить вероятности того, что результат измерения отличается от истинного значения напряжения более чем на Δ_1 = 144 мВ и Δ_2 = 120 мВ.

9.В условиях нормального распределения найдено, что среднее арифметическое результатов измерений и их СКО соответственно равны x = 24,022; S_x = 0,012. Число измерений n = 9. Определить вероятность того, что истинное значение Q лежит в интервале от 24,014 до 24,030.

10. Оценить вероятность того, что измеренное значение сопротивления R превышает истинное значение более чем на 2 Ом, если СКО S = 0,2 Ом. Закон распределения неизвестен.

Контрольные вопросы

1. Перечислите свойства интегральной и дифференциальной функций распределения случайной величины.
2. Какие точечные оценки законов распределения вы знаете? Какие требования предъявляются к ним?
3. Что такое доверительный интервал? Какие способы его задания вам известны?
4. Как определить вероятность нахождения действительного значения нормально распределенной ФВ в доверительном интервале от x_1 до x_2 при известном СКО и большом количестве измерений?
5. Как определить вероятность нахождения действительного значения нормально распределенной ФВ в доверительном интервале от x_1 до x_2 при известном СКО и если выполнено не более 20 измерений?
6. В каком случае при оценке границ погрешности применяется неравенство Чебышева?

Практическая работа 5
ИНТЕРВАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ДИСПЕРСИИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Цель работы: изучить методы оценки дисперсии результатов измерений.

1 Общие теоретические сведения

Оценка дисперсии определяется с какой-то доверительной вероятностью в области истинного значения дисперсии. Если известно (или предполагается довольно точно), что результаты измерения распределены по нормальному закону, то плотность вероятности величины распределяется по закону Пирсона с $k = n - 1$ степенями свободы

$$\chi_k^2 = \chi_{n-1}^2 = \frac{(n-1)S_x^2}{\sigma^2} = \frac{(n-1)S_{\bar{x}}^2}{\sigma_{\bar{x}}^2}, \tag{26}$$

где $S_x^2, S_{\bar{x}}^2$ – несмещенная дисперсия результатов единичных измерений, несмещенная дисперсия результатов измерения среднее арифметического; $\sigma^2, \sigma_{\bar{x}}^2$ – дисперсия результатов единичных измерений, дисперсия результатов измерения среднее арифметического.

Интегральная функция распределения Пирсона определяется как вероятность того, что все значения дроби (26) будут меньше или равны некоторому заданному значению $\chi_{k,P}^2$ (критерий Пирсона). Значения этой вероятности табулированы (приложение К), и дифференциальная функция распределения зависит только от k. С помощью этой таблицы определяют доверительные границы попадания результатов оценки дисперсии с заданной вероятностью.

Вначале, задаваясь некой малой вероятностью с q-уровнем значимости, определяют вероятность того, что отношение (26) не вышло за пределы 0,5q как малых, так и больших значений ξ

$$F\left(\chi_{k,0.5q}^2\right) = 0{,}5q; \; F\left(\chi_{k,1-0.5q}^2\right) = 1 - 0{,}5q. \tag{27}$$

Затем определяют доверительный интервал для СКО в виде

$$P\left[\frac{S_x\sqrt{n-1}}{\chi_{k,0.5q}} > \sigma \geq \frac{S_x\sqrt{n-1}}{\chi_{k,1-0.5q}}\right] = 1 - q. \tag{28}$$

2 Задания

1. Проведено n = 7 измерений постоянной физической величины x_n, результаты которых представлены в таблице:

Измерение	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7
Результат измерения	5,65	5,37	5,48	5,71	5,44	5,50	5,46
$x_i - \bar{x}$	0,134	–0,146	–0,036	0,194	–0,076	–0,016	–0056

Определить: 1) оценку действительного значения ФВ; 2) оценку СКО результата измерения; 3) записать результат измерения; 4) с уровнем значимости q = 0,1 оценить истинное значение СКО.

2. По результатам n = 20 измерений получили следующие результаты измерения длины стержня $\bar{l}$ = 18,9078 мм, S_1 = 0,0025 мм. Определить доверительные интервалы для дисперсии случайной погрешности при доверительной вероятности $P = 1 – q = 0,9$.

3. В условиях нормального распределения случайных погрешностей получены следующие данные: число измерений n = 4, СКО результата измерений S_x = 0,008 мм. Определить вероятность того, что истинное значение СКО больше 0,010 мм.

4. В условиях нормального распределения случайных погрешностей получены следующие данные: число измерений n = 30, СКО результата измерений S_x = 0,002 мм. Определить значение S, при котором с уровнем значимости q = 0,01 (или с вероятностью 0,99) истинное значение СКО может быть меньше S_q, т. е. провести одностороннюю оценку истинного значения СКО сверху.

5. В условиях нормального распределения результатов наблюдений получены следующие данные: n = 16, $S_{\bar{x}}$ = 0,008 мм. Верно ли неравенство: $0{,}006 \le \sigma_x < 0{,}013$ при уровне значимости q = 0,04

Контрольные вопросы

1. Что характеризует величина $\chi^2_{k,P}$?

2. Расскажите алгоритм определения доверительных границ, в которых находится значение оценки дисперсии с заданной вероятностью.

3. По какой формуле вычисляют доверительный интервал для СКО?

Практическая работа 6
ОПЕРЕДЕЛЕНИЕ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Цель работы: научиться определять закон распределения вероятности результатов измерений с помощью построения гистограмм.

1 Общие теоретические сведения

Для уточнения формы закона распределения вероятности прибегают к построению гистограмм. Осуществлять построение можно вручную, но предпочтительнее использовать любые программные средства, позволяющие осуществлять как статистическую обработку, так и графическое построение.

Гистограмма представляет собой ступенчатый график, состоящий из прямоугольников, у которых основаниями служат частные интервалы Δx_i на оси абсцисс, с высотой, соответствующей частоте попадания данных в этот интервал на оси ординат.

Для построения гистограммы необходимо выбрать оптимальное число интервалов группирования экспериментальных данных.

Для выполнения задания предлагается два варианта выбора числа интервалов группирования экспериментальных данных:

1) число интервалов находится между минимальным и максимальным числами, которые могут быть определены по формулам

$$m_{min}= 0,55\ n^{0,4} \text{ и } m_{max}= 1,25\ n^{0,4} \qquad (29)$$

где n – число отсчетов.

2) число интервалов может быть выбрано из таблицы 9.

Таблица 9 − Рекомендуемое число интервалов для построения гистограмм в зависимости от числа отсчетов

Число отсчетов	Рекомендуемое число интервалов
40−100	7−9
101−500	8−12
501−1000	10−16
1001−10000	12−22

При выборе конкретного числа интервалов группирования рекомендуется учитывать следующее:

1) если предполагается, что закон распределения плотности вероятности симметричный, с явно выраженной модой, то желательно, чтобы количество интервалов m было нечетным;

2) интервалы должны быть равной длины (исключением могут быть первый и последний);

3) в каждом интервале должно быть не менее 5 отсчетов (выполнение этого требования обязательно при проверке соответствия ЗРВ экспериментальным данным по критерию согласия К. Пирсона).

Определить длину интервала Δx по формуле

$$\Delta x = \frac{x_{max} - x_{min}}{m}, \qquad (30)$$

где m – число интервалов гистограммы.

Гистограмма распределения строится в осях границ интервалов (по оси x) и частоты (по оси y). Для каждого класса строят прямоугольник с основанием, равным ширине интервала, и с высотой, соответствующей частоте попадания данных в этот интервал или частости (относительному количеству отсчетов, приходящихся на данный интервал), определяемой по отношению

$$\frac{N_i}{n \cdot \Delta x}, \qquad (31)$$

где N_i – частота (количество отсчетов, попавших в данный интервал); n – количество отсчетов в исходном массиве; Δx – длина интервала.

Пример построения гистограммы в программе Microsoft Excel

Построим гистограмму для результатов измерения n = 100, представленных в таблице 10.

Таблица 10 – Результат измерения физической величины x

82,46	92,04	82,66	80,63	83,46	96,00	91,47	87,33	98,38	82,93
85,30	92,74	89,00	87,98	87,31	91,68	87,87	92,23	87,97	81,63
86,13	81,82	80,19	99,65	94,90	86,19	97,22	91,43	91,01	83,49
88,81	85,15	87,53	91,38	81,31	93,73	99,86	91,31	97,37	98,19
87,95	84,38	80,84	95,52	85,26	86,96	82,47	84,05	95,10	84,10
92,02	89,53	85,01	88,99	92,57	84,91	99,73	86,49	82,33	87,15
83,45	88,86	99,97	83,98	91,96	81,88	98,73	93,83	85,28	89,42
85,22	92,14	81,40	94,67	88,36	86,94	81,88	85,97	94,12	97,11
89,69	85,64	91,77	96,18	90,17	89,71	87,14	95,05	95,58	96,73
88,60	86,48	83,90	93,84	81,38	84,73	92,53	98,23	95,78	83,35

1. Определяем число интервалов с помощью формулы (29) или по таблице 9.

2. Для нахождения ширины интервала определяем максимальное и минимальное число результата измерения с помощью формулы =МАКС(число 1: число 2) и =МИН(число 1: число 2) в программе MicrosoftExcel. (рис. 3, 4)

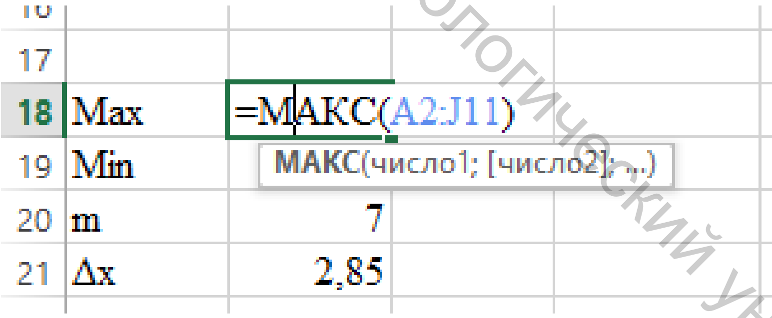


Рисунок 3 – Иллюстрация формулы «МАКС»

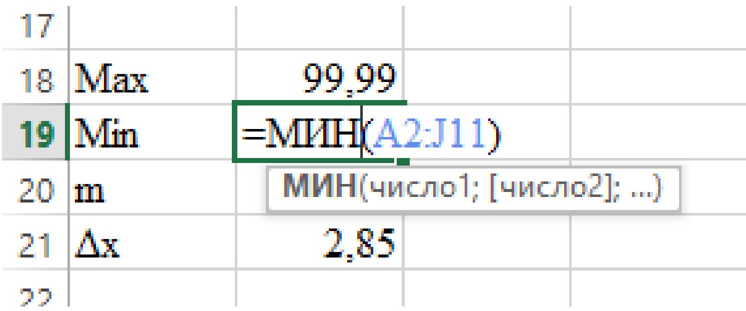


Рисунок 4 – Иллюстрация формулы «МИН»

3. Ширину интервала определяем по формуле (37) (рис. 5).

17		
18	Max	99,99
19	Min	80,04
20	m	7
21	Δx	=(B18-B19)/7
22		

Рисунок 5 – Нахождение ширины интервала

4. В отдельных ячейках строим границы интервалов, прибавляя значение ширины интервала. В последнюю ячейку необходимо поставить значение границы интервала больше, чем максимальное значение результата измерения физической величины.

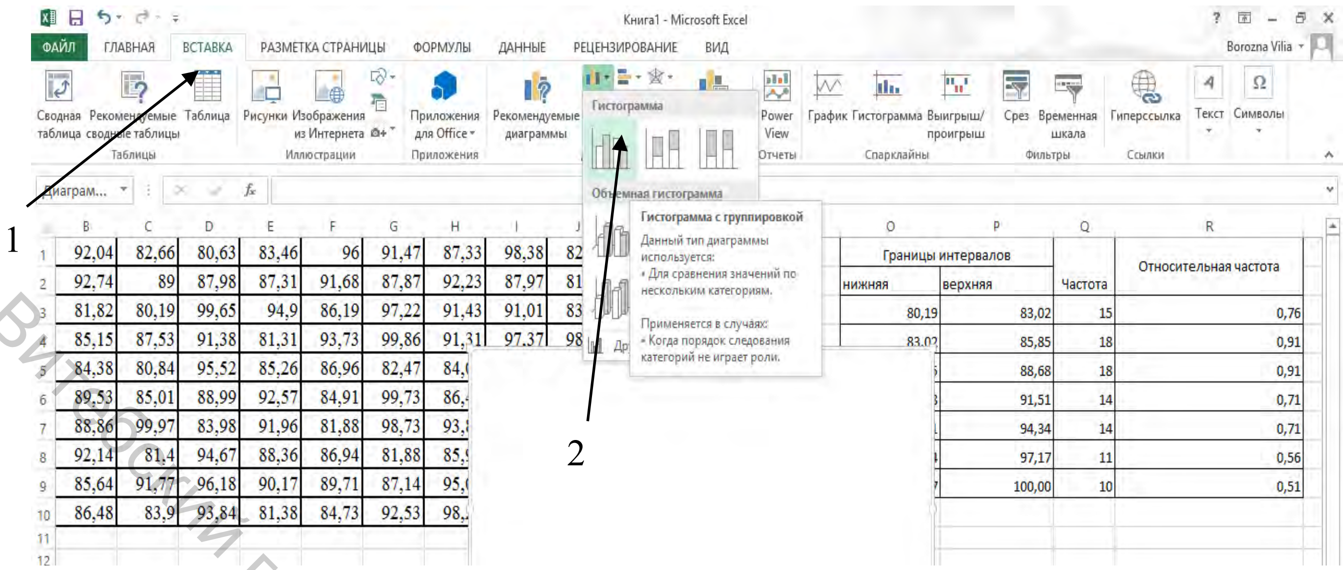
5. Определяем частоту попадания значений в заданный интервал. В программе Microsoft Excel имеется специальная функция «=ЧАСТОТА (массив результатов измерений; верхняя граница интервала)». Перед введением формулы необходимо выделить весь диапазон ячеек, в которых будет отображаться частота. После введение формулы нужно нажать Ctrl+Shift+Enter.

Граница интервалов		Частота	Относительная частота
Нижняя	Верхняя		
80,04	82,89	=ЧАСТОТА($A$2:$J$11;$J$18:$J$24)	
82,89	85,74	14	0,05
85,74	88,59	14	0,05
88,59	91,44	20	0,07
91,44	94,29	16	0,06
94,29	97,14	16	0,06
97,14	100	9	0,03

Рисунок 6 – Иллюстрация формулы по нахождению частоты

6. Гистограмму можно строить по значениям частоты и относительной частоты. Относительная частота определяется по формуле (30), представленной выше.

7. С помощью стандартного инструмента для построения гистограмм («вставка/гистограмма») строим гистограмму распределения (рис. 7).



1 – вкладка «вставка»; 2 – вкладка «гистограмма»

Рисунок 7 – Изображение «Вставка/гистограмма»

8. Для добавления данных нужно нажать на вкладку «Выбрать данные» (рис. 8). После нажать вкладки «Выбрать данные» появиться диалоговое окно «Выбор источника данных» (рис. 9). В этом диалоговом окне необходимо нажать «Добавить». После этого в новом диалоговом окне «Изменение ряда» написать название диаграммы в троку «Имя ряда», а в строку «Значения» написать данные по частоте (рис. 10). Нажать «Ок» и гистограмма будет построена.

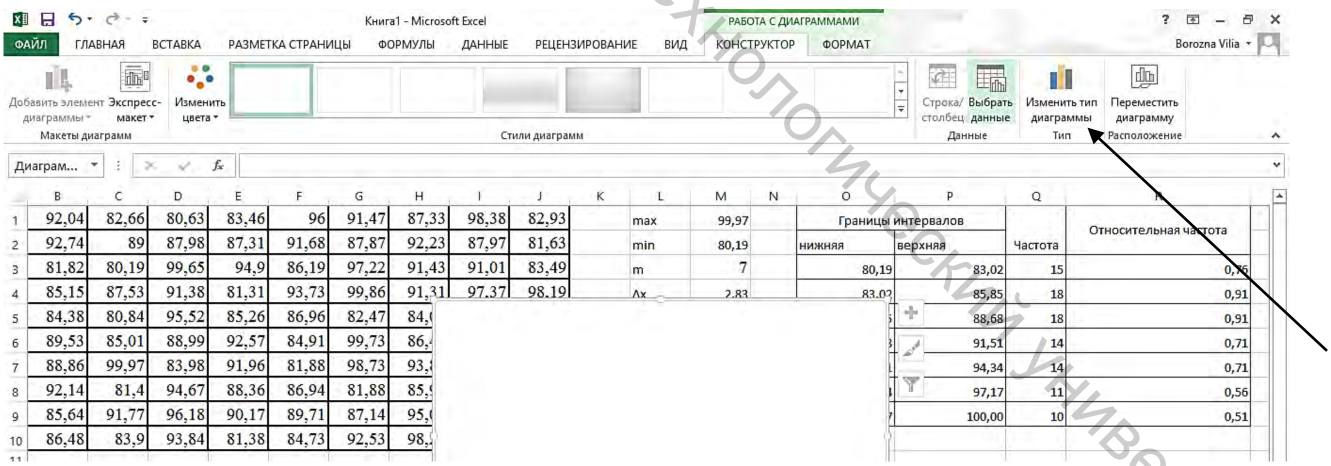


Рисунок 8 – Изображение вкладки «Выбрать данные»

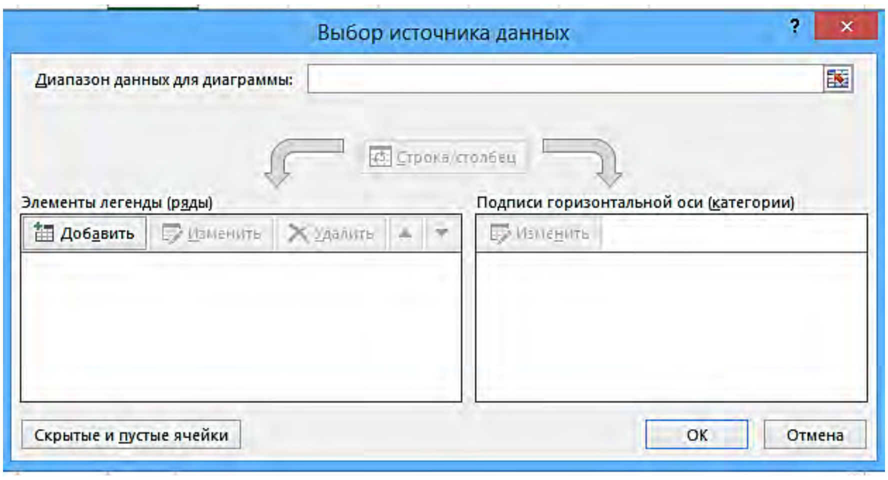
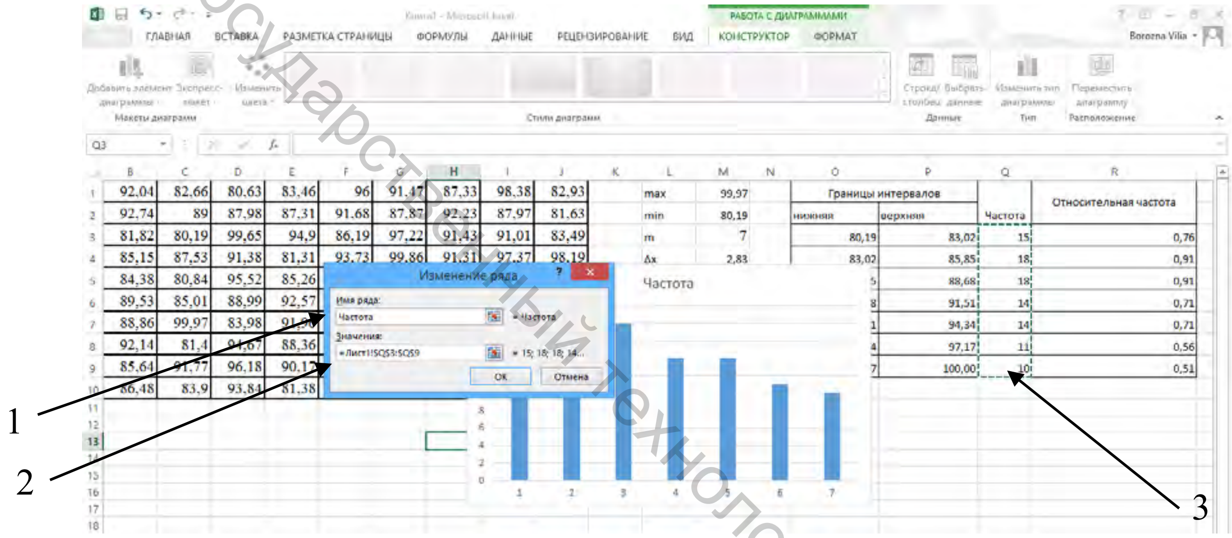


Рисунок 9 – Изображение диалогового окна «Выбор источника данных»



1 – вкладка «Имя ряда»; 2 – вкладка «Значения»; 3 – данные по частоте

Рисунок 10 – Изображение вкладки «Изменения ряда»

9. Полученную диаграмму необходимо отредактировать. Для этого в вкладке «Работа с диаграммами» необходимо изменить стиль гистограммы выбрав такой стиль, где отсутствуют промежутки между столбцами. А также необходимо подписать оси гистограммы. Для этого в вкладке «Добавить элемент диаграммы» выбрать «Оси» и вписать название осей гистограммы.

Задания

1. Постройте гистограмму по результатам измерений разрывной нагрузки, представленным в таблице 11.

Таблица 11 – Значения результатов измерения разрывной нагрузки

724	495	584	643	534	408	426	538	597	352
803	511	459	540	528	497	571	667	418	732
651	420	375	555	535	483	583	714	557	716
497	580	542	507	555	346	576	503	434	512
614	651	616	658	459	514	540	562	620	517
496	477	617	490	633	559	428	509	484	618
676	395	637	477	495	584	330	478	456	718
430	640	575	627	573	615	419	536	462	387
472	645	420	455	478	706	517	476	517	639
503	557	545	394	854	613	583	650	530	638

2. Постройте гистограмму по результатам измерений воздухопроницаемости материала, представленным в таблице 12.

Таблица 12 – Значения воздухопроницаемости

108	101	103	101	101	109	108	103	106	107
100	108	109	109	104	104	105	106	109	103
108	109	107	110	103	101	110	105	107	105
109	100	102	101	105	101	110	105	103	106
103	110	109	101	110	104	102	109	109	104
107	100	108	108	109	100	109	101	105	108
104	108	101	104	109	106	109	103	106	109
100	102	105	101	103	109	107	102	104	106
104	106	108	107	107	109	103	101	103	102
107	108	102	109	108	101	103	103	103	106

Контрольные вопросы

1. Что такое вариационный ряд и интервалы группирования? Как определяется число интервалов группирования?
2. Что такое гистограмма и полигон?
3. Объясните алгоритм построения гистограммы.
4. Объясните, как строится гистограмма в программе Microsoft Excel?

Практическая работа 7
ИНДЕТИФИКАЦИЯ ФОРМЫ ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЯ

Цель работы: научиться определять близость функции закона распределения с помощью критериев согласия.

1 Общие теоретические сведения

В качестве способа оценки близости распределения выборки экспериментальных данных к принятой аналитической модели закона распределения обычно рекомендуется использование так называемых критериев согласия.

Критерии согласия позволяют оценить вероятность того, что полученная выборка не противоречит сделанному предположению о виде закона распределения рассматриваемой случайной величины. Для этого выбирается некоторая величина u, являющаяся мерой расхождения статистического и теоретического законов распределения, и определяется такое ее значение u_α, чтобы $P(u \geq u_\alpha) = q$, где q – достаточно малая величина (уровень значимости), значение которой устанавливается в соответствии с существом задачи. Если значение меры расхождения u_q полученное на опыте, больше u_α, то отклонение от теоретического закона распределения считается значимым и предположение о виде закона распределения должно быть отвергнуто (вероятность отвергнуть правильное предположение о виде закона распределения в этом случае не больше α). Если значение $u_q \leq u_\alpha$, то отклонение считается незначимым, то есть данные опыта не противоречат сделанному предположению о виде закона распределения.

В **критерии согласия К. Пирсона** (критерий χ^2) за меру расхождения принимается величина χ^2, опытное (расчетное) значение χ^2_q которой определяется формулой

$$\chi_q^2 = \sum_{i=1}^{m} \frac{\left(N_i - nP_i\right)^2}{nP_i}, \qquad (32)$$

где m — число сравниваемых частот (число интервалов, на которые разбиты все результаты измерений величины x); N_i – частота (количество отсчетов, попавших в i-тый интервал); n – количество отсчетов в исходном массиве результатов измерений; P_i – вероятность попадания случайной величины x в i-й интервал.

При $n \to \infty$ закон распределения χ^2_q независимо от вида закона распределения случайной величины x стремится к закону χ^2-распределения с $k = m - r - 1$ степенями свободы, где r − число параметров теоретического закона распределения, вычисляемых по данной выборке ($r = 2$ для нормального и равномерного распределения).

Теоретические значения интегральной функции χ^2-распределения Пирсона для различных k и P представлены в приложении К.

Для применения критерия Пирсона в общем случае необходимо, чтобы объем выборки n и количество разрядов m_i были достаточно велики (практически считается достаточным, чтобы было $n \geq 50 \div 60$, $m_i \geq 5 \div 8$).

Критерий согласия К. Пирсона χ^2 позволяет провести сравнение двух моделей и в том случае, когда для них используется разное число столбцов.

Пример 1. Расчет критерия согласия К. Пирсона при нормальном законе распределения.

Получены результаты измерения физической величины, которые представлены в таблице 13.

Таблица 13 – Результаты измерения физической величины

8,3	8,35	8,35	8,4	8,4	8,4	8,45	8,45	8,45	8,45
8,45	8,5	8,5	8,5	8,5	8,5	8,5	8,5	8,5	8,55
8,55	8,55	8,55	8,55	8,55	8,55	8,55	8,55	8,55	8,6
8,6	8,6	8,6	8,6	8,6	8,6	8,6	8,6	8,6	8,6
8,6	8,6	8,6	8,6	8,6	8,6	8,6	8,65	8,65	8,65
8,65	8,65	8,65	8,65	8,65	8,65	8,65	8,65	8,65	8,65
8,65	8,65	8,65	8,65	8,7	8,7	8,7	8,7	8,7	8,7
8,7	8,7	8,7	8,7	8,7	8,7	8,75	8,75	8,75	8,75
8,75	8,75	8,75	8,75	8,75	8,8	8,8	8,8	8,8	8,8
8,8	8,8	8,85	8,85	8,85	8,85	8,85	8,85	8,95	8,4

1. Находим среднее значение $\bar{x}$ и СКО S_X. Данные разбиваем на интервалы и определяем попадание результатов измерения в каждый интервал. Результаты расчетов представляем в виде таблицы (табл. 14).

2. Определим величину t_i (графа 4 табл. 14), показывающую на сколько S_X и в каком направлении отстоит от среднего арифметического правая граница x_i каждого интервала:

$$t_i = \frac{x_i - \bar{x}}{S_x} = \frac{x_i - 8{,}63}{0{,}13} \qquad (33)$$

3. С помощью таблицы (приложение Л) определяем значение функции Лапласа $\Phi(t_i)$ для различных аргументов t_i (графа 5 табл. 14). Если значение t_i отрицательно, то значение функции тоже будет отрицательным.

4. Определяем вероятность попадания P_i значения в i-й интервал (графа 6 табл. 14):

$$P_i = \Phi(t_i) - \Phi(t_{i-1}). \qquad (34)$$

Принимая во внимание, что $\Phi(-\infty) = -0{,}5$, а $\Phi(+\infty) = 0{,}5$, получим для $P_1 = \Phi(t_1) - \Phi(-\infty) = -0{,}4429 - (-0{,}5) = 0{,}0571$,

$P_2 = \Phi(t_2) - \Phi(t_1) = -0{,}3830 - (-0{,}4332) = 0{,}0599$ *и т.д.*

5. В графу 7 заносим вычисления теоретических частот в каждом столбце (n – количество результатов измерений), в восьмую графу внесем результаты

остальных вспомогательных вычислений для расчета критерия Пирсона. Суммирование чисел в восьмой графе дает $\chi_q^2 = 2{,}447$.

Интервалы с малочисленными частотами (*меньше 5*) следует объединить с последующим или предыдущим. В этом случае при определении числа степеней свободы по формуле $k = m - r - 1$ для выбора табличного значения критерия Пирсона следует в качестве m принять число интервалов, оставшихся после объединения частот.

Таблица 14 – Расчет критерия Пирсона

i	Интервал $[x_{i-1}; x_i]$	Частота N_i	Нормированное отклонение от среднего арифметического, t_i	Значение функции Лапласа, $\Phi(t_i)$	Вероятность попадания значения в i-й интервал, P_i	Теоретическая частота, nP_i	$(N_i - nP_i)^2/nP_i$
1	[–∞; 8,425]	7	–1,58	–0,4429	0,0571	5,71	0,291
2	[8,425; 8,475]	5	–1,19	–0,3830	0,0599	5,99	0,164
3	[8,475; 8,525]	8	–0,81	–0,2910	0,0920	9,20	0,157
4	[8,525; 8,575]	10	–0,42	–0,1628	0,1282	12,82	0,620
5	[8,575; 8,625]	18	–0,04	–0,0160	0,1468	14,68	0,751
6	[8,625; 8,675]	17	0,35	0,1368	0,1528	15,28	0,194
7	[8,675; 8,725]	12	0,73	0,2673	0,1305	13,05	0,084
8	[8,725; 8,775]	9	1,12	0,3686	0,1013	10,13	0,126
9	[8,775; 8,825]	7	1,50	0,4332	0,0646	6,46	0,045
10	[8,825; +∞]	7	+∞	0,5000	0,0668	6,68	0,015
Расчетное значение критерия Пирсона							Σ = 2,447

6. Если рассчитанное значение $\chi_q^2 < \chi^2$, которое выбирается по таблице приложения К в зависимости от числа степеней свободы k и уровня доверительной вероятности P (в данном случае $\chi^2 = 14{,}067$ при $k = 10 - 2 - 1 = 7$ и $P = 0{,}95$), то можно принять гипотезу о том, что результат измерения подчиняется нормальному закону распределения вероятности.

Пример 2. Расчета критерия согласия К. Пирсона при равномерном, треугольном или трапецеидальном законах распределения.

Теоретическую вероятность и, следовательно, частоту определяют через дифференциальную функцию данного закона по формуле

$$P\{x_1 < x < x_2\} = \int_{x_1}^{x_2} p(x)dx, \qquad (35)$$

где $p(x)$ – дифференциальная функция закона распределения, характеризующая плотность распределения; x_1, x_2 – границы интервалов.

Выражения дифференциальной функции для указанных законов распределения приведены в приложении М. Промежуточные вычисления критерия Пирсона сводятся в таблицу вида 15. Рассчитаем критерий Пирсона предположив, что распределение величин равномерное.

Таблица 15 – Расчет критерия Пирсона (закон распределения равномерный)

i	Интервал $[x_{i-1}; x_i]$	Частота, N_i	Вероятность попадания значения в i-й интервал, $P_i x$	Теоретическая частота, $n P_i$	$(N_i - nP_i)^2 / nP_i$
1	[8,300; 8,425]	7	0,077	7,7	0,06
2	[8,425; 8,475]	5	0,077	7,7	0,95
3	[8,475; 8,525]	8	0,077	7,7	0,01
4	[8,525; 8,575]	10	0,077	7,7	0,69
5	[8,575; 8,625]	18	0,077	7,7	13,78
6	[8,625; 8,675]	17	0,077	7,7	11,23
7	[8,675; 8,725]	12	0,077	7,7	2,40
8	[8,725; 8,775]	9	0,077	7,7	0,22
9	[8,775; 8,825]	7	0,077	7,7	0,06
10	[8,825;8,950]	7	0,077	7,7	0,06
Расчетное значение критерия Пирсона					$\Sigma = 29{,}46$

Вероятность попадания значения в i-й интервал будет вычисляться следующим образом:

$$P_i = P(x_i < x < x_{i+1}) = \int_{x_i}^{x_{i+1}} p(x)dx = \frac{1}{b-a} \cdot x \Big|_{x_i}^{x_{i+1}} = \frac{x_{i+1} - x_i}{b-a}.$$

Последующие вычисления проводим также, как описано выше.

Результате значение расчетного критерия Пирсона $\chi_q^2 < \chi^2$ большее табличного, то отклоняем гипотезу о том, что результат измерения подчиняется равномерному закону распределения вероятности.

При небольшом числе наблюдений (n < 50) проверка гипотезы о принадлежности результатов наблюдений к нормальному распределению проводится **по составному d критерию** (по ГОСТ 8.207−76). При проверке задаются уровнем значимости q:

1) первоначально вычисляют отношение $\overline{d}$ *<u>(критерий 1)</u>*

$$\overline{d} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \overline{x}|}{n\, S_x^*}, \tag{36}$$

где S_x^* – смещенная оценка среднего квадратического отклонения, вычисляемая по формуле

$$S_x^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}}\,. \qquad (37)$$

Результаты наблюдений группы можно считать распределенными нормально, если

$$d_{1-q_1/2} \le \bar{d} \le d_{q_1/2}\,,$$

где $d_{1-q_1/2}$ и $d_{q_1/2}$ – квантили распределения, получаемые из таблицы приложения Н, причем q_1 – заранее выбранный уровень значимости критерия;

2) выполняем проверку по <u>*критерию 2*</u>. Можно считать, что результаты наблюдений принадлежат нормальному распределению, если не более m разностей $|x_i - \bar{x}|$ превзошли значение $z_{p/2} \cdot S_x$, где S_x – оценка среднего квадратического отклонения, $z_{p/2}$ – верхняя квантиль распределения нормированной функции Лапласа, отвечающая вероятности P/2.

Значение верхнего квантиля распределения нормированной функции Лапласа находится по таблице 16.

Таблица 16 –Квантили $z_{p/2}$ интегральной функции Лапласа

p	0,90	0,95	0,96	0,97	0,98	0,99
$z_{p/2}$	1,65	1,96	2,06	2,17	2,33	2,58

Значения P определяются из таблицы приложения И по выбранному уровню значимости q_2 и числу результатов наблюдений n. При уровне значимости, отличном от предусмотренных в таблице приложения И, значение P находят путем линейной интерполяции.

В случае, если хотя бы один из критериев не соблюдается, то считают, что распределение результатов наблюдений группы не соответствует нормальному.

Пример 3. Расчет составного d критерия.

Даны результаты многократных измерений давления в масляной системе летательного аппарата, которые представлены после предварительной группировки в таблице 17:

Таблица 17 – Результаты измерений давления

Результаты наблюдений, Па $10'^{5}$	3,12	3,14	3,15	3,17	3,20	3,21	3,24	3,25	3,28
Частота m_i	1	4	3	9	8	9	4	1	1

Требуется проверить согласие опытного распределения с нормальным помощью составного критерия d при уровне значимости $q_1 = q_2 = 0{,}02$.

Вычисляем выборочное среднее арифметическое X, несмещенную S^* и смещенную S оценки СКО.

$$\overline{X} = 3{,}191 \cdot 10^5\ Па$$

$$S^* = 0{,}035 \cdot 10^5\ Па$$

$$S = 0{,}036 \cdot 10^5\ Па$$

Проверяем согласие *по критерию I*. Для этого определяем значение d по формуле (36)

$$d = 0{,}815 \text{ Па}.$$

При $n = 40$; $q_1 = 0{,}01$ и $q_2 = 0{,}99$ находим квантили распределения d (после интерполяции) (см. приложение З):

$$d_1 = 0{,}8731;\ d_2 = 0{,}7226.$$

Гипотеза о нормальности распределения по критерию I, при выбранном уровне значимости подтверждается, так как:

$$d_2 < \mathrm{d} < d_1$$
$$0{,}7226 < 0{,}815 < 0{,}8731$$

Проверка *по критерию II.* Находим значение $m = 2$, Р = 0,99, $z_{p/2} = 2{,}58$, т. е., находим произведение $z_{p/2} \cdot S_x$ и сравниваем его с максимальным отклонением. Гипотеза о нормальности распределения по критерию II справедлива, так как в выборке нет ни одной разницы, превышающей значение:

$$\left|x_{40}-\overline{X}\right|_{\max} < z_{p/2}\cdot S$$

$$0{,}089\cdot 10^5\,Па < 0{,}093\cdot 10^5\,Па$$

$$0{,}059\cdot 10^5\,Па < 0{,}093\cdot 10^5\,Па$$

$$0{,}049\cdot 10^5\,Па < 0{,}093\cdot 10^5\,Па$$

$$0{,}019\cdot 10^5\,Па < 0{,}093\cdot 10^5\,Па$$

$$0{,}009\cdot 10^5\,Па < 0{,}093\cdot 10^5\,Па$$

$$0{,}021\cdot 10^5\,Па < 0{,}093\cdot 10^5\,Па$$

$$0{,}041\cdot 10^5\,Па < 0{,}093\cdot 10^5\,Па$$

$$0{,}051\cdot 10^5\,Па < 0{,}093\cdot 10^5\,Па$$

$$0{,}071\cdot 10^5\,Па < 0.093\cdot 10^5\,Па$$

Таким образом, гипотеза о нормальности закона опытного распределения по обоим критериям подтверждается при принятом уровне значимости $q < 0{,}04$.

2 Задания

1. По данным в заданиях к практической работе 6 проверить гипотезы:
а) распределение результатов измерений является нормальным;
б) результаты измерений подчиняются треугольному распределению;
в) результаты измерений подчиняются равномерному распределению.

Контрольные вопросы

1. Для чего необходимо идентифицировать форму закона распределения результатов измерений?
2. В чем сущность критериев согласия?
3. С помощью каких критериев можно идентифицировать форму закона распределения результатов измерений? Расскажите алгоритм проверки.
4. Каковы особенности идентификации формы закона распределения, отличного от нормального?

Практическая работа 8
ОПРЕДЕЛЕНИЕ ГРАНИЦ СУММАРНОЙ ПОГРЕШНОСТИ РЕЗУЛЬТАТА ИЗМЕРЕНИЯ

Цель работы: научиться определять границы суммарной погрешности результата измерения.

1 Общие теоретические сведения

Согласно ГОСТ 8.207–76 погрешность результата измерения определяется по следующим правилам [5].

В случае, если отношение $\frac{\Theta}{S_x} < 0{,}8$, то неисключенными систематическими погрешностями по сравнению со случайными пренебрегают и принимают, что граница погрешности результата $\Delta = \varepsilon = t_p S$, где t_p – коэффициент Стьюдента, зависящий от доверительной вероятности P и числа проведенных измерений.

Если $\frac{\Theta}{S_x} > 8$, то случайной погрешностью по сравнению с систематическими пренебрегают и принимают, что граница погрешности результата $\Delta = \Theta$.

В случае, если указанные неравенства не выполняются, то границу погрешности результата измерения следует вычислить по формуле

$$\Delta = K \cdot S_{\Sigma}, \tag{38}$$

где K– коэффициент, зависящий от соотношения случайной и неисключенной систематической погрешностей; S_{Σ} – оценка суммарного среднего квадратического отклонения результата измерения.

Оценку суммарного среднего квадратического отклонения результата измерения вычисляют по формуле

$$S_{\Sigma} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \frac{\Theta_i^2}{3} + S_{\bar{x}}^{\,2}}. \tag{39}$$

Коэффициент K вычисляют по эмпирической формуле

$$K = \frac{\varepsilon + \Theta}{S_{\bar{x}}^{\,2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \frac{\Theta_i^2}{3}}}, \tag{40}$$

где $\varepsilon = \pm\, tS_x$ – граница значения случайной составляющей погрешности измерения; Θ – граница неисключенной систематической погрешности.

2 Задания

1. Обработка результатов измерений, полученных при калибровке образцовой многогранной призмы, дала следующие результаты отклонения одного из углов от номинального значения: $\overline{X} = 1{,}98''$,

$S_{\overline{X}} = 0{,}05''$; $\Theta_1 = 0{,}03''$; $\Theta_2 = 0{,}17''$; $\Theta_3 = 0{,}5''$; n = 20. Определить суммарную погрешность измерения при доверительной вероятности 0,99.

2. В процессе обработки результатов прямых измерений силы тока I определены: среднее арифметическое значение $\bar{I}$ = 16,48 мА; оценка среднего квадратического отклонения среднего арифметического $S_{\bar{x}}$ = 0,51 мА; границы неисключенных остатков трех составляющих систематической погрешности Θ_1 = 0,83 мА; Θ_2 = 0,87 мА; Θ_3 = 0,39 мА.

Необходимо определить доверительные границы суммарной погрешности результата измерения и записать его по одной из установленных форм. Значение доверительной вероятности $P_д$ = 0,99. Распределение случайной погрешности нормальное при N > 30.

3. В процессе обработки результатов прямых измерений напряжения определено (все значения в вольтах): среднее арифметическое значение этого напряжения $\overline{U} = \overline{X}$, среднее квадратическое отклонение среднего арифметического $\hat{\sigma}_{\overline{U}} = \hat{\sigma}_{\overline{X}}$, границы неисключенных остатков двух составляющих систематической погрешности Δ_{c_1} и Δ_{c_2}.

4. В процессе обработки результатов прямых измерений сопротивления R определено (все значения в килоомах): среднее арифметическое $\overline{R} = \overline{X}$; границы неисключенных остатков трех составляющих систематической погрешности Δ_{c_1}, Δ_{c_2} и Δ_{c_3}. Случайная погрешность пренебрежимо мала.

При решении задач 3–4 необходимо определить доверительные границы суммарной погрешности результата измерения. При расчетах полагать, что случайные погрешности распределены по нормальному закону, а число наблюдений существенно больше 30. Данные взять из таблицы 18.

Таблица 18 – Значения для решения задач 2, 3

Пара-метр	Вариант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
X	5,75	1,246	18,31	25,43	8,49	4,38	20,92	9,48	53,79	16,48
$\hat{\sigma}_{\overline{X}}$	0,08	0,037	0,52	0,23	0,20	0,60	1,20	0,45	0,45	0,51
Δ_{c_1}	0,32	0,45	1,30	0,92	0,56	0,14	1,56	0,35	2,30	0,83
Δ_{c_2}	0,15	0,023	0,49	0,87	0,35	0,48	0,62	0,46	0,82	0,87
Δ_{c_3}	0,21	0,012	0,16	0,29	0,20	0,12	0,47	0,23	0,63	0,39
Δ_{c_4}	0,18	0,016	0,21	0,85	0,19	0,23	1,10	0,20	0,60	0,81

Контрольные вопросы

1. На чем основана теория расчетного суммирования погрешностей?

2. Как могут быть определены квантильные множители суммарной погрешности результата измерения?

3. Как суммируются случайные и систематические погрешности?

Практическая работа 9
ОБРАБОТКА РЕЗУЛЬТАТОВ КОСВЕННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ

Цель работы: изучить методы обработки результатов косвенных измерений.

1 Общие теоретические сведения

В теоретической метрологии разработаны подходы определения результатов косвенных измерений и оценки их погрешности:

1) при линейной зависимости и отсутствии корреляции между погрешностями изменений аргументов;

2) при нелинейной зависимости и отсутствии корреляции между погрешностями измерений аргументов;

3) для коррелированных погрешностей измерений аргументов при наличии рядов отдельных значений измеряемых аргументов.

Для решения задачи косвенных измерений необходимо, чтобы были известны: вид функции, результаты измерений аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_m$, и оценки их погрешностей.

Рассмотрим определение результата косвенного измерения и оценки его погрешности **при нелинейной зависимости и отсутствии корреляции** между погрешностями измерений аргументов, так как на практике этот случай встречается наиболее часто. Расчеты можно провести тремя методами [6].

Метод линеаризации

Метод линеаризации основан на том, что погрешность измерения значительно меньше измеряемой величины, и поэтому вблизи средних значений $\overline{X}_j$ аргументов нелинейная функциональная зависимость линеаризуется и раскладывается в ряд Тейлора (члены высокого порядка не учитываются).

Линеаризуя функцию нескольких случайных аргументов (какими и являются результаты измерений и их погрешности), можно получить, как правило, достаточно простое выражение для вычисления оценок среднего значения и среднего квадратического отклонения функции.

Разложение нелинейной функции в ряд Тейлора имеет вид

$$Y = F(x_1, x_2, x_3, \ldots x_m) = F(\overline{X}_1, \overline{X}_2, \overline{X}_3, \ldots \overline{X}_m) + \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial F}{\partial X_i}\right)_{X_i} \Delta X_i + R. \qquad (41)$$

Метод линеаризации допустим, если можно пренебречь остаточным членом R

$$R = \frac{1}{2} \cdot \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial X_I^2}\right)_{\overline{X_i}} \cdot (\Delta X_i)^2. \qquad (42)$$

Остаточным членом пренебрегают, если $R < 0{,}8 \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial X_I^2}\right)_{\overline{X_i}} \cdot S_{\overline{X_i}}^2}$, где $S_{\overline{\overline{X}}}$ – среднее квадратическое отклонение случайных погрешностей результата измерения x_i–го аргумента.

Первое слагаемое правой части уравнения есть точечная оценка истинного значения косвенной величины, которая получается подстановкой функциональную зависимость средних арифметических $\overline{X_i}$, значений аргументов:

$$Y = F\left(\overline{X}_{1,} \overline{X}_2, \ldots. \overline{X}_m\right). \tag{43}$$

Второе слагаемое $\sum_{i=1}^{m}\left(\frac{dF}{dX_i}\right)_{\overline{X_i}} \cdot \Delta X_i$, есть сумма составляющих погрешностей косвенного измерения, называемых частными погрешностями, а частные производные $\frac{dF}{dX_i}$ – коэффициент влияния.

Отклонения ΔX_i должны быть взяты из полученных значений погрешностей и такими, чтобы они максимизировали выражение для остаточного члена *R*.

Если частные погрешности косвенного измерения не зависят друг от друга, т. е. являются некоррелированными, и известны доверительные границы погрешности аргументов при одинаковой вероятности, то предельная погрешность (без учета знака) косвенного измерения вычисляется по формуле

$$\Delta_{\overline{X}} = \sum_{j=1}^{m}\left|\frac{dF}{dx_j}\right| \cdot \Delta\overline{x_j}\,, \tag{44}$$

где $\frac{dF}{dx_j}$ – значения частных производных функциональной зависимости определяются при средних значениях аргументов $\frac{dF}{dx_j} = \frac{dF}{d\overline{\overline{x}}_j}$.

Этот метод, называемый максимум-минимум, дает значительно завышенное значение погрешности косвенного измерения.

Относительно правильная оценка погрешности косвенного измерения, получается, по методу квадратического суммирования:

$$\Delta_{\bar{y}} = \pm\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{dF}{dX_I}\right)^2 \cdot \Delta_{x_j}^2}\,. \tag{45}$$

Метод приращений измеряемой величины по ее аргументам

В этом случае предварительно вычисляют значение оценки измеряемой величины $Y = F\left(\overline{X}_{1,} \overline{X}_{2,},....\overline{X}_m\right)$, а затем вычисляют погрешности, привносимые каждым аргументом через приращение функции:

$$\Delta Y_{X1} = \left|F\left(\overline{X}_1 + \Delta_{X1}, \overline{X}_2,....\overline{X}_m\right) - F\left(\overline{X}_1, \overline{X}_2,....\overline{X}_m\right)\right|,$$

$$\Delta Y_{X2} = \left|F\left(\overline{X}_1, \overline{X}_2 + \Delta_{X2},....\overline{X}_m\right) - F\left(\overline{X}_1, \overline{X}_2,....\overline{X}_m\right)\right| \text{ и т. д.}$$

Полная суммарная погрешность вычисляется по формуле

$$\Delta Y = \sqrt{\Delta Y_{X1}{}^2 + \Delta Y_{X2}{}^2 + ... + \Delta Y_{Xm}{}^2}\,. \qquad (46)$$

Метод сложения относительных погрешностей аргументов

Если функция $Y = F\left(\overline{X}_1, \overline{X}_2,....\overline{X}_m\right)$ является произведением или частным, а величины $\overline{X}_1, \overline{X}_2,....\overline{X}_m$ измерены с погрешностями $\Delta X_1, \Delta X_2,....\Delta X_m$ и погрешности независимы и случайны, то суммарная погрешность результата косвенного измерения вычисляется

$$\frac{\Delta Y}{Y} = \sqrt{\left(\frac{\Delta X_1}{X_1}\right)^2 + \left(\frac{\Delta X_2}{X_2}\right)^2 + ... + \left(\frac{\Delta X_m}{X_m}\right)^2}\,.$$

Если величина X измеряется с погрешностью ΔX и измеренное значение используется для вычисления степени этого числа $Y = X^n$, то относительная погрешность Y в n раз будет больше относительной погрешности X

$$\frac{\Delta Y}{Y} = n\frac{\Delta X}{X}\,.$$

2 Задания

1. Определить результат и погрешность косвенного измерения мощности по результатам прямых измерений тока и сопротивления с независимыми случайными погрешностями, распределенными по нормальному закону: ***I*** = (15,0±0,02) А; ***P*** = 0,99; ***R*** = (10,0±0,8) Ом; ***P*** = 0,9.

Результат записать в стандартной форме для ***P*** = 0,96.

2. Методом вольтметра и амперметра в нормальных условиях эксплуатации проведено измерение электрического сопротивления R. Класс точности вольтметра 0,5; предел его измерения Uk = 30 В. Класс точности миллиамперметра. Значения прямых измерений напряжения U и тока I, а также текущие

значения косвенного измерения искомого сопротивления R приведены в таблице 19.

Найти результат и погрешность косвенного измерения сопротивления R и записать результат косвенного измерения с учетом найденной погрешности.

Таблица 19 – Результаты измерений

Параметры	Номер измерения			
	1	2	3	4
U, В	18,0	20,5	19,8	21,2
I, мА	530	610	590	630
R, Ом	33,9623	33,6066	33,5593	33,6508

3. Найдите тремя возможными методами абсолютную и относительную погрешность результата измерения предела прочности резины $P = F/(a*h)$ по результатам косвенных измерений: разрывной нагрузки F = (200±2) Н, ширины образца a = (10,00±0,02) мм и толщины h = (2,40±0,01) мм.

Контрольные вопросы

1. Как обрабатываются результаты линейных косвенных измерений?
2. В чем состоит метод линеаризации и как он используется для обработки результатов нелинейных косвенных измерений?
3. В чем заключается сущность метода приращений измеряемой величины по ее аргументам?
4. В чем заключается сущность метода сложения относительных погрешностей аргументов?

Практическая работа 10
ОЦЕНКА НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ ИЗМЕРЕНИЙ

Цель работы: изучить подход к оценке неопределенности результата измерения.

1 Общие теоретические сведения

Неопределенность (измерения) – это параметр, связанный с результатом измерений, который характеризует разброс значений, которые могли бы обоснованно быть приписаны измеряемой величине.

Обычно результат измерений является только аппроксимацией или оценкой значения измеряемой величины и, таким образом, он будет полным, только когда оцененное значение измеряемой величины сопровождается значением неопределенности. Весь процесс оценивания значения некоторой измеряемой величины и неизбежно сопровождающую её неопределенность можно представить в виде следующих восьми этапов:

1) постановка измерительной задачи;
2) разработка математической модели процесса измерения;
3) составление перечня входных величин;
4) анализ входных величин и их неопределенностей;
5) анализ корреляций;
6) составление бюджета неопределенности;
7) расчет оценки выходной величины;
8) расчет расширенной неопределенности и представление конечного результата измерений.

Пример расчета неопределенности для методики определения воздухопроницаемости представлен ниже.

1 Постановка измерительной задачи

Воздухопроницаемость определяется по ГОСТ 12088–77. *Сущность метода* определения воздухопроницаемости заключается в измерении объема воздуха, проходящего через заданную площадь испытуемого материала за единицу времени при определенном разрежении под точечной пробой.

Отбор проб происходит по ГОСТ 20566, для испытаний берут три точечные пробы по всей ширине ткани длиной 30 см от любого места, но не от самого его конца. Перед испытанием пробы выдерживают в климатических условиях: относительная влажность воздуха – (65±2) %; температура воздуха – (20±2) °С.

Для проведения испытания используют прибор ВПТМ 2, который состоит из следующих узлов: индикатора разрежения на (49±1,96) Па или (5±0,2) мм вод. ст., дифференциального манометра с пределом измерения от 0 до 150 мм сп. ст. класса точности 1, расходомеров воздуха (трубок Вентури), дросселя и электродвигателя с вентилятором, комплекта из шести сменных столиков с отверстиями диаметром, мм:

16,0±0,05 – для площади отверстия столика 2 см^2;
25,3±0,05 – для площади отверстия столика 5 см^2;
35,7±0,05 – для площади отверстия столика 10 см^2;
50,5±0,05 – для площади отверстия столика 20 см^2;
79,8±0,05 – для площади отверстия столика 50 см^2;
$112{,}9_{-0{,}05}$ – для площади отверстия столика 100 см^2
и соответствующих прижимных колец.

Воздухопроницаемость определяют на точечной пробе в десяти разных местах, расположенных по диагонали. Пробу испытываемого материала укладывают на столик лицевой стороной вверх и прижимают к столику кольцом до загорания красной сигнальной лампочки. Электродвигатель с вентилятором включаются автоматически при подаче нагрузки испытываемую точечную пробу. Открытием дросселя устанавливается разрежение под точечной пробой, равное 49 Па (5 мм вод. ст.), которое определяют по шкале индикатора разрежения.

По шкале дифференциального манометра отсчитывают результат измерения с точностью до одного деления шкалы.

Результат подсчитывают с погрешностью до 0,1 дм^3/м^2·с и округляют до 1,0 дм^3/м^2·с.

Результаты измерений приведены в таблице 20.

Таблица 20 – Результаты измерений

Площадь столика, S, см^2	20	20	20
Номер дифманометра	I	I	I
Результаты замеров образцов по дифманометру, h, мм сп. ст.			
	1 точечная проба	2 точечная проба	3 точечная проба
1	32	31	30
2	32	30	31
3	38	32	32
4	35	34	33
5	35	33	32
6	33	30	33
7	35	31	32
8	38	32	31
9	33	33	30
10	32	31	33
Среднее значение по каждой точечной пробе	34	32	32
Среднее значение по трем пробам	32,67		
Средний расход воздуха по каждой точечной пробе, $V_{ср\ i}$, дм^3/с			
	0,130	0,126	0,126
Средний расход воздуха по трем пробам, $V_{ср}$, дм^3/с			
0,127			
Воздухопроницаемость по каждой точечной пробе, Q_i,			
	65	63	63
Воздухопроницаемость по трем пробам, Q, дм^3/м^2·с			
64			

2 Разработка математической модели измерения

Согласно ГОСТ 12088-77 воздухопроницаемость каждой точечной пробы (Q) в дм^3/м^2·с вычисляют по формуле

$$Q = \frac{V_{ср} \cdot 10000}{S} \qquad (47)$$

где $V_{ср}$ – средний расход воздуха по одной точечной пробе, дм^3/с; S – испытуемая площадь, м^2.

За результат измерения принимается среднее арифметическое значение воздухопроницаемости по трем точечным пробам.

В таблице 21 перечислены все входные величины с указанием применяемых условных обозначений и единиц измерений, в которых они будут оцениваться.

3 Составление перечня входных величин

Перечень входных величин, которые могут повлиять на неопределенность результата измерения оформляют в виде таблицы.

Таблица 21 – Перечень входных величин

Величина	Единица измерения	Определение или описание
1 Поправка на разброс значений расхода воздуха, $\Delta V_{ср}$	дм^3/с	Определяется среднеарифметическим значением измерений по дифференциальному манометру путем перевода по тарировочной таблице, прилагаемой к прибору
1.1 Поправка, обусловленная неточностью показаний дифманометра,Δh	мм.сп.ст.	Определяется с учетом класса точности дифманометра, указанным в ГОСТ 12088-77
1.2 Поправка на неточность показаний индикатора разрежения, ΔR	мм.вод.ст.	Определяется в соответствии с отклонением от номинального значения индикатора разрежения, указанным в ГОСТ 12088
1.3 Поправка, обусловленная округлением, показаний оператором, Δp	мм.сп.ст.	Обусловлена необходимостью округления до целого деления шкалы при снятии показаний оператором с дифманометра
2 Поправка на отклонение площади рабочего столика, ΔS	м^2	Определяется допуском на отклонение от номинального значения площади отверстия в используемом при испытании сменном столике, указанным в ГОСТ 12088
3 Разброс значений воздухопроницаемости между точечными пробами, ΔQ	дм^3/м^2·с	Определяется рассеянием результатов между точечными пробами

4 Анализ входных величин и их неопределенностей

4.1 Анализ входной величины $\Delta V_{ср}$

На входную величину $\Delta V_{ср}$ – средний расход воздуха влияет поправка на разброс значений расхода воздуха, поправка, обусловленная неточностью показаний дифманометра, поправка на неточность показаний индикатора разрежения, поправка, обусловленная округлением показаний оператором. Анализ этой величины приведен в таблице 22.

Таблица 22 – Анализ входной величины $\Delta V_{ср}$

<table>
<tr><td>Входная величина:
поправка, обусловлена неточностью показаний дифманометра, Δh, мм сп.ст.</td><td>Тип оценивания неопределенности: В.
Вид распределения: равномерное.
Значение оценки: 32,67 мм сп.ст.
Интервал, в котором находится значение входной величины: ±1,5 мм сп.ст.
Стандартная неопределенность: 0,866 мм сп.ст.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Неопределенность связана с погрешностью дифманометра, которая определяется исходя из класса точности дифманометра, указанного в стандарте на метод определения воздухопроницаемости, от значения воздухопроницаемости как среднего арифметического трех измерений по точечным пробам.
Неопределенность показаний дифманометра можно оценить на основании данных, представленных в ГОСТ 12088-77. Определим неопределенность его показаний по формуле
$$U_1(V_{ср}) = \frac{b_i}{\sqrt{3}} = \frac{\Delta_{дифманометра}}{\sqrt{3}},$$
где $\Delta_{дифманометра}$ определяется исходя из класса точности дифманометра по формуле
$$\Delta_{дифманометра} = \frac{\gamma \cdot x_N}{100} = \frac{1 \cdot 150}{100} = 1,5$$ мм сп.ст.
Откуда $U_1(V_{ср}) = \frac{1,5}{\sqrt{3}} = 0,866$ мм сп.ст.</td></tr>
<tr><td>Входная величина:
поправка на неточность показаний индикатора разрежения, ΔR, Па</td><td>Тип оценивания неопределенности: В.
Вид распределения: равномерное.
Значение оценки: 5 мм вод.ст.
Интервал, в котором находится значение входной величины: ±0,2 мм вод.ст.
Стандартная неопределенность: 0,115 мм вод.ст.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Определяется по индикатору разрежения, погрешность которого указана в ГОСТ 12088-77.
Отклонение от номинального значения показаний индикатора разрежения также можно оценить на основании данных, представленных в ГОСТ 12088-77. Определим неопределенность, связанную с данным отклонением по формуле
$$U_2(V_{ср}) = \frac{b_i}{\sqrt{3}} = \frac{\Delta_{инд.разреж.}}{\sqrt{3}}$$
где $\Delta_{инд.разреж.} = \pm 0,2$ мм вод.ст = ±0,2 мм сп.ст
Откуда $U_2(V_{ср}) = \frac{0,2}{\sqrt{3}} = 0,115$ мм вод.ст. = 0,115 мм сп.ст.</td></tr>
<tr><td>Входная величина:
поправка, обусловленная округлением показаний оператором, Δp, мм сп. ст.</td><td>Тип оценивания неопределенности: В.
Вид распределения: равномерное.
Значение оценки: 32,67 мм сп. ст.
Интервал, в котором находится значение входной величины: ±0,5 мм сп. ст.
Стандартная неопределенность: 0,289 мм сп. ст.</td></tr>
</table>

Окончание таблицы 22

Обусловливается наличием параллакса при снятии показаний со шкалы дифференциального манометра. Неопределенность показаний, связанная с неточностью снятия показаний оператором определяется формулой $$U_3(V_{cp}) = \frac{b_i}{\sqrt{3}} = \frac{\Delta_{оператора}}{\sqrt{3}},$$ где $\Delta_{оператора}$ = 0,5 мм сп.ст. определяется исходя из сложившейся производственной практики проведения испытаний, т. е. составляет 0,5 цены деления шкалы. Откуда $$U_{31}(V_{cp}) = \frac{0{,}5}{\sqrt{3}} = 0{,}289$$ мм сп.ст.

Стандартная неопределенность по типу В для среднего расхода воздуха будет определяться по формуле

$$U_B(V_{cp}) = \sqrt{\left(U_1(V_{cp})\right)^2 + \left(U_2(V_{cp})\right)^2 + \left(U_3(V_{cp})\right)^2} \tag{48}$$

Откуда

$$U_B(V_{cp}) = \sqrt{(0{,}866)^2 + (0{,}115)^2 + (0{,}289)^2} = 0{,}846 \text{ мм сп.ст.} \tag{49}$$

Так как зависиомтсь между показателями дифмамометра и расхода воздуха имеет линейный характер, что установлено путем графического анализа тарировочной таблиц перевода значений, то расход воздуха равная 0,846 мм сп.ст. составит 0,0033 дм^3/с $\left(\Delta\text{Vcp} = \frac{0{,}846 \cdot 0{,}127}{32{,}67} = 0{,}0033 \text{ дм}^3/\text{с}\right)$.

4.2 Анализ входной величины ΔS

На входную величину Δ*S* – испытуемая площадь влияет поправка на отклонение площади рабочего столика. Анализ этой величины приведен в таблице 23.

Таблица 23 – Анализ входной величины Δ*S*

Входная величина: поправка на отклонение площади рабочего столика, ΔS, см^2	Тип оценивания неопределенности: В. Вид распределения: равномерное. Значение оценки: 20 см^2. Интервал, в котором находится значение входной величины: $20^{+0{,}06}_{-0{,}02}$ см^2. Стандартная неопределенность: 0,035 см^2

Окончание таблицы 23

Определяется площадью используемого сменного столика с отверстием, диаметром, указанным в ГОСТ 12088-77, допуск на который позволяет вычислить допуск на площадь столика.

Неопределенность, связанная с погрешностью изготовления столика определяется по формуле

$$U_1(S) = \frac{b_{i+} - b_{i-}}{2\sqrt{3}} = \frac{S_{\max} - S_{\min}}{2\sqrt{3}},$$

где, исходя из диаметра используемого столика, d = (50,5±0,05) мм, S_{max} и S_{min} найдем по формулам

$$S_{\max} = \frac{\pi d_{\max}^2}{4},$$

где d_{max} = 50,5 + 0,05 = 50,55 мм

$$S_{\min} = \frac{\pi d_{\min}^2}{4},$$

где d_{min} = 50,5 – 0,05 = 50,45 мм

S_{max} = 2005,91 мм^2 = 20,06 см^2; S_{min} = 1997,98 мм^2 = 19,98 см^2

Откуда $U_1(S) = \frac{b_{i+} - b_{i-}}{2\sqrt{3}} = \frac{0,06 - 0,02}{2\sqrt{3}} = 0,035$ см^2.

Неопределенность, связанная с определением испытуемой площади, определяется допуском на изготовление отверстия в используемом сменном столике.

Стандартная неопределенность по типу В, связанная с определением испытуемой площади выражается следующей формулой

$$U_B(S) = \sqrt{U_1(V_{cp})^2} = \sqrt{(0,035)^2} = 0,035 \text{ см}^2 = 0,0000035 \text{ м}^2 \qquad (50)$$

4.3 Анализ входной величины ΔQ

Величина ΔQ – воздухопроницаемость анализируется путем статистической обработки. Анализ ее приведен в таблице 24.

Таблица 24 – Анализ входной величины ΔQ

Входная величина: разброс значений воздухопроницаемости, ΔQ, дм^3/м^2·с	Тип оценивания неопределенности: А. Вид распределения: нормальное. Значение оценки: 64 дм^3/м^2·с. Интервал, в котором находится значение входной величины: ±0,707 дм^3/м^2·с. Стандартная неопределенность: 0,408 дм^3/м^2·с

Окончание таблицы 24

Неопределенность возникает при определении результата измерения как среднее арифметическое результатов измерений воздухопроницаемости по трем точечным пробам
Среднеквадратическое значение воздухопроницаемости, $S_X(Q) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{m}\left(Q-\overline{Q}\right)^2}$
0,707
Оценка среднеквадратического отклонения воздухопроницаемости, $S_{\bar{x}} = \frac{S_x(Q)}{\sqrt{n}}$
0,408
Стандартная неопределенность по типу А воздухопроницаемости, $U_A(Q) = S_{\bar{x}}$
0,408

5 Корреляции

Все входные величины рассматриваются как некоррелированные.

6 Коэффициенты чувствительности

Определяются из исходной математической модели путем нахождения частных производных:

$$C_V = \frac{\partial Q}{\partial V_{cp}} = \frac{1}{S} = \frac{1}{20} = 0{,}2 \text{ см}^{-2} = 0{,}00002 \text{ м}^{-2}, \tag{51}$$

$$C_S = \frac{\partial Q}{\partial S} = -\frac{V_{cp}}{S^2} = -\frac{0{,}127}{0{,}04} = -3{,}175 \text{ дм}^3/\text{м}^2\cdot\text{с}. \tag{52}$$

7 Бюджет неопределенности

Таблица 25 – Бюджет неопределенности

Величина, X_i	Единица измерения	Значение оценки, Xj	Интервал	Тип неопределенности	Вид распределения вероятностей	Стандартная неопределенность, $U(x_i)$	Коэффициент чувствительности, c_j.	Вклад неопределенности, $U_i(y)$	Процентный вклад, %
Q	дм^3/м^2·с	64	±0,707	А	нормальное	0,408	–	0,408	99,99
V_{cp}	дм^3/с	0,127	–	В	равномерное	0,0033	0,00002	0,000000066	0,00002
S	см^2	20	$20^{+0,06}_{-0,02}$	В	равномерное	0,0000035	–3,175	0,000011	0,003
								$\sum = 0{,}408$	

8 Суммарная стандартная неопределенность

Определив коэффициенты чувствительности можно определить суммарную стандартную неопределенность.

Стандартная неопределенность воздухопроницаемости выражается формулой

$$U_c(Q) = \sqrt{\left(U_B(V_{cp}) \cdot C_V\right)^2 + \left(U_B(S) \cdot C_S\right)^2 + \left(U_A \cdot C\right)^2} \qquad (52)$$

где C_V, Cs – коэффициенты чувствительности, равные частным производным формулы (47) по V_{cp} и S соответственно.

Следовательно, стандартная неопределенность воздухопроницаемости

$$U_c(Q) = \sqrt{\left(0{,}0033 \cdot 0{,}00002\right)^2 + \left(0{,}0000035 \cdot (-3{,}175)\right)^2 + \left(0{,}408\right)^2} = 0{,}41 \text{ дм}^3/\text{м}^2\cdot\text{с} \qquad (53)$$

9 Расширенная неопределенность

Расширенную неопределенность $U_p(Q)$получаем умножением суммарной стандартной неопределенности на коэффициент охвата $k = 2$ в предположении нормального закона распределения измеряемой величины при уровне доверия 95 % [7]

$$U_p(Q) = k \cdot U_c(Q) = 2 \cdot 0{,}41 = 0{,}82 \text{ дм}^3/\text{м}^2\cdot\text{с}.$$

10 Полный результат измерений

Полный результат измерений представим в следующей форме:

$$Q = \overline{Q} \pm U_p = (64 \pm 0{,}82) \text{ дм}^3/\text{м}^2\cdot\text{с}.$$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение термину «неопределенность».
2. Опишите алгоритм оценивания неопределенности результатов измерения.

Список использованных источников

1. Кобзарь, А. И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных сотрудников / А. И. Кобзарь. – Москва : ФИЗМАТЛИТ,2006. – 816 с.
2. Сергеев, А. Г. Метрология : учеб. пособие для вузов / А. Г. Сергеев, В. В. Крохин. – Москва : Логос, 2001. – 408 с.
3. Пронкин, Н. С. Основы метрологии: практикум по метрологии и измерениям : уч. пособие для вузов / Н. С. Пронкин. – Москва : Логос, 2007. – 392 с.
4. Бурдун, Г. Д. Основы метрологии : уч. пособие для вузов. / Г. Д. Бурдун, Б. Н. Марков. – 3-е изд., перераб. – Москва : Изд-во стандартов, 1985. – 256 с.
5. Государственная система обеспечения единства измерения. Прямые измерения с многократными наблюдениями. Методы обработки результатов наблюдений. Основные положения: ГОСТ 8.207-76. – Введ. 01.01.1977. – Минск : СТАНДАРТИНФОРМ, 2008. – 7 с.
6. Тейлор, Дж. Введение в теорию ошибок / Дж. Тейлор. – Москва : Мир, 1985. – 272 с.
7. Фридман, А. Э. Основы метрологии. Современный курс / А. Э. Фридман. – СПб.: НПО Профессионал, 2008. – 284 с.

Приложение А

F- распределение Фишера. Значение $F_{k1,k2}$ для доверительного интервала P

k_2	P	k_1											
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	0,75	5,83	7,50	8,20	8,58	8,82	8,98	9,10	9,19	9,26	9,32	9,36	9,41
	0,90	39,9	49,5	53,6	55,8	57,2	58,2	58,9	59,4	59,9	60,2	60,5	60,7
	0,95	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	0,75	2,57	3,00	3,15	3,23	3,28	3,31	3,34	3,35	3,37	3,38	3,39	3,39
	0,90	8,53	9,00	9,16	9,24	9,29	9,33	9,35	9,37	9,38	9,39	9,40	9,41
	0,95	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4
	0,99	98,5	99,0	99,2	99,2	99,3	99,3	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4	99,4
3	0,75	2,02	2,28	2,36	2,39	2,41	2,42	2,43	2,44	2,44	2,44	2,45	2,45
	0,90	5,54	5,46	5,39	5,34	5,31	5,28	5,27	5,25	5,24	5,23	5,22	5,22
	0,95	10,1	9,55	9,38	9,28	9,10	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,76	8,74
	0,99	34,1	30,8	29,5	28,7	28,2	27,9	27,7	27,5	27,3	27,2	27,1	27,1
4	0,75	1,81	2,00	2,05	20,6	2,07	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08
	0,90	4,54	4,32	4,19	4,11	4,05	4,01	3,98	3,95	3,94	3,92	3,91	3,90
	0,95	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,94	5,91
	0,99	21,2	18,0	16,7	16,0	15,5	15,2	15,0	14,8	14,7	14,5	14,4	14,4
5	0,75	1,69	1,85	1,88	1,89	1,89	1,89	1,89	1,89	1,89	1,89	1,89	1,89
	0,90	4,06	3,78	3,62	3,52	3,45	3,40	3,37	3,34	3,32	3,30	3,28	3,27
	0,95	6.61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,71	4,68
	0,99	16,3	13,3	12,1	11,4	11,0	10,7	10,5	10,3	10,2	10,1	9,96	9,89
6	0,75	1,62	1,76	1,78	1,79	1,79	1,78	1,78	1,77	1,77	1,77	1,77	1,77
	0,90	3,78	3,46	3,29	3,18	3,11	3,05	3,01	2,98	2,96	2,94	2,92	2,90
	0,95	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
	0,99	13,7	10,9	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	0,75	1,57	1,70	1,72	1,72	1,71	1,71	1,70	1,70	1,69	1,69	1,69	1,68
	0,90	3,59	3,26	3,07	2,96	2,88	2,83	2,78	2,75	2,72	2,70	2,68	2,67
	0,95	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,60	3,57
	0,99	12,2	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	6,99	6,84	6,72	6,62	6,54	6,47
8	0,75	1,54	1,66	1,67	1,66	1,66	1,65	1,64	1,64	1,64	1,63	1,63	1,62
	0,90	3,46	3,11	2,92	2,81	2,73	2,67	2,62	2,59	2,56	2,54	2,52	2,50
	0,95	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,31	3,28
	0,99	11,3	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,18	6,03	5,91	5,81	5,73	5,67
9	0,75	1,51	1,62	1,63	1,63	1,62	1,61	1,60	1,60	1,59	1,59	1,58	1,58
	0,90	3,36	3,01	2,81	2,69	2,61	2,55	2,51	2,47	2,44	2,42	2,40	2,38
	0,95	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,10	3,07
	0,99	10,6	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,61	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	0,75	1,49	1,60	1,60	1,59	1,59	1,58	1,57	1,56	1,56	1,55	1,55	1,54
	0,90	3,28	2,92	2,73	2,61	2,52	2,46	2,41	2,38	2,35	2,32	2,30	2,28
	0,95	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,94	2,91
	0,99	10,0	7,56	6,55	5,99	5,84	5,39	5,20	5,06	4,94	4,85	4,77	4,71

k_2	P	k_1											
		15	20	24	30	40	50	60	100	120	200	500	∞
1	0,75	9,49	9,58	9,63	9,67	9,71	9,74	9,76	9,78	9,80	9,82	9,84	9,85
	0,90	61,2	61,7	62,0	62,3	62,5	62,7	62,8	63,0	63,1	63,2	63,3	63,3
	0,95	246	248	249	250	251	252	252	253	253	254	254	254
2	0,75	341	343	343	344	345	345	346	347	347	348	348	348
	0,90	9,42	9,44	9,45	9,46	9,47	9,47	9,47	9,48	9,48	9,49	9,49	9,49
	0,95	19,4	19,4	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5	19,5
	0,99	99,4	99,4	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5	99,5
3	0,75	2,46	2,46	2,46	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47	2,47
	0,90	5,20	5,18	5,18	5,17	5,16	5,15	5,15	5,14	5,14	5,14	5,14	5,13
	0,95	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,58	8,57	8,55	8,55	8,54	8,53	8,53
	0,99	26,9	26,7	26,6	26,5	26,4	26,4	26,3	26,2	26,2	26,2	26,1	26,1
4	0,75	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08	2,08
	0,90	3,87	3,84	3,83	3,82	3,80	3,80	3,79	3,78	3,78	3,77	3,76	3,76
	0,95	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,70	5,69	5,66	5,66	5,65	5,64	5,63
	0,99	14,2	14,0	13,9	13,8	13,7	13,7	13,7	13,6	13,6	13,5	13,5	13,5
5	0,75	1,89	1,88	1,88	1,88	1,88	1,88	1,87	1,87	1,87	1,87	1,87	1,87
	0,90	3,24	3,21	3,19	3,17	3,16	3,15	3,14	3,13	3,12	3,12	3,11	3,10
	0,95	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,44	4,43	4,41	4,40	4,39	4,37	4,36
	0,99	9,72	9,55	9,47	9,38	9,29	9,24	9,20	9,13	9,11	9,08	9,04	9,02
6	0,75	1,76	1,76	1,75	1,75	1,75	1,75	1,74	1,74	1,74	1,74	1,74	1,74
	0,90	2,87	2,84	2,82	2,80	2,78	2,77	2,76	2,75	2,74	2,73	2,73	2,72
	0,95	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,75	3,74	3,71	3,70	3,69	3,68	3,67
	0,99	7,56	7,40	7,31	7,23	7,14	7,09	7,05	6,99	6,97	6,93	6,90	6,88
7	0,75	1,68	1,67	1,67	1,66	1,66	1,65	1,65	1,65	1,65	1,65	1,65	1,65
	0,90	2,63	2,59	2,58	2,56	2,54	2,52	2,51	2,50	2,49	2,48	2,48	2,47
	0,95	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,32	3,30	3,27	3,27	3,25	3,24	3,23
	0,99	6,31	6,16	6,07	5,99	5,91	5,86	5,82	5,75	5,74	5,70	5,67	5,65
8	0,75	1,62	1,61	1,60	1,60	1,59	1,59	1,59	1,58	1,58	1,58	1,58	1,58
	0,90	2,46	2,42	2,40	2,38	2,36	2,35	2,34	2,32	2,32	2,31	2,30	2,29
	0,95	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,02	3,01	2,97	2,97	2,95	2,94	2,93
	0,99	5,52	5,36	5,28	5,20	5,12	5,07	5,03	4,96	4,95	4,91	4,88	4,86
9	0,75	1,57	1,56	1,56	1,55	1,55	1,54	1,54	1,53	1,53	1,53	1,53	1,53
	0,90	2,34	2,30	2,28	2,25	2,23	2,22	2,21	2,19	2,18	2,17	2,17	2,16
	0,95	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,80	2,79	2,76	2,75	2,73	2,72	2,71
	0,99	4,96	4,81	4,73	4,65	4,57	4,52	4,48	4,42	4,40	4,36	4,33	4,31
10	0,75	1,53	1,52	1,52	1,51	1,51	1,50	1,50	1,49	1,49	1,49	1,48	1,48
	0,90	2,24	2,20	2,18	2,16	2,13	2,12	2,11	2,09	2,08	2,07	2,06	2,06
	0,95	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,64	2,62	2,59	2,58	2,56	2,55	2,54
	0,99	4,56	4,41	4,33	4,25	4,17	4,12	4,08	4,01	4,00	3,96	3,93	3,91

Приложение Б

Значения критерия Аббе v_q

n	v_q при q, равном			n	v_q при q, равном		
	0,001	0,01	0,05		0,001	0,01	0,05
4	0,295	0,313	0,390	13	0,295	0,431	0,578
5	0,208	0,269	0,410	14	0,311	0,447	0,591
6	0,182	0,281	0,445	15	0,327	0,461	0,603
7	0,185	0,307	0,468	16	0,341	0,474	0,614
8	0,202	0,331	0,491	17	0,355	0,487	0,624
9	0,221	0,354	0,512	18	0,368	0,499	0,633
10	0,241	0,376	0,531	19	0,381	0,510	0,642
11	0,260	0,396	0,548	20	0,393	0,520	0,650
12	0,278	0,414	0,564				

Приложение В

Распределение Стьюдента $P\{|t| < t_p\} = 2\int_0^{t_p} S(t,k)dt$

k	P											
	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	0,95	0,98	0,99
1	0,158	0,325	0,510	0,727	1,000	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,657
2	0,142	0,289	0,445	0,617	0,816	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925
3	0,137	0,277	0,424	0,584	0,765	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841
4	0,134	0,271	0,414	0,569	0,741	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604
5	0,132	0,267	0,408	0,559	0,727	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032
6	0,131	0,265	0,404	0,553	0,718	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707
7	0,130	0,263	0,402	0,549	0,711	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499
8	0,130	0,262	0,399	0,546	0,706	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355
9	0,129	0,261	0,398	0,543	0,703	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250
10	0,129	0,260	0,397	0,542	0,700	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169
11	0,129	0,260	0,396	0,540	0,697	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106
12	0,128	0,259	0,395	0,539	0,695	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055
13	0,128	0,259	0,394	0,538	0,694	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012
14	0,128	0,258	0,393	0,537	0,692	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977
15	0,128	0,258	0,393	0,536	0,691	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947
16	0,128	0,258	0,392	0,535	0,690	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921
17	0,128	0,257	0,392	0,534	0,689	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898
18	0,127	0,257	0,392	0,534	0,688	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878
19	0,127	0,257	0,391	0,533	0,688	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861
20	0,127	0,257	0,391	0,533	0,687	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845
30	0,127	0,256	0,389	0,530	0,683	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750
40	0,126	0,255	0,388	0,529	0,681	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704
∞	0,126	0,253	0,385	0,524	0,674	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576

Приложение Г

Распределение Стьюдента $P\{|t| < t_p\} = 2\int_0^{t_p} S(t,k)dt$ **для различных** t_p

k	t_p				k	t_p			
	2,0	2,5	3,0	3,5		2,0	2,5	3,0	3,5
1	0,7048	0,7578	0,7952	0,8228	12	0,9314	0,9720	0,9890	0,9956
2	0,8164	0,8764	0,9046	0,9276	13	0,9392	0,9737	0,9898	0,9960
3	0,8606	0,9122	0,9424	0,9606	14	0,9348	0,9740	0,9904	0,9964
4	0,8838	0,9332	0,9600	0,9752	15	0,9360	0,9754	0,9910	0,9968
5	0,8980	0,9454	0,9700	0,9828	16	0,9372	0,9764	0,9916	0,9970
6	0,9076	0,9534	0,9760	0,9872	17	0,9382	0,9770	0,9920	0,9972
7	0,9144	0,9590	0,9800	0,9900	18	0,9392	0,9776	0,9924	0,9974
8	0,9194	0,9630	0,9830	0,9920	19	0,9400	0,9782	0,9926	0,9976
9	0,9234	0,9662	0,9850	0,9932	20	0,9408	0,9788	0,9930	0,9978
10	0,9266	0,9686	0,9866	0,9942	∞	0,9545	0,9876	0,9973	0,9995
11	0,9292	0,9704	0,9880	0,9950					

Приложение Д

Интегральная функция нормирования нормального распределения

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-0,5t^2} dt$$

t	$\Phi(z)$	t	$\Phi(z)$	t	$\Phi(z)$	t	$\Phi(z)$
−3,5	0,00023	−1,7	0,0446	+0,0	0,5000	+1,8	0,9641
−3,4	0,00034	−1,6	0,0548	+0,1	0,5398	+1,9	0,9713
−3,3	0,00048	−1,5	0,0668	+0,2	0,5793	+2,0	0,9773
−3,2	0,00069	−1,4	0,0808	+0,3	0,6179	+2,1	0,9821
−3,1	0,00097	−1,3	0,0968	+0,4	0,6554	+2,2	0,9861
−3,0	0,00135	−1,2	0,1151	+0,5	0,6915	+2,3	0,9893
−2,9	0,0019	−1,1	0,1357	+0,6	0,7257	+2,4	0,9918
−2,8	0,0026	−1,0	0,1587	+0,7	0,7580	+2,5	0,9938
−2,7	0,0035	−0,9	0,1841	+0,8	0,7881	+2,6	0,9953
−2,6	0,0047	−0,8	0,2119	+0,9	0,8159	+2,7	0,9965
−2,5	0,0062	−0,7	0,2420	+1,0	0,8413	+2,8	0,9974
−2,4	0,0082	−0,6	0,2743	+1,1	0,8643	+2,9	0,9981
−2,3	0,0107	−0,5	0,3085	+1,2	0,8849	+3,0	0,99865
−2,2	0,0139	−0,4	0,3446	+1,3	0,9032	+3,1	0,99903
−2,1	0,0179	−0,3	0,3821	+1,4	0,9192	+3,2	0,99931
−2,0	0,0228	−0,2	0,4207	+1,5	0,9332	+3,3	0,99952
−1,9	0,0287	−0,1	0,4602	+1,6	0,9452	+3,4	0,99966
−1,8	0,0359	−0,0	0,5000	+1,7	0,9554	+3,5	0,99977

Приложение Ж

Интегральная функция нормированного нормального распределения. Значение z для различных Ф(z)

Ф(z)	z	Ф(z)	z	Ф(z)	z	Ф(z)	z
0,0005	–3,2905	0,25	–0,6745	0,50	+0,000	0,80	+0,8416
0,005	–2,5750	0,30	–0,5244	0,55	+0,1257	0,85	+1,0364
0,01	–2,3267	0,35	–0,3853	0,60	+0,2533	0,90	+1,2816
0,05	–1,6449	0,40	–0,2533	0,65	+0,3853	0,95	+1,6449
0,10	–1,2816	0,45	–0,1257	0,70	+0,5244	0,99	+2,3267
0,15	–1,0364	0,50	–0,0000	0,75	+0,6745	0,995	+2,5750
0,20	–0,8416					0,9995	+3,2905

Приложение 3

Статистика *d* для критерия 1

n	$q_1/2\ 100\%$		$(1\text{-}q_1/2)\ 100\%$	
	1%	5%	95%	99%
16	0,9137	0,8884	0,7236	0,6829
21	0,9001	0,8768	0,7304	0,6950
26	0,8901	0,8686	0,7360	0,7040
31	0,8826	0,8625	0,7404	0,7110
36	0,8769	0,8578	0,7440	0,7167
41	0,8722	0,8540	0,7470	0,7216
46	0,8682	0,8508	0,7496	0,7256
51	0,8648	0,8481	0,7518	0,7291

Приложение И

Значения *P* для вычисления критерия 2

n	*m*	$q_2 . 100\%$		
		1%	2%	5%
10	1	0,98	0,98	0,96
11-14	1	0,99	0,98	0,97
15-20	1	0,99	0,99	0,98
21-22	2	0,98	0,97	0,96
23	2	0,98	0,98	0,96
24-27	2	0,98	0,98	0,97
28-32	2	0,99	0,98	0,97
33-35	2	0,99	0,98	0,98
36-49	2	0,99	0,99	0,98

Приложение К

Интегральная функция распределения Пирсона. Значения $\chi^2_{k,P}$ для различных *k* и *P*

$$P(\chi^2_{k,P}) = \int_0^{\chi^2_{k,P}} p(\xi)d\xi$$

k	*P*												
	0,01	0,02	0,05	0,10	0,20	0,30	0,50	0,70	0,80	0,90	0,95	0,98	0,99
1	0,0002	0,0006	0,0040	0,0158	0,0064	0,148	0,455	1,074	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635
2	0,0201	0,0404	0,103	0,211	0,446	0,713	1,386	2,408	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210
3	0,115	0,185	0,352	0,584	1,005	1,424	2,366	3,665	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345
4	0,297	0,429	0,711	1,064	1,649	2,195	3,357	4,878	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277
5	0,554	0,752	1,145	1,610	2,343	3,000	4,351	6,064	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086
6	0,872	1,134	1,635	2,204	3,070	3,828	5,348	7,231	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812
7	1,239	1,564	2,167	2,833	3,822	4,671	6,346	8,383	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475
8	1,646	2,032	2,733	3,490	4,594	5,527	7,344	9,524	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090
9	2,088	2,532	3,325	4,168	5,380	6,393	8,343	10,656	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666
10	2,558	3,059	3,940	4,865	6,179	7,267	9,342	11,781	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209
11	3,053	3,609	4,575	5,578	6,989	8,148	10,341	12,899	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725
12	3,571	4,178	5,226	6,304	7,807	9,034	11,340	14,011	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217
13	4,107	4,765	5,892	7,042	8,634	9,926	12,340	15,119	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688
14	4,660	5,368	6,571	7,790	9,467	10,821	13,339	16,222	18,151	21,064	23,685	26,873	29,141

k	P												
	0,01	0,02	0,05	0,10	0,20	0,30	0,50	0,70	0,80	0,90	0,95	0,98	0,99
15	5,229	5,985	7,261	8,547	10,307	11,721	14,339	17,322	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578
16	5,812	6,614	7,962	9,312	11,152	12,624	15,338	18,418	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000
17	6,408	7,255	8,672	10,085	12,002	13,531	16,338	19,511	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409
18	7,015	7,906	9,390	10,865	12,857	14,440	17,338	20,601	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805
19	7,633	8,567	10,117	11,651	13,716	15,352	18,338	21,689	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191
20	8,260	9,237	10,851	12,444	14,578	16,266	19,337	22,775	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566
21	8,897	9,915	11,591	13,240	15,445	17,182	20,337	23,858	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932
22	9,542	10,600	12,338	14,041	16,314	18,101	21,337	24,939	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289
23	10,196	11,293	13,091	14,848	17,187	19,021	22,337	26,018	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638
24	10,856	11,992	13,848	15,659	18,062	19,943	23,337	27,096	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980
25	11,524	12,697	14,611	16,473	18,940	20,867	24,337	28,172	30,675	34,382	37,652	41,566	44,314
26	12,198	13,409	15,379	17,292	19,820	21,792	25,336	29,246	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642
27	12,879	14,125	16,151	18,114	20,703	22,710	26,336	30,319	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963
28	13,565	14,847	16,928	18,939	21,588	23,647	27,336	31,391	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278
29	14,256	15,574	17,708	19,768	22,475	24,577	28,336	32,461	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588
30	14,953	16,306	18,493	20,599	23,364	25,508	29,336	33,530	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892

Приложение Л

Значения функции Лапласа

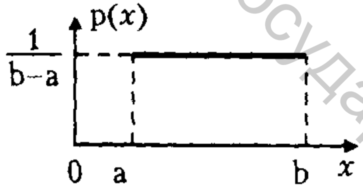
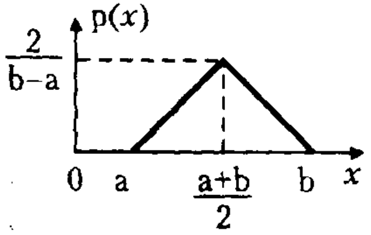
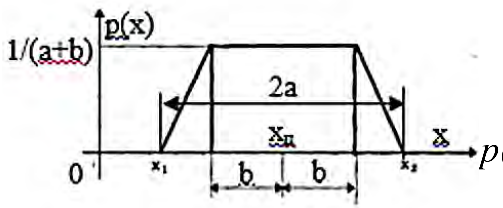
t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0,0398	0,0438	0,0478	0,0517	0,0557	0,0596	0,0636	0,0675	0,0714	0,0753
0,2	0,0793	0,0832	0,0871	0,0910	0,0948	0,0987	0,1026	0,1064	0,1103	0,1141
0,3	0,1179	0,1217	0,1255	0,1293	0,1331	0,1368	0,1406	0,1443	0,1480	0,1517
0,4	0,1554	0,1591	0,1628	0,1664	0,1700	0,1736	0,1772	0,1808	0,1844	0,1879
0,5	0,1915	0,1950	0,1985	0,2019	0,2054	0,2088	0,2123	0,2157	0,2190	0,2224
0,6	0,2257	0,2291	0,2324	0,2357	0,2389	0,2422	0,2454	0,2486	0,2517	0,2549
0,7	0,2580	0,2611	0,2642	0,2673	0,2703	0,2734	0,2764	0,2794	0,2823	0,2852
0,8	0,2881	0,2910	0,2939	0,2967	0,2995	0,3023	0,3051	0,3078	0,3106	0,3133
0,9	0,3159	0,3186	0,3212	0,3238	0,3264	0,3289	0,3315	0,3340	0,3365	0,3389
1,0	0,3413	0,3438	0,3461	0,3485	0,3508	0,3531	0,3554	0,3577	0,3599	0,3621
1,1	0,3643	0,3665	0,3686	0,3708	0,3729	0,3749	0,3770	0,3790	0,3810	0,3830
1,2	0,3849	0,3869	0,3888	0,3907	0,3925	0,3944	0,3962	0,3980	0,3997	0,4015
1,3	0,4032	0,4049	0,4066	0,4082	0,4099	0,4115	0,4131	0,4147	0,4162	0,4177
1,4	0,4192	0,4207	0,4222	0,4236	0,4251	0,4265	0,4279	0,4292	0,4306	0,4319
1,5	0,4332	0,4345	0,4357	0,4370	0,4382	0,4394	0,4406	0,4418	0,4429	0,4441
1,6	0,4452	0,4463	0,4474	0,4484	0,4495	0,4505	0,4515	0,4525	0,2535	0,4545
1,7	0,4554	0,4564	0,4573	0,4582	0,4591	0,4599	0,4608	0,4616	0,4625	0,4633
1,8	0,4641	0,4649	0,4656	0,4664	0,4671	0,4678	0,4686	0,4693	0,4699	0,4706
1,9	0,4713	0,4719	0,4726	0,4732	0,4738	0,4744	0,4750	0,4756	0,4761	0,4767
2,0	0,4772	0,4778	0,4783	0,4788	0,4793	0,4798	0,4803	0,4808	0,4813	0,4817
2,1	0,4821	0,4826	0,4830	0,4834	0,4838	0,4842	0,4846	0,4850	0,4854	0,4857
2,2	0,4861	0,4864	0,4868	0,4871	0,4874	0,4878	0,4881	0,4884	0,4887	0,4890
2,3	0,4893	0,4896	0,4898	0,4901	0,4904	0,4906	0,4909	0,4911	0,4913	0,4916
2,4	0,4918	0,4920	0,4922	0,4925	0,4927	0,4929	0,4931	0,4932	0,4934	0,4936
2,5	0,4938	0,4940	0,4941	0,4943	0,4945	0,4946	0,4948	0,4949	0,4951	0,4952
2,6	0,4953	0,4955	0,4956	0,4957	0,4959	0,4960	0,4961	0,4962	0,4963	0,4964
2,7	0,4965	0,4966	0,4967	0,4968	0,4969	0,4970	0,4971	0,4972	0,4973	0,4974
2,8	0,4974	0,4975	0,4976	0,4977	0,4977	0,4978	0,4979	0,4979	0,4980	0,4981
2,9	0,4981	0,4982	0,4982	0,4983	0,4984	0,4984	0,4985	0,4985	0,4986	0,4886
3,0	0,4986	0,4986	0,4987	0,4988	0,4988	0,4989	0,4989	0,4989	0,4990	0,4990
3,5	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998	0,4998
4,0	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999	0,4999

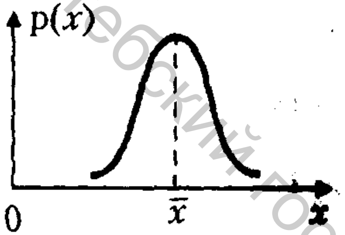
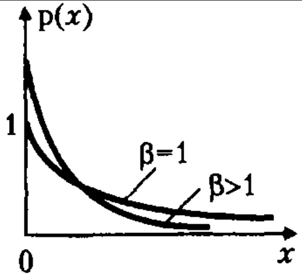
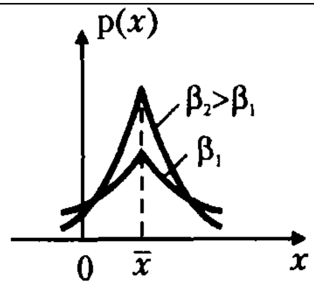
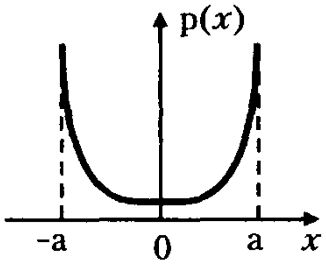
Функция Лапласа : $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t e^{\frac{t^2}{2}} dt.$

$F(t)=0{,}5 + \Phi(t)$, где $F(t)$ – интегральная функция нормированного нормального распределения.

Приложение М

Некоторые теоретические законы распределения вероятности

Закон	График плотности вероятности	Дифференциальная функция	Интегральная функция
Равномерный		$p(x)=\dfrac{1}{b-a},\ a<x<b$	$F(x)=\begin{cases}0, & x<a\\ \frac{x-a}{b-a}, & a<x<b\\ 1, & x>a\end{cases}$
Треугольный (Симпсона)		$p(x)=\begin{cases}\frac{4(x-a)}{(b-a)^2}, & a<x<\frac{a+b}{2}\\ \frac{4(b-x)}{(b-a)^2}, & \frac{(a+b)}{2}<x<b\end{cases}$	$F(x)=\begin{cases}0, & -\infty<x<a,\\ \frac{2(x-a)^2}{(b-a)^2}, & a<x<a+b\\ 1-\frac{2(b-x)^2}{(b-a)^2}, & \frac{a+b}{2}<x<b,\\ 1, & b<x<\infty\end{cases}$
Трапецеидальный		$p(x)=\begin{cases}0, & x\le X_ц-a,\ x\ge X_ц+a\\ \frac{x-X_ц+a}{a^2-b^2}, & X_ц-a\le x\le X_ц-b\\ \frac{1}{a+b}, & X_ц-b\le x\le X_ц+b\\ \frac{X_ц+a-x}{a^2-b^2}, & X_ц+b\le x\le X_ц+a\end{cases}$	

Нормальный (Гауса)		$p(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}$	$F(x_0)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x_0}e^{-\frac{(x-\bar{x})^2}{2\sigma^2}}dx$
Экспоненциальный односторонний		$p(x)=\beta e^{-\beta x}$	$F(x)=1- e^{-\beta x}$
Экспоненциальный двухсторонний (Лапласа)		$p(x)=\frac{\beta}{2}e^{-\beta\lvert x-\bar{x}\rvert}$	$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{-\beta\lvert x-\bar{x}\rvert}, & -\infty\le x\le\bar{x}\\ 1-\frac{1}{2}e^{-\beta\lvert x-\bar{x}\rvert}, & \bar{x}\le x\le\infty\end{cases}$
Арксинуса		$p(x)=\frac{1}{\pi\sqrt{a^2-x^2}}$	$F(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}arcsin\frac{x}{a}$

Учебное издание

ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕТРОЛОГИЯ

Методические указания к практическим занятиям

Составители:

Петюль Ирина Анатольевна
Борозна Вилия Дмитриевна

Редактор *Н. В. Медведева*
Корректор *Н. В. Медведева*
Компьютерная верстка *Н. В. Цобанова*

Подписано к печати 09.04.18. Формат 60x90 1/16. Усл. печ. листов 4.13.
Уч.-изд. листов 3.8. Тираж 40 экз. Заказ № 108.

Учреждение образования «Витебский государственный технологический университет»
210038, г. Витебск, Московский пр., 72.
Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Витебский государственный технологический университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 1/172 от 12 февраля 2014 г.
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 3/11497 от 30 мая 2017 г.