

На рис. 5 и 6 изображены результаты решения задачи о прямом превращении в отсутствии электрического тока и обратном превращении под действием тока при  $\sigma = 3\sigma_0$ . На рис. 5 кривые 2 – 9 соответствуют значениям тока  $I$  от 0.1А до 0.8А через 0.1А. На рис. 6 для кривых 1 – 6 значения  $I$  уменьшаются от 0.38А до 0.33А через 0.01А.

*Работа выполнена при финансовом содействии РФФИ, грант № 05-01-00841.*

#### Список литературы

1. А.А. Мовчан, Ньютон Со Термодинамическое описание поведения сплавов с памятью формы с помощью аддитивного потенциала Гиббса // Журнал прикладной механики и технической физики. 2006. Т.47. № 4. С. 98-103.
2. Мовчан А.А., Мишустин И.В. Анализ неаддитивных добавок к потенциалу Гиббса сплава с памятью формы // Известия РАН. Серия Физическая. 2006. Т. 70. № 9. С. 1388-1395.
3. Мовчан А.А. Микромеханический подход к описанию деформации мартенситных превращений в сплавах с памятью формы. Изв. РАН. Механика твердого тела. 1995. № 1. С. 197-205.
4. Мовчан А.А., Мишустин И.В. Термодинамическое описание нелинейного деформирования сплавов с памятью формы // Журнал функциональных материалов. 2007. Т. 1. №6. Статья №38.07. С. 221-226.

539.4

### АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ ИЗ СПЛАВОВ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ В РАМКАХ ЛИНЕЙНОЙ И НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ЭТИХ МАТЕРИАЛОВ

Мовчан А. А., Сильченко Л. Г., Мовчан И. А.

ИПРИМ РАН Москва,  
[movchan47@mail.ru](mailto:movchan47@mail.ru)

#### 1. Введение

В [1] экспериментально установлено, что термоупругие фазовые превращения, происходящие в сплавах с памятью формы (СПФ), могут вызывать потерю устойчивости тонкостенных элементов из этих материалов. В [2, 3] предложен ряд концепций для объяснения этого эффекта. Это – концепция «фиксированного фазового состава», в рамках которой возмущение параметра фазового состава не учитывается, и альтернативная концепция «дополнительного фазового перехода», гипотеза «фиксированной нагрузки», в рамках которой не учитываются возможные возмущения действующей внешней нагрузки, и концепция «повсеместного дополнительного фазового превращения», следуя которой все сечение рассматриваемого элемента находится в области возмущения параметра фазового состава, что может иметь место лишь при наличии определенных возмущений внешней нагрузки. Получены решения ряда задач устойчивости для стержней и пластин из СПФ [2–6]. Установлено, что наибольшие значения критических усилий получаются в рамках концепции «фиксированного фазового состава», а

наименьшие – в рамках концепции «повсеместного дополнительного фазового перехода».

Необходимо отметить, что все упомянутые выше решения задач устойчивости для элементов из СПФ получены в рамках модели поведения этих материалов, предложенной в [7, 8], следуя которой скорость накопления деформаций прямого превращения является линейной комбинацией девиатора напряжений и тензора фазовой деформации. В рамках этой модели, которую для краткости можно далее называть «линейной», интенсивность фазовой деформации, накапливаемой при полном прямом превращении под действием постоянного напряжения пропорциональна интенсивности этого напряжения. Ясно, что линейная модель, неплохо соответствующая экспериментальным данным для малых напряжений, противоречит для случая высоких напряжений тезису об ограниченности интенсивности деформации прямого перехода, верхней гранью для которой является интенсивность кристаллографической деформации соответствующего превращения. При этом наибольшее влияние фазовые переходы оказывают на значения критических сил как раз для случая высоких докритических напряжений, когда используемая линейная модель поведения СПФ наименее адекватна. В силу сказанного выше, актуальной проблемой является анализ явления потери устойчивости элементов из СПФ в рамках нелинейной модели деформирования этих материалов, адекватно описывающей их поведение, как для низких, так и для высоких напряжений. В данной работе в рамках нелинейной модели поведения СПФ получено аналитическое решение задачи о потере устойчивости стержня из этого материала, вызванной прямым мартенситным превращением, а также приведены некоторые результаты по устойчивости пластины из СПФ.

## 2. Определяющие соотношения нелинейной теории деформирования СПФ

Для решения задач устойчивости в данной работе используются следующие определяющие соотношения для прямого превращения в СПФ:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^{\sigma} + \varepsilon_{ij}^{ph}, \quad (2.1)$$

$$d\varepsilon_{ij}^{ph} = \left( \frac{3}{2} \delta_0 d(\mu_{\sigma}) \frac{\sigma_{ij}'}{\sigma_i} \Phi \left( \frac{\sigma_i}{\sigma_0} \right) (1 - qf(q)) + f(q) \varepsilon_{ij}^{ph} \right) dq, \quad (2.2)$$

$$M_s^{\sigma} = M_s^0 + \frac{\delta_0 d(\mu_{\sigma}) \sigma_i \Phi(\sigma_i / \sigma_0) + Z(\sigma)}{\Delta S_0}, \quad M_f^{\sigma} = M_s^{\sigma} - M_s^0 + M_f^0, \quad (2.3)$$

$$\Phi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2/2) dt,$$

$$Z(\sigma) = \frac{\Delta K \sigma_{kk}^2}{K_A K_M} + \frac{\Delta G \sigma_f^2}{G_A G_M}, \quad \Delta K = K_A - K_M, \quad \Delta G = G_A - G_M, \quad (2.4)$$

$$q = \begin{cases} 0 & \text{при } M_s^{\sigma} \leq T \\ \varphi(t) & \text{при } M_f^{\sigma} \leq T \leq M_s^{\sigma}, \quad \varphi(t) = \frac{1}{2} (1 - \cos(\pi t)), \quad t = \frac{M_s^{\sigma} - T}{M_s^0 - M_f^0} \\ 1 & \text{при } T \leq M_f^{\sigma} \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\varepsilon_{kk}^e = \frac{\sigma_{kk}}{K}, \quad \varepsilon_{ij}^e = \frac{\sigma_{ij}^s}{2G}, \quad \frac{1}{K} = \frac{q}{K_M} - \frac{1-q}{K_A}, \quad \frac{1}{G} = \frac{q}{G_M} + \frac{1-q}{G_A}. \quad (2.6)$$

Здесь  $\varepsilon_{ij}^e, \varepsilon_{ij}^s, \varepsilon_{ij}^s$  – тензоры полных, упругих и девиатора упругих деформаций (температурные деформации не учитываются),  $\varepsilon_{ij}^{ph}$  – тензор макроскопических фазовых деформаций, который считается девиатором (объемный эффект реакции для упрощения не учитывается),  $\delta_0$  – предельное значение интенсивности деформации, накапливаемой при прямом превращении под действием постоянного напряжения,  $d(\mu_\sigma)$  – функция параметров вида напряженного состояния, равная единице для случая одноосного растяжения,  $\sigma_i, \sigma_{kl}, \sigma_{ij}^s$  – интенсивность, шаровая часть и девиатор напряжений,  $\sigma_0$  – квадратичное уклонение микронапряжений,  $K_A, K_M, G_A, G_M$  – аустенитное и мартенситное значения утроенного объемного и сдвигового модулей,  $M_s^0, M_f^0$  – температуры начала прямого превращения в отсутствие напряжений,  $M_s^\sigma, M_f^\sigma$  – те же величины при наличии напряжений,  $\Delta S_0$  – скачок объемной плотности энтропии при переходе из мартенситного в аустенитное состояние при отсчетной температуре в случае отсутствия напряжений,  $q$  – объемная доля мартенситной фазы,  $f(q)$  – материальная функция, удовлетворяющая условиям  $0 \leq f(q) \leq 1/q$ .

В случае одноосного растяжения – сжатия соотношения (2.1) – (2.6) принимают вид

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^{ph}, \quad \varepsilon^e = \frac{\sigma}{E}, \quad \frac{1}{E} = \frac{q}{E_A} + \frac{1-q}{E_M}, \quad (2.7)$$

$$d\varepsilon^{ph} = \left( \delta_0 \text{sign}(\sigma) \Phi \left( \frac{|\sigma|}{\sigma_0} \right) (1 - qf(q)) + f(q) \varepsilon^{ph} \right) dq, \quad (2.8)$$

$$M_s^\sigma = M_s^0 + \frac{\delta_0 |\sigma| \Phi \left( \frac{|\sigma|}{\sigma_0} \right) + Z(\sigma)}{\Delta S_0}, \quad Z(\sigma) = \frac{3\Delta E \sigma^2}{E_A E_M}, \quad \Delta E = E_A - E_M \quad (2.9)$$

### 3. Потеря устойчивости стержня и пластины из СПФ, вызванная прямым мартенситным превращением

Рассматривается стержень из СПФ, шарнирно закрепленный по обоим торцам. В аустенитном состоянии стержень нагружается направленной вертикально вниз постоянной сжимающей силой  $P$ , причем связанные с этой силой напряжения  $\sigma$  не должны приводить к вызванному ростом напряжений прямому превращению. После этого стержень охлаждается через интервал температур  $(M_s^\sigma, M_f^\sigma)$  прямого превращения. Следуя статическому критерию устойчивости, разыскиваются минимальное значение силы  $P$ , при котором наряду с прямолинейной невозмущенной формой стержня возможна близкая к ней криволинейная возмущенная.

Задача решается в линеаризованной постановке, в рамках гипотезы плоских сечений. Предварительное напряженное состояние стержня соответствует одноосному сжатию постоянным напряжением. Интегрируя уравнение (2.8) при  $\sigma = \text{const}$  и нулевых начальных условиях можно получить следующее выражение для фазовой деформации, соответствующей невозмущенному состоянию:

$$\varepsilon^{ph} = -\delta_0 \Phi(|\sigma|/\sigma_0) q. \quad (3.1)$$

Знак минус перед правой частью (3.1) соответствует случаю сжимающих предварительных напряжений.

Записывая формулировку гипотезы плоских сечений для полной продольной деформации  $\varepsilon$  и используя соотношения (2.7) можно получить:

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \beta z = -\frac{\sigma}{E(q)} + \varepsilon^{ph}. \quad (3.2)$$

Здесь  $\varepsilon_0, \beta, z$  — деформация нейтральной плоскости стержня, его кривизна и поперечная координата в плоскости изгиба.

Для проведения линеаризации соотношение (3.1) записывается в вариациях. Выражение для вариации фазовых деформаций можно формально получить, заменив в (2.8) знак дифференциала на знак вариации и подставив в полученную формулу выражение (3.1). В результате получается

$$\delta \varepsilon^{ph} = -\delta_0 \Phi(|\sigma|/\sigma_0) \delta q. \quad (3.3)$$

Подстановка (3.3) в выражение (3.2), проварьированное с учетом переменности модуля Юнга приводит к выражению

$$\delta \varepsilon_0 + z \delta \beta = A \delta \sigma + (B \sigma - \delta_0 \Phi(|\sigma|/\sigma_0)) \delta q, \quad A = \frac{q}{E_M} + \frac{1-q}{E_A}, \quad B = \frac{E_A - E_M}{E_A E_M} \quad (3.4)$$

Ранее [2] было показано, что учет возмущения температуры не меняет критических нагрузок потери устойчивости для стержней из СПФ. Поэтому при вычислении вариации параметра фазового состава вариация температуры считается равной нулю. В результате, согласно (2.5), (2.9) можно получить:

$$\delta q = \frac{\sqrt{q(1-q)} \Phi(|\sigma|)}{\Delta S_0 (M_s^0 - M_f^0)} \delta(|\sigma|), \quad (3.5)$$

$$\varphi(x) = \delta_0 \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x}{\sigma_0} \exp \left[ -0.5 \left( \frac{x}{\sigma_0} \right)^2 \right] + \Phi \left( \frac{x}{\sigma_0} \right) \right) + \frac{3 \Delta E x}{E_A E_M}.$$

Вводя обозначение  $S = |\sigma| = -\sigma$ ,  $\delta S = \delta |\sigma| = -\delta \sigma$ , подставляя (3.5) в (3.4) и выражая из полученного соотношения величину  $\delta S$ , находим

$$\delta S = -\frac{\delta \varepsilon_0 + z \delta \beta}{f(S, q)}, \quad f(S, q) = A + \frac{(B S + \delta_0 \Phi(S/\sigma_0)) \sqrt{q(1-q)}}{\Delta S_0 (M_s^0 - M_f^0)} \varphi(S). \quad (3.6)$$

Необходимо отметить, что выражение для  $f(S, q)$  (3.6) справедливо лишь в той части сечения стержня, где происходит дополнительный фазовый переход. Во всех остальных точках следует положить  $f(S, q) = A$ . Однако, если решать задачу в рамках концепции «повсеместного дополнительного фазового перехода», то формула для  $f(S, q)$  (3.6) справедлива для всех точек сечения. Ограничиваясь упомянутой выше концепцией, с помощью (3.6) можно вычислить вариацию изгибающего момента:

$$\delta M = \int_F z \delta S dF = - \frac{J}{f(S, q)} \frac{\partial^2 \delta W}{\partial x^2} \quad (3.7)$$

В (3.7)  $J$  – момент инерции стержня,  $F$  – площадь его поперечного сечения, а для вариации кривизны использовано линейное выражение через вариацию прогиба  $\delta W$ . Подставляя (3.7) в уравнение равновесия, получаем однородное дифференциальное уравнение для вариации прогиба

$$\frac{\partial^2 \delta W}{\partial x^2} + \frac{f(S, q)P}{J} \delta W = 0. \quad (3.8)$$

Решая обычным путем задачу (3.8) на собственные значения для случая шарнирного опирания, можно получить следующее уравнение для критической силы:

$$P = \frac{\pi^2 J}{L^2 f(P/F, q)}, \quad (3.9)$$

которое легко разрешается относительно критической длины стержня  $L$ . Для безразмерного параметра критической длины  $L_1 = L/L_M$ , отнесенного к критической длине изотермической потери устойчивости в мартенситном состоянии  $L_M = \pi \sqrt{E_M J / P}$  из (3.9) получается следующее выражение через безразмерное значение напряжения предварительного состояния  $\xi = S/\sigma_0$ :

$$L_1 = \left( q + e(1-q) + ((1-e)\xi + e_M \delta_0 \Phi(\xi)) \frac{\sqrt{q(1-q)}}{\delta S_0} \left( \delta_0 \left( \sqrt{\frac{2}{\pi}} \xi \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) + \Phi(\xi) \right) + \frac{3\xi(1-e)}{e_M} \right) \right)$$

Здесь введены безразмерные параметры  $e = \frac{E_M}{E_A}$ ,  $e_M = \frac{E_M}{\sigma_0}$ ,  $\delta S_0 = \frac{\Delta S_0 (M_s^0 - M_f^0)}{\sigma_0}$ .

На рис.1 приведены графики зависимости  $L_1$  от  $q$ , построенные для  $e = 1/3$ ,  $e_M = 280$ ,  $\delta S_0 = 0.067$ ,  $\delta_0 = 0.04$  и различных значений безразмерного приложенного напряжения. Кривая 2 соответствует  $\xi = 0.1$ , 3 –  $\xi = 0.5$ , 4 –  $\xi = 0.5$ , 5 –  $\xi = 1$ , 6 –  $\xi = 2$ , 7 –  $\xi = 3$ . Кривая 1 соответствует решению данной задачи в рамках концепции «фиксированного фазового состава», т.е. соответствует изотермической потери устойчивости в мартенситном состоянии. Явлению потери устойчивости соответствует точка минимума на полученных кривых. Как видно, критическая длина стержня, найденная в рамках концепции «повсеместного дополнительного фазового перехода» получается существенно меньше, чем та же величина для изотермической потери устойчивости в наименее жестком мартенситном состоянии материала, причем разница растет с ростом действующих напряжений. Однако, для достаточно высоких напряжений этот эффект затухает (разница между кривыми, соответствующими  $\xi = 2$  и  $\xi = 3$  чрезвычайно мала). Рис. 2 посвящен сравнению результатов, получающихся при решении данной задачи по нелинейной (сплошные кривые) и линейной (штриховые линии) теории.

Параметры линейной теории  $c_0$  и  $k$  определялись через параметры нелинейной теории по формулам

$$c_0 = \frac{3}{2} \delta_0 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sigma_0}, \quad k = \frac{\delta_0}{\Delta S_0}. \quad (3.10)$$

Первое из этих соотношений обеспечивает асимптотическое соответствие значений деформаций прямого превращения в линейной и нелинейной теориях для малых напряжений, а второе – равенство асимптотического поведения зависимостей  $M_s^\sigma$  от  $\sigma$  для достаточно больших напряжений. Кривые 1 на рис. 2 соответствуют  $\xi = 0.1$ , кривые 2 –  $\xi = 0.5$ , кривые 3 –  $\xi = 1$ , кривые 4 –  $\xi = 2$ . Следуя рис. 2, в случае, когда параметры линейной и нелинейной теорий связаны соотношениями (3.10), разница между решениями в рамках линейной и нелинейной теорий велика при малых напряжениях и уменьшается с ростом напряжений (для  $\xi = 2$  обе кривые сливаются). Отсюда можно сделать вывод о том, что на явление потери устойчивости стержня из СПФ существенно влияет зависимость  $M_s^\sigma$  от  $\sigma$  нежеле чем зависимость фазовых деформаций, накапливаемых при полном прямом превращении от действующих напряжений.

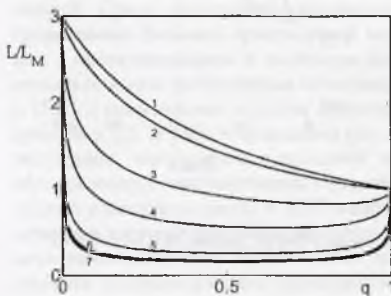


Рис. 1.

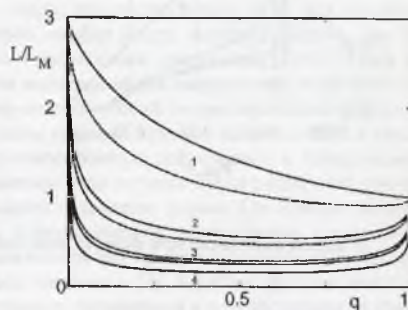


Рис. 2.

Далее приводятся некоторые результаты решения задачи устойчивости пластины из СПФ при прямом мартенситном превращении, полученные на основе нелинейной модели, с учетом двухмерности задачи. На рис.3 представлены области устойчивости квадратной пластины из СПФ, испытывающей прямое мартенситное превращение и находящейся в условиях двухстороннего равномерного сжатия (кривые 2–4), полученные на основе концепции “повсеместного дополнительного фазового превращения” для  $\sigma_0 = 394, 165, 68.8$  МПа соответственно. Расчет проведен для следующих значений безразмерных параметров:  $\delta_0 = 0.117$ ,  $h/a = 0.05$ ,  $e = 1/3$ ,  $\delta S_0 / e_M = 0.73 \times 10^{-3}$ . Здесь  $h$  – толщина пластины,  $a$  – размер её стороны. На рис.3 для сравнения приведена прямая 1, являющаяся границей области устойчивости рассматриваемой пластины полученной на основе гипотезы “фиксированного фазового состава”. Данные приведены в долях критической нагрузки одностороннего равномерного сжатия рассматриваемой пластины в мартенситном состоянии. Как видно из рис. 3, изменяя значение среднеквадратического отклонения микронапряжений, можно существенным образом влиять на степень возгнутости границы области устойчивости и уровень минимальных критических напряжений. Последние соответствуют случаю равнодвухосного сжатия пластины.

На рис.4 для  $\sigma_0 = 394, 165, 68.8$  МПа (кривые 1–3, соответственно) показана зависимость безразмерной критической нагрузки квадратной пластины из СПФ, находящейся в условиях равнодвухосного сжатия (отнесена к критической нагрузке равнодвухосного сжатия такой же пластины в мартенситном состоянии) от обратного значения её без-

размерной толщины. Как и в случае линейных определяющих соотношений для тонких пластин наблюдается выход графика на горизонтальную асимптоту, что соответствует приближению критической нагрузки к мартенситному значению. В случае толстых пластин в отличие от линейных определяющих соотношений просматривается тенденция к прекращению снижения безразмерной критической нагрузки с ростом толщины.

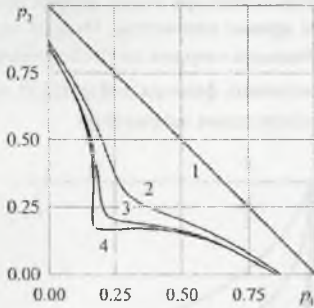


Рис.3

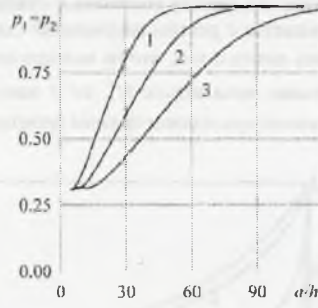


Рис.4

*Работа выполнена при финансовом содействии РФФИ, грант № 05-01-00841.*

#### Список литературы

1. Мовчан А.А., Казарина С.А. Экспериментальное исследование явления потери устойчивости, вызванной термоупругими фазовыми превращениями под действием сжимающих напряжений // Проблемы машиностроения и надежности машин. 2002. №6. С. 82 – 89.
2. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г. Устойчивость стержня, претерпевающего прямое или обратное мартенситные превращения под действием сжимающих напряжений // Журнал прикладной механики и технической физики. 2003. Т. 4. № 3. С. 169-178.
3. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г. Анализ устойчивости при прямом термоупругом превращении под действием сжимающих напряжений // Известия РАН. Механика твердого тела. 2004. № 2 С. 132-144.
4. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г. Аналитическое решение связанной задачи об устойчивости пластины из сплава с памятью формы при прямом термоупругом фазовом превращении // Прикладная математика и механика. 2004. Т. 68, Вып. 1, с. 60-72.
5. Мовчан А.А., Сильченко Л.Г. Аналитическое решение связанной задачи об устойчивости пластины из сплава с памятью формы при обратном мартенситном превращении. Известия РАН. Механика твердого тела. 2004. №5. С.153-167.
6. А.А. Мовчан, Л.Г. Сильченко Устойчивость круглой пластины из сплава с памятью формы при прямом мартенситном превращении // Прикладная математика и механика. 2006. Т. 70. Вып. 5. С. 869-881.
7. Мовчан А.А. Микромеханические определяющие уравнения для сплавов с памятью формы. Проблемы машиностроения и надежности машин. 1994. № 6. С. 47-53.
8. Мовчан А.А. Микромеханический подход к описанию деформации мартенситных превращений в сплавах с памятью формы. Изв. РАН. Механика твердого тела. 1995. № 1. С. 197-205.