

$$d_{\sigma} = \delta_0 d(\mu_{\sigma}) \Phi(\sigma_i / \sigma_0) \sigma_i + Z(\sigma), \quad d_{\sigma} = \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}^{ph0} / q_0 + Z(\sigma) \quad (4.4)$$

$$Z(\sigma) = \frac{\Delta K \sigma_{AA}^2}{6 K_M K_M} + \frac{\Delta G \sigma_i^2}{6 G_M G_A} + \frac{\sigma_{AA} \varepsilon_0}{3}, \quad \Delta K = K_A - K_M, \quad \Delta G = G_A - G_M$$

Здесь $\Delta U_0, \Delta S_0$ – объемные плотности энтальпии и энтропии перехода, d_{σ} – диссипативное слагаемое в уравнении энергетического баланса (4.2), вычисляемое по первой или второй формулам (4.4) для прямого и обратного превращения, соответственно, C_{σ} – теплоемкость единицы объема при постоянном напряжении, K, G – утроенный объемный и сдвиговой модули, индексами A и M обозначены их значения в аустенитном и мартенситном состояниях. Условие выполнения второго закона термодинамики сводится к неравенству (4.1), при условии, что температуры начала прямого и обратного превращений при действии механических напряжений определяются зависимостями (4.3).

Работа выполнена при финансовом содействии РФФИ, грант № 05-01-00841.

Список литературы

1. Мовчан А.А. Микромеханические определяющие уравнения для сплавов с памятью формы. Проблемы машиностроения и надежности машин. 1994. № 6. С. 47-53.
2. Мовчан А.А. Микромеханический подход к описанию деформации мартенситных превращений в сплавах с памятью формы. Изв. РАН. Механика твердого тела. 1995. № 1. С. 197-205.
3. Мовчан А.А. Выбор аппроксимации диаграммы перехода и модели исчезновения кристаллов мартенсита для сплавов с памятью формы. Журнал прикладной механики и технической физики. 1995. Т. 36. № 2. С. 173-181.
4. Wu X.D., Sun G.J., Wu J.S. The nonlinear relationship between transformation strain and applied stress for nitinol // Materials Letters 2003. V. 57. P. 1334-1338.
5. Мовчан А.А., Мишугин И.В. Термодинамический анализ механического поведения сплавов с памятью формы // «Упругость и неупругость» Сборник трудов Международного симпозиума по проблемам механики деформируемых тел, посвященный 95-летию годовщины со дня рождения А.А. Ильюшина. М.: Изд-во МГУ. 2006 г. С.195-203.
6. Мовчан А.А., Мишугин И.В. Термодинамическое описание нелинейного деформирования сплавов с памятью формы // Журнал функциональных материалов. 2007. Т. 1. №6. С. 221-226.

УДК 539.4

РЕШЕНИЕ ДВАЖДЫ СВЯЗНЫХ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ О ДЕФОРМИРОВАНИИ СПЛАВОВ, ФАЗОВОМ И ТЕМПЕРАТУРНОМ СОСТОЯНИИ ЭЛЕМЕНТОВ ИЗ СПЛАВОВ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ С УЧЕТОМ ДЕЙСТВИЯ ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТОКА

Мовчан А. А., Казарина С. А., Чжо Ту Я.

ИПРИМ РАН Москва,
movchan47@mail.ru

При практическом применении элементов из сплавов с памятью формы (СПФ) регулировку их температуры часто осуществляют путем пропуска электрического тока. Данная работа посвящена постановке и некоторым результатам решения связанных

электро-термоупругих задач о фазовых превращениях, температурном и деформированном состоянии элементов из СПФ. Получены и сопоставлены друг с другом результаты решения одномерных по пространству задач для двух вариантов моделей деформирования СПФ – линейной и нелинейной.

1. Используемые термодинамические модели поведения СПФ

Ниже рассматриваются СПФ, для которых

$$A_s^0 \geq M_s^0, \quad (1.1)$$

где M_s^0, A_s^0 – температуры начала прямого и обратного мартенситного превращения в отсутствие напряжений. Предполагается, кроме того, что для рассматриваемых материалов не характерно явление ориентированного превращения. Следуя [1, 2], потенциал Гиббса таких СПФ можно считать полностью аддитивным. Известна [1, 3] модель термомеханического поведения СПФ, сводящаяся к следующим определяющим соотношениям

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^{ph},$$

$$\varepsilon_{kk}^e = \frac{\sigma_{kk}}{3K}, \quad \varepsilon_{ij}^e = \frac{\sigma_{ij}'}{2G}, \quad \frac{1}{K} = \frac{q}{K_M} + \frac{1-q}{K_A}, \quad \frac{1}{G} = \frac{q}{G_M} + \frac{1-q}{G_A},$$

$$d\varepsilon_{ij}^{ph} = c_0 \sigma_{ij}' dq, \quad t = \frac{M_s^\sigma - T}{M_s^0 - M_f^0}, \quad (1.2)$$

$$d\varepsilon_{ij}^{ph} = \frac{\varepsilon_{ij}^{ph0}}{q_0} dq, \quad t = \frac{A_f^\sigma - T}{A_f^0 - A_s^0}, \quad (1.3)$$

$$M_s^\sigma = M_s^0 + k\sigma_t + \frac{\Delta K \sigma_{kk}^2}{6K_A K_M \Delta S_0}, \quad M_f^\sigma = M_s^\sigma + M_f^0 - M_s^0, \quad (1.4)$$

$$A_s^\sigma = A_s^0 + \frac{\sigma_{ij}' \varepsilon_{ij}^{ph0}}{\Delta S_0 q_0} + \frac{Z(\sigma)}{\Delta S_0}, \quad Z(\sigma) = \frac{\Delta K \sigma_{kk}^2}{6K_A K_M} + \frac{\Delta G \sigma_t^2}{6G_A G_M}, \quad A_f^\sigma = A_s^\sigma + A_f^0 - A_s^0, \quad (1.5)$$

$$q = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq 0 \\ \varphi(t) & \text{при } 0 \leq t \leq 1, \\ 1 & \text{при } 1 \leq t \end{cases} \quad \varphi(t) = \frac{1}{2}(1 - \cos(\pi t)), \quad (1.6)$$

$$\Delta S_0 \leq \frac{4\Delta U_0}{2M_s^0 + \sqrt{4(M_s^0)^2 + 6\Delta U_0 k^2 / c_1}}, \quad c_1 = c_0 + \frac{\Delta G}{4G_1 G_2}, \quad (1.7)$$

$$k_q \Delta T = C^* T + T \alpha \dot{\sigma}_{kk} - \Delta C(\sigma, T) \varphi(\sigma, \sigma, T) - \dot{Q}^*, \quad C^* = C_\sigma + \Delta C(\sigma, T), \quad (1.8)$$

$$\Delta C(\sigma, T) = \frac{2c_0 \sigma_t^2 / 3 + \Delta U_0 + Z(\sigma)}{(M_s^0 - M_f^0)} \varphi'(t), \quad (1.9)$$

$$\varphi(\sigma, \dot{\sigma}, T) = \Delta C(\sigma, T) \left(k \dot{\sigma}_i + \frac{\Delta K \sigma_{mm} \dot{\sigma}_{kk}}{3\Delta S_0 K_1 K_2} \right),$$

$$\Delta C(\sigma, T) = \frac{\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^{ph0} / q_0 + \Delta U_0 + Z(\sigma)}{(A_f^0 - A_s^0)} \varphi(t), \quad (1.10)$$

$$\varphi(\sigma, \dot{\sigma}, T) = \Delta C(\sigma, T) \frac{3\varepsilon_{ij}^{ph0} \dot{\sigma}_{ij} / q_0 + \dot{\sigma}_{kk} \sigma_{mm} \Delta K / (K_1 K_2) + \dot{\sigma}_i \sigma_i \Delta G / (G_1 G_2)}{3\Delta S_0}$$

Здесь σ_{ij} , σ_i – тензор и интенсивность напряжений, штрихом обозначаются компоненты девиатора, ε_{ij} , ε_{ij}^e , ε_{ij}^{ph} – тензоры полной, упругой и макроскопической фазовой деформации (последний для упрощения считается девиатором), K , G – утроенный объемный и сдвиговой модули, нижними индексами M и A обозначены аустенитные и мартенситные значения этих величин, α – коэффициент температурного расширения, изменениями которого при фазовом переходе пренебрегается, q – объемная доля мартенситной фазы, M_s , M_f , A_s , A_f – температуры начала и окончания прямого и обратного мартенситных превращений, (верхний индекс нуль у этих величин соответствует ненапряженному состоянию, а верхний индекс σ – случаю наличия механических напряжений), c_0 , k – постоянные материала, C_σ – теплоемкость единицы объема при постоянном напряжении, ΔU_0 , ΔS_0 – объемные плотности энтальпии и энтропии перехода. Уравнения (1.2) и (1.4) соответствуют прямому а (1.3), (1.5) – обратному превращению, в последнем случае q_0 , ε_{ij}^{ph0} – значение объемной доли мартенситной фазы и тензора фазовых деформаций в момент начала рассматриваемого этапа обратного превращения. Условие (1.7) вместе с (1.1) являются достаточными условиями выполнения диссипативного неравенства. Соотношение (1.8) является уравнением энергетического

баланса, входящая в него величина \dot{Q}^* является скоростью выделения тепла в единице объема за счет пропуска электрического тока. Функция $\Delta C(\sigma, T)$ представляет собой эффективное изменение теплоемкости, связанное с выделением (поглощением) латентного тепла, а также с диссипативными явлениями. Она вычисляется по формулам (1.9) для прямого и (1.10) – для обратного превращений. Скоростной коэффициент

$\varphi(\sigma, \dot{\sigma}, T)$ также вычисляется по-разному для прямого и обратного превращения. Этот коэффициент обращается в нуль для процессов, происходящих при постоянных напряжениях, т.е. при $\dot{\sigma}_{ij} = 0$. В этом случае уравнение энергетического баланса упрощается:

$$k_q \Delta T = C^* \dot{T} - \dot{Q}^*, \quad (1.11)$$

т.е. математически сводится к уравнению теплопроводности с эффективной теплоемкостью, являющейся функцией температуры и напряжений, и источником тепла, связанным с пропуском электрического тока.

Приведенные выше определяющие соотношения обладают существенным недостатком: следуя уравнению (1.2), интенсивность фазовых деформаций, накопленных при полном прямом превращении под действием постоянного напряжения пропорциональна интенсивности этого напряжения. Данную модель можно для краткости называть

линейной моделью. Это свойство формально противоречит тезису об ограниченности интенсивности деформаций прямого превращения, которая не может превышать интенсивность тензора кристаллографических деформаций соответствующего фазового перехода. Кроме того, в рамках приведенной выше системы определяющих соотношений получается нереалистичная зависимость площади петли изотермического сверхупругого гистерезиса от температуры испытаний [4].

В [4] указанные выше недостатки были исправлены путем учета влияния на процесс прямого превращения не только внутренних макроскопических напряжений, но и случайным образом распределенных по представительному объему микронапряжений. В результате получены новые соотношения для накопления деформаций прямого превращения и для температуры начала прямого превращения при наличии напряжений, а также отличное от (1.8) связанное уравнение энергетического баланса:

$$d\varepsilon_{ij}^{ph} = \frac{3}{2} \delta_0 \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i} \Phi \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_0} \right) dq, \quad M_s^\sigma = M_s^0 + \frac{\delta_0 \sigma_i \Phi(\sigma_i / \sigma_0) + Z(\sigma)}{\Delta S_0}, \quad (1.12)$$

$$K_q \Delta T = C_\sigma \dot{T} - (\Delta U_0 + \delta_0 d_1 (\mu_\sigma) \Phi(\sigma_i / \sigma_0) \sigma_i + Z(\sigma)) \dot{q} - \dot{Q}^* - T \alpha \dot{\sigma}_{kk}. \quad (1.13)$$

Здесь $\Phi(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^x \exp(-t^2/2) dt$ - функция Лалласа, σ_0 - квадратичное уклонение

микронапряжений, которые считаются распределенными по нормальному закону с нулевым математическим ожиданием, δ_0 - предельное значение интенсивности деформации прямого превращения, которая может накопиться при достаточно высоких напряжениях. Подстановка выражения для q в уравнение энергетического баланса (1.13) дает соотношение (1.8), где уже для прямого превращения приращению эффективной теплоемкости и скорости слагаемое должны вычисляться по формулам

$$\Delta C = \frac{\Delta U_0 + \delta_0 \sigma_i \Phi(\sigma_i / \sigma_0) + Z(\sigma)}{M_s^0 - M_f^0} \varphi'(t), \quad (1.14)$$

$$\varphi(\sigma, \sigma, T) = \frac{\delta_0 \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sigma_i}{\sigma_0} \exp \left(-0.5 \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_0} \right)^2 \right) + \Phi \left(\frac{\sigma_i}{\sigma_0} \right) \right) \dot{\sigma}_i + \frac{\sigma_i}{3G_A G_M} \dot{\Delta G} + \frac{\sigma_{nm} \sigma_{kk} \dot{\Delta K}}{3K_A K_M}}{\Delta S_0}$$

Следует отметить, что достаточное условие выполнения диссипативного неравенства в рамках нелинейной модели сводится к простейшему соотношению (1.1) и не требует выполнения никаких дополнительных ограничений типа (1.7).

2. Выражение для скорости притока тепла, связанного с пропусканием электрического тока

Рассматривается образец из СПФ постоянного поперечного сечения площадью F , длина которого L значительно больше поперечного размера сечения. Боковые поверхности образца тепло- и электроизолированы, теплообмен и протекание электрического тока может происходить только через торцы. Образец нагружен постоянной растягивающей силой, так что все его точки находятся в одноосном напряженном состоянии с одинаковым значением растягивающего напряжения. Температура по каждому

сечению образца распределена равномерно, но может меняться при переходе от одного сечения к другому. В этих условиях параметр фазового состава распределен по любому сечению также равномерно. Считается, что электрическое сопротивление материала однозначно определяется температурой и фазовым составом. Поэтому электрическое сопротивление всех элементов одного и того же сечения также одинаково. Следует отметить, что электрическое сопротивление различных сечений может быть различным, поскольку сечения различаются как температурой, так и значением параметра фазового состава.

Пусть x – продольная координата вдоль оси стержня, меняющаяся от нуля до L . Электрическое сопротивление элемента образца длиной dx с центром в точке с координатой x равно

$$dR = r(x)dx, \quad r(x) = \rho(x)/F, \quad (2.1)$$

где $\rho(x)$ – удельное сопротивление. Пусть ток, текущий по образцу, равен I . По закону Ома, падение напряжений на данном отрезке равно

$$dU = Ir(x)dx. \quad (2.2)$$

Интегрируя (2.2), получаем полное электрическое напряжение, приложенное к образцу

$$U = IR, \quad R = \int_0^L r(x)dx. \quad (2.3)$$

Здесь R – полное сопротивление всего образца. Таким образом, по заданному напряжению U , приложенному к образцу, определить протекающий по нему ток I можно, лишь найдя зависимость $r = r(x)$ для всех точек образца, которая сама меняется с изменением тока.

Количество тепла dQ , выделяемое в элементе длиной dx равно

$$dQ = IdU = I^2 r(x)dx. \quad (2.4)$$

Для величины скорости притока тепла к единице объема \dot{Q}^* получаем

$$\dot{Q}^* = \frac{dQ}{Fdx} = \frac{I^2 r(x)}{F} = \frac{U^2 r(x)}{R^2 F}. \quad (2.5)$$

Используя (2.1), можно выразить скорость притока тепла к единице объема образца через удельное сопротивление материала:

$$\dot{Q}^* = \frac{I^2 \rho(x)}{F^2} = \frac{U^2 \rho(x)}{R^2 F^2}. \quad (2.6)$$

Подстановка (2.6) в (1.8) дает разрешающие уравнения рассматриваемой задачи для случая задания электрического тока:

$$k_q \Delta T + \frac{I^2 \rho(T, q)}{F^2} = \rho C^* \dot{T} + T \alpha \dot{\sigma}_{kk} - \Delta C(\sigma, T) \varphi(\sigma, \dot{\sigma}, T) \quad (2.7)$$

или электрического напряжения:

$$k_q \Delta T + \frac{U^2 \rho(T, q)}{R^2 F^2} = \rho C^* \dot{T} + T \alpha \dot{\sigma}_{kk} - \Delta C(\sigma, T) \varphi(\sigma, \dot{\sigma}, T). \quad (2.8)$$

Для решения уравнений (2.7) или (2.8) необходимо воспользоваться зависимостью удельного электрического сопротивления СПФ от T и q . Вне зоны фазовых переходов удельное электрическое сопротивление с ростом температуры возрастает. Будем считать, что как в аустенитном, так и в мартенситном состоянии это возрастание является линейным. Пусть удельное электрическое сопротивление аустенитной и мартенситной фаз определяется зависимостями

$$\rho_A(T) = \rho_A(T_0) + \lambda_A(T - T_0), \quad \rho_M(T) = \rho_M(T_0) + \lambda_M(T - T_0). \quad (2.9)$$

Здесь T_0 – некая характерная температура, при которой возможно существование обоих фаз, λ_A и λ_M – постоянные коэффициенты. Предполагается, что удельное электрическое сопротивление двухфазного материала, состоящего из аустенитной и мартенситной фаз, получается из удельных электрических сопротивлений аустенита и мартенсита с помощью процедур осреднения по Фойгхту или по Рейсу. В первом случае $\rho = q\rho_M + (1-q)\rho_A$, откуда с учетом (2.9) получается

$$\rho = A + \lambda_A T + Bq + \Delta\lambda qT, \quad A = \rho_A(T_0) - \lambda_A T_0,$$

$$B = \rho_M(T_0) - \rho_A(T_0) - T_0(\lambda_M - \lambda_A), \quad \lambda_M - \lambda_A = \Delta\lambda.$$

В простейшем случае $\lambda_A = \lambda_M = \lambda$ для ρ получается линейная зависимость

$$\rho = A + \lambda T + Bq.$$

3. Анализ результатов

Ниже приведены некоторые результаты решения задачи о деформированном, температурном и фазовом состоянии стержня из СПФ типа никелида титана длиной 1 м и площадью поперечного сечения 2 мм². Параметры материала, общие для линейной и нелинейной моделей, имели следующие значения: $M_A^0 = 313K$, $M_f^0 = 293K$, $A_f^0 = 323K$, $A_f^0 = 343K$, $\Delta U_0 = 18.88 \times 10^7$ Дж/м³, $\Delta S_0 = 40.25 \times 10^4$ Дж/(м³К), $E_A = 84000$ МПа, $E_M = 28000$ МПа, $\nu_A = 0.3$, $\nu_M = 0.48$, для зависимости удельного электрического сопротивления от T и q использовалось выражение $\rho = 0.736 + 0.0004T - 0.07q$ мкОм·м. Для отдельных параметров нелинейной и линейной моделей приняты значения $\delta_0 = 0.04$, $\sigma_0 = 168.6$ МПа, $k = 0.1$ К/МПа, $c_0 = 2.83 \times 10^{-4}$ МПа⁻¹. Значения этих параметров подобраны таким образом, чтобы у линейной и нелинейной модели совпадали асимптотики для фазовых деформаций прямого превращения при малых напряжениях, а для зависимостей M_f^σ от σ – для больших напряжений. В начальный момент времени все точки стержня имели одинаковую температуру, равную 403К. В процессе прямого превращения температура обоих торцов поддерживалась равной 203К. На рис. 1, 2 изображены графики зависимости от времени температуры в средней точке стержня в случае отсутствия электрического тока (кривые 1) и при действии тока $I = 0.15$ А, $I = 0.2$ А (кривые 2 и 3 соответственно). Рис. 1 соответствует прямому превращению под действием малых напряжений $\sigma = 0.1\sigma_0$, а рис. 2 – случаю высоких напряжений $\sigma = 3\sigma_0$. Сплошные линии получены в соответствие с нелинейной теорией, штриховые – в рамках линейной теории. Как видно, для высоких напряжений различия весьма существенны. На рис. 3 изображены графики зависимости q в средней точке

стержня от T . Обозначения кривых те же, что и на рис. 2, $\sigma = 0.1\sigma_0$. Как видно, при наличии электрического тока достаточной величины решения для q , полученные в рамках линейной и нелинейной теорий различаются весьма существенно.

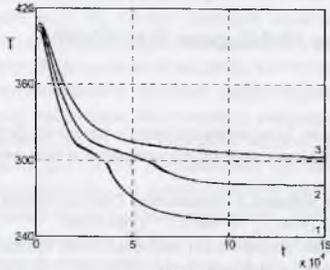


Рис. 1.

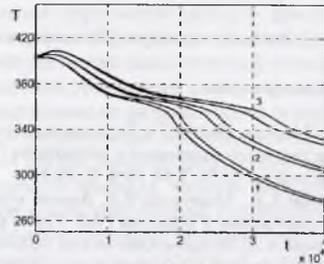


Рис. 2.

На рис. 4 приведены графики зависимости от времени смещения конца стержня при прямом превращении, отнесенного к смещению под действием той же нагрузки упругого стержня с аустенитным значением модулей. Пунктир соответствует линейной, а сплошная линия – нелинейной теориям, кривые 1 соответствуют $\sigma/\sigma_0 = 0.1$, 2 – $\sigma/\sigma_0 = 1$, 3 – $\sigma/\sigma_0 = 2$, 4 – $\sigma/\sigma_0 = 3$. Расчеты выполнены для тока $I = 0.15$ А. Как видно, деформационные эффекты в рамках линейной и нелинейной теорий при достаточно высоких напряжениях различаются весьма существенно.

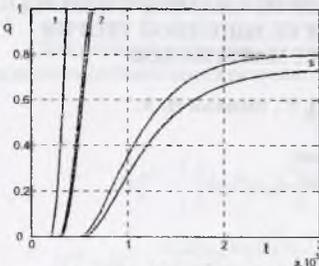


Рис. 3.

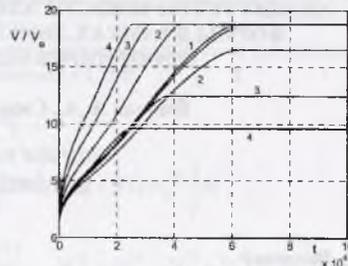


Рис. 4.

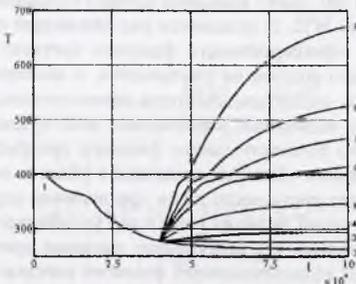


Рис. 5.

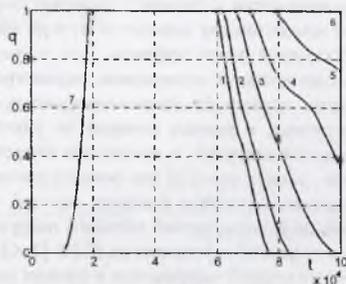


Рис. 6.

На рис. 5 и 6 изображены результаты решения задачи о прямом превращении в отсутствии электрического тока и обратном превращении под действием тока при $\sigma = 3\sigma_0$. На рис. 5 кривые 2 – 9 соответствуют значениям тока I от 0.1А до 0.8А через 0.1А. На рис. 6 для кривых 1 – 6 значения I уменьшаются от 0.38А до 0.33А через 0.01А.

Работа выполнена при финансовом содействии РФФИ, грант № 05-01-00841.

Список литературы

1. А.А. Мовчан, Ньютон Со Термодинамическое описание поведения сплавов с памятью формы с помощью аддитивного потенциала Гиббса // Журнал прикладной механики и технической физики. 2006. Т.47. № 4. С. 98-103.
2. Мовчан А.А., Мишустин И.В. Анализ неаддитивных добавок к потенциалу Гиббса сплава с памятью формы // Известия РАН. Серия Физическая. 2006. Т. 70. № 9. С. 1388-1395.
3. Мовчан А.А. Микромеханический подход к описанию деформации мартенситных превращений в сплавах с памятью формы. Изв. РАН. Механика твердого тела. 1995. № 1. С. 197-205.
4. Мовчан А.А., Мишустин И.В. Термодинамическое описание нелинейного деформирования сплавов с памятью формы // Журнал функциональных материалов. 2007. Т. 1. №6. Статья №38.07. С. 221-226.

539.4

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ЭЛЕМЕНТОВ ИЗ СПЛАВОВ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ В РАМКАХ ЛИНЕЙНОЙ И НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ЭТИХ МАТЕРИАЛОВ

Мовчан А. А., Сильченко Л. Г., Мовчан И. А.

ИПРИМ РАН Москва,
movchan47@mail.ru

1. Введение

В [1] экспериментально установлено, что термоупругие фазовые превращения, происходящие в сплавах с памятью формы (СПФ), могут вызывать потерю устойчивости тонкостенных элементов из этих материалов. В [2, 3] предложен ряд концепций для объяснения этого эффекта. Это – концепция «фиксированного фазового состава», в рамках которой возмущение параметра фазового состава не учитывается, и альтернативная концепция «дополнительного фазового перехода», гипотеза «фиксированной нагрузки», в рамках которой не учитываются возможные возмущения действующей внешней нагрузки, и концепция «повсеместного дополнительного фазового превращения», следуя которой все сечение рассматриваемого элемента находится в области возмущения параметра фазового состава, что может иметь место лишь при наличии определенных возмущений внешней нагрузки. Получены решения ряда задач устойчивости для стержней и пластин из СПФ [2–6]. Установлено, что наибольшие значения критических усилий получаются в рамках концепции «фиксированного фазового состава», а