

УДК 621. 923

УСТОЙЧИВОСТЬ ВРАЩЕНИЯ ДЕФОРМИРУЮЩЕГО ЭЛЕМЕНТА В ПРОЦЕССЕ ПОВЕРХНОСТНОЙ ОБРАБОТКИ ДЕТАЛЕЙ МАШИН

Хейфец М. Л., Грецкий Н. Л., Зевелева Е. З., Садюкович А. А.

Полоцкий государственный университет, Новополоцк, Беларусь

Введение

Образование поверхностей деталей машин пластическим деформированием – одно из наиболее простых и эффективных направлений улучшения качества, стойкости и прочности поверхностного слоя.

В процессе поверхностной пластической обработки деформирующий элемент, обладающий множеством степеней свободы, получает стохастические импульсы от столкновений с микровыступами обрабатываемой поверхности, в результате которых элемент помимо движения подачи приобретает вращение.

Кинематика и динамика деформирующего элемента

Рассмотрим движения вращения, представив, что в деформирующем элементе жестко закреплена точка O , лежащая на его оси симметрии, но не совпадающая с центром масс S (рис. 1). Так как деформирующий элемент находится в потенциальном поле силы тяжести \vec{G} , силы прижима \vec{P} , то он может рассматриваться как симметричный неуровновешенный волчок [1].

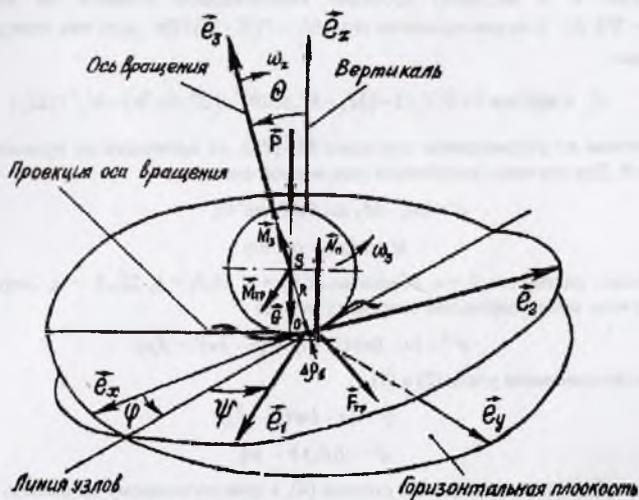


Рис. 1. Система координат и расчетная схема кинематики и динамики деформирующего элемента

Если ввести координаты таким образом, чтобы среди них были углы вращения вокруг вертикальной оси и вокруг оси деформирующего элемента, то эти циклические координаты, задачу с тремя степенями свободы сведут к задаче с одной степенью свободы [2].

Принимаем следующие обозначения (рисунок): $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ – орты неподвижной системы координат в точке O ; $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ – орты связанной с элементом подвижной системы координат, направленные по осям инерции тела в точке O ; I_1, I_2, I_3 – моменты инерции элемента в точке O ; \vec{e}_N – орт оси $\vec{e}_x \times \vec{e}_1$, называемой линией узлов.

Чтобы перевести неподвижный репер $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ в подвижный $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$, необходимо выполнить три поворота: на угол прецессии φ вокруг оси \vec{e}_z , при этом \vec{e}_z остается на месте, а \vec{e}_x переходит в \vec{e}_N ; на угол нутации θ вокруг оси \vec{e}_N , при этом \vec{e}_z переходит в \vec{e}_1 , а \vec{e}_N остается на месте; на угол собственного вращения ψ вокруг оси \vec{e}_1 , при этом \vec{e}_N переходит в \vec{e}_2 , а \vec{e}_1 остается на месте. Углы φ, ψ, θ , изменяющиеся в пределах $0 < \varphi < 2\pi, 0 < \psi < 2\pi, 0 < \theta < \pi$, называются углами Эйлера [1].

Потенциальная энергия деформирующего элемента

$$\Psi = mgz_0 = mgR \cos \theta,$$

где g – ускорение потенциального поля, z_0 – высота центра тяжести над точкой O , R – расстояние от центра тяжести до точки касания с поверхностью. Кинетическая энергия задается формулой

$$\Xi = (I_1 \omega_1^2 + I_2 \omega_2^2 + I_3 \omega_3^2) / 2 = (\theta'^2 + \varphi'^2 \sin^2 \theta) \cdot I_1 / 2 + (\psi' + \varphi' \cos \theta)^2 \cdot I_3 / 2,$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ – скорости вращения относительно орт $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$.

Выразим φ' и ω' через проекции кинетического момента на вертикаль $M_z = \partial(\Xi - \Psi) / \partial \varphi'$ и на ось вращения тела $M_3 = \partial(\Xi - \Psi) / \partial \psi'$ получим полную энергию системы:

$$E_H = mgR \cos \theta + \theta'^2 I_1 / 2 + (M_z - M_3 \cos \theta)^2 / (2I_1 \sin^2 \theta) + M_3^2 / (2I_3). \quad (1)$$

Исключим из рассмотрения слагаемое $M_3^2 / (2I_3)$, не влияющее на уравнение при изменении θ . Для изучения полученной одномерной системы

$$\varphi' = (M_z - M_3 \cos \theta) / (I_1 \sin^2 \theta), \quad (2)$$

$$\psi' = M_3 / I_3 - \cos \theta \cdot \varphi \quad (3)$$

удобно сделать замену $\cos \theta = u$, обозначая $M_z / I_1 = a, M_3 / I_1 = b, 2E_H / I_1 = \alpha, 2mgRI_1 = \beta$, чтобы получить закон сохранения энергии (1) в виде

$$u'^2 = (\alpha - \beta u)(1 - u)^2 - (a - bu)^2 = f(u), \quad (4)$$

а зависимости изменения углов (2) и (3) –

$$\varphi' = (a - bu) / (1 - u^2),$$

$$\psi' = (I_1 / I_3) b - u \varphi'.$$

Так как $f(u)$ – полином третьей степени (4), а действительному движению отвечают только такие постоянные a, b, φ, β при которых $u'^2 \geq 0$, то $f(u)$ имеет два вещественных корня u_1, u_2 на отрезке $-1 \leq u \leq 1$ и один при $u > 1$. В результате этого наклон оси деформирующего элемента θ меняется периодически между двумя предельными значе-

ниями θ_1 и θ_2 , а движение оси вращения элемента имеет качественно различный характер в случаях: $u' > u_2$, $u_1 < u' < u_2$, $u' = u_2$ и $u' = u_1$ где $u' = alb = M_2/M_3$.

В первом случае $u_2 < u'$, то есть $\varphi' > 0$ при всех u в интервале $u_1 \leq u \leq u_2$. Направление оси колеблется между θ_1 и θ_2 . Иначе говоря, ось перемещается, совершает прецессию в одну и ту же сторону положительного направления угла φ и чертит кривую типа синусоиды. Во втором случае $u_1 < u' < u_2$, $\varphi' > 0$ при $u = u_1$ и $\varphi' < 0$ при $u = u_2$, следовательно, движение имеет петлеобразный характер. В третьем случае $\varphi' = 0$ при $u_2 = u'$, и движение оси чертит кривую с острями. Подобное движение при $u_1 = u'$ будет иметь место, если в начальный момент деформирующий элемент крутится относительно своей оси симметрии в фиксированном положении $\varphi = \varphi_0$. Причем $\varphi_0' = 0$, $\theta = \theta_0 = \theta_1$, $\theta_0' = 0$, а при остальных значениях $\theta < \theta_0$ скорости φ' и θ' не могут одновременно равняться нулю.

Исследуем устойчивость вращения деформирующего элемента. Для этого рассмотрим случай, при котором ось вращения вертикальна $\theta = 0$, а угловая скорость постоянна, тогда проекция кинетического момента $M_2 = M_3 = I_3\omega_3$.

Разложим эффективную потенциальную энергию системы

$$E_{эф} = mgR \cdot \cos \theta + (M_2 - M_3 \cdot \cos \theta)^2 / (2I_1 \cdot \sin \theta)$$

в ряд Макларена по степеням θ :

$$E_{эф} = (I_3^2 \omega_3^2 / (8I_1) - mgR/2) \cdot \theta^2 + \dots = A \theta^2 + \dots$$

Если $A > 0$, то положение равновесия $\theta = 0$ одномерной системы устойчиво, а если $A < 0$, то неустойчиво [2]. Следовательно, условие устойчивости имеет вид:

$$\omega_3 > 2 \cdot \sqrt{mgRI_1 / I_3}. \quad (5)$$

При условии (5) ось вращения устойчива относительно таких возмущений, которые меняют значения не только θ , но и M_2 , M_3 .

Согласно условию устойчивости (5), скорость вращения должна быть достаточно велика, что встречается крайне редко в технологических задачах. Кроме того, процессы трения и тепловые процессы, ведущие к росту коэффициентов трения скольжения и качения [3, 4], стремятся снизить скорость вращения деформирующего элемента.

Движение деформирующего элемента по шероховатой поверхности

Исследуем влияние силы трения \vec{F}_{OD} (рис.1) на движения деформирующего элемента, так как одним из эффектов действия \vec{F}_{OD} является приближение оси вращения элемента к вертикали [5]. Для этого рассмотрим деформирующий элемент, вращающийся вокруг своей оси без начальной скорости центра масс S , расположенный на поверхности так, что его ось вращения составляет с вертикалью угол θ .

Кинематический момент $\vec{M}_3 = I_3 \vec{\omega}_3$ элемента относительно S в начальный момент направлен вдоль оси вращения. Деформирующий элемент касается опорной площадки в точке D , а сила трения \vec{F}_{OD} направлена в сторону, противоположную скорости точки D . Момент \vec{M}_{OD} силы трения относительно центра масс направлен перпендикулярно плоскости, проходящей через S и \vec{F}_{OD} .

$$\vec{M}_{OD} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2,$$

где M_1 и M_2 – составляющие \vec{M}_{OD} в перпендикулярном и параллельном M_3 направлениях, соответственно.

По теореме об изменении кинетического момента [1, 5] скорость конца вектора \vec{M}_3 равна \vec{M}_{OD} . Следовательно, \vec{M}_3 , уменьшаясь по величине вследствие наличия составляющей \vec{M}_2 , стремится занять вертикальное положение в результате присутствия \vec{M}_{OD} . В результате этого \vec{M}_3 , а вместе с ним и ось вращения деформирующего элемента, под влиянием трения стремится к вертикали.

Перейдем к изучению движения деформирующего элемента при наличии трения по протяженной плоской шероховатой поверхности. Рассмотрим две системы координат $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ (рис. 1): неподвижную – с началом O , и поступательно движущуюся – с началом в центре масс S элемента, и осями, параллельными соответствующим осям неподвижной системы.

Реакцию поверхности представим в виде суммы:

$$\vec{R}_1 = \vec{N}_1 + \vec{F}_{OD}, \quad (6)$$

где N_n – нормальная составляющая \vec{R} . Если $\vec{\omega}$ – угловая скорость элемента, а \vec{v}_s – скорость его центра масс S , то \vec{v}_D – скорость точки D , которой элемент касается поверхности, вычисляется по формуле:

$$\vec{v}_D = \vec{v}_s + \vec{\omega} \cdot \vec{SD}. \quad (7)$$

Силу трения скольжения представим в виде

$$\vec{F}_{OD} = -k_{OD} N_1 \vec{e}_D$$

где k_{OD} – коэффициент трения, \vec{e}_D – единичный вектор, направленный вдоль скорости точки D .

Теорема о движении центра инерции [1, 5] дает уравнение:

$$m d\vec{v}_D / d\tau = m\vec{g} + \vec{R}. \quad (8)$$

Из теоремы об изменении по времени τ кинетического момента $\vec{M}_3 = I\vec{\omega}$ для движения относительно центра масс S получаем

$$I d\vec{\omega} / d\tau = \vec{SD} \times \vec{R}_1. \quad (9)$$

Уравнения (8) и (9) в скалярной форме запишутся в виде:

$$m d^2 x_s / d\tau^2 = F_{TP_x}, \quad m d^2 y_s / d\tau^2 = F_{TP_y}, \quad m d^2 z_s / d\tau^2 = -mg + N_n = 0; \quad (10)$$

$$I d\omega_x / d\tau = R F_{TP_x}, \quad I d\omega_y / d\tau = -R F_{TP_y}, \quad d\omega_z / d\tau = 0, \quad (11)$$

где x_s, y_s, z_s – координаты центра масс S в неподвижной системе с началом в точке O , F_{ODx}, F_{ODy} – проекции \vec{F}_{OD} на \vec{e}_x, \vec{e}_y , соответственно, $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ – проекции $\vec{\omega}$ на $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$.

Проекция сил на вертикаль показывают (10), что нормальная реакция поверхности вне зависимости от того, скользит деформирующий элемент по поверхности или нет, равна силам потенциального поля, таким как прижим и вес. Проекция угловой скорости на вертикаль (11) при этом остается постоянной.

Если в начальный момент имеет место скольжение, то $\vec{v}_D \neq 0$. Проинтегрируем по времени τ формулу (7) и, воспользовавшись равенствами (6), (8), (9) получим

$$d\vec{v}_D / d\tau = (R^2 / I + 1/m) \cdot \vec{F}_{TP}.$$

Преобразуем, подставив $\vec{v}_D = v_D \cdot \vec{e}_D$, $\vec{F}_{TP} = -k_{TP} mg \vec{e}_D$

$$\vec{e}_D \cdot d\vec{v}_D / d\tau + v_D \cdot d\vec{e}_D / d\tau = -(1 + mR^2 / I) \cdot k_{TP} g \vec{e}_D. \quad (12)$$

Так как \vec{e}_D — единичный вектор, то производная перпендикулярна ему и равна нулю $d\vec{e}_D / d\tau = 0$. Следовательно, сила трения $\vec{F}_{\text{обD}}$ неизменна по величине и направлению.

Величина скорости точки D , в соответствии с (12), изменяется во времени

$$v_D(\tau) = v_D(0) - (1 + mR^2 / I) \cdot k_{TP} g \tau \quad (13)$$

Обозначим через δ_D постоянный угол, который составляет \vec{v}_D с \vec{e}_x , тогда из (10) и (11) получаем

$$x_s(\tau) = x_s(0) + x'_s(0)\tau - k_{\text{обD}} g \cos \delta_D \tau^2 / 2, \quad y_s(\tau) = y_s(0) + y'_s(0)\tau - k_{\text{обD}} g \sin \delta_D \tau^2 / 2, \quad (14)$$

$$\omega_x(\tau) = \omega_x(0) - R k_{\text{обD}} mg \sin \delta_D \tau / I, \quad \omega_y(\tau) = \omega_y(0) + R k_{\text{обD}} mg \cos \delta_D \tau / I. \quad (15)$$

Следовательно, если в начальный момент скорость центра масс S и точки D не параллельны, то на стадии движения со скольжением при зафиксированном прямолинейном движении центра S , точка касания D деформирующего элемента с поверхностью движется по параболе (14), и вращается относительно центра S со скоростями (15). Такое движение, согласно (13), происходит до момента

$$\tau = v_D(0) / (k_{TP} g (1 + mR^2 / I)),$$

пока скольжение не прекратится и не начнется стадия качения деформирующего элемента.

Качение и вращение деформирующего элемента на шероховатой поверхности происходит по траектории согласно полученным зависимостям (2), (3) в соответствии с изменениями коэффициента трения $k_{\text{обD}}$ между деформирующим элементом и обрабатываемой поверхностью.

Устойчивость движений деформирующего элемента

Исследуем устойчивость качения деформирующего элемента, закрепленного в центре масс S , находящегося по действию внешнего потенциального поля и реакций закрепления вокруг главных осей инерции. Главный момент внешних сил относительно S в этом случае равен нулю.

Рассмотрим оси координат $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, скрепленные с движущимся элементом (рис. 1) и являющиеся главными осями инерции для точки S . Динамические уравнения Эйлера для деформирующего элемента имеют вид [6]

$$I_x \omega'_x + (I_z - I_y) \omega_x \omega_y = 0, \quad I_y \omega'_y + (I_x - I_z) \omega_x \omega_z = 0, \quad I_z \omega'_z + (I_y - I_x) \omega_y \omega_x = 0. \quad (16)$$

Пусть $\omega_y = \omega_z = 0$, $\omega_x = \omega_0 = \text{const}$ являются решениями уравнений (16). Если величины ω_y и ω_z остаются малыми с течением времени τ , при сообщении элементу значительных вращений в виде малых начальных угловых скоростей ω_{0y} и ω_{0z} , то вращение вокруг главной оси инерции считают устойчивым. Если величины ω_y и ω_z неограниченно возрастают, то вращение — неустойчиво [7].

Предположив, что вращение вокруг \vec{e}_x устойчиво, отбросив малые второго порядка, после дифференцирования (16) получаем

$$\omega''_y + \alpha \omega_y = 0, \quad \omega''_z + \alpha \omega_z = 0, \quad (17)$$

где

$$\alpha = \omega_0^2(I_x - I_z) \cdot (I_x - I_y) / I_y I_z.$$

При $\alpha < 0$ решения уравнений (17) запишутся

$$\omega_y = C_1 \cdot \exp\left(\sqrt{|\alpha|} \tau\right) + C_2 \cdot \exp\left(-\sqrt{|\alpha|} \tau\right),$$

$$\omega_z = C_3 \cdot \exp\left(\sqrt{|\alpha|} \tau\right) + C_4 \cdot \exp\left(-\sqrt{|\alpha|} \tau\right),$$

а при $\alpha > 0$ решения имеют вид

$$\omega_y = C_5 \cdot \cos\left(\sqrt{\alpha} \cdot \tau\right) + C_6 \cdot \sin\left(\sqrt{\alpha} \cdot \tau\right),$$

$$\omega_z = C_7 \cdot \cos\left(\sqrt{\alpha} \cdot \tau\right) + C_8 \cdot \sin\left(\sqrt{\alpha} \cdot \tau\right),$$

где $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6, C_7, C_8$ – постоянные интегрирования.

Это значит, что при $\alpha > 0$ вращение вокруг главной оси инерции \vec{e}_x устойчиво. Условие $\alpha > 0$ может выполняться в двух случаях: когда $I_x > I_z$ и $I_x > I_y$, или когда $I_x < I_z$ и $I_x < I_y$. То есть вращение вокруг главной оси инерции \vec{e}_x является устойчивым, если момент инерции относительно этой оси \vec{e}_x наибольший или наименьший. При $\alpha < 0$ вращение неустойчиво: когда $I_y < I_x < I_z$, или когда $I_y > I_x > I_z$, то есть при среднем моменте инерции относительно главной оси I_x по сравнению с I_y и I_z .

Следовательно, устойчивы движения таких деформирующих элементов, момент инерции которых вокруг оси вращения наименьший или наибольший. Предпочтительными, при прочих равных условиях, являются элементы с наибольшим моментом инерции так как это даст больший собственный кинетический момент, и ось вращения оказывается более устойчивой к действию сил сопротивления [6].

Заключение

Изучение движений деформирующего элемента показало, что их вид и стабильность при возмущениях, вызванных взаимодействием с обрабатываемой поверхностью, зависят главным образом от формы, размеров и условий прижима элемента. Результаты исследований кинематики и динамики работы инструментов-накатников позволяют рассмотреть характер нагружения шероховатой поверхности при формировании параметров поверхностного слоя в процессе пластической деформации.

Список литературы

1. Добронравов В.В. Основы аналитической механики. Москва: Высшая школа, 1976. 264 с.
2. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. Москва: Наука, 1989. 472 с.
3. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.1. Москва: Наука, 1970. 492 с.
4. Седов Л.И. Механика сплошной среды. Т.2. Москва: Наука, 1970. 568 с.
5. Максев А.П. Теоретическая механика. Москва: Наука, 1990. 416 с.
6. Никитин Н.Н. Курс теоретической механики. Москва: Высшая школа, 1990. 607 с.
7. Пановко Я.Г., Губанова И.И. Устойчивость и колебания упругих систем: Современные концепции, парадоксы и ошибки. Москва: Наука, 1987. 352 с.