

НЕКОТОРЫЕ СИНГУЛЯРНЫЕ РЕШЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ

Проина Ю. Г.

*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург,
dearJuly@gmail.com*

1. Введение. Места приложения сосредоточенных сил и моментов в теории упругости принято рассматривать как изолированные особые точки. Основное частное решение, выражающее смещения, вызываемые сосредоточенной силой в бесконечном теле, было дано Кельвином. Позднее Буссинеск, Черутти и др. нашли как это решение, так и ряд других решений, которые могут быть синтетически получены из первого. Из формул для сосредоточенной силы можно вывести новые частные решения, обладающие особыми точками: для двойной силы (диполя) без момента, для двойной силы с моментом, для центра расширения (комбинация трех взаимно перпендикулярных диполей без момента) и для центров вращения (комбинация двойных сил с моментами) [3].

В случае системы двух измерений решение подобных задач существенно упрощается. В монографиях [3, 6] представлен ряд решений о силовых особенностях в упругой плоскости. Силы и моменты в упругой полуплоскости рассмотрены в работах Фламана, Буссинеска, Мичела, Мелана, Гоша, А. Стивенсона и др. Использование комплексных переменных и комплексного анализа [2] позволяет придать этим решениям более удобную форму.

Как известно [4], в плоской задаче теории упругости с помощью двух аналитических функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ вычисляются компоненты тензора напряжений

$$\sigma_{xx}(z) + \sigma_{yy}(z) = 4 \operatorname{Re} \Phi(z), \quad (1)$$

$$\sigma_{yy}(z) - \sigma_{xx}(z) + 2i\sigma_{xy}(z) = 2 \left[\bar{z} \frac{d\Phi(z)}{dz} + \Psi(z) \right], \quad (2)$$

а через их первообразные $\varphi(z) = \int \Phi(z) dz$, $\psi(z) = \int \Psi(z) dz$ определяются компоненты вектора перемещения

$$2\mu[u(z) + iv(z)] = \kappa\varphi(z) - z \frac{d\bar{\varphi}(\bar{z})}{d\bar{z}} - \bar{\psi}(\bar{z}).$$

Здесь $z = x + iy$; $\bar{z} = x - iy$; $\kappa = 3 - 4\nu$ – в случае плоской деформации и $\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ – при обобщенном плоском напряженном состоянии; μ – модуль сдвига; ν – коэффициент Пуассона. Черта сверху означает комплексное сопряжение.

В связи со сказанным выше изложение материала в настоящей работе представлено в терминах функций комплексного переменного.

С помощью комплексных потенциалов Колосова решения задач о сосредоточенных силах и моментах в бесконечной плоскости и в полуплоскости приведены, например, в [1, 4, 5, 7].

2. О предельных переходах в задачах о моменте и центре сжатия. В монографии [4] функции Колосова-Мухелишвили $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ для сосредоточенной силы $P = Pe^{i\alpha} = X + iY$ выведены из решения задачи о бесконечной плоскости с круговым отверстием, по контуру которого приложена однонаправленная распределенная нагрузка

ка с соответствующим главным вектором сил. Для того чтобы получить выражения для силы, приложенной в точке, в указанном решении необходимо перейти к пределу при стремлении радиуса R отверстия к нулю так, чтобы главный вектор сил оставался постоянным. Функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ для сосредоточенного момента M в точке $z_0 = 0$ найдены в [4] путем осуществления аналогичного предельного перехода в задаче о плоскости с круговым отверстием $|z| = R$, равномерно нагруженным касательными усилиями T (рис. 1 а), так, что $M = -T 2\pi R^2 = \text{const}$:

$$\Phi(z) = 0, \Psi(z) = -\frac{iM}{2\pi z^2}. \quad (3)$$

Эти же функции для сосредоточенного момента можно построить суммированием решений для двух взаимно перпендикулярных двойных сил с моментами (рис. 1 б) при $R \rightarrow 0$ так, что $M = -4PR = \text{const}$ (см. [3, 6]).

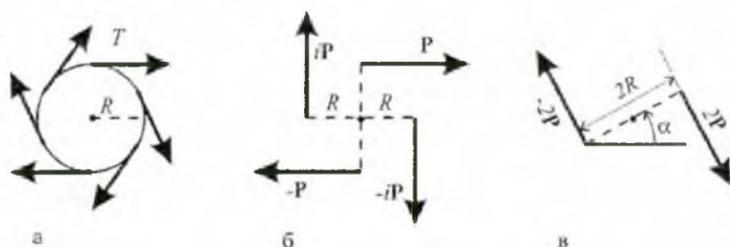


Рис. 1. Сосредоточенный момент.

Мухелишвили отметил [4], что вид решений для сосредоточенных воздействий зависит от способа осуществления предельного перехода. Действительно, решение для сосредоточенного момента, полученное из рассмотрения одной пары сил, создающей момент, не согласуется с (3). В чем же кроется причина отличий в этих решениях?

Рассмотрим одну пару двойных сил с моментом, линия приложения которых наклонена под углом α к оси абсцисс (рис. 1 в). Устремив $R \rightarrow 0$ так, чтобы $M = -4PR$ оставалось постоянным, находим

$$\Phi(z) = -\frac{iM e^{2i\alpha}}{2\pi \kappa + 1 z^2}, \Psi(z) = -\frac{iM}{2\pi z^2}. \quad (4)$$

Как видно, последние выражения не совпадают с (3) и, кроме того, зависят от угла α . Однако, проинтегрировав эти формулы по α от 0 до π и разделив полученный результат на длину промежутка интегрирования π (выполненная операция означает осреднение по углу α), вновь приходим к соотношениям (3). Таким образом, осреднение по углу аннулирует разницу в представленных решениях. Для объяснения этой ситуации обратимся к механической сути проблемы. Пара сил с моментом, осредненная по углу, создает в плоскости полярно-симметричное напряженно-деформированное состояние, при котором на окружности γ радиуса R действует касательная равномерно распределенная нагрузка. Очевидно, что под действием нагрузки внутренность S^0 этой окружности поворачивается как абсолютно твердое тело, не деформируясь. Все усилия при этом затрачиваются только на деформацию внешней части плоскости. Аналогичное полярно-симметричное деформированное состояние возникает и при наложении двух взаимно перпендикулярных двойных сил с моментами (при $R \rightarrow 0$). Предполо-

жим теперь, что на окружности γ в плоскости действует только одна пара сосредоточенных сил с моментом. В таком случае круг S^0 уже не может двигаться как абсолютное жесткое целое, и часть приложенной нагрузки расходуется на его деформацию. Несмотря на то, что размеры области S^0 затем устремляются к нулю, предельный переход осуществляется так, чтобы $PR = \text{const}$. Поэтому, в отличие от первой ситуации, напряженно-деформированное состояние в этом случае: 1) создается только частью приложенной нагрузки и 2) не является полярно-симметричным.

Плоский центр расширения-сжатия Q^* , по аналогии с трехмерным случаем, определен как совокупность двух взаимно перпендикулярных диполей без моментов (рис. 2а). Здесь $Q^* = 4PR$. Функции Колосова для центра сжатия в точке $z_0 = 0$ имеют вид [5]

$$\Phi(z) = 0, \quad \Psi(z) = -\frac{Q^* \kappa - 1}{2\pi \kappa + 1} \frac{1}{z^2}. \quad (5)$$

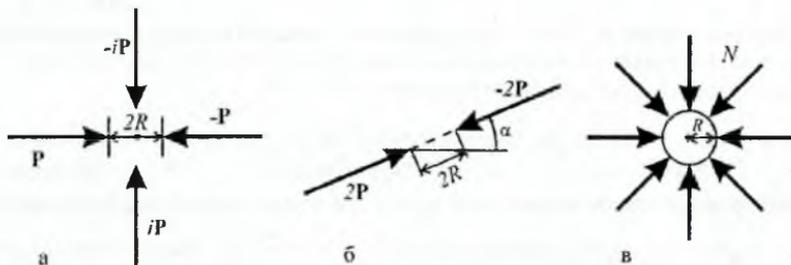


Рис. 2. Центр сжатия.

Данное решение можно также получить, рассматривая один диполь, действующий на прямой, расположенной под углом α к оси абсцисс (рис. 2 б). Для него

$$\Phi(z) = \frac{Q^* e^{2ia}}{2\pi \kappa + 1} \frac{1}{z^2}, \quad \Psi(z) = -\frac{Q^* \kappa - 1}{2\pi \kappa + 1} \frac{1}{z^2}. \quad (6)$$

Произведя операцию осреднения по углу α , вновь приходим к формулам (5). Несмотря на аналогию с задачей о моменте (с той лишь только разницей, что силы iP в случае момента заменены силами P в случае центра сжатия), функции Колосова (5) оказались зависящими от констант материала, в отличие от функций (3). Почему появление множителя i в формулах для двойных сил привело к столь кардинальным различиям? Ответ на этот вопрос станет очевидным несколько позднее.

Попробуем, по аналогии с задачей о сосредоточенном моменте, вывести соотношения (5), рассматривая бесконечную плоскость с круговым отверстием, контур которого загружен нормальными равномерно распределенными усилиями N (рис. 2 в). Перейдя в известном решении [4] этой задачи к пределу при $R \rightarrow 0$ так, чтобы $N2\pi R^2 = Q = \text{const}$, получаем

$$\Phi(z) = 0, \quad \Psi(z) = -\frac{Q}{2\pi} \frac{1}{z^2}. \quad (7)$$

Последние выражения отличаются от представленных выше уравнений (5) отсутствием множителя $(\kappa - 1)/(\kappa + 1)$, но согласуются с формулами (3) для момента. Как мы отметили ранее, решения задачи о сосредоточенном моменте, найденные путем различ-

ных предельных переходов из решений задачи о плоскости с круговым отверстием и задачи о плоскости, нагруженной двумя двойными силами, оказались одинаковыми. Почему же, несмотря на кажущуюся с математической точки зрения полную аналогию с задачей о моменте (здесь касательные к окружности силы iT заменены нормальными N), решения, построенные двумя способами, различны?

Для выяснения поставленных вопросов вновь обратимся к механическому смыслу проблемы. Решение (5), полученное от действия двойных сил, соответствует задаче о сплошной плоскости, внутри которой на окружности γ распределены нормальные усилия N^* . Функции Колосова для этого случая выводятся из решения Мусхелишвили для сосредоточенной силы путем интегрирования по окружности. Внутри окружности при этом реализуется однородное напряженное состояние:

$$\sigma_{rr} = \sigma_{\theta\theta} = -\frac{2N^*}{1+\kappa} = \text{const}, \quad \sigma_{r\theta} = 0,$$

независящее от радиуса окружности γ . Поэтому часть усилий $p = \frac{2N^*}{1+\kappa}$ расходуется

на деформацию круга S^0 (даже если его радиус стремится к нулю), и лишь оставшаяся их часть затрачивается на деформацию бесконечной плоскости вне контура γ . Во внешней части окружности ($r \geq R$) имеем

$$\sigma_{rr} = -\sigma_{\theta\theta} = N^* \frac{\kappa-1}{\kappa+1} \left(\frac{R}{r}\right)^2, \quad \sigma_{r\theta} = 0.$$

Такое напряженное состояние соответствует плоскости с отверстием, по контуру которого приложена нормальная нагрузка $N^* - p = N^* \frac{\kappa-1}{\kappa+1}$. Таким образом, полагая

$N = N^* \frac{\kappa-1}{\kappa+1}$ или $Q = Q^* \frac{\kappa-1}{\kappa+1}$, приходим к согласованию формул (5) и (7). В задаче

же о сосредоточенном моменте (осредненном по α), как мы заметили ранее, внутренность контура γ не деформируется. Поэтому все усилия расходуются только на деформацию бесконечной плоскости, как и в том случае, когда внутри контура находится отверстие.

Из этих рассуждений ясно, что при плоской деформации несжимаемого материала невозможно существование центра сжатия, определенного как совокупность двойных сил, поскольку область S^0 не может деформироваться. Это очевидно и с математической точки зрения: при $\nu = 0.5$ получаем $\kappa = 1$ и $\Phi(z) = 0$, $\Psi(z) = 0$.

3. Силовые особенности в полуплоскости. Для оценки влияния границы тела (свободной или закрепленной) на напряженно-деформированное состояние в окрестности силовых факторов обычно рассматривают задачу о полуплоскости с данными особенностями. Формулы для силовых особенностей в полуплоскости со свободной кромкой несложно вывести из соответствующих выражений для этих особенностей в бесконечной плоскости. А именно, они определяются суммой решений двух вспомогательных задач. Первая из которых – о бесконечной плоскости, составленной из двух полуплоскостей с зеркально-симметричными воздействиями (т.е. нагруженной в точках z_0 и \bar{z}_0 симметрично относительно оси абсцисс). Вторая – о полуплоскости, на границе которой приложены напряжения, равные по величине и противоположные по знаку тем, которые возникают на границе полуплоскости в первой задаче. Использование инте-

гралов типа Коши позволяет легко решить рассматриваемые задачи. Таким способом найдены решения задач о сосредоточенной силе, моменте и центре расширения-сжатия в работах [1, 5]. Там же эти решения обобщены на случаи периодических воздействий в полуплоскости с закрепленной или нагруженной кромкой. Представленный математический аппарат моделирует наложение отраженного от границы фронта распространения деформации (при заданных граничных условиях) на исходное напряженно-деформированное состояние в теле (без учета границ).

В качестве примера рассмотрим задачу о диполе $\mathbf{D} = D e^{i\alpha}$ без момента в точке z_0 полуплоскости $S^- (y \leq 0)$.

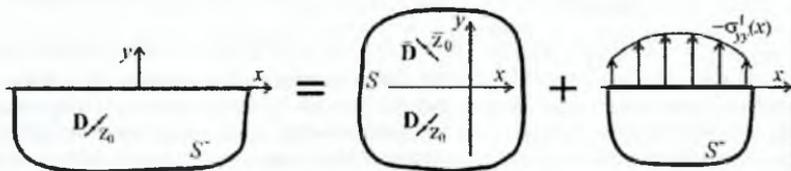


Рис. 3. Диполь в полуплоскости

Функции Колосова для первой вспомогательной задачи определяются суммой функций $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ для диполя $\mathbf{D} = D e^{i\alpha}$ в точке z_0 и диполя $\bar{\mathbf{D}} = D e^{-i\alpha}$ в точке \bar{z}_0 (это преобразованные к новой системе координат формулы (6), в которых $Q^* = D$):

$$\Phi^1(z) = \frac{D}{2\pi(\kappa+1)} \left[\frac{e^{2i\alpha}}{(z-z_0)^2} + \frac{e^{-2i\alpha}}{(z-\bar{z}_0)^2} \right],$$

$$\Psi^1(z) = \frac{-D}{2\pi} \frac{1}{\kappa+1} \left[\frac{\kappa-1}{(z-z_0)^2} + \frac{\kappa-1}{(z-\bar{z}_0)^2} - \frac{2\bar{z}_0 e^{2i\alpha}}{(z-z_0)^3} - \frac{2z_0 e^{-2i\alpha}}{(z-\bar{z}_0)^3} \right].$$

Вычисленные по формулам (1), (2) напряжения на оси $Ox (y=0)$ равны

$$\sigma_{yy}^1(x) = 0, \quad \sigma_{xx}^1(x) = \frac{-D}{2\pi} \frac{1}{\kappa+1} \left[\frac{\kappa-1}{(x-z_0)^2} + \frac{\kappa-1}{(x-\bar{z}_0)^2} + \frac{2(z_0 - \bar{z}_0)e^{2i\alpha}}{(x-z_0)^3} - \frac{2(z_0 - \bar{z}_0)e^{-2i\alpha}}{(x-\bar{z}_0)^3} \right].$$

Ввиду того, что выражение в квадратных скобках представляет собой сумму комплексно сопряженных слагаемых, оно является вещественным. Для того чтобы граница $y=0$ оказалась свободной от нагрузки, к ней необходимо приложить напряжения

$\sigma_{yy}^2(x) = -\sigma_{yy}^1(x)$. Потенциалы Колосова для полуплоскости с такой нагрузкой (вторая вспомогательная задача) имеют вид [4]

$$\Phi^2(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma_{yy}^1}{x-z} dx, \quad \Psi^2(z) = -z \frac{d\Phi^2(z)}{dz}.$$

Вычислив в последних формулах интегралы типа Коши при $z \in S^-$ и сложив функции Колосова для первой и второй вспомогательных задач, окончательно получаем

$$\Phi(z) = \frac{D}{2\pi(\kappa+1)} \left[\frac{e^{2i\alpha}}{(z-z_0)^2} + \frac{e^{-2i\alpha}}{(z-\bar{z}_0)^2} + \frac{\kappa-1}{(z-\bar{z}_0)^2} - \frac{2(z_0 - \bar{z}_0)e^{-2i\alpha}}{(z-\bar{z}_0)^3} \right]. \quad (8)$$

$$\Psi(z) = \frac{-D}{2\pi(\kappa+1)} \left[\frac{\kappa-1}{(z-z_0)^2} + \frac{\kappa-1}{(z-\bar{z}_0)^2} - \frac{2z(\kappa-1)}{(z-\bar{z}_0)^3} - \frac{2\bar{z}_0 e^{2i\alpha}}{(z-z_0)^3} - \frac{2z_0 e^{-2i\alpha}}{(z-\bar{z}_0)^3} + \frac{6z(z_0-\bar{z}_0)e^{-2i\alpha}}{(z-\bar{z}_0)^4} \right].$$

Это решение несложно обобщить на случай закрепленной или нагруженной кромки полуплоскости с помощью метода, представленного в [1].

Решения для силовых особенностей (помимо сосредоточенной силы) в полуплоскости можно вывести и иным способом: отталкиваясь от уже полученного решения для сосредоточенной силы в полуплоскости и осуществляя предельные переходы, аналогичные переходам в бесконечной плоскости. Например, сложив известные функции Колосова для силы $\mathbf{P} = Pe^{i\alpha}$, действующей в точке z_0 , и силы $-\mathbf{P} = -Pe^{i\alpha}$ в точке $z_0 + Re^{i\alpha}$ полуплоскости и перейдя затем в полученной сумме к пределу при $R \rightarrow 0$ (так, чтобы $D = 2PR = \text{const}$), вновь приходим к решению (8). Осуществив подобный предельный переход в формулах для сил в полуплоскости с закрепленной или нагруженной кромкой [1], несложно найти решения задач о диполе у закрепленной или нагруженной границы полуплоскости. Аналогичными путями можно построить решения задач о моментах [1] и центрах сжатия [5] в полуплоскости.

Наличие границы вблизи особых точек всегда повышает уровень напряжений (хотя при этом величины некоторых компонент напряжения становятся меньше). Например, для сосредоточенной силы максимальный рост напряжения происходит на границе, в точке, ближайшей к особой точке z_0 . Для силы, перпендикулярной к кромке полуплоскости, максимальное главное напряжение там на порядок превышает аналогичную величину напряжения в бесконечной плоскости (отношение этих величин зависит от значения κ). Для центра сжатия максимальное повышение напряжения – в 4 раза – происходит так же в граничной точке, ближайшей к z_0 .

Автор благодарит Юрия Михайловича Даля за внимательное прочтение работы и ряд ценных замечаний.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (гранты № 05-01-00274, 06-01-00171).

Список литературы

1. Даль Ю.М., Пронина Ю.Г. Сосредоточенные силы и моменты у границы упругой полуплоскости. Изв.РАН, МТТ. 1998. № 5. С. 78–87.
2. Колосов Г.В. Применение комплексной переменной к теории упругости. М.Л.: ОНТИ, 1935, 224 с.
3. Ляв А. Математическая теория упругости. М.–Л.: ОНТИ, 1935. 674 с.
4. Мусхелишвили Н.И. Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966, 707 с.
5. Пронина Ю.Г. Центры растяжения-сжатия в упругой полуплоскости. Вестн. С.-Петербург. гос. ун-та. Сер. 1. 2007. Вып. 2. С. 140–149.
6. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости, перев. с англ. М.: Наука. 1975. 576 с.
7. Хан Х. Теория упругости. М.: Мир, 1988, 343 с.