

## СИСТЕМА УРАВНЕНИЙ, ЗАДАЮЩИХ УПРАВЛЯЮЩИЙ ВОЛНОВОЙ ПРОЦЕСС ПРИ РЕКОНСТРУКТИВНЫХ МАРТЕНСИТНЫХ ПРЕВРАЩЕНИЯХ

Кащенко М. П., Чашина В. Г., Вихарев С. В.

Уральский государственный лесотехнический университет, Екатеринбург,  
mpk46@mail.ru

Центральную роль в волновой модели роста мартенсита при реконструктивных мартенситных превращениях играет модель управляющего волнового процесса (УВП), несущего близкую к плоской пороговую деформацию типа «растяжение-сжатие» [1]. Фактически речь идет о распространении возбужденного состояния, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда, вытянутого в  $\bar{\xi}_3$  направлении, противоположные пары граней которого в  $\bar{\xi}_1$  и  $\bar{\xi}_2$  направлениях ( $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2, \bar{\xi}_3$  попарно ортогональны) колеблются в противофазе. Для определенности считается, что в  $\bar{\xi}_1$  направлении реализуется деформация растяжения  $\varepsilon_1 > 0$ , а в  $\bar{\xi}_2$  направлении – деформация сжатия  $\varepsilon_2 < 0$ . Распространение подобного возбужденного состояния «заметает» пластинообразную область, являющуюся прообразом мартенситного кристалла. Поскольку величины пороговых деформаций  $\varepsilon_{n1}$  и  $|\varepsilon_{n2}|$  порядка предела упругости, скорость  $\bar{c}$  распространения УВП можно рассматривать как сумму векторов скоростей  $\bar{c}_1$  и  $\bar{c}_2$  упругих волн, бегущих в  $\bar{\xi}_1$  и  $\bar{\xi}_2$  направлениях. Реконструктивные мартенситные превращения протекают как превращения первого рода, имея гетерогенный характер зарождения.

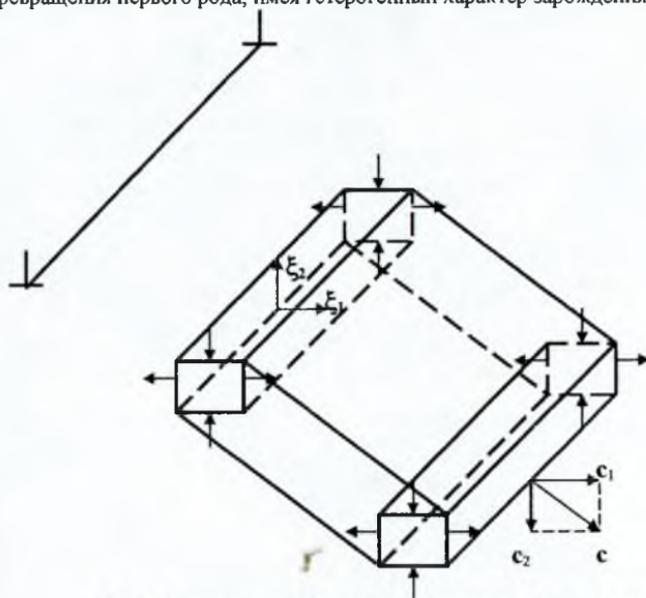


Рис. 1. Волновая схема управления ростом мартенситного кристалла

В связи с этим, направления  $\bar{\xi}_1$  совпадают с ориентацией главных осей тензора деформации упругого поля дефекта в области, благоприятной для зарождения. Сказанное отражает рис. 1. Дислокационная линия символизирует дефект, создающий упругое поле.

Несмотря на геометрическую простоту и наглядность этой физической картины, полезно сформулировать адекватную ей математическую модель, что и является основной целью настоящей работы.

Будем считать, в соответствии с анализом, выполненным в [1], что в области решетки, теряющей устойчивость под действием УВП, неравновесная электронная подсистема обеспечивает сохранения высокого уровня амплитуд колебаний и соответствующих деформаций. Тогда, оставляя «за кадром» микроскопический механизм генерации (усиления) волн, можно полагать, что в области наложения деформаций растяжения и сжатия происходит компенсация затухания управляющих волн. Возьмем за основу пару простейших волновых уравнений, бегущих в ортогональных  $\bar{\xi}_1$  и  $\bar{\xi}_2$  направлениях, которые без ограничения общности можно принять в качестве  $x$  и  $y$  направлений:

$$\begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial t} + c_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + b_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2) u_1 = 0 \\ \frac{\partial u_2}{\partial t} + c_2 \frac{\partial u_2}{\partial y} + b_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2) u_2 = 0 \end{cases} \quad (1)$$

где  $u_{1,2}$  – смещения от положений равновесия,  $c_{1,2}$  – модули скоростей продольных (квазипродольных) упругих волн, а  $b_{1,2}$  – коэффициенты, учитывающие «эффективные» затухания ( $b_{1,2}$  в общем случае могут менять знак, в частности, обращаться в нуль) волн соответственно в  $x$  и  $y$  направлениях.

Следует иметь в виду, что параметры  $b_{1,2}$  в отсутствие механизма усиления положительны и удовлетворяют требованию  $b_{1,2} \leq 0$  при выполнении условий генерации волн в области наложения управляющих волн с деформациями  $\varepsilon_1 > 0$  и  $\varepsilon_2 < 0$ . Очевидно, что простейший случай компенсации усиления и потерь соответствует  $b_{1,2} = 0$ . В реальности компенсация затухания будет лишь в области выделения энергии, поэтому взаимодействие волн отражается в системе (1) через зависимости коэффициентов  $b_{1,2}$  от деформаций  $\varepsilon_{1,2}$ . В простейшем случае эти зависимости удобно представить в виде:

$$b_i(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \chi_i [1 - \Theta(\varepsilon_1 - \varepsilon_{a1}) \Theta(\varepsilon_2 - \varepsilon_{a2})], \quad (2)$$

где  $i = 1, 2$  и деформации  $\varepsilon_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x}$ ,  $\varepsilon_2 = \frac{\partial u_2}{\partial y}$ ,

В (2) параметры  $\chi_i > 0$  задают затухания волн в отсутствии механизмов усиления, а  $\Theta(\varepsilon)$  – ступенчатая функция Хевисайда:  $\Theta(\varepsilon) = \begin{cases} 0, & \text{при } \varepsilon < 0 \\ 1, & \text{при } \varepsilon > 0 \end{cases}$ . Пренебрегая зависимостью  $b_i$  от пространственных координат, берем производные по  $x$  и по  $y$  и представляем систему (1) в виде:

$$\begin{cases} \dot{\varepsilon}_1 + c_1 \varepsilon'_1 + b_1(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \varepsilon_1 = 0 \\ \dot{\varepsilon}_2 + c_2 \varepsilon'_2 + b_2(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \varepsilon_2 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

где  $\dot{\varepsilon}_{1,2} = \frac{\partial \varepsilon_{1,2}}{\partial t}$ ,  $\varepsilon'_1 = \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial x}$ ,  $\varepsilon'_2 = \frac{\partial \varepsilon_2}{\partial y}$ .

Поскольку при рассмотрении пороговых деформаций приемлемым считается упругое описание среды, для оценок поперечных размеров  $d_{1,2}$  области возбужденного состояния (в форме параллелепипеда), уместно использовать гармоническое описание для смещений и деформаций:

$$u_1(x, t) = (u_1)_{\max} \cos(\omega_1 t - k_1 x), \quad \varepsilon_1 = (u_1)_{\max} k_1 \sin(\omega_1 t - k_1 x), \quad (4)$$

$$u_2(x, t) = (u_2)_{\max} \cos(\omega_2 t - k_2 x), \quad \varepsilon_2 = (u_2)_{\max} k_2 \sin(\omega_2 t - k_2 x), \quad (5)$$

где  $(u_{1,2})_{\max}$  – амплитуды, а  $\omega_{1,2}$  частоты колебаний, связанные с волновыми числами  $k_{1,2}$  стандартным соотношением  $\omega_{1,2} = c_{1,2} k_{1,2}$ .

Чтобы оценить значения  $d_{1,2}$ , естественно начать с рассмотрения области возбужденного состояния с поперечными размерами равными  $\frac{1}{2} \lambda_{1,2}$ , где  $\lambda_{1,2}$  – длины соответствующих волн, т.е. фактически выделяя прямоугольную ячейку. Из (4),(5) очевидно, что в начальный момент времени ( $t = 0$ ) деформации достигают максимальных значений  $(\varepsilon_{1,2})_{\max} = (u_{1,2})_{\max} k_{1,2}$  в центре ячейки, выбранном за начало отсчета  $x$  и  $y$  координат. Отметим, что  $\varepsilon_1 = 0$  при  $x = \pm \frac{\lambda_1}{2}$  и  $\varepsilon_2 = 0$  при  $y = \pm \frac{\lambda_2}{2}$ . Следовательно, величины  $d_{1,2}$  удовлетворяют неравенству  $d_{1,2} < \frac{\lambda_{1,2}}{2}$ .

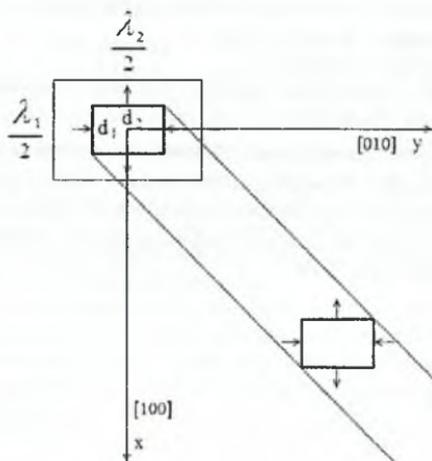


Рис. 2. Формирование пластинообразной области, теряющей устойчивость при распространении пороговой деформации.

Представляется разумным выбор значений  $d_{1,2}$  близкими к  $\lambda_{1,2}/4$ , при этом, как легко убедиться, на границах такой эффективной ячейки, отстоящих от центра на  $\lambda_{1,2}/8$ , уровень деформации снизится по сравнению с центральной точкой приблизительно на 11%. При описании деформаций начального возбужденного состояния в области зарождения естественно считать, что пороговая деформация реализуется уже на

границах эффективной ячейки, внутри которой выполняются неравенства:  $\varepsilon_1 > \varepsilon_{1n}$ ,  $|\varepsilon_2| > |\varepsilon_{2n}|$ . Таким образом, начальные условия для деформации принимают вид:

$$\begin{cases} (\varepsilon_1)_{\max} \cos(k_1 x) \geq \varepsilon_{1n} & \text{при } -\frac{\lambda_1}{4} \leq x \leq \frac{\lambda_1}{4} \\ |(\varepsilon_2)_{\max}| \cos(k_2 y) \geq \varepsilon_{2n} & \text{при } -\frac{\lambda_2}{4} \leq y \leq \frac{\lambda_2}{4} \end{cases} \quad (6)$$

Легко убедиться, что в области наложения деформаций сжатия и растяжения, для которой следует считать  $b_{1,2}$  равными нулю, из (3) с учетом начальных условий (6) следует:

$$\begin{cases} \varepsilon_1(\zeta_1, \zeta_2) = (\varepsilon_1)_{\max} \cos(k_1 \zeta_1) \varphi(\zeta_1, \zeta_2) \\ \varepsilon_2(\zeta_1, \zeta_2) = (\varepsilon_2)_{\max} \cos(k_2 \zeta_2) \varphi(\zeta_1, \zeta_2) \end{cases}, \quad (7)$$

где  $\zeta_1 = x - c_1 t$ ,  $\zeta_2 = y - c_2 t$ , а функция

$$\varphi(\zeta_1, \zeta_2) = \left[ \Theta\left(\zeta_1 - \frac{d_1}{2}\right) - \Theta\left(\zeta_1 + \frac{d_1}{2}\right) \right] \left[ \Theta\left(\zeta_2 - \frac{d_2}{2}\right) - \Theta\left(\zeta_2 + \frac{d_2}{2}\right) \right] \quad (8)$$

описывает движение возбужденной области со скоростью  $\vec{c} = \vec{c}_1 + \vec{c}_2$ , в соответствии с картиной, представленной на рис. 1 и рис. 2.

Сделаем несколько замечаний.

1. Максимального упрощения можно достичь, заменив в (7) множители  $(\varepsilon_{1,2})_{\max} \cos(k_{1,2} \zeta_{1,2})$  на константы  $\varepsilon_{10}$  и  $\varepsilon_{20}$  такие, что  $\varepsilon_{10} > \varepsilon_{1n}$ ,  $\varepsilon_{20} > |\varepsilon_{2n}|$ . Такая замена соответствует введению однородных деформаций в ортогональных  $x$  и  $y$  направлениях в объеме движущегося возбужденного состояния в форме прямоугольного параллелепипеда. В частности, для  $x$  направления на рис. 3 этой замене соответствует переход от четвертьволнового косинусоидального деформационного профиля на рис. 3 а) к прямоугольному профилю на рис. 3 б).

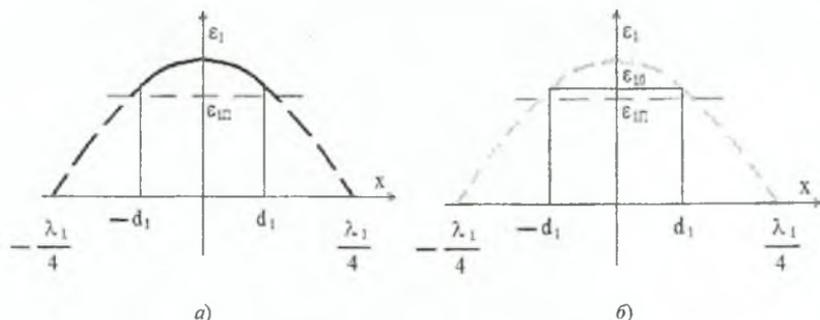


Рис. 3. Одномерный деформационный профиль начального возбужденного состояния: а) четвертьволновой косинусоидальный импульс; б) прямоугольный импульс.

2. Выражение для эффективного затухания (2) легко обобщить:

$$b_i(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = -\chi_i \left[ 1 - \frac{\sigma_0}{\sigma_n} \Theta(\varepsilon_1 - \varepsilon_{n1}) \Theta(\varepsilon_2 - \varepsilon_{n2}) \right],$$

где  $\sigma_0$  и  $\sigma_n$  – значения начальной и пороговой инверсных населенностей (см. [1]). Ясно, что при  $\sigma_0 < \sigma_n$  в области наложения волновых пучков происходит лишь частичная компенсация потерь так, что  $-\chi_i < b_i = -\chi_i \left( 1 - \frac{\sigma_0}{\sigma_n} \right) < 0$ . При  $\sigma_0 > \sigma_n$  реализуется про-

цесс генерации волн, и  $b_i = -\chi_i \left( 1 - \frac{\sigma_0}{\sigma_n} \right) > 0$ , так что в этом режиме УВП характеризует-

ся деформациями, несколько превышающими начальные значения. Строго говоря, в этом случае, для полноты описания в системе (1) необходимо добавить и нелинейную по  $\mu_{1,2}$  составляющую, отражающую вклад отрицательных обратных связей, стабилизирующих уровень амплитуд. Рассмотренный выше случай, очевидно, соответствует равенству  $\sigma_0$  и  $\sigma_n$ .

3. Распространение УВП должно сопровождаться излучением затухающих волновых пучков в  $x$  и  $y$  направлениях, поскольку, согласно (2), вне области наложения волновых пучков, несущих деформацию сжатия-растяжения, параметры  $b_{1,2} = -\chi_{1,2} < 0$ .

4. Следует отметить, что формирование двойникованных мартенситных кристаллов можно рассматривать как согласованное распространение пар длинноволновых и коротковолновых смещений [2], каждая из которых может быть описана уравнениями рассмотренного типа.

5. При записи системы (1) использованы волновые уравнения первого порядка, описывающие распространение УВП в направлении, принадлежащем одному квадранту ( $x > 0, y > 0$ ). Очевидно, что использование классического волнового уравнения второго порядка приведет к появлению возможности распространению УВП из начального возбужденного состояния во всех квадрантах. Вырождение фактически будет сниматься упругими полями дефектов в области зарождения.

6. Дальнейшее развитие математического описания, направленное на повышение реалистичности моделирования физических процессов, на наш взгляд, может быть достигнуто путем учета «размытия» области наложения четвертьволновых пучков, описываемой комбинацией (8) функций Хевисайда, с помощью вейвлет-аппарата (см. например, [3]).

#### Список литературы

1. Кашенко М. П. Волновая модель роста мартенсита при  $\gamma$ - $\alpha$  превращении в сплавах на основе железа. - Екатеринбург.: УИФ "Наука", 1993. - 224 с.
2. Кашенко М.П., Чащина В.Г., Вихарев С.В., Иванов С.В. // XVII Петербургские чтения по проблемам прочности. Санкт-Петербург, 10 – 12 апреля 2007 г.: сборник материалов. – Ч. II. – СПб., 2007. – С. 278-280.
3. Дьяконов В.П. От теории к практике. Вейвлеты. М.: СОЛОН-Р, 2002.