УДК 621.891(048):539.178(048)

УПРУГОПЛАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСЧЕТА КОНТАКТНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

Котенева Н. В.

Алтайский государственный технический университет, Барнаул

Контактное нагружение является одним из наиболее распространенных случаев силового взаимодействия деталей машин и конструкций. Оно возникает в процессе совместной работы сопряженных элементов машин и механизмов (например, в соединениях с натягом, болтовых соединениях, в подшипниках скольжения, направляющих, фрикционных муфтах сцепления и в ряде других случаев).

Чаще всего в зоне силового контакта тел возникает местная упругопластическая деформация. Сопротивление материала упругопластической контактной деформации является одним из важнейших факторов, определяющих условия трения и изнашивания деталей машин, контактную жесткость элементов машиностроительных конструкций, их прочность и эксплуатационную надежность и т.д. Однако строгая математическая теория, позволяющая решать задачи, связанные с упругопластической контактной деформацией при динамическом нагружении, аналогичные тем, которые описаны применительно к упругому контакту, еще не создана. Этим, в частности, определяется необходимость и целесообразность исследования контактных задач упругопластичности как при статическом, так и динамическом взаимодействии.

Наиболее хорошо изученным и часто используемым в практических применениях является случай контакта сферического индентора радиуса R с упругим полупространством под действием статической силы P, так называемый герцевский контакт или герцевское нагружение (рис.1).

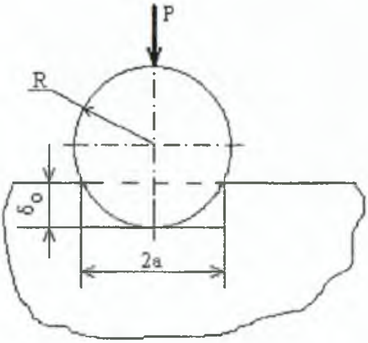

Рис.1. Внедрение сферического индентора в упругое полупространство (контакт Герца)

В соответствии с теорией Герца сближение тел δ_0 является степенной функцией контактной нагрузки P [1], т.е.

$$\delta_0 = k P^{2/3}$$

где $k = 2\frac{(1-\mu^2)}{E}$, E, μ – упругая постоянная, нормальный модуль упругости и коэффициент Пуассона соответственно

С возрастанием контактной нагрузки P впервые возникает пластическая деформация, которая затем постепенно распространяется как на глубину, так и к поверхности контртела. При некоторой величине нагрузки на поверхности контртела зависимость Герца нарушается. После снятия нагрузки происходит упругое восстановление материала контртела и общее сближение, уменьшившись на величину δ_{δ} контртела, становится равной δ_{ll} (рис. 2).

С появлением на поверхности контакта остаточной вмятины упругие деформации продолжают, как известно, подчиняться зависимостям теории упругости, однако, очевидно, что при этом обычные «упругие» формулы должны быть скорректированы в соответствии с новыми условиями контакта. Принципиальное отличие этих условий от условий чисто упругого контакта тел состоит в том, что при наличии остаточной вмятины сфера радиусом R находится в контакте не в точке, а с поверхностью остаточной вмятины, радиус кривизны которой равен R_1 (рис. 2).

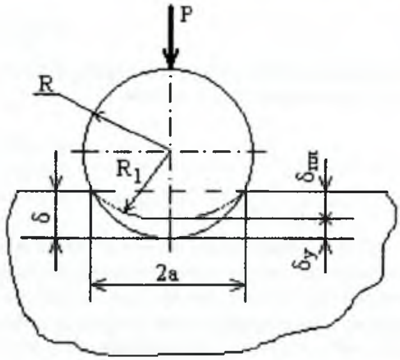

Рис. 2. Схема внедрения жесткого шара в плоскую границу упругопластического контртела

Для определения величины R_1 примем следующие допущения:

1) со снятием нагрузки сферический контур отпечатка не изменяется;

2) профиль вмятины под нагрузкой и после разгрузки в плоскостях ее главных кривизн очерчены окружностью радиусом R_1;

3) поверхность контртела вне контакта не деформируется.

С учетом вышесказанного поправка к формуле Герца, учитывающая влияние пластической деформации контртела в зоне контакта на величину упругого сближения, может быть рассчитана по формуле [2]:

$$\Omega = \left(1 + \frac{\delta_{пл}}{\delta_y}\right)^{\frac{1}{3}}, \qquad (1)$$

где δ_y – упругая составляющая полного сближения; $\delta_{пл}$ – пластическая составляющая полного сближения.

Окончательно имеем

$$\delta_y = \frac{\delta_0}{\Omega},$$

или с учетом формулы (1)

$$\delta_y = k^{\frac{3}{2}} (R\pi RH)^{\frac{1}{2}}, \qquad (2)$$

Сближение, соответствующее зарождению и наличию пластической деформации можно рассчитать по формуле [3]:

$$\delta_{пл} = \frac{R}{2\pi RH}, \qquad (3)$$

Полное сближение в упругопластическом контакте сферы с контртелом состоит из двух слагаемых, остаточного сближения δ_{ie}, равного глубине остаточного отпечатка, и упругого сближения $\delta_б$, исчезающего со снятием нагрузки вследствие упругого восстановления контртела. Таким образом,

$$\delta=\delta_{в}+\delta_{ie}. \tag{4}$$

Подставляя в уравнение (4) значения упругого и остаточного сближений из формул (2) и (3), соответственно, получаем:

$$\delta=\alpha R+\beta(\gamma R)^{\frac{1}{2}}, \tag{5}$$

где $\alpha=\dfrac{1}{2\pi RH}$; $\beta=k^{\frac{3}{2}}$; $\gamma=\pi RH$

Приведенные выше формулы позволяют рассчитать полное сближение в упругопластическом контакте при статическом нагружении. В ряде случаев контактирование твердых тел происходит при динамическом, в частности, ударном, нагружении. Динамичность нагружения характеризуется либо скоростью удара или скоростью деформации, либо скоростью напряжения, которая зависит от скорости приложения нагрузки. При упругопластическом контактировании материалов в условиях динамического нагружения появляется дополнительное сближение, что может привести к изменению механических свойств поверхности. Упругий контакт при первоначальном соударении твердых тел осуществляется редко, особенно для металлов. Анализ напряженного состояния материала при динамическом упругопластическом внедрении в него жестких инденторов представляет собой очень сложную задачу, и исследования в этом направлении еще продолжаются. Отсутствие общих методов построения тонных решений нелинейных задач динамики приводит к необходимости разработки эффективных приближенных численно-аналитических методов.

Во многих механических системах движение описывается нелинейными дифференциальными уравнениями. Рассматриваемая в работе модель контактного взаимодействия является нелинейной, поэтому дифференциальное уравнение движения в условиях свободных колебаний имеет вид:

$$m\ddot{x}+P(x)=0;$$

где $x=\delta$, а $P(x)$ выражается из формулы (5). С учетом сказанного дифференциальное уравнение движения жесткой, гладкой сферы по упругопластическому полупространству при ударе будет иметь вид:

$$m\ddot{x}+a_1\sqrt{x}+a_2x=0; \tag{6}$$

где $a_1=-\dfrac{\beta\gamma^{\frac{1}{2}}}{\alpha^{\frac{3}{2}}}$; $a_2=\dfrac{1}{\alpha}$.

Считая, что в начальный момент соударения $\dfrac{dx}{dt}=v_0$, после первого интегрирования можно найти скорость сближения в виде

$$\frac{dx}{dt}=\sqrt{v_0^2-\left(\frac{4a_1x^{\frac{3}{2}}}{3m}+\frac{a_2x^2}{m}\right)}; \tag{7}$$

Решая уравнение (7), можно рассчитать величину динамического сближения, максимальную силу удара и максимальное давление в центре контакта. Для вычисления продолжительности удара производится разделение переменных в уравнении (7), а затем интегрирование от начала удара до момента максимального сближения

$$t=\pm\int_{0}^{x_{max}}\frac{dx}{\sqrt{v_0^2-\left(\frac{4a_1x^{\frac{3}{2}}}{3m}+\frac{a_2x^2}{m}\right)}}. \tag{8}$$

Если принять значение начальной скорости равным нулю ($v_0=0$), то можно рассчитать статическое упругопластическое значение сближения. Решение имеет вид:

$$x=\left(\frac{2a_1}{3a_2}\left[\sin\left(\frac{t\sqrt{a_2}}{2\sqrt{m}}-\frac{\pi}{2}\right)+1\right]\right)^2. \tag{9}$$

Значения, рассчитанные по формуле (9), аналогичны значениям, рассчитанным по формуле (5).

Численное решение дифференциального уравнения (6) приводит его к виду эллиптического интеграла, решение которого весьма затруднительно и громоздко.

Поскольку данная механическая система является нелинейной и обладает диссипацией энергии, то решение также можно получить разложением уравнения (6) в степенные ряды Тейлора в окрестностях точек статического равновесия. Период движения состоит из четырех этапов (рис. 3).

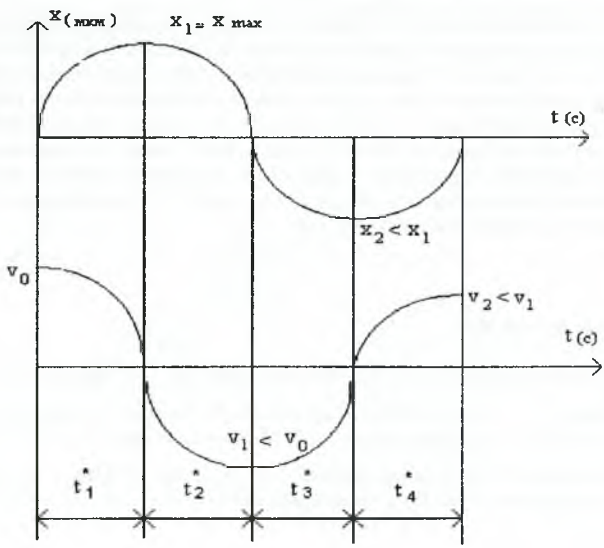

Рис. 3. Графики изменения сближения и скорости от времени процесса

Первый и четвертый – этапы нагрузки, второй и третий – этапы разгрузки. Для определения сближения на каждом этапе можно ограничиться суммой первых пяти значащих членов ряда, поскольку последующие, ввиду их малости, не вносят существенных изменений в конечный результат.

Решение уравнения(6) имеет вид

$$x=\begin{cases} C_0+C_1t_1+C_2t_1^2+C_3t_1^3+C_4t_1^4, & 0\le t_1\le t_1^*; \\ B_0+B_1t_2+B_2t_2^2+B_3t_2^3+B_4t_2^4, & 0\le t_2\le t_2^*; \\ C_0+C_1t_3+C_2t_3^2+C_3t_3^3+C_4t_3^4, & 0\le t_3\le t_3^*; \\ B_0+B_1t_4+B_2t_4^2+B_3t_4^3+B_4t_4^4, & 0\le t_4\le t_4^*, \end{cases} \tag{10}$$

где $t_1^*...t_4^*$ – длительность движения на каждом этапе, а C_i, B_i – коэффициенты, определяемые по рекуррентным формулам. Начальные условия на первом этапе $x_0\big|_{t=0}=C_0=\delta; v_0\big|_{t=0}=v$ – начальная скорость в нормальном направлении.

Для определения скорости на каждом этапе необходимо взять первую производную от выражения смещения (10). Наибольшего значения величина сближения достигается в тот момент, когда $\frac{dx}{dt}=0$.

В заключение следует отметить, что данный численно-аналитический метод дает возможность рассчитать параметры контактной жесткости и прочности как в условиях статического, так и условиях динамического нагружения. Использование этого алгоритма расчета позволит дать оценку влияния упругопластических деформаций на контактную прочность для случая удара жесткого гладкого шара о гладкое упругопластическое полупространство. Однако, предлагаемый численно-аналитический метод расчета может быть использован и для расчета упругопластического контактного взаимодействия шероховатых тел. Для этого в формуле (5) необходимо учесть параметры микрогеометрии контактирующих тел.

Список литературы

1. Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1975. – 567 с.
2. Дрозд М.С., Матлин М.М., Сидяхин Ю.И. Инженерные расчеты упругопластической контактной деформации. – М.: Машиностроение, 1986. – 220 с.
3. Котенева Н.В. Упугопластический контакт гладкой сферы с плоской поверхностью при динамическом нагружении // Изв.ТПУ.-2005.-Т.308.- № 2.-С.114-116.