

### Список литературы

1. V. Brailovski, et al., Shape Memory Alloys: Fundamentals, Modeling and Applications (2003).
2. Rubanik V.V. Heat treatment of TiNi wire used for intrauterine contraceptives / V.V. Rubanik, V.V. Rubanik Jr., V.G. Dorodeiko, S.N. Miliukina // Materials Science and Engineering A, J. №6026. – 2007. – doi: 10.1016/j.msea.2007.02.135.
3. Милокина С.Н. Влияние режимов термообработки на функциональные свойства проволоки никелида титана для внутриматочных контрацептивов / С.Н. Милокина, В.В. Рубаник (мл.), В.В. Рубаник, В.Г. Дороейко // Сборник материалов конференции «XVII Петербургские чтения по проблемам прочности». – С-Петербург, 2007. – Ч.2. – С.286-287.

УДК 669.018.6

## УТОЧНЕНИЕ ВЫРАЖЕНИЯ ДЛЯ ТЕНЗОРА ПРЕВРАЩЕНИЙ ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ПСЕВДОУПРУГИХ ПРОЦЕССОВ В СПЛАВАХ С ПАМЯТЬЮ ФОРМЫ

Пряхин С. С., Рубаник В. В. мл.

*Институт технической акустики НАН Беларуси, Витебск, Беларусь*

### Введение и постановка задачи

Сплавы с памятью формы (СПФ) характеризует высокая эффективность упорядоченных перестроений между его кристаллографическими вариантами в деформационных процессах. Такие кристаллографические изменения являются термодинамически обратимыми. При обратных кристаллических превращениях эти материалы способны восстанавливать деформацию (свободное восстановление) или развивать внутренние усилия (ограниченное восстановление). Восстанавливаемая деформация в СПФ может достигать уровней 10%, а реактивные усилия ограниченного восстановления – величин, отвечающих напряжениям порядка сотен МПа.

Температурный диапазон проявления таких необычных свойств определяется областью существования различных кристаллографических вариантов. С обнаружением в сплавах никеля и титана свойств памяти формы в диапазоне температур, характерном для обитания человека, существенно расширяется спектр областей исследований, направленных на практическое применение этих материалов. Области исследований включают разработки структурных композиций, в которых элементы из СПФ управляют поведением структур, силовых приводов, медицину и т.д. СПФ относят к группе интеллектуальных материалов. Возникает потребность в создании математических моделей, описывающих термомеханику СПФ для инженерных разработок. Помимо достоверности описания термомеханического поведения, требования к таким моделям включают простоту математического описания (что также подразумевает и простоту параметризации) и простоту интегрирования с существующими пакетами численного анализа. Последним требованиям в большей степени отвечают феноменологические модели, из которых отметим модели Танаки (К. Tanaka, 1986) [1], Лианга–Роджерса (Liang C., Rogers C.A., 1990) [2] и Бринсон (Brinson L. C., 1993) [3]. Данные модели описывают одномерное термомеханическое поведение СПФ в условии квазистатического изменения термомеханической нагрузки.

Структура этих моделей базируется на двух уравнениях. Первое – уравнение термомеханики, связывающее изменение напряжения  $\sigma$  с изменениями деформации  $\epsilon$ , температуры  $T$  и внутренней переменной  $\xi$ . Танака получил его, исходя из принципа, согласно которому *постоянная СПФ полностью определяется величинами температуры, внутренней переменной и деформации* на основе термодинамического анализа поведения среды при изменении ее фазового состава. Дифференциальная форма определяющего уравнения термомеханики имеет вид:

$$d\sigma = Dd\epsilon + \Theta dT + \Omega d\xi, \quad (1)$$

где:  $D$  – модуль Юнга,  $\Theta$  – термоупругий тензор и  $\Omega$  – тензор превращений. Термин *тензор* используется в данных моделях, несмотря на одномерность рассмотрения. Считая (как и Танака), что межфазовые превращения в СПФ происходят между двумя кристаллографическими вариантами – аустенитной и мартенситной фазами, будем называть внутреннюю переменную состояния  $\xi$  *мартенситным содержанием*, величина которого варьируется от 0 для 100% аустенита до 1 для 100% мартенсита.

Второе уравнение, получившее название *уравнение кинетики*, устанавливает феноменологическую связь между внутренней переменной и текущими значениями напряжения и температуры. В отсутствие напряжений межфазные превращения в СПФ происходят в пределах постоянных для материала температурных границ:  $M_s$  – начало аустенитно-мартенситных (А–М) превращений;  $M_f$  – окончание А–М превращений;  $A_s$  – начало мартенситно-аустенитных (М–А) превращений;  $A_f$  – окончание М–А превращений. Соотношение между этими температурными постоянными для большинства применяемых СПФ  $M_f < M_s < A_s < A_f$  [2]. Лианг и Роджерс дают косинусные уравнения кинетики для направлений превращений:

$$\text{А–М:} \quad \xi = \frac{1 - \xi_{0M}}{2} \cos[a_M(T - M_f) + b_M\sigma] + \frac{1 + \xi_{0M}}{2}, \quad (2a)$$

$$\text{М–А:} \quad \xi = \frac{\xi_{0A}}{2} \cos[a_A(T - A_s) + b_A\sigma] + \frac{\xi_{0A}}{2}, \quad (2b)$$

где константы кинетики материала  $a_M$  и  $a_A$  выражаются через границы температур фазовых превращений:  $a_M = \pi / (M_s - M_f)$ ,  $a_A = \pi / (A_f - A_s)$ , а  $b_M$  и  $b_A$  – через константы материала  $C_M$  и  $C_A$ , связанные с влиянием напряжения на фазовые превращения:  $b_M = -a_M / C_M$ ,  $b_A = -a_A / C_A$ . Условия осуществления превращений

$$\text{А–М:} \quad 0 < a_M(T - M_f) + b_M\sigma < \pi \quad \text{и} \quad a_M T + b_M\sigma < 0, \quad (3a)$$

$$\text{М–А:} \quad 0 < a_A(T - A_s) + b_A\sigma < \pi \quad \text{и} \quad a_A T + b_A\sigma > 0. \quad (3b)$$

$$\text{В остальных случаях превращений нет.} \quad (3c)$$

Величины  $T$  и  $\sigma$  в условии (3) обозначают скорости изменений температуры и напряжения во времени. Величины  $\xi_{0M}$  и  $\xi_{0A}$  в (2) являются параметрами ветвей превращений, сохраняющимися на участках монотонности превращений. При изменении монотонности их можно рассчитывать из самих уравнений (2), используя величину мартенситного содержания  $\xi$ , наследуемую из предыдущего участка.

Танака использовал в модели экспоненциальное представление уравнения кинетики, а Бринсон – косинусное, отличающиеся от модели Лианга и Роджерса. Практика показала, что более адекватно применение косинусных представлений.

При моделировании в упомянутых работах Танаки и Лианга-Роджерса для характеристик материала  $D$ ,  $\Theta$ ,  $\Omega$  делалось допущение постоянства их величин в межфазных

превращениях. Отмечая, что модуль Юнга аустенитного состояния СПФ втрое или более превышает его значение для мартенситного состояния, Бринсон использует линейную зависимость для модуля Юнга от мартенситного содержания

$$D = D_A - \xi(D_A - D_M), \quad (4)$$

где  $D_A$  – модуль Юнга аустенитного состояния СПФ, а  $D_M$  – мартенситного. Однако модельное представление (4) ведет к определенному соотношению между модулем Юнга и тензором превращения СПФ. Анализируя процесс накопления остаточной деформации при деформировании СПФ, в котором мартенситное содержание меняется от 0 до 1, Бринсон получила выражение для тензора превращения

$$\Omega = -\epsilon_L D, \quad (5)$$

где  $\epsilon_L$  – максимум остаточной деформации, восстанавливаемой в эффекте памяти формы, которую считают температурно-независимой постоянной материала [2].

Соотношение (5) Бринсон экстраполировала на все варианты напряженно-индуцируемых превращений. Полагая данное соотношение обоснованным лишь для ветви А–М превращения при  $\xi_{0M} = 0$  в уравнении (2а), в настоящей работе мы ставили цель уточнить вид тензора превращения для разных направлений и параметров  $\xi_{iM}$ ,  $\xi_{0A}$  превращений. Для этого использовался анализ псевдоупругих явлений в СПФ в рамках определяющих уравнений термомеханики Танаки (1), кинетики Лианга–Роджерса (2) и линейной модели модуля Юнга (4). Основываясь на проделанном анализе, предлагаем следующие выражения для тензора превращений

$$\text{А–М:} \quad \Omega_M = -\epsilon_M D, \quad (6a)$$

$$\text{М–А:} \quad \Omega_A = -\epsilon_A D, \quad (6b)$$

а соотношения для расчетов уточненных величин  $\epsilon_M$  и  $\epsilon_A$  представляем ниже.

Псевдоупругие явления проявляют себя при температурах выше температуры окончания М–А превращений  $T > A_f$  под действием изменения величины механической нагрузки. Они обусловлены превращениями между аустенитом и напряженно-индуцированным мартенситом. При этих температурах снятие нагрузки полностью восстанавливает аустенитную фазу в СПФ. Для явлений характерны верхняя и нижняя границы диапазона напряжений (зависящие от температуры) в пределах которых происходят фазовые превращения. В пределах между ними циклические нагрузки приводят к формированию гистерезисных петель на  $\epsilon$ - $\sigma$  диаграмме, отвечающих как завершнным, так и незавершнным фазовым превращениям. За пределами этого диапазона, исходя из принципа Танаки,  $\epsilon$ - $\sigma$  соотношения должны быть однозначны.

#### Дифференциальные соотношения для изотермических процессов

Введем обозначения для фазовых аргументов косинусных функций в (2)

$$\varphi_M = a_M(T - M_f) + b_M \sigma, \quad (7a)$$

$$\varphi_A = a_A(T - A_s) + b_A \sigma. \quad (7b)$$

При этом уравнения кинетики (2) приобретают вид

$$\text{А–М:} \quad \xi = \frac{1 - \xi_{0M}}{2} \cos \varphi_M + \frac{1 + \xi_{0M}}{2}, \quad (8a)$$

$$\text{М–А:} \quad \xi = \frac{\xi_{0A}}{2} \cos \varphi_A + \frac{\xi_{0A}}{2}, \quad (8b)$$

а дифференциальная форма уравнений кинетики

$$\text{A-M: } d\xi = -\frac{1-\xi_{0M}}{2} \sin \varphi_M (a_M dT + b_M d\sigma), \quad (9a)$$

$$\text{M-A: } d\xi = -\frac{\xi_{0A}}{2} \sin \varphi_A (a_A dT + b_A d\sigma). \quad (9b)$$

Выражение для модуля Юнга (4) при подстановке уравнений (8) дает уравнения

$$\text{A-M: } D = -h_M (\cos \varphi_M - g_M), \quad (10a)$$

$$\text{M-A: } D = -h_A (\cos \varphi_A - g_A), \quad (10b)$$

в которых, учитывая, что  $D_A > D_M$ ,

$$h_M = \frac{1-\xi_{0M}}{2} (D_A - D_M) > 0, \quad g_M = \frac{D_A + D_M}{D_A - D_M} + \frac{2\xi_{0M}}{1-\xi_{0M}} \frac{D_M}{D_A - D_M} > 1,$$

$$h_A = \frac{\xi_{0A}}{2} (D_A - D_M) > 0, \quad g_A = \frac{D_A + D_M}{D_A - D_M} + 2 \frac{1-\xi_{0A}}{\xi_{0A}} \frac{D_A}{D_A - D_M} > 1.$$

Выразив  $d\xi$  из уравнения термомеханики (1), подставив полученное значение в левые части уравнений (9) и преобразовав полученные выражения, приходим к дифференциальным выражениям для напряжений при превращениях

$$\text{A-M: } d\sigma = \frac{D}{1 + b_M \Omega_M \frac{1-\xi_{0M}}{2} \sin \varphi_M} d\varepsilon + \frac{\Theta - a_M \Omega_M \frac{1-\xi_{0M}}{2} \sin \varphi_M}{1 + b_M \Omega_M \frac{1-\xi_{0M}}{2} \sin \varphi_M} dT, \quad (11a)$$

$$\text{M-A: } d\sigma = \frac{D}{1 + b_A \Omega_A \frac{\xi_{0A}}{2} \sin \varphi_A} d\varepsilon + \frac{\Theta - a_A \Omega_A \frac{\xi_{0A}}{2} \sin \varphi_A}{1 + b_A \Omega_A \frac{\xi_{0A}}{2} \sin \varphi_A} dT. \quad (11b)$$

Для изотермических процессов  $dT \equiv 0$ , а исходя из (7)  $d\varphi_M = b_M d\sigma$  и  $d\varphi_A = b_A d\sigma$ . Поэтому с учетом выражений для тензора превращений (6) и модуля Юнга (10) из уравнений (11) можно вывести следующие дифференциальные соотношения

$$\text{A-M: } d\varepsilon = -\left( \frac{1}{b_M h_M} \cdot \frac{1}{\cos \varphi_M - g_M} + \frac{1-\xi_{0M}}{2} \varepsilon_M \sin \varphi_M \right) d\varphi_M, \quad (12a)$$

$$\text{M-A: } d\varepsilon = -\left( \frac{1}{b_A h_A} \cdot \frac{1}{\cos \varphi_A - g_A} + \frac{\xi_{0A}}{2} \varepsilon_A \sin \varphi_A \right) d\varphi_A. \quad (12b)$$

### Анализ условия восстановления состояния в псевдоупругом цикле с полными превращениями

Данный раздел приводится подробно для иллюстрации методологии анализа условий восстановления состояний в псевдоупругих процессах. На рис. 1 изображена диаграмма псевдоупругого поведения материала СПФ в цикле воздействия – растяжение с последующей разгрузкой, осуществляемого изменением относительной деформации при постоянной температуре  $T$  в условии полных А–М и М–А превращений. Условно отмечены точки А и В, соответствующие началу и завершению А–М превраще-

ний. Точки  $C$  и  $D$  соответствуют началу и завершению  $M-A$  превращений. Исходя из условий для границ фазовых превращений (3), напряжения в этих точках

$$\sigma_A - \text{из равенства } \varphi_M = \pi \Rightarrow \sigma_A = -\frac{a_M}{b_M}(T - M_s) = C_M(T - M_s), \quad (13)$$

$$\sigma_B - \text{из равенства } \varphi_M = 0 \Rightarrow \sigma_B = -\frac{a_M}{b_M}(T - M_f) = C_M(T - M_f), \quad (14)$$

$$\sigma_C - \text{из равенства } \varphi_A = 0 \Rightarrow \sigma_C = -\frac{a_A}{b_A}(T - A_s) = C_A(T - A_s), \quad (15)$$

$$\sigma_D - \text{из равенства } \varphi_A = \pi \Rightarrow \sigma_D = -\frac{a_A}{b_A}(T - A_f) = C_A(T - A_f). \quad (16)$$

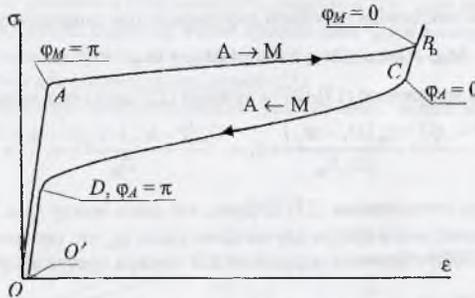


Рис. 1. К вопросу восстановления состояния в псевдоупругом цикле с полными превращениями.

Выполним расчеты изменений деформации между отмеченными точками. На участке  $OA$  в отсутствие фазовых превращений растяжение происходит по линейному закону, отвечающему значению модуля Юнга равному  $D_A$

$$\Delta \varepsilon_{OA} = \varepsilon_A - \varepsilon_o = \frac{\sigma_A}{D_A} = \frac{C_M}{D_A}(T - M_s). \quad (17)$$

Интегрируя по  $d\varphi_M$  от  $\pi$  до 0 правую часть выражения (12а) с учетом  $-g_M < -1$ , получаем изменение относительной деформации на участке  $AB$   $A-M$  превращения

$$\Delta \varepsilon_{AB} = \frac{1}{b_M h_M} \int_0^\pi \frac{1}{\cos \varphi_M - g_M} d\varphi_M + \frac{1 - \xi_{OM}}{2} \varepsilon_M \int_0^\pi \sin \varphi_M d\varphi_M = -\frac{\pi}{b_M h_M \sqrt{g_M^2 - 1}} + (1 - \xi_{OM}) \varepsilon_M$$

Данное выражение при подстановке  $\xi_{OM} = 0$  и, в соответствии с полученным Бринсон результатом для ветви полного  $A-M$  превращения  $\varepsilon_M = \varepsilon_L$ , приводится к виду

$$\Delta \varepsilon_{AB} = \varepsilon_B - \varepsilon_A = \frac{C_M(M_s - M_f)}{\sqrt{D_A D_M}} + \varepsilon_L. \quad (18)$$

На участке  $BC$  в отсутствие фазовых превращений уменьшение относительной деформации происходит по линейному закону с модулем Юнга  $D_M$

$$\Delta \epsilon_{BC} = \epsilon_C - \epsilon_B = \frac{\sigma_C - \sigma_B}{D_M} = \frac{C_A(T - A_s) - C_M(T - M_f)}{D_M} \quad (19)$$

Интегрируя по  $d\sigma_M$  от 0 до  $\pi$  правую часть выражения (12b) с учетом  $-g_A < -1$ , получаем изменение относительной деформации на участке  $CD$  М-А превращения

$$\Delta \epsilon_{CD} = \frac{\pi}{b_A \sqrt{D_A D_M}} - \epsilon_A = -\frac{C_A(A_f - A_s)}{\sqrt{D_A D_M}} - \epsilon_A \quad (20)$$

На участке  $DO'$  в отсутствие фазовых превращений уменьшение относительной деформации происходит по линейному закону с модулем Юнга  $D_A$ :

$$\Delta \epsilon_{DO'} = \epsilon_{O'} - \epsilon_D = \frac{-\sigma_D}{D_A} = -\frac{C_A(T - A_f)}{D_A} \quad (21)$$

Условие восстановления исходной деформации при завершении цикла нагрузки

$$\Delta \epsilon_{OO'} = \Delta \epsilon_{OA} + \Delta \epsilon_{AB} + \Delta \epsilon_{BC} + \Delta \epsilon_{CD} + \Delta \epsilon_{DO'} = 0 \quad (22)$$

Подстановка выражений (17)-(21) в условие (22) дает связь между  $\epsilon_A$  и  $\epsilon_L$

$$\frac{C_M(T - M_s) - C_A(T - A_f)}{D_A} + \frac{C_M(M_s - M_f)}{\sqrt{D_A D_M}} + \epsilon_L = \frac{C_M(T - M_f) - C_A(T - A_s)}{D_M} + \frac{C_A(A_f - A_s)}{\sqrt{D_A D_M}} + \epsilon_A \quad (23)$$

Из структуры соотношения (23) следует, что связь между  $\epsilon_A$  и  $\epsilon_L$  линейна по температуре. Это значит, что в общем случае  $\epsilon_A$  не равно  $\epsilon_L$ , что противоречит общему характеру предложенного Бринсон выражения для тензора превращений.

### Результаты анализа условия восстановления состояния в псевдоупругом цикле с неполными превращениями

В изотермических процессах завершение межфазовых превращений приводит к однозначности  $\epsilon$ - $\sigma$  соотношений (из принципа Танаки). Для выражения величины  $\epsilon_A$  при разных параметрах ветвей М-А превращений  $0 < \xi_{0A} \leq 1$  выполнялся анализ восстановления исходного состояния для псевдоупругого цикла с неполными превращениями, в котором в прямом направлении А-М превращения не завершаются, а в обратном М-А завершаются (см. рис. 2А). Выполненный по аналогии с полными превращениями (предыдущий раздел) анализ в качестве условия восстановления состояния в точке завершения М-А превращений требует выполнения соотношения между  $\epsilon_A$  и постоянной материала  $\epsilon_L$

$$\begin{aligned} & \frac{C_M(T - M_s) - C_A(T - A_f)}{D_A} + \frac{C_M(M_s - M_f)}{\sqrt{D_A D_M}} \left[ 1 - \frac{2}{\pi} \arctg \left( \sqrt{\frac{(1 - \xi_{0A}) D_A}{\xi_{0A} D_M}} \right) \right] + \xi_{0A} \epsilon_L = \\ & = \frac{C_M(T - M_f) - C_A(T - A_s)}{R_A^2 D_M} + \frac{C_A(A_f - A_s)}{R_A \sqrt{D_A D_M}} - \frac{C_M(M_s - M_f)}{R_A^2 D_M} \frac{2}{\pi} \arctg \sqrt{\frac{1 - \xi_{0A}}{\xi_{0A}}} + \xi_{0A} \epsilon_A, \end{aligned} \quad (24)$$

где

$$R_A = R_A(\xi_{0A}) = \sqrt{\frac{D_A - \xi_{0A}(D_A - D_M)}{D_M}} \geq 1 \quad (25)$$

Для циклов с неполными превращениями, в которых в направлении М–А превращения не завершаются, а в направлении А–М завершаются (см. рис. 2Б), атрибутом восстановления при  $\xi_{0A} = 1$  и  $0 \leq \xi_{0M} < 1$  в точке завершения превращений являются соотношения

$$\frac{C_M(T - M_s) - C_A(T - A_f)}{R_M^2 D_A} + \frac{C_M(M_s - M_f)}{R_M \sqrt{D_A D_M}} - \frac{C_A(A_f - A_s)}{R_M^2 D_A} - \frac{2}{\pi} \arctg \frac{\sqrt{\xi_{0M}}}{\sqrt{1 - \xi_{0M}}} + \epsilon_M(1 - \xi_{0M}) =$$

$$= \frac{C_M(T - M_f) - C_A(T - A_s)}{D_M} + \frac{C_A(A_f - A_s)}{\sqrt{D_A D_M}} \left[ 1 - \frac{2}{\pi} \arctg \frac{\sqrt{\xi_{0M} D_M}}{\sqrt{(1 - \xi_{0M}) D_A}} \right] + \epsilon_A(1 - \xi_{0M}), \quad (26)$$

где

$$R_M = R_M(\xi_{0M}) = \sqrt{\frac{D_A - \xi_{0M}(D_A - D_M)}{D_A}} \leq 1. \quad (27)$$

Элементарное решение алгебраического уравнения (24) дает явное выражение  $\epsilon_A$  через свойства материала, параметр ветви превращения  $\xi_{0A}$  и температуру. Явное выражение для  $\epsilon_M$  можно получить из уравнения (26), подставив в него значение  $\epsilon_A$ , получаемое из уравнения для полных превращений (23).

При моделировании псевдоупругости (рис. 2) нами использованы данные для СПФ из работы [3].

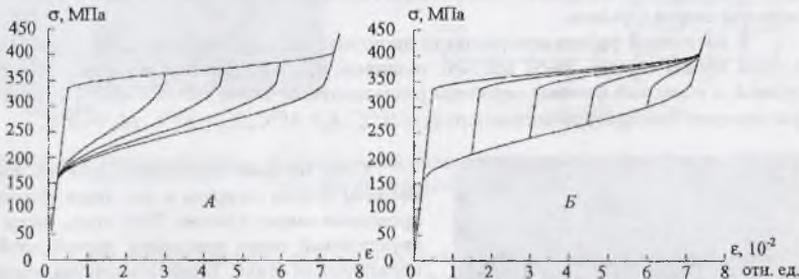


Рис. 2. Псевдоупругие циклические процессы в СПФ с незавершенными превращениями: А – аустенитно-мартенситными; Б – мартенситно-аустенитными.

#### Список литературы

1. Материалы с эффектом памяти формы: Справ. изд./Под ред. Лихачева В.А. – Т.4. – СПб.: Изд-во НИИХ СПбГУ. 1998. – 268 с.
2. Liang, C., Rogers C.A. One-dimensional thermomechanical constitutive relations for shape memory materials / J. of Intelligent Material Systems and Structures. 1990. 1(2): pp. 207-234.
3. Brinson L.C. One-dimensional constitutive behavior memory alloys: thermomechanical derivation with non-constant material functions and redefined martensite internal variable. Journal of Intelligent Material Systems and Structures. 1993. 4(2): pp. 229-242.