

3. Сайт разработчика программного обеспечения [Электронный ресурс] / Arduino Portal – Режим доступа: http://arduino.ru/Arduino_environment

УДК 537.213

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭЛЕКТРОСТАТИЧЕСКОГО ПОЛЯ КОЛЬЦЕВОГО АНОДА

Ташаев Ю.Н., доц.

Московский государственный университет дизайна и технологии,
г. Москва, Российская Федерация

При проектировании оборудования, используемого для плазмохимической обработки текстильных материалов, возникает необходимость расчёта электростатического поля заряженных тел различной конфигурации. Во многих странах в настоящее время исследуются возможности использования плазмы магнетронного разряда (магнетронное распыление) для улучшения свойств текстильных материалов. Кольцевой анод, расположенный вокруг торцов стержневых электродов, часто используется в устройствах подобного типа. В магнетронном разряде силовые линии магнитного поля в разрядном объёме направлены поперёк линий тока. В присутствии осевого магнитного поля электрический разряд принимает кольцеобразную форму. Представленная далее математическая модель электростатического поля может быть использована для оптимизации энергозатрат в разрядной камере подобных устройств. В данной работе излагается задача об определении потенциала и напряжённости электростатического поля равномерно заряженного тонкого круглого проводящего анода в разрядном промежутке до инициирования разряда. Обсуждается вопрос о наличии «потенциальной ямы» внутри полого электрода.

В электростатике можно выделить два вида задач: определение поля при неизвестном местоположении исходных зарядов, но заданном электрическом потенциале на границах рассматриваемой области и вычисление потенциала и компонент напряжённости электрического поля в области, свободной от зарядов по известному пространственно - ограниченному распределению электрических зарядов. Предпочтение было отдано второй постановке, которая была дополнена принципом суперпозиции электрических полей. В произвольной точке пространства, свободной от зарядов, рассчитано электростатическое поле, создаваемое равномерно заряженным однородным круглым тонким кольцом с зарядом q и радиусом R . Линейная плотность заряда кольца $\tau = q / 2\pi R$. При вычислении потенциала предполагалось, что начало декартовой системы координат совпадает с центром кольца, расположенного в плоскости xOy так, что ось Oz является его осью симметрии. Ввиду симметрии поля относительно оси Oz , вектор напряжённости \vec{E} имеет лишь две компоненты: осевую E_z и поперечную E_x , связанные с потенциалом стандартными соотношениями:

$\vec{E} = -\nabla\varphi$, $E_x = -\partial\varphi/\partial x$, $E_z = -\partial\varphi/\partial z$. Потенциал $\varphi(x,z) = \varphi(x,y,z)|_{y=0}$ в произвольной точке P , принадлежащей плоскости xOz и не принадлежащей нити кольца, в соответствии с принципом суперпозиции может быть представлен через $K(k)$ полный эллиптический интеграл первого рода

$$\varphi(x,z) = \frac{q}{4\pi^2 \varepsilon_0} \frac{k}{\sqrt{xR}} \cdot K(k), \text{ где } k = \frac{2\sqrt{xR}}{\sqrt{(x+R)^2 + z^2}}, K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{d\beta}{\sqrt{1-k^2 \sin^2 \beta}}$$

Осевая симметрия позволяет выбрать y координату точки наблюдения равной 0, не нарушая общности решения задачи: $P(x,0,z)$. Компоненты напряжённости электростатического поля \vec{E} в декартовой системе координат могут быть выражены через полные эллиптические интегралы первого $K(k)$ и второго рода

$$EL(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2 \sin^2 \beta} d\beta:$$

$$E_x = \frac{q}{4\pi^2 \varepsilon_0} \frac{k}{\sqrt{xR}} \frac{1}{2x} [K + \frac{x^2 - R^2 - z^2}{(x+R)^2 + z^2} \cdot \frac{EL}{1-k^2}]; \quad E_z = \frac{q}{4\pi^2 \varepsilon_0} \frac{k}{\sqrt{xR}} \frac{z}{[(x+R)^2 + z^2]} \cdot \frac{EL}{1-k^2}$$

В окрестности оси симметрии ($x \rightarrow 0$) разложением эллиптических интегралов по малому параметру $k \leq 2\sqrt{Rx}/|R+x| \ll 1$, при $x/R \ll 1$ потенциал и составляющие напряжённости E_x, E_z могут быть сведены к выражениям:

$$\varphi = \varphi_0 \frac{R}{\sqrt{(R+x)^2 + z^2}} f_{\varphi}, \quad E_z = E_0 R^2 \frac{z}{\sqrt{[(R+x)^2 + z^2]^3}} f_E, \quad E_x = -E_0 R^2 \frac{3}{64} \cdot \frac{k^2}{x\sqrt{xR}}$$

$$\text{где } \varphi_0 = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 R}, \quad E_0 = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 R^2}, \quad f_{\varphi} = 1 + \frac{z^2}{4} + \frac{q}{64} k^4 + \dots, \quad f_E = 1 + \frac{3k^2}{4} + \frac{45}{64} k^4 + \dots$$

При $x=0$ получим:

$$\varphi(0,z) = \varphi_0 \frac{R}{\sqrt{R^2 + z^2}}; \quad E_x(0,z)=0; \quad E_z(0,z) = E_0 R^2 \frac{z}{\sqrt{(R^2 + z^2)^3}}$$

Как и следовало ожидать, на оси симметрии ($x=0$) составляющая E_x обращается в ноль. Осевая компонента поля E_z , равная нулю при $z=0$ и стремящаяся к нулю при $z \rightarrow \infty$, достигает максимального значения

$2E_0/\sqrt{27}$ в точке $z=R/\sqrt{2}$. Вдали от центра кольца ($z \gg R, x \gg R$) параметр $k=2(Rx)^{1/2}/(x^2+z^2)^{1/2}$ стремится к нулю, и эллиптический интеграл первого рода принимает минимальное значение $K(0) = \pi/2$. В этом случае электростатическое поле, создаваемое кольцом, совпадает с полем точечного заряда:

$$\varphi(x, z) = \frac{q}{4\pi^2 \varepsilon_0} \cdot \frac{z}{\sqrt{x^2 + z^2}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + z^2}} = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{r}, \quad \vec{E} = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad r = \sqrt{x^2 + z^2}.$$

При приближении к нити кольца ($z \rightarrow 0$, $x \rightarrow R \pm \delta$, $\delta/R \ll 1$), потенциал и напряжённость поля неограниченно возрастают по модулю:

$$k \rightarrow 1, \quad k' = \sqrt{1 - k^2} = \frac{|R-x|}{R+x} \approx \frac{|R-x|}{2R} \rightarrow 0, \quad K(k) \approx \ln \frac{4}{k'} \approx -\ln|R-x| + \ln 8R.$$

В этом случае:

$$\varphi(x, 0)_{x \rightarrow R} = \frac{\tau}{2\pi \varepsilon_0} \cdot \ln \frac{4}{k'} = -\frac{\tau}{2\pi \varepsilon_0} \cdot \ln|R-x| + \varphi_0;$$

$$E_x(x, 0)_{x \rightarrow R} = -\frac{\tau}{2\pi \varepsilon_0} \frac{1}{R-x}; \quad E_z(R, z)_{z \rightarrow 0} = \frac{\tau}{2\pi \varepsilon_0} \cdot \frac{1}{z},$$

что соответствует напряжённости поля бесконечно длинной заряженной нити с линейной плотностью заряда $\tau = q/2\pi R$.

Отметим, что начало координат, являясь стационарной точкой, не является точкой строгого экстремума электростатического потенциала. В точке (0,0) выполняется необходимое условие экстремума функции $\varphi(x, z)$: $\frac{\partial \varphi}{\partial x}|_{x=0, z=0} = -E_x(0, 0) = 0$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial z}|_{x=0, z=0} = -E_z(0, 0) = 0$, так как в центре кольца ($\vec{E}(0, 0) = 0$) поле отсутствует. Однако в начале координат справедливо неравенство $\varphi_{xx} \varphi_{zz} - \varphi_{xz}^2 < 0$. Действительно, в плоскости кольца справедливо неравенство $\varphi_{xx} > 0$ при $x \in [0, R]$ ($E_x(x, 0)$ монотонно убывает от 0 до $-\infty$ при изменении x от 0 до R и, следовательно, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}|_{x=0, z=0} = -\frac{\partial E_x}{\partial x}|_{x=0, z=0} > 0$). На оси симметрии при $z \in [0, \frac{R}{\sqrt{2}}]$ выполнено неравенство $\varphi_{zz} < 0$ ($E_z(0, z)$ монотонно возрастает от 0 до $2E_0/\sqrt{27}$ при изменении z от 0 до $R/\sqrt{2}$ и, следовательно, $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}|_{x=0, z=0} = -\frac{\partial E_z}{\partial z}|_{x=0, z=0} < 0$). Таким образом, достаточное условие локального экстремума функции $\varphi(x, z)$ в точке (0,0) не выполняется. Однако, если точка наблюдения принадлежит плоскости кольца $P(x, y, 0)$ (x и y произвольны), то в силу симметрии потенциала относительно оси z в центре кольца образуется потенциальная яма с бесконечно высокими стенками при $(x^2 + y^2)^{1/2} = R$, т.е. вдоль нити кольца. Для функции $\varphi(x, y) = \varphi(x, y, 0)$ в точке $\{x=0, y=0\}$ выполняется необходимое и достаточное условие минимума:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}|_{0,0} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}|_{0,0} > 0, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y}|_{0,0} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}|_{0,0} > 0, \quad \varphi_{xx} \varphi_{yy} - \varphi_{xy}^2 > 0.$$

Внутри области, ограниченной окружностью ($x^2 + y^2 = R^2$), минимальное значение безразмерного потенциала $\bar{\varphi}(x, y)$ равно 1 и достигается в начале координат (0,0,0) (рис. 1). В то же время потенциал кольца убывает при удалении от его центра вдоль оси z , что противоречит наличию локального минимума функции $\varphi(x, y, z)$ в точке (0,0,0) (рис. 2).

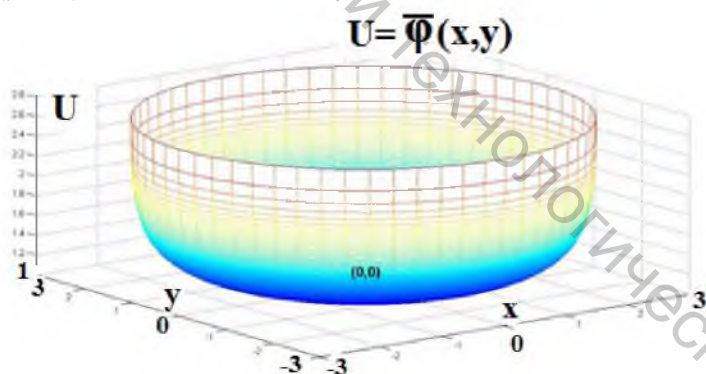


Рисунок 1 – 3D график потенциала $U = \bar{\varphi}(x, y)$, создаваемого во внутренней области кольцевого электрода ($z = 0$, $\sqrt{x^2 + y^2} < R$. Радиус кольца $R = 3$ ед.)

