УДК 531.01: 677

НЕРАСТЯЖИМАЯ НИТЬ В ВОЗДУШНОМ ПОТОКЕ СО СТЕПЕННЫМ ТРЕНИЕМ

Г.Н. Федосеев, доцент,
УО «Витебский государственный технологический университет»,
г. Витебск, Республика Беларусь

Рассматривается (рис.1) нерастяжимая нить, подаваемая из питателя ***C*** в воздух, движущийся с постоянной скоростью ***V***. Длина $\boldsymbol{\delta}$ нити, увлекаемой потоком, изменяется с течением времени. Плотность силы трения [1], действующей на нить в потоке, считаем пропорциональной n-ой степени относительной скорости потока:

$$F = k(V - v)n, \qquad (1)$$

где ***k*** – коэффициент пропорциональности; постоянное начальное натяжение нити, созданное тормозным устройством ***A***, меньше силы, распределенной с плотностью (1),

$$T0 < \mu\delta 0kVn \qquad (2)$$

(скорость нити в начальный момент $v = 0$) – в противном случае поток не увлечет нить. Величина $\mu\delta_0$ в условии (2) – масса начального отрезка нити длиной δ_0 (μ – масса единицы длины нити).

Существует [2] приближенное решение в простейшем случае линейного трения, да еще и в случае сравнительно медленного (на начальном участке) движения нити – скоростью нити (по сравнению со скоростью потока) пренебрегают. Цель работы – получить полное решение задачи и на его основе оценить приближенное решение.

Используя теорему об изменении кинетической энергии элемента нити (рис. 1).

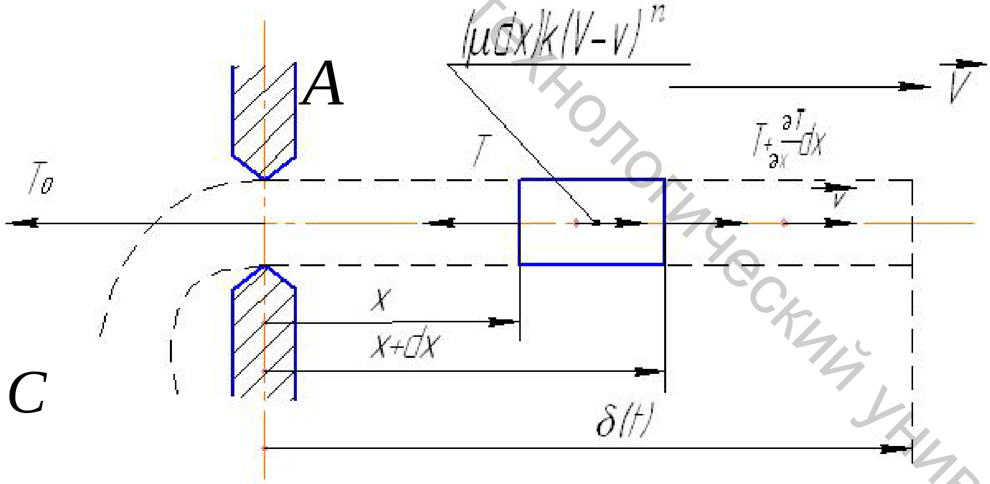

Рисунок 1 – К приложению теоремы об изменении кинетической энергии к элементу нити

получим уравнение

$$v\, dv/d\delta - k\,(V-v)n = 1/\mu\ \partial T/\partial x.$$

Скорость нити в нем

$$v = d\delta/dt,$$

что дает уравнение

$$\frac{1}{\mu}\frac{\partial T}{\partial x} = -k\,(V\text{-}v)n + \frac{dv}{dt}, \tag{3}$$

где правая часть зависит только от времени. Следовательно, натяжение

$$T = \mu\,[\,-k(V\text{-}v)n + \frac{dv}{dt}\,]\,x + D(t), \tag{4}$$

но при $x = 0$ натяжение $T = T_0$, т.е. натяжение (3)

$$T = \mu\,[\,-k(V\text{-}v)n + dv/dt\,]\,x + T0$$

изменяется вдоль нити (в момент t) по линейному закону, что дает право написать:

$$\partial T/\partial x = -T_0/\delta\,.$$

Используя ее в дифференциальном уравнении (3), напишем его в виде

$$\frac{dv}{dt} = k(V\text{ -}v)n - \frac{T_0}{\mu\delta}. \tag{5}$$

Решим уравнение (5), не прибегая к ограничению $v << V$ [2]. Введем с этой целью безразмерные скорость нити и время

$$\upsilon = \frac{v}{V},\ \tau = \frac{t}{\delta_0}V \tag{6}$$

Используя в уравнении (5) безразмерное ускорение $\alpha = d\upsilon/d\tau$, получим

$$\alpha = \frac{kV^n}{V^2}\delta_0(1-\upsilon)^n - \frac{T_0}{\mu V^2}\cdot\frac{1}{\frac{\delta}{\delta_0}}, \tag{7}$$

где υ – безразмерная скорость , τ – безразмерное время (6).

Вводя теперь в уравнение (7) безразмерные константы

$$A = k\delta 0\ Vn\text{-}2\,,\ B = \frac{T_0}{\mu V^2} \tag{8}$$

и безразмерную длину нити

$$\Delta = \delta/\delta 0, \tag{9}$$

напишем его в виде

$$\alpha = A\,(1\text{-}\upsilon)n - \frac{B}{\Delta}. \tag{10}$$

Беря в уравнении (10) константы (8) A = 2, B = 1, показатель степени n = 2 и задавая начальную скорость нити (длиной δ0) v = 0 ,начальную длину нити δ = δ0, найдем начальные значения безразмерной скорости (6) и безразмерной длины (9)

$$\upsilon_0 = 0,\ \ \Delta_0 = 1;$$

уравнение (10) интегрируем, следуя алгоритму (рис.2), где положено

$$\Delta\tau = 0{,}1.$$

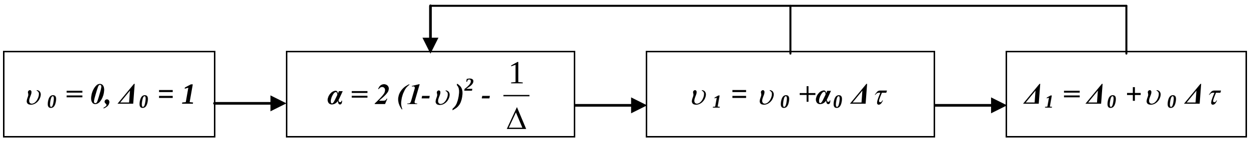

Рисунок 2 – Алгоритм интегрирования уравнения (10)

Графики безразмерных ускорения $\alpha = dv/d\tau$ и скорости (6) в функции перемещения (9) представлены на рисунке 3.

Понятно, что при $\tau \to \infty$ перемещение $\Delta \to \infty$, скорость $\upsilon \to 1$ (т.е. к скорости ***V***), ускорение $\alpha \to 0$ – см. уравнение (10).

В приближении решений в работе [2] безразмерная скорость ***v*** << ***1***, безразмерное ускорение (10) примет вид

$$\alpha^* = \frac{d\upsilon}{d\tau} = 2 - \frac{1}{\Delta}. \tag{11}$$

Сравнение скорости и ускорения (рис.2), представленных в функции перемещения Δ, с приближенным решением α^* (11), v^* показано на рисунке 3. Как видим, скорость υ (рис.2) и скорость v^* в приближенном решении близки в интервале $1{,}0 < \Delta < 1{,}03$. По-видимому, использование приближенной зависимости (11) не целесообразно.

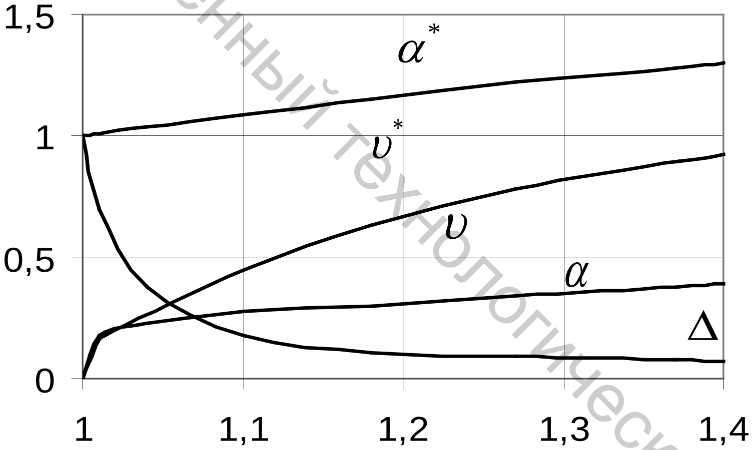

Рисунок 3 – Безразмерные скорость и ускорение в сравнении с приближенным решением

Список использованных источников

1. Краснов, Н. Ф. Аэродинамика / Н. Ф. Краснов. – Москва : Высшая школа, 1971. – 630 с.
2. Якубовский, Ю. В. Основы механики нити / Ю. В. Якубовский [и др.]. – Москва : Легкая индустрия, 1973. – 271с.