МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования

«Витебский государственный технологический университет»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Функции нескольких переменных.
Интегральное исчисление функции одной переменной

Методические указания к практическим занятиям
для студентов второго курса заочной формы обучения

ВИТЕБСК
2016

УДК 517 (075.8)

Высшая математика. Функции нескольких переменных. Интегральное исчисление функции одной переменной: методические указания к практическим занятиям для студентов второго курса заочной формы обучения.

Витебск: Министерство образования Республики Беларусь, УО «ВГТУ», 2016.

Составители: доц. Джежора А.А.,
доц. Дунина Е.Б.,
доц. Никонова Т.В.,
ст. преп. Рубаник О.Е.,
ст. преп. Статковский Н.С.

В методических указаниях изложены теоретические сведения и практические задания по трем разделам курса «Высшая математика». Издание предназначено для студентов всех специальностей заочной формы обучения и может быть использовано на практических занятиях и для самостоятельной работы студентов по высшей математике.

Одобрено кафедрой математики и информационных технологий УО «ВГТУ» 12.05.2016, протокол № 12.

Рецензент: ст. преп. Коваленко А.В.
Редактор: ст. преп. Завацкий Ю.А.

Рекомендовано к опубликованию редакционно-издательским советом УО «ВГТУ» «27» мая 2016 г., протокол № 5 .

Ответственный за выпуск: Шалапухо Е.А.

Учреждение образования «Витебский государственный технологический университет»

Подписано к печати 02.12.16. Формат 60x90 1/16. Уч.-изд. лист. 4.0.
Печать ризографическая. Тираж 90 экз. Заказ № 379.
Отпечатано на ризографе учреждения образования «Витебский государственный технологический университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/172 от 12 февраля 2014 г.
210035, г. Витебск, Московский пр., 72.

Введение

Методические указания предназначены для студентов всех специальностей заочной формы обучения и дополняют лекционные курсы по дисциплине «Высшая математика».

Весь материал распределен по трем разделам. Разделы состоят из подразделов. Вначале каждого подраздела даются краткие теоретические сведения, рассмотрены примеры решения задач и приводятся задачи для самостоятельной работы, которые помогают сформировать у студентов современные теоретические и практические знания по математике. Дополнительную информацию по каждому разделу можно найти в предложенном списке литературы.

Методические указания могут использоваться также и при дистанционном изучении данной дисциплины.

1 Неопределенный интеграл

1.1 Первообразная и неопределенный интеграл

Функция $F(x)$ называется ***первообразной*** для функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, если во всех точках этого отрезка выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

Пример: Функция $F(x)=x^3+7$ является первообразной для функции $f(x)=3x^2$, т. к. $(x^3+7)' = 3x^2$. Однако, $F_1(x)=x^3-5$, $F_2(x)=x^3+1$, $F_3(x)=x^3-19$ также являются первообразными для функции $f(x)=3x^2$, поскольку их производные также равны $3x^2$. Следовательно, первообразная функции не единственна.

Теорема: Пусть $F(x)$ – первообразная для функции $f(x)$ на $[a, b]$, тогда $F(x)+c$, где c – const, есть общий вид первообразной для функции $f(x)$ на $[a, b]$.

Пример: $F(x)=x^3+c$ – общий вид первообразной для функции $f(x)=3x^2$.

Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$, то выражение $F(x)+c$, где c – const называется ***неопределенным интегралом*** от $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$. Таким образом, по определению

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \tag{1.1}$$

если $F'(x) = f(x)$.

Функцию $f(x)$ называют ***подынтегральной функцией***, $f(x)dx$ – ***подынтегральным выражением***, а знак $\int$ – ***знаком интеграла***.

С геометрической точки зрения неопределенный интеграл представляет собой совокупность кривых, каждая из которых получается путем сдвига одной из кривых параллельно самой себе вверх или вниз вдоль оси Oy (рисунок 1.1).

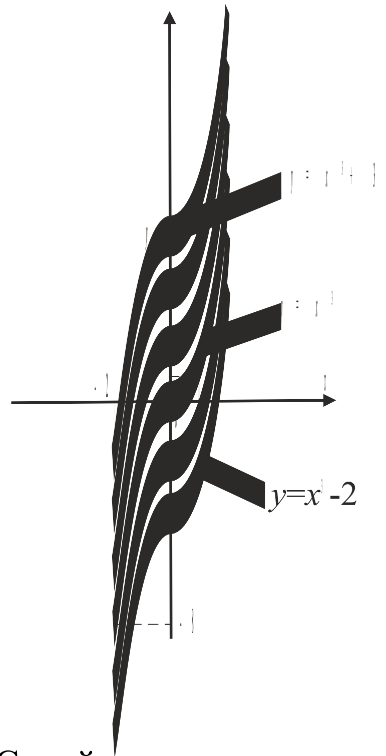


Рисунок 1.1 – Семейство интегральных кривых $F(x)=x^3+c$.

Операция нахождения всех первообразных или неопределенного интеграла называется ***операцией интегрирования данной функции***.

Пример: В силу предыдущего примера $\int 3x^2dx = x^3 + c$.

Свойства неопределенного интеграла:

1. *Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции*:

   $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x).$

2. *Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению*:

   $d\int f(x)dx = f(x)dx$.

3. *Неопределенный интеграл от дифференциала некоторой функции равен этой функции плюс произвольная постоянная*

   $\int dF(x) = F(x) + c$.

4. *Неопределенный интеграл от суммы функций равен сумме их интегралов, постоянный множитель можно выносить за знак интеграла*

   $\int \left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right)dx = \alpha\int f(x)dx + \beta\int g(x)dx + c$, $\forall\alpha, \beta \in \mathbf{R}$.

5. *Если F(x) – первообразная для f(x), то*

$$\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b}{a}) + c. \quad (1.2)$$

Таблица основных неопределенных интегралов:

1. $\int 0 \cdot du = c,$
2. $\int du = u + c,$
3. $\int u^a du = \dfrac{u^{a+1}}{a+1} + c,$
4. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + c,$
5. $\int a^u du = \dfrac{a^u}{\ln a} + c,$
6. $\int e^u du = e^u + c,$
7. $\int \sin u du = -\cos u + c,$
8. $\int \cos u du = \sin u + c,$
9. $\int \dfrac{du}{\cos^2 u} = \operatorname{tg} u + c,$
10. $\int \dfrac{du}{\sin^2 u} = -\operatorname{ctg} u + c,$
11. $\int \operatorname{tg} u\, du = -\ln|\cos u| + c,$
12. $\int \operatorname{ctg} u\, du = \ln|\sin u| + c,$
13. $\int \dfrac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + c = -\arccos u + c,$
14. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \arcsin\left(\dfrac{u}{a}\right) + c = -\arccos\left(\dfrac{u}{a}\right) + c,$
15. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + c,$
16. $\int \dfrac{du}{1+u^2} = \operatorname{arctg} u + c = -\operatorname{arcctg} u + c,$
17. $\int \dfrac{du}{u^2+a^2} = \dfrac{1}{a} \cdot \operatorname{arctg}\left(\dfrac{u}{a}\right) + c = -\dfrac{1}{a} \cdot \operatorname{arcctg}\left(\dfrac{u}{a}\right) + c,$
18. $\int \dfrac{du}{u^2-a^2} = \dfrac{1}{2a} \cdot \ln\left|\dfrac{u-a}{u+a}\right| + c.$

В этих формулах a – постоянная, а u – независимая переменная или любая функция независимой переменной.

Например, интеграл $I_1 = \int \sqrt[3]{x^2}\, dx = \int x^{\frac{2}{3}} dx$ представляет формулу 3 при u=x, $a = \dfrac{2}{3}$. Согласно этой формуле $I_1 = \dfrac{3}{5} x^{\frac{5}{3}} + c.$

Интеграл $I_2 = \int 2^x dx$ представляет формулу 5 при u=x, a=2. Согласно этой формуле $I_2 = \dfrac{2^x}{\ln 2} + c.$

Интеграл $I_3 = \int \dfrac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \int \dfrac{dx}{\sqrt{3^2-x^2}}$ представляет формулу 14 при u=x, a=3. Согласно этой формуле $I_3 = \arcsin\left(\dfrac{x}{3}\right) + c$ или $I_3 = -\arccos\left(\dfrac{x}{3}\right) + c.$

Пример 1: найти неопределенный интеграл $\int \left(9x + \dfrac{12}{\sqrt{x}} + \dfrac{4}{x^2}\right) dx.$

Решение. Воспользовавшись тем, что $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$, $\dfrac{c}{x^n} = c \cdot x^{-n}$ перепишем подынтегральную функцию следующим образом:

$$\int\left(9x + \frac{12}{\sqrt{x}} + \frac{4}{x^2}\right)dx = \int\left(9x + 12x^{-\frac{1}{2}} + 4x^{-2}\right)dx$$

По свойству 4 неопределенного интеграла:

$$\int\left(9x + 12x^{-\frac{1}{2}} + 4x^{-2}\right)dx = 9\int xdx + 12\int x^{-\frac{1}{2}}dx + 4\int x^{-2}dx.$$

Применив формулу 3 таблицы основных неопределенных интегралов, получим:

$$9\int xdx + 12\int x^{-\frac{1}{2}}dx + 4\int x^{-2}dx = 9 \cdot \frac{x^2}{2} + 12x^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{1} + 4 \cdot \frac{x^{-1}}{(-1)} + c = \frac{9}{2}x^2 + 24\sqrt{x} - \frac{4}{x} + c.$$

Пример 2: найти неопределенный интеграл $\int\left(e^x + 3\cos x - \dfrac{4}{\sqrt{4+x^2}}\right)dx.$

Решение. По свойству 4 неопределенного интеграла:

$$\int\left(e^x + 3\cos x - \frac{4}{\sqrt{4+x^2}}\right)dx = \int e^x dx + 3\int \cos x dx - 4\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}}.$$

Применив формулы 6, 8, 15 таблицы основных неопределенных интегралов, получим:

$$\int e^x dx + 3\int \cos x dx - 4\int \frac{dx}{\sqrt{4+x^2}} = e^x + 3\sin x - 4\ln\left|x + \sqrt{4+x^2}\right| + c.$$

Задания для решения

1. Найти неопределенные интегралы.

1.1 $\int(3x^4 - 5x^2 + 7x - 2)dx;$

1.2 $\int(-7x^2 + 11x^3 - 2x^5 + 3)dx;$

1.3 $\int(14x - 2x^5 + 7x^4 - 1)dx;$

1.4 $\int(-9x^7 + 3x - 11x^2 + 5)dx;$

1.5 $\int\left(2x^3 + \dfrac{5}{x^2} - 4 \cdot \sqrt[3]{x}\right)dx;$

1.6 $\int\left(\dfrac{11}{\sqrt{x}} + 5x - \dfrac{12}{x^5}\right)dx;$

1.7 $\int\left(2 \cdot \sqrt[4]{x^3} - 6x^7 + \dfrac{3}{x}\right)dx;$

1.8 $\int\left(5x^5 - \dfrac{3}{\sqrt[7]{x^8}} + 3 \cdot \sqrt[5]{x^3}\right)dx;$

1.9 $\int\left(\dfrac{2}{x^4} - 3 \cdot \sqrt[5]{x^7} + \dfrac{4}{x^3}\right)dx;$

1.10 $\int\left(8 \cdot \sqrt[12]{x} + 3x - \dfrac{2}{x^9}\right)dx;$

1.11 $\int\left(5x^7-\dfrac{6}{\sqrt{x^3}}+\dfrac{4}{x^2}\right)dx;$

1.12 $\int\left(3x^{11}-\dfrac{2}{\sqrt{x^7}}-\dfrac{8}{x^4}\right)dx;$

1.13 $\int\left(16x^2-\dfrac{3}{\sqrt[8]{x^3}}-\dfrac{1}{x^7}\right)dx;$

1.14 $\int\left(\dfrac{1}{2}x^6+4\sqrt[3]{x}+\dfrac{14}{x^6}\right)dx;$

2. Найти неопределенные интегралы.

2.1 $\int\left(\sin x-6^x+\dfrac{2}{1-x^2}\right)dx;$

2.2 $\int\left(-\dfrac{4}{\cos^2 x}+\dfrac{5}{x}-4\sqrt{x}\right)dx;$

2.3 $\int\left(\dfrac{7}{x^2+3}-6\cos x+3\cdot 4^x\right)dx;$

2.4 $\int\left(\dfrac{8}{\sqrt{1-x^2}}-9x^4+3e^x\right)dx;$

2.5 $\int\left(\dfrac{3}{\sin^2 x}-4\cdot\sqrt[3]{x}+\dfrac{5}{6-x^2}\right)dx;$

2.6 $\int\left(-\dfrac{12}{x^3}+\dfrac{3}{4+x^2}+7^x\right)dx;$

2.7 $\int\left(-6\cdot\sqrt[4]{x^3}+\dfrac{9}{\sqrt{x^2-4}}+11\sin x\right)dx;$

2.8 $\int\left(5x^5+\dfrac{9}{\sqrt{x^2+4}}+\dfrac{3}{x}\right)dx;$

2.9 $\int\left(\dfrac{2}{x^4}-\dfrac{7}{\sqrt{16-x^2}}+11^x\right)dx;$

2.10 $\int\left(8x^3+\dfrac{2}{\sqrt{25-x^2}}+\dfrac{5}{\sin^2 x}\right)dx.$

1.2 Нахождение неопределенного интеграла методом замены переменной

При вычислении неопределенного интеграла часто используют метод замены переменной, который сводится к формуле

$$\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx=\begin{bmatrix} t=\varphi(x) \\ dt=\varphi'(x)dx \end{bmatrix}=\int f(t)dt+c. \tag{1.3}$$

Для вычисления интеграла $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)dx$ нужно «подвести» $\varphi'(x)$ под знак дифференциала, получив при этом $d\varphi(x)$, и осуществить замену $\varphi(x)=t$. Затем нужно вычислить интеграл $\int f(t)dt$ и в окончательном результате вернуться к исходной переменной x по формуле $t=\varphi(x)$.

Пример 1: найти неопределенный интеграл $\int\dfrac{dx}{3-7x}.$

Решение.

$$\int \frac{dx}{3-7x} = \left[\begin{array}{l} (3-7x)' = -7, \\ (3-7x)'dx = (-7)dx = d(3-7x) \\ dx = \dfrac{d(3-7x)}{(-7)} \end{array} \right] = \int \frac{\dfrac{d(3-7x)}{(-7)}}{3-7x} = \left[\begin{array}{l} t = 3-7x, \\ dt = d(3-7x) \end{array} \right] =$$

$$= -\frac{1}{7}\int \frac{dt}{t} = -\frac{1}{7}\ln|t| + c = -\frac{1}{7}\ln|3-7x| + c.$$

Этот же пример можно решить, используя свойство 5 неопределенного интеграла:

Т.к. $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$, то по формуле (1.2) $\int \frac{dx}{3-7x} = \frac{\ln|3-7x|}{(-7)} + c.$

Пример 2: найти неопределенный интеграл $\int 2^{6x-4}dx.$

Решение.

$$\int 2^{6x-4}dx = \left[\begin{array}{l} (6x-4)' = 6, \\ (6x-4)'dx = 6dx = d(6x-4) \\ dx = \dfrac{d(6x-4)}{6} \end{array} \right] = \int 2^{6x-4} \cdot \frac{d(6x-4)}{6} = \left[\begin{array}{l} t = 6x-4, \\ dt = d(6x-4) \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{6}\int 2^t dt = \frac{1}{6}\cdot\frac{2^t}{\ln 2} + c = \frac{1}{6}\cdot\frac{2^{6x-4}}{\ln 2} + c.$$

Этот же пример можно решить, используя свойство 5 неопределенного интеграла:

Т.к. $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + c$, то по формуле (1.2) $\int 2^{6x-4}dx = \frac{2^{6x-4}}{\ln 2 \cdot 6} + c.$

Пример 3: найти неопределенный интеграл

$$\int\left(\frac{6}{1+3x^2} - \cos(12x+3) - \frac{4}{\sqrt{1-5x^2}}\right)dx.$$

Решение. По свойству 4 неопределенного интеграла:

$$\int\left(\frac{6}{1+3x^2} - \cos(12x+3) - \frac{4}{\sqrt{1-5x^2}}\right)dx = 6\int\frac{dx}{1+3x^2} - \int\cos(12x+3)dx - 4\int\frac{dx}{\sqrt{1-5x^2}}.$$

Каждый из полученных интегралов найдем по отдельности.

$$6\int\frac{dx}{1+3x^2}=6\int\frac{dx}{1+(\sqrt{3}x)^2}=\left[\begin{array}{l}(\sqrt{3}x)'=\sqrt{3},\\(\sqrt{3}x)'dx=\sqrt{3}dx=d(\sqrt{3}x),\\dx=\dfrac{d(\sqrt{3}x)}{\sqrt{3}}\end{array}\right]=6\int\frac{\frac{d(\sqrt{3}x)}{\sqrt{3}}}{1+(\sqrt{3}x)^2}=$$

$$=\frac{6}{\sqrt{3}}\int\frac{d(\sqrt{3}x)}{1+(\sqrt{3}x)^2}=\left[\begin{array}{l}t=\sqrt{3}x,\\dt=d(\sqrt{3}x)\end{array}\right]=2\sqrt{3}\int\frac{dt}{1+t^2}=2\sqrt{3}\cdot\operatorname{arctg}t+c=$$

$$=2\sqrt{3}\cdot\operatorname{arctg}(\sqrt{3}x)+c.$$

Этот же интеграл можно найти, используя свойство 5 неопределенного интеграла. Т.к. $6\int\frac{dx}{1+x^2}=6\cdot\operatorname{arctg}x+c,$ то по формуле (1.2)

$$6\int\frac{dx}{1+(\sqrt{3}x)^2}=6\cdot\frac{\operatorname{arctg}(\sqrt{3}x)}{\sqrt{3}}+c=2\sqrt{3}\cdot\operatorname{arctg}(\sqrt{3}x)+c.$$

$$\int\cos(12x+3)dx=\left[\begin{array}{l}(12x+3)'=12,\\(12x+3)'dx=12dx=d(12x+3),\\dx=\dfrac{d(12x+3)}{12}\end{array}\right]=\int\cos(12x+3)\cdot\frac{d(12x+3)}{12}=$$

$$=\left[\begin{array}{l}t=12x+3,\\dt=d(12x+3)\end{array}\right]=\frac{1}{12}\int\cos t\,dt=\frac{1}{12}\cdot\sin t+c=\frac{1}{12}\cdot\sin(12x+3)+c.$$

Этот же интеграл можно найти, используя свойство 5 неопределенного интеграла. Т.к. $\int\cos x\,dx=\sin x+c,$ то по формуле (1.2)

$$\int\cos(12x+3)\,dx=\frac{\sin(12x+3)}{12}+c.$$

$$4\int\frac{dx}{\sqrt{1-5x^2}}=4\int\frac{dx}{\sqrt{1-(\sqrt{5}x)^2}}=\left[\begin{array}{l}(\sqrt{5}x)'=\sqrt{5},\\(\sqrt{5}x)'dx=\sqrt{5}dx=d(\sqrt{5}x),\\dx=\dfrac{d(\sqrt{5}x)}{\sqrt{5}}\end{array}\right]=4\int\frac{\frac{d(\sqrt{5}x)}{\sqrt{5}}}{\sqrt{1-(\sqrt{5}x)^2}}=$$

$$=\frac{4}{\sqrt{5}}\int\frac{d(\sqrt{5}x)}{\sqrt{1-(\sqrt{5}x)^2}}=\left[\begin{array}{l}t=\sqrt{5}x,\\dt=d(\sqrt{5}x)\end{array}\right]=\frac{4}{\sqrt{5}}\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\frac{4}{\sqrt{5}}\cdot\arcsin t+c=$$

$$=\frac{4}{\sqrt{5}}\cdot\arcsin(\sqrt{5}x)+c.$$

Этот же интеграл можно найти, используя свойство 5 неопределенного интеграла. Т.к. $4\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = 4 \cdot \arcsin x + c$, то по формуле (1.2) $4\int \frac{dx}{\sqrt{1-(\sqrt{5}x)^2}} = 4 \cdot \frac{\arcsin(\sqrt{5}x)}{\sqrt{5}} + c.$

В итоге получим, что

$$\int\left(\frac{6}{1+3x^2} - \cos(12x+3) - \frac{4}{\sqrt{1-5x^2}}\right)dx = 2\sqrt{3} \cdot \operatorname{arctg}(\sqrt{3}x) - \frac{1}{12} \cdot \sin(12x+3) -$$
$$-\frac{4}{\sqrt{5}} \cdot \arcsin(\sqrt{5}x) + c.$$

Пример 4: найти неопределенный интеграл $\int \frac{5xdx}{\sqrt[3]{3x^2+4}}$.

Решение.

$$5\int \frac{xdx}{\sqrt[3]{3x^2+4}} = \begin{bmatrix} (3x^2+4)' = 6x, \\ (3x^2+4)'dx = 6xdx = d(3x^2+4), \\ xdx = \dfrac{d(3x^2+4)}{6} \end{bmatrix} = 5\int \frac{\frac{d(3x^2+4)}{6}}{\sqrt[3]{3x^2+4}} =$$

$$= \begin{bmatrix} t = 3x^2+4, \\ dt = d(3x^2+4) \end{bmatrix} = \frac{5}{6}\int \frac{dt}{\sqrt[3]{t}} = \frac{5}{6}\int t^{-\frac{1}{3}}dt = \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{2} \cdot t^{\frac{2}{3}} + c = \frac{5}{4} \cdot (3x^2+4)^{\frac{2}{3}} + c.$$

Пример 5: найти неопределенный интеграл $\int 7^{\cos 2x} \cdot \sin 2x\, dx$.

Решение.

$$\int 7^{\cos 2x} \cdot \sin 2x\, dx = \begin{bmatrix} (\cos 2x)' = -2\sin 2x, \\ (\cos 2x)'dx = -2\sin 2x\, dx = d(\cos 2x) \\ \sin 2x\, dx = \dfrac{d(\cos 2x)}{(-2)} \end{bmatrix} = \int 7^{\cos 2x} \cdot \frac{d(\cos 2x)}{(-2)} =$$

$$= \begin{bmatrix} t = \cos 2x, \\ dt = d(\cos 2x) \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\int 7^t\, dt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{7^t}{\ln 7} + c = -\frac{1}{2} \cdot \frac{7^{\cos 2x}}{\ln 7} + c.$$

Пример 6: найти неопределенный интеграл $\int \frac{\cos 2x dx}{\sin^3 2x}$.

Решение.

$$\int \frac{\cos 2x dx}{\sin^3 2x} = \left[\begin{array}{l} (\sin 2x)' = 2\cos 2x, \\ (\sin 2x)' dx = 2\cos 2x dx = d(\sin 2x), \\ \cos 2x dx = \dfrac{d(\sin 2x)}{2} \end{array} \right] = \int \frac{\dfrac{d(\sin 2x)}{2}}{\sin^3 2x} = \left[\begin{array}{l} t = \sin 2x, \\ dt = d(\sin 2x) \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{2}\int t^{-3} dt = \frac{1}{2}\cdot \frac{t^{-2}}{(-2)} + c = \frac{(\sin 2x)^{-2}}{-4} + c = -\frac{1}{4\sin^2 2x} + c.$$

Задания для решения

1. Найти неопределенные интегралы.

1.1 $\int \frac{dx}{5+6x}$; **1.2** $\int (6x-7)^2\, dx$; **1.3** $\int \frac{dx}{(2+5x)^5}$;

1.4 $\int \sqrt{3+2x}dx$; **1.5** $\int \sqrt[3]{(5x-1)^2}\, dx$; **1.6** $\int \frac{dx}{\sqrt{(3-4x)^5}}$;

1.7 $\int \frac{8dx}{\sqrt[4]{(3x+1)^3}}$; **1.8** $\int \frac{(-3)dx}{\sqrt{3x^2+4}}$; **1.9** $\int \frac{4dx}{5-2x^2}$;

1.10 $\int \frac{(-7)dx}{\sqrt{1-2x^2}}$.

2. Найти неопределенные интегралы.

2.1 $\int 5^{4-3x} dx$; **2.2** $\int e^{11+5x}\, dx$; **2.3** $\int \frac{dx}{2-8x}$;

2.4 $\int \sin(3+7x)\, dx$; **2.5** $\int \frac{2dx}{\cos^2 4x}$; **2.6** $\int \frac{dx}{\sqrt{1+3x^2}}$;

2.7 $\int \frac{8dx}{\sqrt{1-9x^2}}$; **2.8** $\int \frac{9dx}{5x^2+4}$; **2.9** $\int \frac{4dx}{\sin^2(6x-1)}$;

2.10 $\int \frac{2dx}{\sqrt[4]{6x+3}}$.

3. Найти неопределенные интегралы.

3.1 $\int \left(\cos(9x+2) - 3^{4x} - \frac{1}{2x-4} \right) dx$; **3.2** $\int \left(\frac{1}{\cos^2(4-5x)} - \frac{3}{\sqrt{1-4x^2}} - 7^{3x} \right) dx$;

3.3 $\int \left(5^{6x+1} + \frac{2}{1+3x^2} - \sin 7x \right) dx$; **3.4** $\int \left(\cos(15x-2) - \frac{3}{\sqrt{3x^2-2}} - e^{5x} \right) dx$;

3.5 $\int \left(\frac{5}{1+4x^2} - \sin(5x-9) + \frac{4}{3x-5} \right) dx$; **3.6** $\int \left(\frac{5}{4-x^2} + \frac{11}{\sin^2 7x} - \sqrt{2+3x} \right) dx$;

3.7 $\int \left(\sqrt{(5x+2)^2} + e^{3x-8} + (3x-6)^4\right) dx$; **3.8** $\int \left(\frac{2}{\sqrt{4x^2-7}} - \frac{12}{4x+3} - 5^{2x-5} \right) dx$;

3.9 $\int \left(\frac{14}{\cos^2 8x} + \frac{7}{\sqrt[3]{x^2}} - \frac{1}{6-x^2} \right) dx$; **3.10** $\int \left(\frac{4}{\sqrt{5-9x^2}} + 2e^{5x+1} + \frac{7}{\sqrt{4x^2+1}} \right) dx$.

4. Найти неопределенные интегралы.

4.1 $\int 5x \cdot (7x^2-1)^3 dx$; **4.2** $\int 3x \cdot \sqrt[3]{x^2+4}\, dx$; **4.3** $\int x \cdot \sqrt[5]{(5x^2+6)^3} dx$;

4.4 $\int \frac{4x dx}{3-6x^2}$; **4.5** $\int \frac{2x^2 dx}{(5-3x^3)^4}$; **4.6** $\int \frac{6x^2 dx}{\sqrt{4x^3+3}}$;

4.7 $\int \frac{8x dx}{\sqrt[4]{(3x^2+1)^3}}$; **4.8** $\int \frac{(2x-3)dx}{\sqrt{3x^2+4}}$; **4.9** $\int \frac{(3x+4)dx}{5-2x^2}$;

4.10 $\int \frac{(3x-3)dx}{\sqrt{1-x^2}}$.

5. Найти неопределенные интегралы.

5.1 $\int x \cdot e^{7x^2-1} dx$; **5.2** $\int x \cdot 7^{x^2+4}\, dx$; **5.3** $\int \frac{x dx}{6x^2+4}$;

5.4 $\int \frac{e^{\mathrm{tg} x} dx}{\cos^2 x}$; **5.5** $\int \frac{5^{\mathrm{arctg} x}}{1+x^2} dx$; **5.6** $\int \frac{dx}{(1-2x)\sqrt[3]{\ln^2(1-2x)}}$;

5.7 $\int \frac{2^{\arcsin 3x} dx}{\sqrt{1-9x^2}}$; **5.8** $\int \frac{\sqrt[4]{\ln^3(9x+4)}\, dx}{9x+4}$; **5.9** $\int e^{\cos 3x} \sin 3x dx$;

5.10 $\int \frac{dx}{(x+4)\ln^7(x+4)}$.

6. Найти неопределенные интегралы.

6.1 $\int \frac{\cos 3x\, dx}{\sqrt{\sin 3x + 4}}$. **6.2** $\int \frac{\sqrt[3]{\mathrm{ctg} 4x}\, dx}{\sin^2 4x}$; **6.3** $\int \frac{\sqrt[4]{\mathrm{arcctg}^5 7x}\, dx}{1+49x^2}$;

6.4 $\int \frac{\sin 2x\, dx}{1+3\cos 2x}$; **6.5** $\int \frac{\mathrm{tg}^4 5x}{\cos^2 5x} dx$; **6.6** $\int \frac{\arcsin^3 2x\, dx}{\sqrt{1-4x^2}}$;

6.7 $\int \frac{dx}{(1+x^2)\sqrt{\mathrm{arctg}\, x}}$; **68** $\int \sin^5 6x \cdot \cos 6x\, dx$; **6.9** $\int \frac{\arccos 4x\, dx}{\sqrt{1-16x^2}}$;

6.10 $\int \frac{\cos 5x\, dx}{(3\sin 5x - 8)^3}$.

1.3 Интегрирование по частям

Метод интегрирования по частям основан на следующей формуле:

$$\int u dv = uv - \int v du, \tag{1.4}$$

где $u(x)$ и $v(x)$ – непрерывно дифференцируемые функции. Формула (1.4) называется формулой интегрирования по частям. Применять ее целесообразно тогда, когда подынтегральное выражение можно разбить на два множителя u и dv так, чтобы интегрирование выражений dv и vdu являлось задачей более простой, чем интегрирование исходного выражения udv.

Пример 1: найти неопределенный интеграл $\int x \cdot \cos(3x-2)dx$.

Решение.

$$\int x \cdot \cos(3x-2)dx = \left[\begin{array}{c} u = x, \quad du = dx \\ dv = \cos(3x-2)dx, \quad v = \int \cos(3x-2)dx = \frac{1}{3} \cdot \sin(3x-2) \end{array} \right] =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot x \cdot \sin(3x-2) - \int \frac{1}{3} \cdot \sin(3x-2)dx = \frac{1}{3} \cdot x \cdot \sin(3x-2) - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot (-\cos(3x-2)) + c =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot x \cdot \sin(3x-2) + \frac{1}{9} \cdot \cos(3x-2) + c.$$

Отметим, что в некоторых случаях формулу (1.4) приходится применять несколько раз.

Пример 2: найти неопределенный интеграл $\int (2x^2+1) \cdot e^{3x} dx$.

Решение.

$$\int (2x^2+1) \cdot e^{3x} dx = \left[\begin{array}{c} u = 2x^2+1, \quad du = 4xdx \\ dv = e^{3x}dx, \quad v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3} \cdot e^{3x} \end{array} \right] =$$

$$= (2x^2+1) \cdot \frac{1}{3} \cdot e^{3x} - \int \frac{1}{3} \cdot e^{3x} \cdot 4x\, dx = \frac{1}{3} \cdot (2x^2+1) \cdot e^{3x} - \frac{4}{3} \int x \cdot e^{3x}\, dx =$$

$$= \left[\begin{array}{c} u = x, \quad du = dx \\ dv = e^{3x}dx, \quad v = \int e^{3x}dx = \frac{1}{3} \cdot e^{3x} \end{array} \right] = \frac{1}{3} \cdot (2x^2+1) \cdot e^{3x} - \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot x \cdot e^{3x} - \int \frac{1}{3} e^{3x} dx \right) =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (2x^2+1) \cdot e^{3x} - \frac{4}{3} \cdot \left(\frac{1}{3} \cdot x \cdot e^{3x} - \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot e^{3x} \right) + c =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot (2x^2+1) \cdot e^{3x} - \frac{4}{9} \cdot x \cdot e^{3x} + \frac{4}{27} \cdot e^{3x} + c.$$

Пример 3: найти неопределенный интеграл $\int \operatorname{arctg} 2x dx$.

Решение.

$$\int \operatorname{arctg} 2x dx = \left[\begin{array}{cc} u = \operatorname{arctg} 2x, & du = \dfrac{2dx}{1+(2x)^2} \\ dv = dx, & v = \int dx = x \end{array} \right] = \operatorname{arctg} 2x \cdot x - \int x \cdot \frac{2dx}{1+(2x)^2} =$$

$$= \operatorname{arctg} 2x \cdot x - 2\int \frac{xdx}{1+4x^2},$$

$$2\int \frac{xdx}{1+4x^2} = \left[\begin{array}{l} (1+4x^2)' = 8x, \\ (1+4x^2)' dx = 8xdx = d(1+4x^2), \\ xdx = \dfrac{d(1+4x^2)}{8} \end{array} \right] = 2\int \frac{\frac{d(1+4x^2)}{8}}{1+4x^2} =$$

$$= \left[\begin{array}{l} t = 1+4x^2, \\ dt = d(1+4x^2) \end{array} \right] = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{4}\ln|t| + c = \frac{1}{4}\ln\left|1+4x^2\right| + c.$$

Окончательно получим:

$$\int \operatorname{arctg} 2x dx = \operatorname{arctg} 2x \cdot x - \frac{1}{4}\ln\left|1+4x^2\right| + c.$$

Интегрирование по частям иногда приводит к интегралу, совпадающему с исходным или сводящемуся к нему. В этом случае интеграл находится из получающегося относительно исходного интеграла уравнения.

Задания для решения

1. Найти неопределенные интегралы.

1.1 $\int (x+1) \cdot \sin 5x\, dx$; **1.2** $\int (2-7x) \cdot e^{4x} dx$; **1.3** $\int (2x+5) \cdot \cos \frac{x}{3}\, dx$;

1.4 $\int 2^{4x-3} \cdot \frac{x}{4}\, dx$; **1.5** $\int 7^{9-x} \cdot (x+4) dx$; **1.6** $\int e^{5-8x} \cdot (7x+2) dx$;

1.7 $\int (6x-7) \cdot \cos(4x+6)\, dx$; **1.8** $\int \sin(9x+3) \cdot \frac{x+5}{4}\, dx$; **1.9** $\int (x^2+x) \cdot e^{-x} dx$;

1.10 $\int x^2 \cdot (\sin 2x - 4) dx$.

2. Найти неопределенные интегралы.

2.1 $\int \arcsin 5x\, dx$; **2.2** $\int \operatorname{arcctg} 4x\, dx$; **2.3** $\int \arccos \frac{x}{8}\, dx$;

2.4 $\int \ln \frac{x}{2}\, dx$; **2.5** $\int \operatorname{arctg} 6x dx$; **2.6** $\int \arcsin \frac{x}{6}\, dx$;

2.7 $\int \arccos 3x\,dx$; **2.8** $\int \mathrm{arctg}\,\dfrac{x}{11}\,dx$; **2.9** $\int \mathrm{arcctg}\,\dfrac{x}{(-6)}\,dx$;

2.10 $\int \ln 18x\,dx$.

1.4 Интегрирование функций, содержащих квадратный трехчлен

$$\int \frac{(Ax+B)dx}{ax^2+bx+c}, \quad \int \frac{(Ax+B)dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}.$$

Для отыскания интегралов от функций, содержащих квадратный трехчлен, для преобразования их к формулам интегрирования следует вначале выделить полный квадрат из квадратного трехчлена, в результате чего он преобразуется в квадратный двучлен

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{c}{a}-\frac{b^2}{4a^2}\right]=a\left[\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2\pm k^2\right].$$

В дальнейшем интегралы указанных видов можно свести к формулам интегрирования 14, 15, 17 и 18 из таблицы основных неопределенных интегралов:

$$\int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}}=\arcsin\left(\frac{u}{a}\right)+c, \qquad \int \frac{du}{\sqrt{u^2\pm a^2}}=\ln\left|u+\sqrt{u^2\pm a^2}\right|+c,$$

$$\int \frac{du}{u^2+a^2}=\frac{1}{a}\cdot \mathrm{arctg}\left(\frac{u}{a}\right)+c, \qquad \int \frac{du}{u^2-a^2}=\frac{1}{2a}\cdot \ln\left|\frac{u-a}{u+a}\right|+c.$$

Пример 1: найти неопределенный интеграл $\int \dfrac{8dx}{2x^2-3x+1}$.

Решение. Выделим из квадратного трехчлена полный квадрат:

$$2x^2-3x+1=2\left(x^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}\right)=2\left(\left(x^2-2\cdot\frac{3}{4}\cdot x+\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)+\frac{1}{2}-\left(\frac{3}{4}\right)^2\right)=$$

$$=2\left(\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\frac{1}{16}\right)=2\left(\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2\right).$$

По формуле 18 при $u=x-\dfrac{3}{4}$, $a=\dfrac{1}{4}$ получим

$$\int \frac{8dx}{2x^2-3x+1}=\int \frac{8dx}{2\left(\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2\right)}=4\int \frac{dx}{\left(x-\frac{3}{4}\right)^2-\left(\frac{1}{4}\right)^2}=$$

$$= 4 \cdot \frac{1}{2 \cdot \frac{1}{4}} \cdot \ln\left|\frac{x - \frac{3}{4} - \frac{1}{4}}{x - \frac{3}{4} + \frac{1}{4}}\right| + c = 8 \cdot \ln\left|\frac{x-1}{x - \frac{1}{2}}\right| + c.$$

Пример 2: найти неопределенный интеграл $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x - 3}}$.

Решение. Выделим из квадратного трехчлена полный квадрат:

$$x^2 - 4x - 3 = (x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2) - 2^2 - 3 = (x-2)^2 - 7 = (x-2)^2 - (\sqrt{7})^2.$$

По формуле 15 при $u = x - 2$, $a = \sqrt{7}$ получим

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 4x - 3}} = \int \frac{dx}{\sqrt{(x-2)^2 - (\sqrt{7})^2}} = \ln\left|x - 2 + \sqrt{(x-2)^2 - (\sqrt{7})^2}\right| + c =$$

$$= \ln\left|x - 2 + \sqrt{x^2 - 4x - 3}\right| + c.$$

Пример 3: найти неопределенный интеграл $\int \frac{5dx}{\sqrt{9 + 6x - 3x^2}}$.

Решение. Выделим из квадратного трехчлена полный квадрат:

$$9 + 6x - 3x^2 = -3(x^2 - 2x - 3) = -3\left((x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x + 1^2) - 1^2 - 3\right) = -3\left((x-1)^2 - 4\right) =$$

$$= 3\left(2^2 - (x-1)^2\right).$$

По формуле 14 при $u = x - 1$, $a = 2$ получим

$$\int \frac{5dx}{\sqrt{9 + 6x - 3x^2}} = 5\int \frac{dx}{\sqrt{3\left(2^2 - (x-1)^2\right)}} = \frac{5}{\sqrt{3}} \int \frac{dx}{\sqrt{2^2 - (x-1)^2}} =$$

$$= \frac{5}{\sqrt{3}} \arcsin\frac{x-1}{2} + c.$$

Пример 4: найти неопределенный интеграл $\int \frac{(3x-2)dx}{x^2 + 4x + 13}$.

Решение. Выделим из квадратного трехчлена полный квадрат:

$$x^2 + 4x + 13 = (x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2) - 2^2 + 13 = (x+2)^2 + 9 = (x+2)^2 + 3^2.$$

Выделим в числителе производную знаменателя

$$(x^2 + 4x + 13)' = 2 \cdot x + 4, \; 3x - 2 = \frac{3}{2} \cdot (2x + 4) - 8.$$

Разобьем исходный интеграл на два интеграла:

$$\int \frac{(3x-2)dx}{x^2 + 4x + 13} = \int \frac{\left(\frac{3}{2} \cdot (2x+4) - 8\right)dx}{x^2 + 4x + 13} = \int \frac{\frac{3}{2} \cdot (2x+4)dx}{x^2 + 4x + 13} - \int \frac{8dx}{x^2 + 4x + 13} =$$

$$= \frac{3}{2}\int \frac{(2x+4)dx}{x^2 + 4x + 13} - 8\int \frac{dx}{x^2 + 4x + 13}.$$

Вычислим каждый из интегралов по отдельности.

$$\frac{3}{2}\int\frac{(2x+4)dx}{x^2+4x+13}=\frac{3}{2}\int\frac{d(x^2+4x+13)}{x^2+4x+13}=\left[\begin{array}{l} t=x^2+4x+13, \\ dt=d(x^2+4x+13) \end{array}\right]=\frac{3}{2}\int\frac{dt}{t}=\frac{3}{2}\ln|t|+c=$$

$$=\frac{3}{2}\ln\left|x^2+4x+13\right|+c.$$

Второй интеграл найдем по формуле 17 при $u=x+2,\quad a=3$:

$$8\int\frac{dx}{x^2+4x+13}=8\int\frac{dx}{(x+2)^2+3^2}=8\cdot\frac{1}{3}\cdot\text{arctg}\frac{x+2}{3}+c.$$

В итоге имеем, $\int\frac{(3x-2)dx}{x^2+4x+13}=\frac{3}{2}\ln\left|x^2+4x+13\right|-\frac{8}{3}\cdot\text{arctg}\frac{x+2}{3}+c.$

Задания для решения

1. Найти неопределенные интегралы.

1.1 $\int\frac{dx}{2x^2+x+2}$; **1.2** $\int\frac{dx}{3x^2-12x+3}$; **1.3** $\int\frac{dx}{\sqrt{4+8x-x^2}}$;

1.4 $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-5x+6}}$; **1.5** $\int\frac{dx}{x^2-4x+10}$; **1.6** $\int\frac{dx}{2x^2+x-6}$;

1.7 $\int\frac{dx}{\sqrt{2-3x-2x^2}}$; **1.8** $\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+6x+8}}$; **1.9** $\int\frac{(x-3)dx}{x^2-5x+4}$;

1.10 $\int\frac{(2x-10)dx}{\sqrt{1+x-x^2}}$.

1.5 Интегрирование рациональных дробей с помощью разложения их на сумму простейших дробей

Рациональной дробью называется функция $f(x)$, равная отношению двух многочленов:

$$f(x)=\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\frac{a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+\cdots+b_1x+b_0},$$

где $a_i, b_j\in\boldsymbol{R}, i=\overline{1,n}, j=\overline{1,m}$.

Рациональная дробь называется ***правильной***, если степень числителя меньше степени знаменателя, то есть $n<m$; в противном случае (если $n\geq m$) рациональная дробь называется ***неправильной***.

Перед интегрированием рациональной дроби $\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}$ необходимо выполнить следующие алгебраические преобразования и вычисления:

1. Если дана неправильная рациональная дробь, выделить из нее целую часть, разделив числитель на знаменатель столбиком и представить эту дробь в виде:

$$\frac{P_n(x)}{Q_m(x)} = M(x) + \frac{R(x)}{Q_m(x)},$$
где $M(x)$ − многочлен, $\frac{R(x)}{Q_m(x)}$ − правильная рациональная дробь.

2. Разложить знаменатель правильной дроби на линейные и квадратичные множители:
$$Q_m(x) = (x-a)^k \cdot (x-b)^s \cdot \ldots \cdot (x^2+px+q)^l \cdot \ldots,$$
где $D = p^2 - 4q < 0$.

3. Правильную рациональную дробь разложить на сумму простейших дробей:
$$\frac{R(x)}{Q_m(x)} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \cdots + \frac{A_k}{(x-a)^k} +$$
$$+ \frac{B_1}{x-b} + \frac{B_2}{(x-b)^2} + \cdots + \frac{B_s}{(x-b)^s} + \cdots +$$
$$+ \frac{C_1x+D_1}{x^2+px+q} + \frac{C_2x+D_2}{(x^2+px+q)^2} + \cdots + \frac{C_lx+D_l}{(x^2+px+q)^l} + \cdots$$

4. Вычислить неопределенные коэффициенты $A_i, B_i, C_i, D_i, \ldots$, для чего привести правую часть последнего равенства к общему знаменателю. В результате получим тождество, в котором равны знаменатели:
$$\frac{R(x)}{Q_m(x)} = \frac{S(x)}{Q_m(x)},$$
где $S(x)$ – многочлен с неопределенными коэффициентами. Поскольку в последнем тождестве равны знаменатели, значит, должны быть равны и числители:
$$R(x) = S(x). \tag{1.5}$$
Далее, применяем один из методов.

Способ 1 (метод приравнивания коэффициентов). Приравнять коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях тождества (1.5) и решить полученную систему линейных уравнений относительно искомых коэффициентов.

Способ 2 (метод частных значений). Придать в тождестве (1.5) переменной x поочередно столько конкретных числовых значений, сколько неизвестных коэффициентов и решить полученную систему.

Замечание. Часто бывает полезно комбинировать оба способа вычисления коэффициентов.

В результате интегрирование рациональной дроби сведется к нахождению интегралов от многочлена и от простейших рациональных дробей.

Пример: найти неопределенные интегралы:

а) $\int \frac{x-9}{x^2-3x-4}dx$; б) $\int \frac{x-4}{x^3-x^2}dx$; в) $\int \frac{2x^4+x^2+16x}{x^3+8}dx$;
г) $\int \frac{5x^2-13x+20}{x^3-3x^2+4x}dx$.

Решение.

а) Под знаком интеграла правильная дробь, разложим ее знаменатель на множители. Для этого воспользуемся формулой:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

где x_1, x_2 − корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Получим:

$$\int \frac{x-9}{x^2-3x-4}dx = \int \frac{x-9}{(x+1)(x-4)}dx = I.$$

Разложим правильную дробь на сумму простейших дробей:

$$\frac{x-9}{(x+1)(x-4)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-4} = \frac{A(x-4)+B(x+1)}{(x+1)(x-4)}$$

$$x - 9 = A(x-4) + B(x+1).$$

Для нахождения A, B применим метод частных значений.

$$\left.\begin{aligned} x = 4{:}\quad & -5 = 5B \\ x = -1{:}\quad & -10 = -5A \end{aligned}\right\} \quad \begin{cases} B = -1 \\ A = 2 \end{cases}$$

Тогда

$$\frac{x-9}{(x+1)(x-4)} = \frac{2}{x+1} + \frac{-1}{x-4} = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-4}.$$

Вернемся к вычислению интеграла.

$$I = \int \left(\frac{2}{x+1} - \frac{1}{x-4}\right)dx = \int \frac{2}{x+1}dx - \int \frac{1}{x-4}dx =$$

$$= 2\int \frac{d(x+1)}{x+1} - \int \frac{d(x-4)}{x-4} = 2\ln|x+1| - \ln|x-4| = \ln\frac{(x+1)^2}{|x-4|} + C$$

б) Под знаком интеграла правильная дробь, разложим ее знаменатель на множители:

$$\int \frac{x-4}{x^3-x^2}dx = \int \frac{x-4}{x^2(x-1)}dx = I.$$

Разложим правильную дробь на сумму простейших дробей:

$$\frac{x-4}{x^2(x-1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x-1} = \frac{Ax(x-1)+B(x-1)+Cx^2}{x^2(x-1)}$$

$$x - 4 = Ax(x-1) + B(x-1) + Cx^2.$$

Для нахождения A, B, C применим метод частных значений.

$$\left.\begin{aligned} x = 1{:}\quad & -3 = C \\ x = 0{:}\quad & -4 = -B \\ x = -1{:}\quad & -5 = 2A - 2B + C \end{aligned}\right\} \quad \begin{cases} C = -3 \\ B = 4 \\ A = 3 \end{cases}$$

Тогда

$$\frac{x-4}{x^2(x-1)} = \frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{3}{x-1}.$$

Вернемся к вычислению интеграла.

$$I = \int \left(\frac{3}{x} + \frac{4}{x^2} - \frac{3}{x-1}\right)dx = 3\int \frac{1}{x}dx + 4\int \frac{1}{x^2}dx - 3\int \frac{1}{x-1}dx =$$

$$= 3\ln|x| + 4\cdot\frac{x^{-1}}{-1} - 3\int \frac{1}{x-1}d(x-1) = 3\ln|x| - \frac{4}{x} - 3\ln|x-1| + C =$$

$$= \ln\left|\frac{x}{x-1}\right|^3 - \frac{4}{x} + C.$$

в) Под знаком интеграла неправильная дробь, выделим ее целую часть путем деления числителя на знаменатель. Получим:

$$\frac{2x^4 + x^2 + 16x}{x^3 + 8} = 2x + \frac{x^2}{x^3 + 8}.$$

Тогда:

$$\int \frac{2x^4 + x^2 + 16x}{x^3 + 8} dx = \int \left(2x + \frac{x^2}{x^3 + 8}\right) dx = 2\int x dx + \int \frac{x^2}{x^3 + 8} dx =$$

$$= \left[\, x^2 dx = \frac{1}{3} d(x^3 + 8) \,\right] = 2 \cdot \frac{x^2}{2} + \frac{1}{3} \int \frac{d(x^3 + 8)}{x^3 + 8} = x^2 + \frac{1}{3} \ln|x^3 + 8| + C.$$

г) Под знаком интеграла правильная дробь, разложим ее знаменатель на множители:

$$\int \frac{5x^2 - 13x + 20}{x^3 - 3x^2 + 4x} dx = \int \frac{5x^2 - 13x + 20}{x(x^2 - 3x + 4)} dx = I.$$

Разложим правильную дробь на сумму простейших дробей:

$$\frac{5x^2 - 13x + 20}{x(x^2 - 3x + 4)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 - 3x + 4} = \frac{A(x^2 - 3x + 4) + (Bx + C)x}{x(x^2 - 3x + 4)}$$

$$5x^2 - 13x + 20 = A(x^2 - 3x + 4) + (Bx + C)x,$$
$$5x^2 - 13x + 20 = Ax^2 - 3Ax + 4A + Bx^2 + Cx,$$
$$5x^2 - 13x + 20 = x^2(A + B) + x(-3A + C) + 4A.$$

Для нахождения A, B, C применим метод приравнивания коэффициентов.

$$\left.\begin{array}{ll} x^2: & 5 = A + B \\ x^1: & -13 = -3A + C \\ x^0: & 20 = 4A \end{array}\right\} \begin{cases} B = 0 \\ C = 2 \\ A = 5 \end{cases}$$

Тогда

$$\frac{5x^2 - 13x + 20}{x(x^2 - 3x + 4)} = \frac{5}{x} + \frac{2}{x^2 - 3x + 4}.$$

Вернемся к вычислению интеграла.

$$I = \int \left(\frac{5}{x} + \frac{2}{x^2 - 3x + 4}\right) dx = 5\int \frac{1}{x} dx + 2\int \frac{1}{x^2 - 3x + 4} dx =$$

$$= \begin{bmatrix} x^2 \pm px \pm q = \left(x \pm \frac{p}{2}\right)^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 \pm q \\ x^2 - 3x + 4 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} + 4 = \\ = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2 \end{bmatrix} = 5\ln|x| + 2\int \frac{d\left(x - \frac{3}{2}\right)}{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^2} =$$

$$= 5\ln|x| + 2\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{7}}{2}}arctg\,\frac{x-\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{7}}{2}} + C = 5\ln|x| + \frac{4}{\sqrt{7}}arctg\,\frac{2x-3}{\sqrt{7}} + C.$$

Задания для решения

Найти неопределенные интегралы.

1. а) $\int\frac{x-5}{x^2-x-2}dx$; б) $\int\frac{x-140}{x^3+7x^2}dx$; в) $\int\frac{x^5+2x^4+2x^2+6x}{x^2+3}dx$;
г) $\int\frac{3x^3+2x^2+12x-6}{(x^2+4)(x^2+3)}dx$.

2. а) $\int\frac{3x+6}{x^2-7x+10}dx$; б) $\int\frac{4x-4}{x^3-4x^2+4x}dx$; в) $\int\frac{x^4-2x^3-2x+3}{x^2+1}dx$;
г) $\int\frac{5x^3-x^2+21x-9}{(x^2+9)(x^2+1)}dx$.

3. а) $\int\frac{2x-25}{x^2+3x-10}dx$; б) $\int\frac{3x^2+2}{x^3+2x^2+x}dx$; в) $\int\frac{x^4+16x^2+x-1}{x^2+4}dx$;
г) $\int\frac{x^2}{(x^2+4)(x^2+1)}dx$.

4. а) $\int\frac{2x+50}{x^2+2x-15}dx$; б) $\int\frac{-x^2-3x+1}{x^4-x^3}dx$; в) $\int\frac{2x^5+x^3-4x^2-5}{x+1}dx$;
г) $\int\frac{x^2-5x+40}{(x+2)(x^2-2x+10)}dx$.

5. а) $\int\frac{x-14}{x^2+2x-8}dx$; б) $\int\frac{3x^2-7x+2}{x^3-2x^2+x}dx$; в) $\int\frac{2x^5-4x^4+9}{x^2+2}dx$;
г) $\int\frac{x^2+2x+4}{(x^2+4)(x^2+1)}dx$.

6. а) $\int\frac{x-17}{x^2+2x-15}dx$; б) $\int\frac{4x^2}{(x-1)^2(x+1)}dx$; в) $\int\frac{x^3-16x^2+64}{x-4}dx$;
г) $\int\frac{5x^2+2x+5}{x^3+x^2+x}dx$.

7. а) $\int\frac{5x+2}{x^2-4x-12}dx$; б) $\int\frac{4x^2-x+2}{x(x+2)^3}dx$; в) $\int\frac{x^5+2x^3+x-3}{x^2+2}dx$;
г) $\int\frac{6x+9}{(x^2+4)(x^2+6x+13)}dx$.

8. а) $\int\frac{2x-12}{x^2+8x-9}dx$; б) $\int\frac{6x^3-4x^2+x+6}{x^4-2x^3}dx$; в) $\int\frac{2x^4-10x^3+1}{x+1}dx$;
г) $\int\frac{4x^2+7x+5}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx$.

9. а) $\int\frac{4x+20}{x^2-8x-20}dx$; б) $\int\frac{-2x^3+4x^2+12x+8}{x^2(x+2)^2}dx$; в) $\int\frac{x^4+8}{x^2+3}dx$;

г) $\int \frac{3x+5}{(x-1)(x^2+2x+5)}dx$.

10. а) $\int \frac{7x+7}{x^2-x-12}dx$; б) $\int \frac{3x^2-12x-18}{x^2(x+3)^2}dx$; в) $\int \frac{5x^3+x^2-3}{x+1}dx$;

г) $\int \frac{x^3+5x+2}{(x^2+1)(x^2-2x+5)}dx$.

1.6 Интегрирование тригонометрических выражений

Выражение $R(u,v)$ называют ***рациональной функцией относительно*** u,v, если оно получено из любых величин u,v с помощью четырех арифметических действий (сложение, вычитание, умножение и деление).

I. Интегралы вида

$$\int R(\sin x,\cos x)dx,$$

где R – рациональная функция аргументов $\sin x$ и $\cos x$, рационализируются с помощью ***универсальной тригонометрической подстановки***

$$t = tg\ \frac{x}{2}.$$

В результате этой подстановки имеем

$$x = 2arctg\ t \quad dx = d(2arctg\ t) = \frac{2}{1+t^2}dt,$$

$$\sin x = \frac{2tg\ \frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\int R(\sin x,\cos x)dx = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2},\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2dt}{1+t^2}.$$

Универсальная подстановка $t = tg\ \frac{x}{2}$ во многих случаях приводит к сложным вычислениям, поэтому на практике применяют и другие, более простые подстановки, в зависимости от свойств и вида подынтегральной функции. Укажем эти случаи.

1. Если $R(\sin x,\cos x)$ – четная функция относительно $\sin x$ и $\cos x$, то есть

$$R(-\sin x,-\cos x) = R(\sin x,\cos x),$$

то применяется подстановка $t = tg\ x$. При этом используются формулы

$$\sin^2 x = \frac{tg^2\ x}{1+tg^2\ x} = \frac{t^2}{1+t^2},$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{1+tg^2\, x} = \frac{1}{1+t^2}.$$

2. Если $R(\sin x, \cos x)$ − нечетная функция относительно $\sin x$, то есть

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то применяется подстановка $t = \cos x$.

3. Если $R(\sin x, \cos x)$ − нечетная функция относительно $\cos x$, то есть

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то применяется подстановка $t = \sin x$.

II. Интегралы вида

$$\int \sin^m x \cdot \cos^n x\, dx,$$

находят с помощью различных формул тригонометрии, применение которых зависит от показателей степеней m и n. Рассмотрим некоторые случаи.

1. Если m положительно и нечетно; тогда

$$\sin^m x\, dx = (\sin x)^{m-1} \cdot \sin x\, dx = [\sin x\, dx = -d(\cos x)] =$$

$$= -(\sin^2 x)^{\frac{m-1}{2}} \cdot d(\cos x) = [\sin^2 x = 1 - \cos^2 x] = -(1-\cos^2 x)^{\frac{m-1}{2}} \cdot d(\cos x).$$

Далее применяют подстановку $t = \cos x$.

2. Если n положительно и нечетно; тогда

$$\cos^n x\, dx = (\cos x)^{n-1} \cdot \cos x\, dx = [\cos x\, dx = d(\sin x)] =$$

$$= (\cos^2 x)^{\frac{n-1}{2}} \cdot d(\cos x) = [\cos^2 x = 1 - \sin^2 x] = (1-\sin^2 x)^{\frac{m-1}{2}} \cdot d(\sin x).$$

Далее применяют подстановку $t = \sin x$.

3. Если же m и n − положительные и четные, то подынтегральную функцию необходимо преобразовать с помощью формул тригонометрии:

$$\sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2}\sin 2x,$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x),$$

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x).$$

Замечание. Интегралы вида

$$\int \frac{dx}{\sin^{2n+1} x}, \int \frac{dx}{\cos^{2n+1} x}$$

лучше всего находить с помощью универсальной подстановки $t = tg\frac{x}{2}$.

III. Интегралы вида

$$\int \sin ax \cdot \cos bx\, dx, \int \cos ax \cdot \cos bx\, dx, \int \sin ax \cdot \sin bx\, dx$$

находят с помощью следующих формул тригонометрии, соответственно:

$$\sin\alpha\cos\beta = 1/2\,(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)),$$

$$\cos\alpha\cos\beta = 1/2\,(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)),$$

$$\sin\alpha\sin\beta = 1/2\,(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$

IV. Интегралы вида

$$\int tg^m x\cdot\frac{1}{\cos^{2n}x}dx, \int ctg^m x\cdot\frac{dx}{\sin^{2n}x}, \int\frac{dx}{\sin^{2n}x}, \int\frac{dx}{\cos^{2n}x},$$

где $n\in\boldsymbol{N}$, находят с помощью формул

$$tg^2x=\frac{1}{\cos^2 x}-1, ctg^2x=\frac{1}{\sin^2 x}-1.$$

Пример: найти неопределенные интегралы:

а) $\int\frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}$; б) $\int\frac{dx}{3cos^2x+4sin^2x}$; в) $\int\frac{\cos^5 x}{\sin^6 x}dx$;

г) $\int\sin 5x\cos 3x\,dx$.

Решение.

а) $\int\frac{dx}{5-4\sin x+3\cos x}=I$

Так, как для подынтегральной функции

$$R(\sin x,\cos x)=\frac{1}{5-4sin\,x+3cos\,x}$$

не выполняется ни одно из условий:

$$R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x),$$
$$R(-\sin x,cos\,x)=-R(\sin x,\cos x),$$
$$R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x),$$

то будем применять универсальную тригонометрическую подстановку:

$$I=\left[\begin{matrix} t=tg\,\dfrac{x}{2}\quad x=2arctg\,t\\ dx=\dfrac{2dt}{1+t^2},\\ \sin x=\dfrac{2t}{1+t^2},\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}\end{matrix}\right]=\int\frac{1}{5-4\cdot\frac{2t}{1+t^2}+3\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2dt}{1+t^2}=$$

$$=\int\frac{2dt}{5(1+t^2)-8t+3(1-t^2)}=\int\frac{2dt}{5+5t^2-8t+3-3t^2}=$$

$$=\int\frac{2dt}{2t^2-8t+8}=\int\frac{dt}{t^2-4t+4}=\int\frac{dt}{(t-2)^2}=\int(t-2)^{-2}d(t-2)=$$

$$=\frac{(t-2)^{-1}}{-1}+C=-\frac{1}{t-2}+C=\left[t=tg\,\frac{x}{2}\right]=\frac{1}{2-tg\,\frac{x}{2}}+C.$$

б) $\int\frac{dx}{3\cos^2 x+4\sin^2 x}=I$

Поскольку для подынтегральной функции

$$R(\sin x,\cos x)=\frac{1}{3\cos^2 x+4\sin^2 x}$$

выполняется условие

$$R(-\sin x,-\cos x)=\frac{1}{3(-\cos x)^2+4(-\sin x)^2}=\frac{1}{3\cos^2 x+4\sin^2 x}=$$

$$= R(\sin x, \cos x),$$

то

$$I = \begin{bmatrix} t = tgx \quad x = arctgt \quad dx = \dfrac{1}{1+t^2}dt \\ \sin^2 x = \dfrac{tg^2 x}{1+tg^2 x} = \dfrac{t^2}{1+t^2} \\ \cos^2 x = \dfrac{1}{1+tg^2 x} = \dfrac{1}{1+t^2} \end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{\frac{1}{1+t^2}dt}{3\cdot\frac{1}{1+t^2} + 4\cdot\frac{t^2}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{3+4t^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\frac{3}{4}+t^2} = \frac{1}{4}\int \frac{dt}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + t^2} =$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} arctg \frac{t}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C = \frac{1}{2\sqrt{3}} arctg \frac{2t}{\sqrt{3}} + C = \frac{1}{2\sqrt{3}} arctg \frac{2tgx}{\sqrt{3}} + C.$$

в) $$\int \frac{\cos^5 x}{\sin^6 x}dx = \int \frac{\cos^4 x \cdot \cos x\, dx}{\sin^6 x} = \int \frac{(\cos^2 x)^2 \cdot \cos x\, dx}{\sin^6 x} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2 x = 1 - \sin^2 x \\ \cos x\, dx = d(\sin x) \end{bmatrix} = \int \frac{(1-\sin^2 x)^2 \cdot d(\sin x)}{\sin^6 x} = [t = \sin x] =$$

$$= \int \frac{(1-t^2)^2 dt}{t^6} = \int \frac{(1-2t^2+t^4)dt}{t^6} = \int \left(\frac{1}{t^6} - \frac{2}{t^4} + \frac{1}{t^2}\right)dt =$$

$$= \int t^{-6}dt - 2\int t^{-4}\, dt + \int t^{-2}dt = \frac{t^{-5}}{-5} - 2\cdot\frac{t^{-3}}{-3} + \frac{t^{-1}}{-1} + C =$$

$$= -\frac{1}{5t^5} + \frac{2}{3t^3} - \frac{1}{t} + C = [t = \sin x] = -\frac{1}{5\sin^5 x} + \frac{2}{3\sin^3 x} - \frac{1}{\sin x} + C.$$

г) $$\int \sin 5x \cos 3x\, dx = \begin{bmatrix} \sin\alpha\cos\beta = 1/2\,(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)) \\ \sin 5x \cos 3x = 1/2\,(\sin 2x + \sin 8x) \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\int (\sin 2x + \sin 8x)dx = \frac{1}{2}\int \sin 2x\, dx + \frac{1}{2}\int \sin 8x\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\cos 2x\right) + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{8}\cos 8x\right) + C = -\frac{1}{4}\cos 2x - \frac{1}{16}\cos 8x + C.$$

Задания для решения

Найти неопределенные интегралы.

1. а) $\int \frac{dx}{3 - 2\sin x + \cos x}$; б) $\int \frac{dx}{7\cos^2 x + 2\sin^2 x}$; в) $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}}dx$;
г) $\int \cos 5x \cos 7x\, dx$.

2. а) $\int \frac{dx}{5 + 4\sin x}$; б) $\int \frac{dx}{\sin^2 x - 4\sin x\cos x + 5\cos^2 x}$; в) $\int \cos^2 x \sin^3 x\, dx$;

г) $\int \sin x \sin 3x\, dx$.

3. а) $\int \frac{dx}{\cos x - 3\sin x}$; б) $\int \frac{dx}{4\cos^2 x + 3\sin^2 x}$; в) $\int \sin^7 x \cos^5 x\, dx$;

г) $\int \sin 8x \cos x\, dx$

4. а) $\int \frac{dx}{3 + 5\sin x + 3\cos x}$; б) $\int \frac{dx}{4\sin^2 x - 5\cos^2 x}$; в) $\int \cos^4 x \sin^2 x\, dx$;

г) $\int \cos 10x \cos 2x\, dx$.

5. а) $\int \frac{dx}{1 - \cos x + 2\sin x}$; б) $\int \frac{dx}{3\cos^2 x - 1}$; в) $\int \sqrt[5]{\sin^2 x} \cos^3 x\, dx$;

г) $\int \sin 8x \cos 5x\, dx$.

6. а) $\int \frac{dx}{2 + \sin x + 4\cos x}$; б) $\int \frac{2\sin x \cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx$; в) $\int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[4]{\cos x}} dx$;

г) $\int \sin 4x \cos 5x\, dx$.

7. а) $\int \frac{dx}{2\sin x - \cos x}$; б) $\int \frac{dx}{8\cos^2 x + 3}$; в) $\int \sin^7 x \cos^5 x\, dx$;

г) $\int \cos 5x \cos 7x\, dx$.

8. а) $\int \frac{dx}{4 + 2\sin x + \cos x}$; б) $\int \frac{dx}{8\sin^2 x + 16\sin x \cos x}$; в) $\int \sqrt[3]{\cos^5 x} \sin^5 x\, dx$;

г) $\int \sin 4x \sin 3x\, dx$.

9. а) $\int \frac{dx}{2 - \sin x}$; б) $\int \frac{dx}{8\sin^2 x - 4\cos^2 x}$; в) $\int \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin^3 x}} dx$;

г) $\int \sin 7x \cos 4x\, dx$.

10. а) $\int \frac{dx}{4 - 2\sin x + \cos x}$; б) $\int \frac{\cos^2 x\, dx}{\sin^2 x + 3\cos^2 x}$; в) $\int \sqrt{\sin^5 x} \cos^5 x\, dx$;

г) $\int \sin 2x \sin 3x\, dx$.

1.7 Интегрирование иррациональных функций с помощью дробно-линейной подстановки

Интегралы вида

$$\mathbf{1)} \int R\left(x, x^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots, x^{\frac{m_r}{n_r}}\right) dx,$$

$$\mathbf{2)} \int R\left(x, (ax+b)^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots, (ax+b)^{\frac{m_r}{n_r}}\right) dx,$$

$$\mathbf{3)} \int R\left(x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}}, \dots, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_r}{n_r}}\right) dx,$$

где $R-$ рациональная функция, $m_1, \dots, m_r \in \boldsymbol{Z}, n_1, \dots, n_r \in \boldsymbol{N}$, рационализируются с помощью подстановки, соответственно:

$$\mathbf{1)}\ x = t^s,$$
$$\mathbf{2)}\ ax + b = t^s,$$
$$\mathbf{3)}\ \frac{ax+b}{cx+d} = t^s,$$

где $s = \text{НОК}(n_1, \dots, n_r)$.

Пример: найти неопределенные интегралы:

а) $\displaystyle\int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x}+4)\sqrt{x}}$; б) $\displaystyle\int \frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt[4]{2x+1}+1} dx$; в) $\displaystyle\int \sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{dx}{(x-1)^3}$.

Решение.

$$\text{а)} \int \frac{dx}{(\sqrt[3]{x}+4)\sqrt{x}} = \int \frac{dx}{\left(x^{\frac{1}{3}}+4\right) x^{\frac{1}{2}}} = \begin{bmatrix} n_1 = 3, n_2 = 2 \\ s = \text{НОК}(3,2) = 6 \\ x = t^6 \\ dx = d(t^6) = (t^6)' dt = 6t^5 dt \end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{6t^5 dt}{\left((t^6)^{\frac{1}{3}}+4\right)(t^6)^{\frac{1}{2}}} = \int \frac{6t^5 dt}{(t^2+4)t^3} = 6\int \frac{t^2 dt}{t^2+4} = 6\int \frac{(t^2+4-4)dt}{t^2+4} =$$

$$= 6\int \left(1 - \frac{4}{t^2+4}\right) dt = 6\int dt - 24\int \frac{dt}{t^2+2^2} = 6t - 24 \cdot \frac{1}{2} arctg\frac{t}{2} + C =$$

$$= \left[x = t^6 \quad t = x^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{x}\right] = 6\sqrt[6]{x} - 12 arctg\frac{\sqrt[6]{x}}{2} + C.$$

$$\text{б)} \int \frac{\sqrt{2x+1}}{\sqrt[4]{2x+1}+1} dx = \int \frac{(2x+1)^{\frac{1}{2}}}{(2x+1)^{\frac{1}{4}}+1} dx =$$

$$= \begin{bmatrix} n_1 = 2, n_2 = 4 \\ s = \text{НОК}(2,4) = 4 \\ 2x+1 = t^4 \\ x = \frac{1}{2}(t^4-1) \\ dx = d\left(\frac{1}{2}(t^4-1)\right) = \frac{1}{2}(t^4-1)' dt = \frac{1}{2} \cdot 4t^3 dt = 2t^3 dt \end{bmatrix} =$$

$$= \int \frac{(t^4)^{\frac{1}{2}}}{(t^4)^{\frac{1}{4}}+1} \cdot 2t^3 dt = 2\int \frac{t^5}{t+1} dt = \left[\frac{t^5}{t+1} = t^4 - t^3 + t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right] =$$

$$= 2\int\left(t^4 - t^3 + t^2 - t + 1 - \frac{1}{t+1}\right)dt =$$

$$= 2\int t^4dt - 2\int t^3dt + 2\int t^2dt - 2\int tdt + 2\int dt - 2\int \frac{dt}{t+1} =$$

$$= 2\cdot\frac{t^5}{5} - 2\cdot\frac{t^4}{4} + 2\cdot\frac{t^3}{3} - 2\cdot\frac{t^2}{2} + 2t - 2\ln|t+1| + C =$$

$$= \left[2x+1 = t^4 \quad t = (2x+1)^{\frac{1}{4}}\right] = \frac{2}{5}(2x+1)^{\frac{5}{4}} - \frac{1}{2}(2x+1) +$$

$$+\frac{2}{3}(2x+1)^{\frac{3}{4}} - (2x+1)^{\frac{1}{2}} + 2(2x+1)^{\frac{1}{4}} - 2\ln\left|(2x+1)^{\frac{1}{4}} + 1\right| + C =$$

$$= \frac{2}{5}\sqrt[4]{(2x+1)^5} - \frac{1}{2}(2x+1) + \frac{2}{3}\sqrt[4]{(2x+1)^3} - \sqrt{2x+1} +$$

$$+2\sqrt[4]{2x+1} - 2\ln|\sqrt[4]{2x+1} + 1| + C.$$

в) $\int\sqrt[3]{\frac{x+1}{x-1}}\cdot\frac{dx}{(x-1)^3} = \int\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot\frac{dx}{(x-1)^3} =$

$$= \left[\begin{array}{c} \frac{x+1}{x-1} = t^3 \\ x = \frac{t^3+1}{t^3-1} \\ dx = d\left(\frac{t^3+1}{t^3-1}\right) = \left(\frac{t^3+1}{t^3-1}\right)' dt = \frac{-6t^2}{(t^3-1)^2}dt \\ x - 1 = \frac{t^3+1}{t^3-1} - 1 = \frac{2}{t^3-1} \end{array}\right] =$$

$$= \int t\cdot\frac{(t^3-1)^3}{8}\cdot\frac{-6t^2}{(t^3-1)^2}dt = -\frac{3}{4}\int t^3\,(t^3-1)dt = -\frac{3}{4}\int(t^6 - t^3)dt =$$

$$= -\frac{3}{4}\int t^6dt + \frac{3}{4}\int t^3dt = -\frac{3}{4}\cdot\frac{t^7}{7} + \frac{3}{4}\cdot\frac{t^4}{4} + C = \left[\frac{x+1}{x-1} = t^3 \quad t = \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{1}{3}}\right] =$$

$$= -\frac{3}{28}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{7}{3}} + \frac{3}{16}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{\frac{4}{3}} + C.$$

Задания для решения

Найти неопределенные интегралы.

1. а) $\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt[4]{x^3}}dx$; б) $\int\frac{\sqrt[3]{3x+4}}{\sqrt[3]{3x+4}+1}dx$; в) $\int\sqrt[5]{\frac{x+2}{x-1}}\cdot\frac{dx}{(x-1)^2}$.

2. а) $\int\frac{\sqrt{x}\,dx}{\sqrt{x}+1}$; б) $\int\frac{\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[6]{x+1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt[3]{x+1}}dx$; в) $\int\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}\cdot\frac{dx}{(x+1)^2}$.

3. а) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x-\sqrt[3]{x^2}}$; б) $\int \frac{\sqrt{x+3}}{\sqrt[3]{x+3}+\sqrt[6]{x+3}}dx$; в) $\int \sqrt{\frac{x+5}{x-2}}\cdot\frac{dx}{x-2}$.

4. а) $\int \frac{x+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[6]{x}+1}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{2x+1}+4}{\sqrt[4]{2x+1}}dx$; в) $\int \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+3}}\cdot\frac{dx}{x+3}$.

5. а) $\int \frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt[3]{x}+1)\sqrt{x}}dx$; б) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(2x+1)^2}-\sqrt{2x+1}}$; в) $\int \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}\cdot\frac{dx}{x+2}$.

6. а) $\int \frac{\sqrt[4]{x}\,dx}{\sqrt[8]{x}-2}$; б) $\int \frac{\sqrt{3x-1}}{\sqrt[3]{3x-1}+\sqrt[6]{3x-1}}dx$; в) $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\cdot\frac{dx}{(x+1)^4}$.

7. а) $\int \frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt[3]{x}+1}dx$; б) $\int \frac{\sqrt[3]{2x-1}}{\sqrt[6]{2x-1}+3}dx$; в) $\int \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\cdot\frac{dx}{x}$.

8. а) $\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{3x+\sqrt[3]{x^2}}$; б) $\int \frac{\sqrt{5x+4}}{\sqrt[4]{5x+4}-1}dx$; в) $\int \sqrt[3]{\frac{2x+1}{x-2}}\cdot\frac{dx}{(x-2)^4}$.

9. а) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt[3]{x-2}+3}dx$; в) $\int \sqrt[4]{\frac{x-1}{x+1}}\cdot\frac{dx}{(x+1)^2}$.

10. а) $\int \frac{x+\sqrt{x}+\sqrt[3]{x^2}}{x(\sqrt[3]{x}+1)}dx$; б) $\int \frac{\sqrt{4x+3}}{1-\sqrt[4]{4x+3}}dx$; в) $\int \sqrt{\frac{x-4}{x+4}}\cdot\frac{dx}{x}$.

1.8 Интегрирование иррациональных функций с помощью тригонометрических подстановок

Интегралы типа

$$\int R\left(x,\sqrt{a^2-x^2}\right)dt,\ \int R\left(x,\sqrt{a^2+x^2}\right)dt,\ \int R\left(x,\sqrt{x^2-a^2}\right)dt$$

с помощью следующих тригонометрических подстановок: для первого интеграла $x=a\sin t$ (или $x=a\cos t$), для второго $x=a\,tgt$, для третьего $x=a/\sin t$ (или $x=a/\cos t$), приводятся к интегралам от рациональной функции относительно $\sin t$ и $\cos t$, то есть к интегралам вида $\int R(\sin t,\cos t)dt$.

Пример: найти неопределенный интеграл:

$$\int x^2\cdot\sqrt{9-x^2}dx.$$

Решение.

$$\int x^2\cdot\sqrt{9-x^2}dx=[x=3\sin t\quad dx=3\cos t\,dt]=$$

$$=\int 9\sin^2 t\sqrt{9-9\sin^2 t}\cdot 3\cos t\,dt=$$

$$= 27\int \sin^2 t\sqrt{9(1-\sin^2 t)}\cdot \cos t\, dt = 81\int \sin^2 t\cos^2 t\, dt =$$

$$= \left[\sin t\cos t = \frac{1}{2}\sin 2t\right] = 81\cdot\frac{1}{4}\int \sin^2 2t\, dt = \frac{81}{4}\int\frac{1}{2}(1-\cos 4t)\, dt =$$

$$= \frac{81}{8}\left(t - \frac{1}{4}\sin t\right) + C = \left[t = \arcsin\frac{x}{3}\right] = \frac{81}{8}\left(\arcsin\frac{x}{3} - \frac{1}{4}\sin\left(\arcsin\frac{x}{3}\right)\right) + C =$$

$$= \left[\sin\left(\arcsin\frac{x}{3}\right) = \frac{x}{3}, x \in [-3;3]\right] = \frac{81}{8}\left(\arcsin\frac{x}{3} - \frac{1}{12}x\right) + C.$$

Задания для решения

Найти неопределенные интегралы.

1. $\int \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^4}dx$; 2. $\int \frac{\sqrt{x^2+25}}{x^2}dx$; 3. $\int \sqrt{x^2-9}\, dx$; 4. $\int \frac{\sqrt{x^2+16}}{x}dx$;
5. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2+1}}$; 6. $\int x^3\cdot\sqrt{1-x^2}\, dx$; 7. $\int \frac{dx}{\sqrt{(4+x^2)^3}}$; 8. $\int \frac{x^2}{\sqrt{25-x^2}}dx$;
9. $\int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2}dx$; 10. $\int \frac{\sqrt{x^2-4}}{x^2}dx$.

1.9 Интегралы от дифференциальных биномов

Дифференциальным биномом называется выражение вида

$$x^m(a+bx^n)^p dx,$$

где m, n, p −рациональные числа, $a, b \in \boldsymbol{R}$.

Интегралы от дифференциальных биномов рационализируются только в следующих трех случаях:

1) p −целое число, $m = r_1/k_1$, $n = r_2/k_2$, тогда применяют подстановку $x = t^s$, где $s =$ НОК (k_1, k_2);

2) $(m+1)/n$ −целое число, $p = r/k$, тогда применяют подстановку $a + bx^n = t^k$;

3) $(m+1)/n + p$ −целое число, $p = r/k$, тогда применяют подстановку $a + bx^n = x^n t^k$.

Пример: найти неопределенные интегралы:

а) $\int \sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3 dx$; б) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx$; в) $\int \frac{dx}{x^3\cdot\sqrt[3]{2-x^3}}$.

Решение.

а) $$\int \sqrt{x}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)^3 dx = \int x^{\frac{1}{2}}\left(1+x^{\frac{1}{3}}\right)^3 dx = \begin{bmatrix} p = 3 \in \boldsymbol{Z} \text{ (случай 1)} \\ s = \text{НОК}(2,3) = 6 \\ x = t^6 \;\; dx = d(t^6) = 6t^5dt \end{bmatrix} =$$

$$= \int t^3 (1+t^2)^3 6t^5 dt = 6\int t^8 (1+t^2)^3 dt = 6\int t^8 (1 + 3t^2 + 3t^4 + t^6)dt =$$

$$= 6\int (t^8 + 3t^{10} + 3t^{12} + t^{14})dt = 6\left(\frac{t^9}{9} + \frac{3t^{11}}{11} + \frac{3t^{13}}{13} + \frac{t^{15}}{15}\right) + C =$$

$$= \left[x = t^6 \;\; t = x^{\frac{1}{6}}\right] = \frac{6}{9}x^{\frac{9}{6}} + \frac{18}{11}x^{\frac{11}{6}} + \frac{18}{13}x^{\frac{13}{6}} + \frac{6}{15}x^{\frac{15}{6}} + C =$$

$$= \frac{2}{3}\sqrt{x^3} + \frac{18}{11}\sqrt[6]{x^{11}} + \frac{18}{13}\sqrt[6]{x^{13}} + \frac{6}{15}\sqrt{x^5} + C.$$

б) $$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt[4]{x}}}{\sqrt{x}}dx = \int x^{-\frac{1}{2}}\left(1 + x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}dx = \left[\begin{gathered} m = -\frac{1}{2}, n = \frac{1}{4}, p = \frac{1}{3} \\ \frac{m+1}{n} = \frac{1/2}{1/4} = 2 \in \boldsymbol{Z}(\text{случай } 2) \\ 1 + x^{\frac{1}{4}} = t^3 \;\; x = (t^3 - 1)^4 \\ dx = 4(t^3-1)^3 \cdot 3t^2dt \end{gathered}\right] =$$

$$= \int (t^3 - 1)^{-2} \cdot t \cdot 12t^2(t^3-1)^3dt = 12\int t^3(t^3 - 1)dt =$$

$$= 12\int (t^6 - t^3)dt = 12\left(\frac{t^7}{7} - \frac{t^4}{4}\right) + C = \left[1 + x^{\frac{1}{4}} = t^3 \;\; t = \left(1 + x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}\right] =$$

$$= \frac{12}{7}\left(1 + x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{7}{3}} - 3\left(1 + x^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{4}{3}} + C = \frac{12}{7}\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^7} - 3\sqrt[3]{\left(1+\sqrt[4]{x}\right)^4} + C.$$

в) $$\int \frac{dx}{x^3 \cdot \sqrt[3]{2 - x^3}} = \int x^{-3}(2 - x^3)^{-\frac{1}{3}}dx =$$

$$= \left[\begin{gathered} m = -3, n = -3, p = -\frac{1}{3} \\ \frac{m+1}{n} + p = \frac{-3+1}{-3} - \frac{1}{3} = -\frac{2}{3} - \frac{1}{3} = -1 \in \boldsymbol{Z} \text{ (случай 3)} \\ 2 - x^3 = x^3t^3 \;\; x^3 = \frac{2}{t^3+1} \;\; x = 2^{\frac{1}{3}} \cdot (t^3+1)^{-\frac{1}{3}} \\ dx = 2^{\frac{1}{3}} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)(t^3+1)^{-\frac{4}{3}} \cdot 3t^2dt \end{gathered}\right] =$$

$$= -\int \left(\frac{2}{t^3+1}\right)^{-1} \cdot \left(2 - \frac{2}{t^3+1}\right)^{-\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot (t^3+1)^{-\frac{4}{3}} \cdot t^2dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int (t^3+1)\left(\frac{2t^3}{t^3+1}\right)^{-\frac{1}{3}} 2^{\frac{1}{3}} \cdot (t^3+1)^{-\frac{4}{3}} \cdot t^2dt =$$

$$= -\frac{1}{2}\int 2^{-\frac{1}{3}} \cdot t^{-1}(t^3+1)^{\frac{1}{3}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot (t^3+1)^{-\frac{1}{3}} \cdot t^2dt = -\frac{1}{2}\int tdt = -\frac{1}{2} \cdot \frac{t^2}{2} + C =$$

$$= -\frac{1}{4}t^2 + C = \left[t^3 = \frac{2 - x^3}{x^3} \;\;\; t = \frac{\sqrt[3]{2 - x^3}}{x}\right] = -\frac{1}{4}\frac{\sqrt[3]{(2 - x^3)^2}}{x^2} + C.$$

Задания для решения

Найти неопределенные интегралы.

1. $\int \frac{dx}{x\sqrt[3]{x^2+1}}$; 2. $\int \sqrt{x}\left(2+\sqrt[6]{x}\right)^3 dx$; 3. $\int x^5 \cdot \sqrt[3]{(1+x^3)^2}\,dx$;

4. $\int \frac{\sqrt{(1+x^2)^5}}{x^6}dx$; 5. $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt[4]{1+x^3}}$; 6. $\int x\sqrt{1+x^4}\,dx$; 7. $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x}dx$;

8. $\int \sqrt[4]{x}\left(1-2\sqrt{x}\right)^2 dx$; 9. $\int \frac{x^3}{\sqrt{(1+2x^2)^3}}dx$; 10. $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{(1+x^2)^3}}$.

2 Определенный интеграл и его приложения

2.1 Определение определенного интеграла и его свойства

Пусть функция $y=f(x)$ определена на отрезке $[a;\ b]$. Разобьем этот отрезок точками $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$ на n малых отрезков длиной $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$, $k=1,2,\ldots,n$. На каждом отрезке выберем точку $\xi_k\in[x_{k-1};x_k]$. Составим сумму $S_n=f(\xi_1)\cdot\Delta x_1+\ldots f(\xi_n)\cdot\Delta x_n=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\cdot\Delta x_k$. Сумма S_n называется ***интегральной суммой*** функции $f\ (x)$ на отрезке $[a;\ b]$. ***Определенным интегралом*** функции $f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$ называется предел

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\max\Delta x_n\to 0}S_n=\lim_{\max\Delta x_k\to 0}\left(\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\cdot\Delta x_k\right) \qquad (2.1)$$

Если функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, то предел (2.1) существует и функция интегрируема на отрезке $[a;\ b]$. Функция $f(x)$ называется ***подынтегральной функцией***, $f(x)dx$ – ***подынтегральным выражением***, отрезок $[a;\ b]$ – ***отрезком интегрирования***, числа a и b – нижним и верхним ***пределами интегрирования***.

Криволинейной трапецией называется плоская фигура, ограниченная прямыми $x=a, x=b$, графиком функции $y=f(x)$ ($f(x)\geq 0$ для $a\leq x\leq b$) и осью Ox.

Если $y=f(x)$ – верхняя граница криволинейной трапеции, то для функции $f(x)$ на отрезке $[a;\ b]$ интегральная сумма S_n геометрически представляет собой сумму площадей прямоугольников с основаниями Δx_k и высотами $f(\xi_k)$ (см. рис. 2.1). Интеграл (2.1) в этом случае равен площади криволинейной трапеции. Задача вычисления площади является одной из задач, приводящих к понятию определенного интеграла.

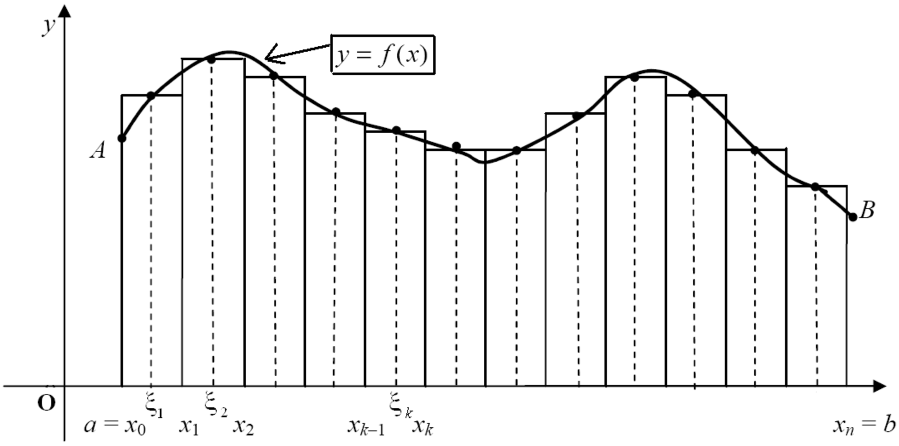


Рисунок 2.1 – Геометрическая интерпретация интегральной суммы S_n

Свойства определенного интеграла:

1. $\int\limits_a^b c\cdot f(x)dx = c\cdot\int\limits_a^b f(x)dx$, если c – const.

2. $\int\limits_a^b \; f(x)\pm g(x) \; dx = \int\limits_a^b f(x)dx \pm \int\limits_a^b g(x)dx$ 3. $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^c f(x)dx + \int\limits_c^b f(x)dx$

4. $\int\limits_b^a f(x)dx = -\int\limits_a^b f(x)dx$ 5. $\int\limits_a^a f(x)dx = 0$

6. Если известна какая-либо первообразная $F(x)$ функции $f(x)$, то верна формула

$$\int\limits_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \qquad (2.2)$$

Формула (2.2) называется ***формулой Ньютона - Лейбница***

2.2 Вычисление определенных интегралов

Рассмотрим основные методы вычисления определенных интегралов.

Непосредственное интегрирование

Для вычисления близких к табличным определенных интегралов сразу можно применять формулу Ньютона - Лейбница.

Пример: вычислить определенный интеграл $\int\limits_0^1 \left(6x^2 - \frac{5}{x^2+1}\right)dx$.

Решение. $\int\limits_0^1 \left(6x^2 - \frac{5}{x^2+1}\right)dx = \left(6\cdot\frac{x^3}{3} - 5\cdot\operatorname{arctg}x\right)\Bigg|_0^1 =$

$$= \left(6\cdot\frac{1^3}{3} - 5\cdot\operatorname{arctg}1\right) - \left(6\cdot\frac{0^3}{3} - 5\cdot\operatorname{arctg}0\right) = \left(2 - 5\cdot\frac{\pi}{4}\right) - (0 - 5\cdot 0) = 2 - \frac{5\pi}{4}$$

Вычисление с помощью замены переменной

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$, функция $x=\varphi(t)$ непрерывна вместе со своей производной и монотонна на отрезке $[\alpha;\ \beta]$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$ и отрезок $[a;\ b]$ является множеством значений функции $x=\varphi(t)$ на отрезке $[\alpha;\ \beta]$. Тогда справедлива ***формула замены переменной для определенного интеграла***:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f\left(\varphi(t)\right)\cdot\varphi'(t)dt$$

Пример: вычислить определенный интеграл $\int_0^2 x^2\cdot\sqrt{x^3+1}\,dx$.

Решение. Сделаем замену переменной по формуле $y=x^3+1$.

$$\int_0^2 x^2\cdot\sqrt{x^3+1}dx=\left[\begin{array}{c} y=x^3+1,\, dy=y'dx=3x^2dx\Rightarrow x^2dx=\frac{1}{3}dy \\ y_1=x_1^3+1=0^3+1=1,\, y_2=x_2^3+1=2^3+1=9\end{array}\right]=\int_1^9\sqrt{y}\cdot\frac{1}{3}dy=$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\int_1^9 y^{\frac{1}{2}}dy=\frac{1}{3}\cdot\left.\left(\frac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)\right|_1^9=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{9^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}-\frac{1^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}\right)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\left(9^{\frac{1}{2}}\right)^3-1\right)=\frac{2}{9}\cdot\left(3^3-1\right)=\frac{2\cdot 26}{9}=\frac{52}{9}$$

Пример: вычислить определенный интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\cdot\cos x\,dx$.

Решение. Здесь также нужно подобрать замену переменной. Как подбирать? Нужно вспомнить, что для любой функции $y=f(x)$ ее дифференциал равен $dy=y'dx$. Из этого равенства следует, что

$$\cos x\,dx=(\sin x)'\,dx=d(\sin x)$$

и все подынтегральное выражение можно записать через $\sin x$. Поэтому сделаем замену переменной по формуле $y=\sin x$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 x\cdot\cos x\,dx=\left[\begin{array}{l} y=\sin x,\ dy=y'dx=\cos x\,dx\Rightarrow\cos x\,dx=dy \\ y_1=\sin x_1=\sin 0=0,\ y_2=\sin x_2=\sin\frac{\pi}{2}=1\end{array}\right]=\int_{y_1}^{y_2}y^4dy=$$

$$=\int_0^1 y^4dy=\left.\frac{y^5}{5}\right|_0^1=\frac{1^5}{5}-\frac{0^5}{5}=\frac{1}{5}.$$

Вычисление методом интегрирования по частям

Если функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a;\ b]$, то справедлива ***формула интегрирования по частям для определенного интеграла***

$$\int_a^b u\,dv = uv\,\Big|_a^b - \int_a^b v\,du .$$

Эту формула хорошо работает, когда интеграл в правой части равенства $\int_a^b v\,du$ окажется проще, чем заданный интеграл $\int_a^b u\,dv$.

Пример: вычислить определенный интеграл $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\cos x\,dx$.

Решение. Имеется несколько вариантов записать подынтегральное выражение $x\cdot\cos x\,dx$ в виде $u\,dv$. Здесь выберем $u = x$ и $dv = \cos x\,dx$.

$$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\cos x\,dx = \left[\begin{array}{l} u = x,\ dv = \cos x\,dx \\ du = u'dx = 1\cdot dx = dx \\ v = \int dv = \int \cos x\,dx = \sin x \end{array}\right] = uv\,\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} v\,du = x\cdot\sin x\,\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx =$$

$$= \left(\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{6}\right) - (-\cos x)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \left(\frac{\pi}{2}\cdot 1 - \frac{\pi}{6}\cdot\frac{1}{2}\right) + (\cos x)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{5\pi}{12} + \left(\cos\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{6}\right) =$$

$$= \frac{5\pi}{12} + \left(0 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Пример: вычислить определенный интеграл $\int_0^2 \ln(3x+1)\,dx$.

Решение. $\int_0^2 \ln(3x+1)\,dx = \left[\begin{array}{l} u = \ln(3x+1),\ dv = dx \\ du = u'dx = \dfrac{3}{3x+1}dx,\ v = \int dv = \int dx = x \end{array}\right] =$

$$= x\cdot\ln(3x+1)\,\Big|_0^2 - \int_0^2 x\cdot\frac{3}{3x+1}dx = 2\cdot\ln(3\cdot 2+1) - 0\cdot\ln(3\cdot 0+1) - \int_0^2 \frac{3x+1-1}{3x+1}dx =$$

$$= 2\cdot\ln 7 - 0 - \int_0^2\left(1 - \frac{1}{3x+1}\right)dx = 2\cdot\ln 7 - \left(x - \frac{1}{3}\cdot\ln|3x+1|\right)\Bigg|_0^2 =$$

$$= 2\cdot\ln 7 - \left(\left(2 - \frac{1}{3}\cdot\ln|3\cdot 2+1|\right) - \left(0 - \frac{1}{3}\cdot\ln|3\cdot 0+1|\right)\right) = 2\cdot\ln 7 - \left(2 - \frac{1}{3}\cdot\ln 7 + \ln 1\right) =$$

$$= 2\cdot\ln 7 - 2 + \frac{1}{3}\cdot\ln 7 - 0 = \frac{7}{3}\cdot\ln 7 - 2.$$

Задания для решения

1. Вычислить определенный интеграл с помощью формулы Ньютона-Лейбница:

1.1 $\int\limits_1^2 \ 3x^2+4x+1 \ dx;$ **1.2** $\int\limits_1^8 \sqrt[3]{x}\,dx;$ **1.3** $\int\limits_0^3 \ 4^x+x^4 \ dx;$ **1.4** $\int\limits_2^3 \left(\frac{x^2}{2}+\frac{2}{x^2}\right)dx;$

1.5 $\int\limits_0^1 \left(\frac{4}{\sqrt{1-x^2}}-\frac{3}{\cos^2 x}\right)dx;$ **1.6** $\int\limits_3^4 \frac{2x^3-4x^2+x}{x^2}dx;$ **1.7** $\int\limits_{-1}^1 \left(\frac{5}{1+x^2}+e^x-2^x\right)dx;$

1.8 $\int\limits_1^4 \frac{1+\sqrt{x} \ ^2}{\sqrt{x}}dx;$ **1.9** $\int\limits_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{3}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx;$ **1.10** $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0} \ 3\cos x+2\sin x \ dx.$

2. Вычислить определенный интеграл с помощью замены переменной:

2.1 $\int\limits_{-1}^1 x^2\cdot \ x^3+1 \ ^4 dx, \ y=x^3+1;$ **2.2** $\int\limits_0^2 x^2\cdot\sqrt{x^3+1}\,dx;$ **2.3** $\int\limits_1^6 \sqrt{3x-2}\,dx, \ y=3x-2;$

2.4 $\int\limits_0^5 \sqrt{x+4}\,dx;$ **2.5** $\int\limits_0^4 \sqrt{3x+4}\,dx;$ **2.6** $\int\limits_1^2 \frac{dx}{7x-6}, \ y=7x-6;$ **2.7** $\int\limits_4^7 \cos(3x-1)\,dx;$

2.8 $\int\limits_{-3}^5 \sin(4x+3)\,dx;$ **2.9** $\int\limits_1^2 e^{9x-4}dx;$ **2.10** $\int\limits_3^5 \frac{dx}{\cos^2(2x+2)};$ **2.11** $\int\limits_0^2 \frac{xdx}{x^2+1}, \ y=x^2+1;$

2.12 $\int\limits_1^e \cos(\ln x)\cdot\frac{1}{x}dx, \ y=\ln x;$ **2.13** $\int\limits_1^e \frac{dx}{x\cdot(1+\ln^2 x)};$ **2.14** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x\,dx}{1+\sin^2 x}, \ y=\sin x;$

2.15 $\int\limits_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}} \cos 2x\cdot e^{\sin 2x}\,dx;$ **2.16** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{20}} \frac{dx}{\cos^2 5x\cdot \mathrm{tg}^3 5x}, \ y=\mathrm{tg}\,5x;$ **2.17** $\int\limits_2^5 \frac{\ln^3 x}{x}dx, \ y=\ln x;$

2.18 $\int\limits_0^1 \frac{1+2\,\mathrm{arctg}\,x \ dx}{1+x^2};$ **2.19** $\int\limits_0^1 \frac{\sqrt{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}}dx;$ **2.20** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^4 x\cdot\cos x\,dx.$

3. Вычислить определенный интеграл методом «по частям»:

3.1 $\int\limits_0^1 x\cdot e^x dx;$ **3.2** $\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} x\cdot\cos x\,dx;$ **3.3** $\int\limits_1^2 x\cdot\ln x\,dx;$ **3.4** $\int\limits_0^{\sqrt{3}} x\cdot \mathrm{arctg}\,x\,dx;$

3.5 $\int\limits_0^{\pi} x^2\cdot\sin x\,dx;$ **3.6** $\int\limits_2^6 \ln x\ dx;$ **3.7** $\int\limits_0^2 \mathrm{arctg}\,x\ dx;$ **3.8** $\int\limits_1^3 (3x+5)\cdot e^{7x}\,dx;$

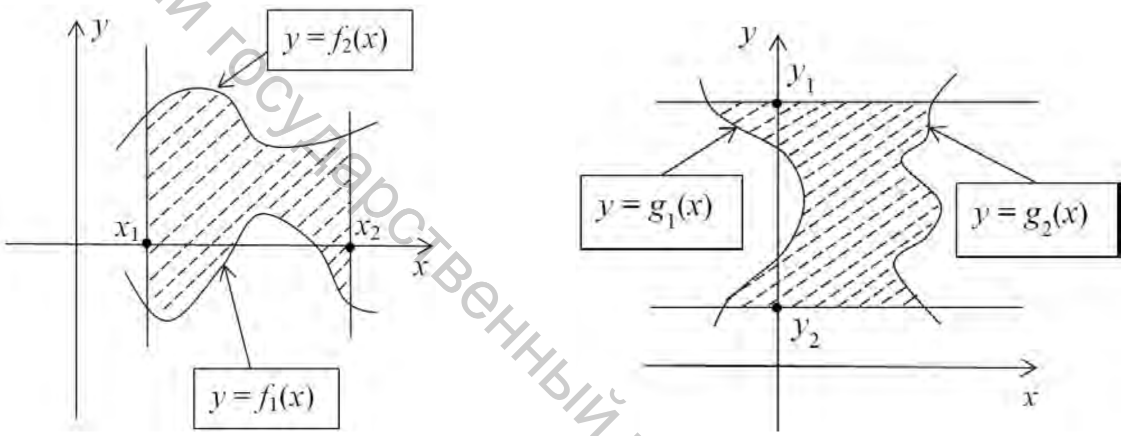
3.9 $\int\limits_0^{\pi/8} (3x+1)\sin 4x\,dx;$ **3.10** $\int\limits_2^3 (3x^2-2x)\cdot\ln(x-1)\,dx;$ **3.11** $\int\limits_0^1 \cos x\cdot e^x dx.$

2.3 Геометрические приложения определенных интегралов

Вычисление площадей плоских фигур в прямоугольных координатах

Пусть задана плоская фигура, ограниченная кривыми $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = x_1$, $x = x_2$, причем $f_1(x) \le f_2(x)$ для $x \in [x_1; x_2]$ и $f_1(x)$, $f_2(x)$ – непрерывные функции. Такие фигуры будем называть <u>фигурами первого типа</u> (см. рис. 2.2(а)).

Рассмотрим также <u>фигуру второго типа</u>, ограниченную кривыми $x = g_1(y)$, $x = g_2(y)$, $y = y_1$, $y = y_2$, причем $g_1(y) \le g_2(y)$ для $y \in [y_1; y_2]$ и $g_1(y)$, $g_2(y)$ – непрерывные функции (см. рис. 2.2(б)).



а б

Рисунок 2.2 – Фигуры: а – первого типа, б – второго типа

Площадь фигуры первого типа, изображенной на рисунке 2.2(а), вычисляется по формуле

$$S = \int_{x_1}^{x_2} f_2(x) - f_1(x) \; dx, \tag{2.3}$$

Площадь фигуры второго типа, изображенной на рисунке 2.2(б) вычисляется по формуле

$$S = \int_{y_1}^{y_2} g_2(y) - g_1(y) \; dy, \tag{2.4}$$

Произвольную плоскую фигуру можно разбить на фигуры первого и второго типа и для вычисления ее площади использовать формулы (2.1) и (2.2).

Пример 1: вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $y = \sqrt{x}$, $y = -x^2$, $x = 4$

Решение. Заданная фигура изображена на рисунке 2.3(а). Это фигура первого типа. Слева и справа она ограничена прямыми $x = 0$, $x = 4$. Верхняя и нижняя границы заданы графиками функций $y = f_1(x) = -x^2$ и $y = f_2(x) = \sqrt{x}$. Найдем площадь фигуры по формуле (2.3):

$$S=\int_{x_1}^{x_2}\left[f_2(x)-f_1(x)\right]dx=\int_0^4\left[\sqrt{x}-\left(-x^2\right)\right]dx=\int_0^4\left(\sqrt{x}+x^2\right)dx=\left(\frac{x^{3/2}}{3/2}+\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^4=$$

$$=\left(2\cdot\frac{4^{3/2}}{3}+\frac{4^3}{3}\right)-\left(2\cdot\frac{0^{3/2}}{3}+\frac{0^3}{3}\right)=2\cdot\frac{\left(4^{1/2}\right)^3+4^3}{3}=\frac{2\cdot 2^3+4^3}{3}=\frac{80}{3}$$

Пример 2: вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $x=2y^2, x=y^2+9$.

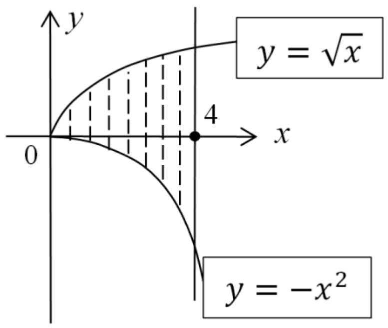
Решение. Заданная фигура изображена на рисунке 2.3(б). Это фигура второго типа. Для того чтобы найти уравнения ограничивающих ее снизу и сверху прямых $y=y_1$, $y=y_2$ нужно найти точки пересечения заданных кривых $x=2y^2$, $x=y^2+9$. Все нужное получим из системы уравнений:

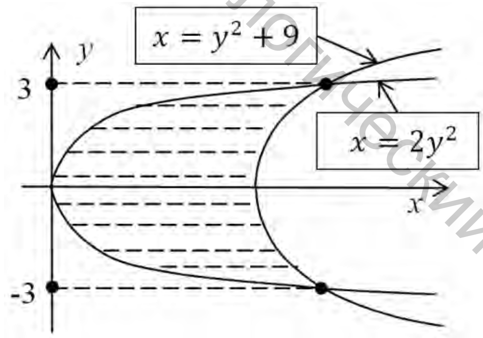
$$\begin{cases}x=2y^2\\ x=y^2+9\end{cases}\Rightarrow\ 2y^2=y^2+9\ \Rightarrow\ y^2=9\ \Rightarrow\ y_1=-3,\ y_2=3.$$

Следовательно, снизу и сверху фигуру ограничивают прямые $y=-3, y=3$. Левая и правая границы заданы графиками функций $x=g_1(y)=2y^2$ и $x=g_2(y)=y^2+9$. Площадь фигуры найдем по формуле (2.4):

$$S=\int_{y_1}^{y_2}\left[g_2(y)-g_1(y)\right]dy=\int_{-3}^{3}\left[(y^2+9)-(2y^2)\right]dy=\int_{-3}^{3}\left(9-y^2\right)dy=\left(9y-\frac{y^3}{3}\right)\Bigg|_{-3}^{3}=$$

$$=\left(9\cdot 3-\frac{3^3}{3}\right)-\left(9\cdot(-3)-\frac{(-3)^3}{3}\right)=(27-9)-(-27+9)=36$$





а б

Рисунок 2.3 – Плоские фигуры: а – к примеру 1, б – к примеру 2

Задания для решения

1. Вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями, заданными в прямоугольной системе координат:

1.1 $y=x^2, y=0, x=1, x=2;$ **1.2** $y=-x^2, y=0, x=0, x=1;$

1.3 $y=x^2+2,\ y=x,\ x=0,\ x=1;$ **1.4** $y=x^2+1, y=x-1, x=0, x=2;$

1.5 $y=x^2,\ y=8;$ **1.6** $y=x^2-1,\ y=3;$

1.7 $y = x^2 - 4,\ y = -x^2 + 4;$

1.8 $y = x^2,\ \ y = -x^2 + 8;$

1.9 $y = x^2 + 3,\ y = -x^2 + 5;$

1.10 $y = x^2,\ y = x;$

1.11 $y = x^2, y = x^3;$

1.12 $y = x - 1,\ y = -x^2 + 1;$

1.13 $y = -x^2 + 4;\ y = x + 2;$

1.14 $y = x^2 + 4x,\ \ y = x + 4;$

1.15 $y = x^2 + 2x - 3,\ y = x + 3;$

1.16 $y = \sin 2x,\ y = 0,\ 0 \le x \le \pi;$

1.17 $y = e^{3x},\ x = 3,\ x = 0,\ y = 0;$

1.18 $xy = 4,\ x + y = 5;$

1.19 $y = \sin x,\ y = \cos x,\ x \ge 0;$

1.20 $y = \ln x,\ x = 2, x = 4;$

1.21 $y = (x+1)^2,\ y^2 = x + 1;$

1.22 $x = y^2 + 1,\ x = -y^2 + 9;$

1.23 $x = y^2 - 3y + 2,\ x = y + 7;$

1.24 $x = (y+2)^3,\ x = 4y + 8;$

1.25 $y = x^3 - 7,\ y = -2x^2 - 4x;$

1.26 $3x^2 = 25y,\ 5y^2 = 9x;$

1.27 $y = \dfrac{27}{x^2 + 9},\ y = \dfrac{x^2}{6};$

1.27 $y = \sqrt{1 - x^2},\ y = x - 1,\ y = -x - 1;$

Вычисление площадей плоских фигур, ограниченных кривыми, заданными в параметрической форме

Пусть верхняя граница криволинейной трапеции (см. рис. 2.4(а)) задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t),\ y = \psi(t)$, где $t \in [t_1; t_2]$, $\varphi(t)$ – возрастающая функция, а функция $\psi(t) \ge 0$ на отрезке $[t_1; t_2]$, $x_1 = \varphi(t_1)$, $x_2 = \varphi(t_2)$. Тогда площадь криволинейной трапеции равна

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \psi(t) \cdot \varphi'(t)\, dt \qquad (2.5)$$

Площадь петли кривой (см. рис. 2.4(б)) также можно вычислить с помощью формулы (2.5), если точке пересечения соответствуют значения параметров $t = t_1$, $t = t_2$ и изменение параметра t от t_1 до t_2 соответствует обходу по часовой стрелке. На практике, не взирая на направление обхода вдоль кривой, можно вычислить интеграл из формулы (2.5) и взять модуль полученного результата.

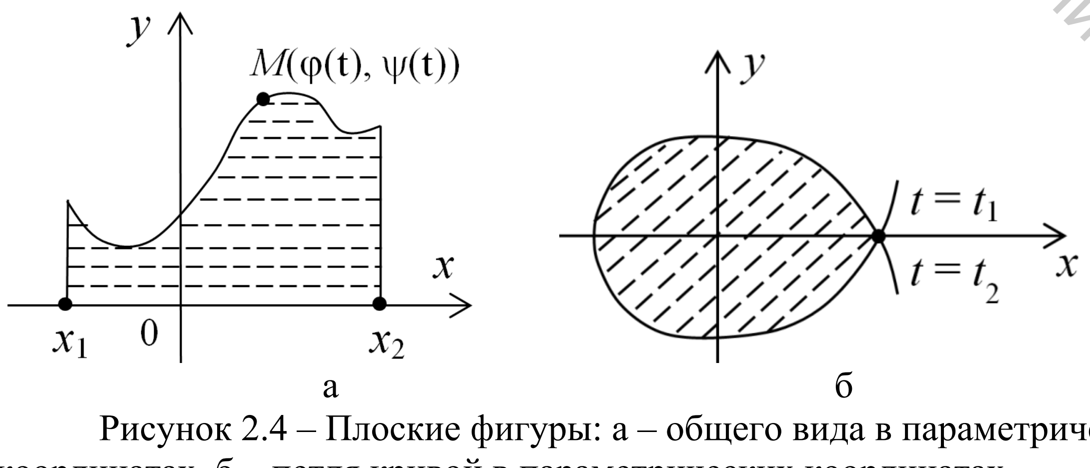


Рисунок 2.4 – Плоские фигуры: а – общего вида в параметрических координатах, б – петля кривой в параметрических координатах

Пример: вычислить площадь фигуры, заключенной между кривой $x=2t+1,\ y=2-t^2,\ -1\le x\le 3$ и осью Oy.

Решение. В нашем случае $\varphi(t)=2t+1, \psi(t)=2-t^2$. Из заданного условия $-1\le x\le 3$ получим неравенство -1≤ 2t+1≤3, -2≤ 2t+1≤2, -1≤ t ≤1. Точка пробегает по петле, когда параметр изменяется от t=-1 до t=1. Вычислим $x_1=\varphi(-1)=-1$, $x_2=\varphi(1)=3$. Очевидно, что на отрезке $[-1;\ 1]$ $y=2-t^2>0$. Следовательно, фигура является криволинейной трапецией на отрезке [x_1; x_2]=[-1; 3] (см. рис. 2.4(б)). Для вычисления ее площади применим формулу (2.5). $\varphi'(t)=2$. Тогда $\psi(t)\cdot\varphi'(t)=\ 2-t^2\ \cdot 2=4-2t^2$ и

$$S=\int_{t_1}^{t_2}\psi(t)\cdot\varphi'(t)\,dt=\int_{-1}^{1}\ 4-2t^2\ \ dt=\left(4t-2\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1}=\left(4-\frac{2}{3}\right)-\left(-4+\frac{2}{3}\right)=\frac{20}{3}.$$

Пример: вычислить площадь ***петли*** кривой $x=2t-t^2,\ y=2t^2-t^3$, $0\le x\le 1$.

Решение. Найдем параметры t_1 и t_2, которые дают точку пересечения M петли. Из заданного условия $0\le x\le 1$ получим систему $\begin{cases}2t-t^2\ge 0\\ 2t-t^2\le 1\end{cases}$. Решим эту систему $\begin{cases}2t-t^2\ge 0,\\ t^2-2t+1\ge 0,\end{cases}$ $\begin{cases}2t-t^2\ge 0,\\ (t-1)^2\ge 0.\end{cases}$ Так как второе неравенство верно для любых t, то система равносильна неравенству $2t-t^2\ge 0$, то есть $t(t-2)\le 0$. Решим его методом интервалов. Получим решение $t\in[0;2]$. Следовательно, точке пробегает по петле, когда параметр изменяется от $t=0$ до $t=2$. Запишем подынтегральную функцию $x'(t)=\ 2t-t^2\ '=2-2t$,

$y(t)\cdot x'(t)=\ 2t^2-t^3\ \cdot(2-2t)=2t^4-6t^3+4t^2$. Вычислим интеграл по формуле (2.5): $\int_{t_1}^{t_2}y(t)\cdot x(t)\,dt=\int_0^2\ 2t^4-6t^3+4t^2\ \ dt=\left(2\cdot\frac{t^5}{5}-6\cdot\frac{t^4}{4}+4\cdot\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^2=-\frac{8}{15}.$

Следовательно, $S=\left|-\frac{8}{15}\right|=\frac{8}{15}.$

Задания для решения

1. Вычислить площадь криволинейной трапеции, границы которой заданы уравнениями $x=t-3,\ y=5t-t^2-4,\ -2\le x\le 1.$

2. Вычислить площадь криволинейной трапеции, границы которой заданы уравнениями $x=2t-8,\ y=32t-4t^2-60,\ -2\le x\le 2.$

3. Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом $x=4\cos t,\ y=3\sin t.$

4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной эллипсом $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1.$

5. Вычислить площадь петли кривой $x=3t^2,\ y=3t-t^3,\ 0\le x\le 9.$

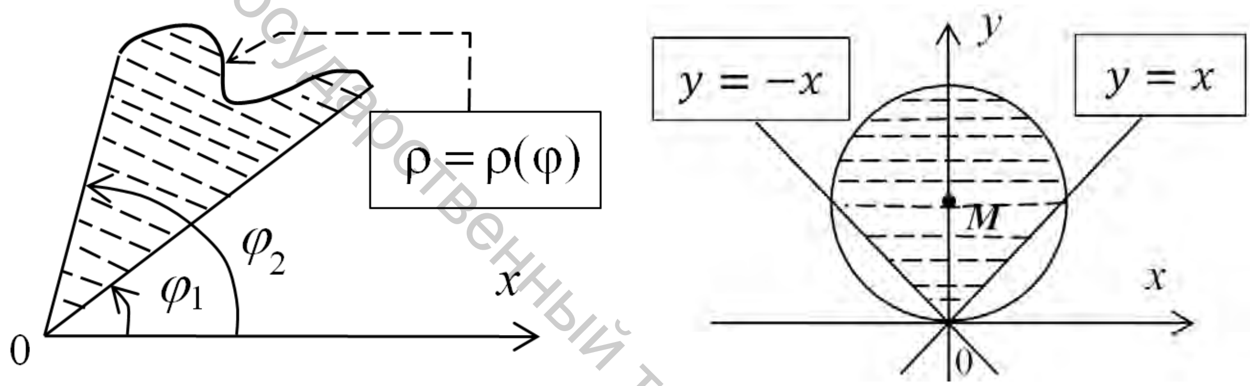
6. Вычислить площадь петли кривой $x=t^2-1,\ y=t^3-t,\ -1\le x\le 0.$

7. Вычислить площадь петли кривой $x=t^2+1,\ y=t^3-3t,\ 0\le x\le 4.$

8. Вычислить площадь петли кривой $x=\frac{1}{3}t\left(3-t^2\right),\ y=t^2,\ 0\le y\le 3.$

Вычисление площадей плоских фигур в полярных координатах

Пусть задана плоская фигура, ограниченная кривыми в полярных координатах (см. рисунок 2.5(а)) $\rho=\rho(\varphi)$, $\varphi=\varphi_1$, $\varphi=\varphi_2$, где $\rho=\rho(\varphi)$ – непрерывная функция, $\varphi=\varphi_1$, $\varphi=\varphi_2$, $(\varphi_1<\varphi_2)$ – заданные углы.



а б

Рисунок 2.5 – Плоские фигуры: а – общего вида в полярных координатах, б – из примера

Площадь фигуры, изображенной на рисунке 2.5(а) вычисляется по формуле

$$S=\frac{1}{2}\cdot\int_{\varphi_1}^{\varphi_1}\rho^2(\varphi)\,d\varphi. \qquad (2.6)$$

Пример: вычислить площадь фигуры, ограниченной кривыми $x^2+y^2=4y,\ \ y=x,\ \ y=-x$

Решение. Приведем первое уравнение к каноническому виду: $x^2+y^2=4y \Leftrightarrow x^2+\left(y^2-4y+4\right)=4 \Leftrightarrow (x-0)^2+(y-2)^2=2^2$ – это уравнение окружности с центром в точке $M(0;\ 2)$ и радиусом R = 2. Заданная фигура изображена на рисунке 2.5(б).

Найти площадь будет значительно проще, если перейти к полярным координатам по формулам $x=\rho\cdot\cos\varphi$, $y=\rho\cdot\sin\varphi$, которые устанавливают связь между полярными и прямоугольными координатами. Подставим эти формулы в уравнение окружности $x^2+y^2=4y$. Получим $x^2+y^2=4y \Leftrightarrow$ $(\rho\cdot\cos\varphi)^2+(\rho\cdot\sin\varphi)^2=4\rho\cdot\sin\varphi \ \Leftrightarrow\ \rho^2(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)=4\rho\cdot\sin\varphi \ \Leftrightarrow$

$\rho^2\cdot 1=4\rho\cdot\sin\varphi$, $\rho=4\sin\varphi$ – уравнение заданной окружности в полярных координатах. Прямые $y=x$, $y=-x$ задают лучи $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$, $\varphi=\dfrac{3\pi}{4}$, которые ограничивают заштрихованную фигуру. Вычислим площадь

$$S=\frac{1}{2}\cdot\int_{\varphi_1}^{\varphi_1}\rho^2(\varphi)\,d\varphi=\frac{1}{2}\cdot\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} 4\sin\varphi\;^2\,d\varphi=\frac{16}{2}\cdot\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\sin^2\varphi\,d\varphi=8\cdot\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}\,d\varphi=$$

$$=4\cdot\left(\varphi-\frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}=4\cdot\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{1}{2}\cdot\sin\frac{3\pi}{2}\right)-4\cdot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cdot\sin\frac{\pi}{2}\right)=2\pi+4.$$

Пример: вычислить площадь одного ***лепестка*** кривой $\rho=2\cos(3\varphi)$.

Решение. Так как $\rho\geq 0$ на интервале $-\pi/6;\pi/6$ и $\rho=0$ при $\varphi_1=-\pi/6$, $\varphi_2=\pi/2$, то на отрезке $-\pi/6;\pi/6$ кривая делает петлю – один из трех лепестков. Его площадь найдем по формуле (2.6):

$$S=\frac{1}{2}\cdot\int_{\varphi_1}^{\varphi_1}\rho^2(\varphi)\,d\varphi=\frac{1}{2}\int_{-\pi/6}^{\pi/6}4\cos^2 3\varphi\,d\varphi=\frac{1}{2}\int_{-\pi/6}^{\pi/6}4\cdot\frac{1+\cos 6\varphi}{2}\,d\varphi=\left(\varphi+\frac{\sin 6\varphi}{6}\right)\Bigg|_{-\pi/6}^{\pi/6}=$$

$$=\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\sin\pi}{6}\right)-\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\sin\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{3}.$$

Пример: вычислить площадь фигуры, ограниченной кривой $\rho=\sin 4\varphi$.

Решение. Одну петлю (лепесток) кривая делает на отрезке $0;\pi/4$. Подставим $\varphi_1=0$, $\varphi_2=\pi/4$ в (2.6) и найдем площадь одного лепестка:

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot\int_0^{\pi/4}\sin^2 4\varphi\,d\varphi=\frac{1}{2}\cdot\int_0^{\pi/4}\frac{1-\cos 8\varphi}{2}\,d\varphi=\frac{1}{4}\cdot\left(\varphi-\frac{\sin 8\varphi}{8}\right)\Bigg|_0^{\pi/4}=\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{\pi}{4}-\frac{0}{8}\right)=\frac{\pi}{16}.$$

Следовательно, полная площадь фигуры равна $S=4\cdot S_1=4\cdot\dfrac{\pi}{16}=\dfrac{\pi}{4}$.

Задания для решения

1. Вычислить в полярных координатах площадь фигуры, ограниченной заданными линиями:

1.1 $x^2+y^2=4y$, $y=x$, $y=0$;

1.2 $x^2+y^2=2y$, $x=y$, ось Oy;

1.3 $x^2+y^2=4x$, $y=x$;

1.4 $x^2+y^2=4x$, $x=1$;

1.5 $x^2+y^2=4$, $x^2+y^2=9$, $y=x/\sqrt{3}$, $y=x$;

1.6 $\rho=\cos 4\varphi$;

1.7 $\rho=\sin 6\varphi$, $\rho=0{,}5$;

1.8 $\rho=1+\sin 3\varphi$

1.9 $\rho=1-\cos 4\varphi$;

1.10 $\rho=1+\sin 2\varphi$, $\varphi=0$, $\varphi=\pi/2$

Вычисление длин кривых на плоскости

Если кривая задана уравнением $y = f(x)$ и функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[x_1; x_2]$, то длина ее дуги от точки $A(x_1, f(x_1))$ до точки $B(x_2, f(x_2))$ равна $L = \int\limits_{x_1}^{x_2} \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$.

Если кривая задана параметрическими уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $t \in [t_1; t_2]$ и функции $\varphi(t), \psi(t)$ непрерывно дифференцируемы на отрезке $[t_1; t_2]$, то длина ее дуги равна $L = \int\limits_{t_1}^{t_2} \sqrt{(\varphi'(t))^2 + (\psi'(t))^2}\, dt.$

Если кривая задана в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$, $\varphi \in [\varphi_1; \varphi_2]$ и функция $\rho(\varphi)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[\varphi_1; \varphi_2]$, то длина ее дуги равна $L = \int\limits_{\varphi_1}^{\varphi_2} \sqrt{\rho^2(\varphi) + (\rho'(\varphi))^2}\, d\varphi$.

Пример: найти длину дуги кривой $y = \frac{x^2}{4} - \frac{1}{2}\ln x,\ 1 \le x \le e.$

Решение. $y' = \frac{2x}{4} - \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$, $1 + (y')^2 = 1 + \frac{1}{4}\left(x^2 + \frac{1}{x^2} - 2\right) =$
$= \frac{1}{4}\left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right) = \frac{1}{4}\left(x + \frac{1}{x}\right)^2$, $L = \int\limits_1^e \sqrt{1 + (y')^2}\, dx = \frac{1}{2} \cdot \int\limits_1^e \left(x + \frac{1}{x}\right) dx = \frac{1}{4} \cdot (1 + e^2)$.

Пример: найти длину дуги $x = 9(t - \sin t),\ y = 9(1 - \cos t),\ t_1 = 0, t_2 = \pi/3.$

Решение. $x' = 9(1 - \cos t),\ y' = 9\sin t,\ x'^2 + y'^2 = 81(1 - 2\cos t) + 81 \cdot 1 =$
$= 162(1 - \cos t) = 162 \cdot 2 \cdot \sin^2(t/2)$, $L = 18\int\limits_0^{\pi/3} \sqrt{\sin^2(t/2)}\, dt = 18\int\limits_0^{\pi/3} |\sin(t/2)|\, dt.$

Так как $\sin(t/2) > 0$ на отрезке $[t_1; t_2] = [0; \pi/3.]$, то $|\sin(t/2)| = \sin(t/2)$.

$L = 18\int\limits_0^{\pi/3} \sin(t/2)\, dt = -18 \cdot 2\cos(t/2)\Big|_0^{\pi/3} = -36(\cos(\pi/6) - \cos(0)) = 36 - 18\sqrt{3}.$

Пример: найти длину дуги кривой $\rho = \cos^4\frac{\varphi}{4}$ $\varphi_1 = 0,\ \varphi_2 = 2\pi.$

Решение. $\rho' = -4\cos^3\frac{\varphi}{4} \cdot \frac{1}{4} \cdot \sin\frac{\varphi}{4},\ \rho^2 + \rho'^2 = \cos^8\frac{\varphi}{4} + \cos^6\frac{\varphi}{4}\sin^2\frac{\varphi}{4} = \cos^6\frac{\varphi}{4}.$

$L = \int\limits_0^{2\pi} \sqrt{\cos^6\frac{\varphi}{4}}\, d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \left|\cos^3\frac{\varphi}{4}\right| d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \cos^3\frac{\varphi}{4}\, d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} \left(1 - \sin^2\frac{\varphi}{4}\right)\cos\frac{\varphi}{4}\, d\varphi.$ Применим замену $z = \sin\frac{\varphi}{4}.$ Получим $L = 4 \cdot \int\limits_0^{\pi/2} (1 - z^2)\, dz = 4 \cdot \left(z - \frac{z^3}{3}\right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{8}{3}.$

Задания для решения

1. Вычислить длину дуги кривой, заданной в прямоугольной системе координат:

1.1 $y=\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}},\ 0\le x\le 1;$ **1.2** $y=10+2\sqrt{x^3},\ x\in[2;3];$

1.3 $y=\mathrm{tg}\,4+6\cdot\sqrt{x^3},\ x\in[0;2];$ **1.4** $y=\sin^2 x+\frac{4}{3}\sqrt{x^3}+\cos^2 x,\ x\in[5;12]$

1.5 $y=\frac{2}{3}\sqrt{(x-1)^3},\ 4\le x\le 9;$ **1.6** $y=\frac{2}{\pi}\ln\left(\sin\frac{\pi x}{2}\right),\ x\in\left[\frac{1}{2};\frac{1}{3}\right];$

1.7 $y=\frac{1}{3}\cdot(3-x)\cdot\sqrt{x},\ y\ge 0;$ **1.8** $y=\sqrt{(2x+1)^3},\ x\in[0;1].$

2. Вычислить длину дуги кривой, заданной в параметрической форме:

2.1 $x=8\sin t+6\cos t,\ y=6\sin t-8\cos t,\quad t_1=0, t_2=\pi/4;$

2.2 $x=2\cos^3 t,\ y=2\sin^3 t,\quad t_1=0, t_2=\pi/4;$

2.3 $x=2(\cos t+t\sin t),\ y=2(\sin t-t\cos t),\quad t_1=0, t_2=\pi/2;$

2.4 $x=e^t\cos t,\ y=e^t\sin t,\quad t_1=0, t_2=\ln(\pi);$

2.5 $x=t^2,\ y=t/3-t^3,\quad t_1=-1/\sqrt{3},\ t_2=1/\sqrt{3};$

2.6 петля $x=\sqrt{3}t^2,\ y=t-t^3,\quad 0\le x\le\sqrt{3};$

2.7 $x=t(t-2),\ y=t(t+2),\quad t_1,\ t_2$ – соответствуют точкам пересечения с Ox;

2.8 $x=2t-1,\ y=1-4t^2,\quad t_1,\ t_2$ – соответствуют точкам пересечения с Ox.

3. Вычислить длину кривой на плоскости, заданной в полярной системе координат:

3.1 $\rho=\sin^3(\varphi/3), \varphi_1=0, \varphi_2=3\pi;$ **3.2** $\rho=\cos^3(\varphi/3), \varphi_1=-3\pi/2, \varphi_2=3\pi/2;$

3.3 $\rho=1+\cos(\varphi)\quad \varphi_1=-\pi/2,\ \varphi_2=\pi/2;$ **3.4** $\rho=1+\sin(\varphi)\quad \varphi_1=0,\ \varphi_2=\pi;$

3.5 $\rho=1-\cos(\varphi)\quad \varphi_1=-\pi/2,\ \varphi_2=\pi/2;$ **3.6** $\rho=1-\sin(\varphi)\quad \varphi_1=0,\ \varphi_2=\pi;$

3.7 $\rho=\sin^2(\varphi/2);$ **3.8** $\rho=\cos^2(\varphi/2).$

Вычисление объема и площади тела вращения

Пусть в пространстве дано некоторое тело, проектирующееся на ось Ox в отрезок $[x_1;x_2]$. Всякая плоскость, перпендикулярная оси Ox и проходящая через точку $x\in[x_1;x_2]$, в сечении с телом образует фигуру площадью $S(x)$. Тогда объем этого тела вычисляется по формуле $V=\int\limits_{x_1}^{x_2}S(x)\,dx$.

В частности, при вращении вокруг оси Ox криволинейной трапеции с верхней границей $y=f(x)$ на отрезке $[x_1;x_2]$ площади поперечных сечений равны $S(x)=\pi\cdot f^2(x)$. Поэтому объем тела вращения вычисляется по формуле $V=\pi\int\limits_{x_1}^{x_2} f^2(x)\,dx$.

Если функция $f(x)$ непрерывно дифференцируема, то площадь поверхности тела вращения, образованная вращением верхней границы трапеции, равна $Q=2\pi\int\limits_{x_1}^{x_2} f(x)\cdot\sqrt{1+\ f'(x)\ ^2}\,dx$.

Пример: найти объем тела вращения вокруг оси Ox плоской фигуры $y=\sqrt{x},\ y=0,\ x=0,\ x=2$ и площадь поверхности вращения дуги $y=\sqrt{x},\ x\in[0;2]$. Смотри рисунок 2.6.

Решение. $V=\pi\int\limits_0^2 \ \sqrt{x}\ ^2\,dx=\pi\int\limits_0^2 x\,dx=\pi\cdot\left.\dfrac{x^2}{2}\right|_0^2=2\pi.$

$$f(x)\cdot\sqrt{1+\ f'(x)\ ^2}=\sqrt{x}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}=\sqrt{x}\sqrt{1+\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)^2}=\sqrt{x}\cdot\frac{\sqrt{4x+1}}{2\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{4x+1}}{2}.$$

$$Q=2\pi\int\limits_0^2\frac{\sqrt{4x+1}}{2}\,dx=\pi\int\limits_0^2(4x+1)^{\frac{1}{2}}\,dx=\ z=4x+1\ =\pi\int\limits_1^9 z^{\frac{1}{2}}\,dz=\frac{13\pi}{3}.$$

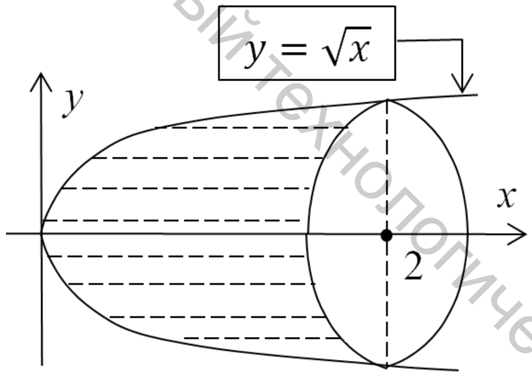


Рисунок 2.6 – Тело вращения плоской фигуры

Задания для решения

1. Найти объем тела вращения ***V*** вокруг оси Ox заданной криволинейной трапеции на отрезке $[x_1;x_2]$ с верхней границей $y=f(x)$. Найти площадь поверхности вращения ***Q*** вокруг оси Ox дуги $y=f(x),\ x\in[x_1;x_2]$.

1.1 $y=e^x,\ x_1=0,\ x_2=1$. Найти ***V*** и ***Q***; **1.2** $y=2x-x^2,\ x_1=0,\ x_2=2$. Найти ***V***;

1.3 $y=x^3,\ x_1=1,\ x_2=2$. Найти ***V*** и ***Q***; **1.4** $y=\sqrt{4-x},\ x_1=0,\ x_2=4$. Найти ***V*** и ***Q***;

1.5 $y=\sin(x),\ x_1=0,\ x_2=\pi$. Найти ***V*** и ***Q***; **1.6** $y=\sqrt[3]{x},\ x_1=1,\ x_2=8$. Найти ***V***;

1.7 $y=\sin(x)+\cos(x),\ x_1=0,\ x_2=\pi$. Найти ***V***.

2. Найти объем тела вращения ***V*** вокруг оси Ox плоской фигуры, ограниченной указанными линиями:

2.1 $y=\sqrt{x}$, $y=x$; **2.2** $y=\sqrt{\ln(x)}$, $y=x^2$, $x=1$, $x=2$; **2.3** $y=x^2$, $y=x^3$.

2.4 Несобственные интегралы

Несобственные интегралы с бесконечными пределами

Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a;+\infty)$, то для любого $b\in[a;+\infty)$ можно составить определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx=I(b)$. Построенная функция $I(b)$ непрерывна. ***Несобственным интегралом*** **с** ***бесконечным верхним пределом*** называется $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx=\lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Если существует конечный предел в правой части этого равенства, то несобственный интеграл называется ***сходящимся***. В противном случае несобственный интеграл называется ***расходящимся***.

Аналогично определяется ***несобственный интеграл*** **с** ***бесконечным нижним пределом***: $\int\limits_{-\infty}^b f(x)\,dx=\lim\limits_{a\to-\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx$ и ***несобственный интеграл с обоими бесконечными пределами***: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx=\int\limits_{-\infty}^{c} f(x)\,dx+\int\limits_{c}^{+\infty} f(x)\,dx$, где $c\in R$ – любое число.

Пример: исследовать на сходимость несобственные интегралы

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx,\ \int\limits_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}\,dx,\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx.$$

Решение. Здесь будут использовано равенство $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\operatorname{arctg}x=\pm\frac{\pi}{2}$.

$$\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx=\lim_{b\to+\infty}\int\limits_0^b\frac{1}{1+x^2}\,dx=\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_0^b=\lim_{b\to+\infty}(\operatorname{arctg}b-\operatorname{arctg}0)=\lim_{b\to+\infty}\operatorname{arctg}b=\frac{\pi}{2}.$$

$$\int\limits_{-\infty}^0\frac{1}{1+x^2}\,dx=\lim_{a\to-\infty}\int\limits_a^0\frac{1}{1+x^2}\,dx=\lim_{a\to-\infty}\operatorname{arctg}x\Big|_a^0=\lim_{a\to-\infty}(0-\operatorname{arctg}a)=-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}.$$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx=\int\limits_{-\infty}^0\frac{1}{1+x^2}\,dx+\int\limits_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}.$$

Несобственные интегралы от неограниченных функций

Если функция $f(x)$ имеет бесконечный разрыв в точке $c\in(a;b)$ и интегрируема на каждом из промежутков $[a;c)$, $(c;b]$, то ***несобственным интегралом от неограниченной функции*** на отрезке $[a;b]$ называется

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\mu\to 0}\int_a^{c-\mu} f(x)\,dx + \lim_{\eta\to 0}\int_{c+\eta}^{b} f(x)\,dx .$$

Если существует конечные оба предела в правой части этого равенства, то несобственный интеграл называется ***сходящимся***, в противном случае несобственный интеграл называется ***расходящимся***.

Если $c = a$ или $c = b$, то в правой части равенства будет один предел.

Пример: вычислить несобственный интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$.

Решение. Подынтегральная функция имеет бесконечный разрыв в точке $x = 1$. Следовательно, $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}} = \lim_{\eta\to 0}\int_0^{1-\eta}(1-x)^{-1/2}\,dx = \lim_{\eta\to 0}(-2)\cdot(1-x)^{-1/2}\Big|_0^{1-\eta} =$

$= -2\cdot\lim_{\eta\to 0}\left(\sqrt{1-1+\eta}-\sqrt{1-0}\right) = 2\cdot\lim_{\eta\to 0}\left(1-\sqrt{\eta}\right) = 2\cdot\left(1-\sqrt{0}\right) = 2.$

Задания для решения

1. Исследовать сходимость несобственного интеграла на бесконечном промежутке:

1.1 $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^2}$; **1.2** $\int_2^{\infty}\frac{dx}{x^3}$; **1.3** $\int_1^{\infty}\frac{dx}{x}$; **1.4** $\int_1^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{x}}$; **1.5** $\int_8^{\infty}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$;

1.6 $\int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x^2}$; **1.7** $\int_{-\infty}^{-2}\frac{dx}{x^3}$; **1.8** $\int_{-\infty}^{-1}\frac{dx}{x}$; **1.9** $\int_{-\infty}^{-8}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$; **1.10** $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$;

1.11 $\int_0^{\infty}e^x\,dx$; **1.12** $\int_{-\infty}^{0}e^x\,dx$; **1.13** $\int_{-\infty}^{2}5^x\,dx$; **1.14** $\int_3^{\infty}4^x\,dx$; **1.15** $\int_0^{\infty}e^{-x}\,dx$;

1.16 $\int_2^{\infty}3^{-x}\,dx$; **1.17** $\int_{-\infty}^{0}e^{-x}\,dx$; **1.18** $\int_{-\infty}^{\infty}e^x\,dx$; **1.19** $\int_1^{\infty}(e^x+e^{-x})\,dx$; **1.20** $\int_1^{\infty}3x^2\,dx$;

1.21 $\int_1^{\infty}\frac{dx}{2x+3}$; **1.22** $\int_0^{\infty}e^{4x+1}dx$; **1.23** $\int_1^{\infty}\frac{dx}{(5x+1)^3}$; **1.24** $\int_5^{\infty}\frac{dx}{x\cdot\ln x}$; **1.25** $\int_e^{\infty}\frac{dx}{x\cdot\sqrt{\ln x}}$;

1.26 $\int_0^{\infty}\frac{x\,dx}{x^2+5}$; **1.27** $\int_1^{\infty}x\cdot e^{-x^2}\,dx$; **1.28** $\int_{-\infty}^{0}x\cdot 8^{-x^2}\,dx$; **1.29** $\int_{e^3}^{\infty}\frac{dx}{x\cdot\ln^5 x}$; **1.30** $\int_2^{\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{(x^2+5)^3}}$.

2. Исследовать сходимость несобственного интеграла на конечном промежутке:

2.1 $\int_0^1\frac{dx}{x}$; **2.2** $\int_0^4\frac{dx}{x^2}$; **2.3** $\int_0^2\frac{dx}{x^4}$; **2.4** $\int_0^9\frac{dx}{\sqrt{x}}$; **2.5** $\int_0^{16}\frac{dx}{\sqrt[4]{x}}$; **2.6** $\int_{-8}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$; **2.7** $\int_2^3\frac{dx}{x-3}$;

2.8 $\int_1^2\frac{xdx}{x^2-1}$; **2.9** $\int_1^4\frac{dx}{x\cdot\sqrt{\ln x}}$; **2.10** $\int_2^{10}\frac{xdx}{\sqrt[4]{(2x-4)^3}}$; **2.11** $\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$; **2.12** $\int_1^3\frac{dx}{\sqrt{x-2}}$.

3 Функции нескольких переменных

3.1 Частные производные

Если каждой точке $P(x_1, x_2, ... x_n) \in D$ принадлежащей данному множеству, поставлено в соответствие по определенному закону одно единое действительное число *u*, то говорят, что на множестве *D* **задана функция от *n* переменных**:

$$u = f(p), \quad u = f(x_1, x_2, ... x_n). \tag{3.1}$$

Если $n = 1$, то говорят о функции одного переменного $u = f(x)$, если $n = 2$, то говорят о функции двух переменных. Для простоты рассмотрим функцию двух переменных. Каждой точке $M_0(x_0, y_0)$ области *D* в системе координат *Oxyz* соответствует точка $M(x_0, y_0, z_0)$. Совокупность всех таких точек представляет собой некоторую поверхность.

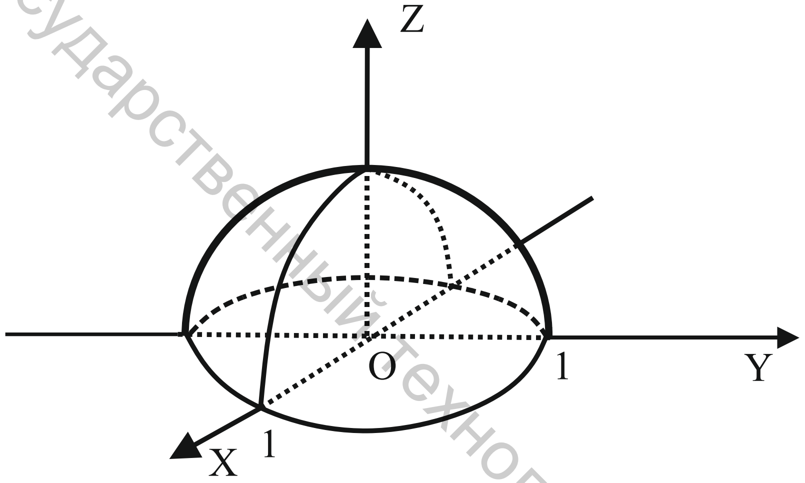


Рисунок 3.1 – График функции $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

Например, функция $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ изображается верхней полусферой с центром в точке *O(0,0,0)* и радиусом *R=1* (рисунок 3.1).

Пусть задана функция $z = f(x, y)$. Дадим независимой переменной *x* приращение $x + \Delta x$, а переменную *y* будем оставлять неизменной. В этом случае функция получит приращение по переменной *x*:

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

Аналогично мы можем переменную *x* оставлять неизменной, а давать приращение по переменной *y*, в этом случаи функция получит приращение по переменной *y*:

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Полное приращение функции можно записать в виде:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y).$$

Если существует предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x}$, то он называется ***частной производной функции по переменной x*** и обозначается $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, z'_x. Частная производная функции *f(x,y)* по переменной *x* выражает скорость изменения функции в данном направлении $(y = y_0)$, или скорость изменения функции $f(x, y_0)$ одной переменной *x*. Аналогично, если существует предел $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y}$, то он называется ***частной производной по переменной y:*** $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$, z'_y.

Поэтому, частную производную функции нескольких (двух, трех и больше) переменных находят как производную функции одной из этих переменных при условии постоянства всех остальных переменных. При этом все формулы дифференцирования функций одной переменной применимы для нахождения частных производных функций любого числа переменных.

Пример 1: найти частные производные функции $z = 2y + e^{x^2 - y} + 1$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = (2y + e^{x^2 - y} + 1)'_x = 2xe^{x^2 - y},$$

$$\frac{\partial z}{dy} = z'_y = (2y + e^{x^2 - y} + 1)'_y = 2 - e^{x^2 - y}.$$

Частными производными второго порядка данной функции называются соответствующие частные производные от ее первых частных производных

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = z''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = z''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z''_{yx} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = z''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

Производные второго порядка можно снова продифференцировать, как по переменной *x*, так и по переменной *y*. Тогда мы получим частные производные третьего порядка. Частная производная *n*-порядка, есть первая производная от производной *(n-1)*-порядка.

Производные z''_{xy}, z''_{yx} называются смешанными частными производными.

Теорема. Если функция $z = f(x, y)$ и ее частные производные $f'_x, f'_y, f''_{xy}, f''_{yx}$ определены и непрерывны в точке $M(x, y)$ и в ее окрестности, то в этой точке

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}, \tag{3.2}$$

т.е. если смешанные производные непрерывны, то они равны. Результат дифференцирования не зависит от порядка дифференцирования.

Пример 2: вычислить частные производные второго порядка от функции $f(x, y) = x^2 y + y^3$.

Решение.

Дифференцируя по одной из переменных, считаем все другие постоянными:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = f'_x = 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f'_y = x^2 + 3y^2,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y, \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2x,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x, \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y.$$

Получили, что $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$.

Задания для решения

1. Найти частные производные следующих функций:

1.1 $z = 5x^3 + xy^2 - 8y^5$;

1.2. $z = \ln x + x \ln y - \sqrt{6x}$;

1.3. $z = \sqrt{y^3 - xy + x^3} + 12x$;

1.4. $z = \ln(\cos x + \sqrt{y}) + 11y^9$;

1.5. $z = \dfrac{x}{y} + \dfrac{y}{x} + 6tg7x$;

1.6. $z = ctg(x^2 - yx) - e^{xy}$;

1.7. $z = \arcsin(x + 7y^2)$;

1.8. $z = e^{x+6y-xy} + 3$;

1.9. $z = \cos(x^6 - 5y^3) + y^8$;

1.10. $z = tg\left(\dfrac{x^2}{y}\right) + \ln(x + y)$.

2. Найти частные производные второго порядка указанных функций и проверить, равны ли их смешанные частные производные:

2.1 $z = \ln(x + y)$;

2.2. $z = x^2 + \ln y - \cos(6xy)$;

2.3. $z = \cos\left(\dfrac{x}{y}\right)$;

2.4. $z = ctg(xy^2)$;

2.5. $z = \ln(8x^2 - y)$;

2.6. $z = \sin(x^2 y^2 - 6)$;

2.7. $z = tg(x - 7y^6)$;

2.8. $z = \sqrt{x^2 + y^3}$;

2.9. $z = \arccos(y - 2x)$;

2.10. $z = \sin x + 12\cos y^2$.

3. Вычислить значения частных производных первого порядка функции $u = u(x, y, z)$ в точке $M_0(x, y, z)$:

3.1 $u = \dfrac{x + y^2}{z}$, $M_0(1,2,1)$;

3.2. $u = 6\sqrt{x + y^4} + z^3 + 1$, $M_0(1,0,3)$;

3.3. $u = \sqrt{x^3} - \dfrac{\sqrt{y}}{z^2}$, $M_0(4{,}2{,}1)$;

3.4. $u = \sqrt{x + y^2 + xy\cos z}$, $M_0(2{,}2,\dfrac{\pi}{2})$;

3.5. $u = ze^{-xy}$, $M_0(3{,}0{,}3)$;

3.6. $u = \dfrac{\sin(x+y)}{z}$, $M_0(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{3},1)$;

3.7. $u = \dfrac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z^2}$, $M_0(4{,}3{,}5)$;

3.8. $u = \dfrac{5x}{\sqrt{y^2 + z^2}}$, $M_0(9{,}0{,}1)$;

3.9. $u = x^4 + 2\sqrt{yz} - e^{xz}$, $M_0(2{,}1,\dfrac{1}{4})$;

3.10. $u = \ln(x^2 + 3y) + z^4$, $M_0(2{,}4{,}3)$.

4. Проверить, удовлетворяет ли указанному уравнению данная функция z:

4.1 $\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{x+y}{x-y}$, $z = \dfrac{x^2 + y^2}{x - y}$;

4.2. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z$, $z = x\ln\dfrac{y}{x}$;

4.3. $\dfrac{x}{y}\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{1}{\ln x}\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2z$, $z = x^y$;

4.4. $x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, $z = \dfrac{y}{x}$;

4.5. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} - y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 3(x^3 - y^3)$, $z = \ln\dfrac{x}{y}$;

4.6. $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$, $z = \ln(x^2 + y^2)$;

4.7. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 0$, $z = arctg\dfrac{x}{y}$;

4.8. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2z$, $z = (x^2 + y^2)\, tg\dfrac{x}{y}$;

4.9. $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + \dfrac{\partial z}{\partial y} = z$, $z = x\ln\dfrac{y}{x}$;

4.10. $25\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, $z = e^{-\cos(x+5y)}$.

3.2 Полный дифференциал функции нескольких переменных. Применение полного дифференциала к приближенным вычислениям

Рассмотрим функцию двух переменных $z = f(x, y)$. Полное приращение функции:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y). \qquad (3.3)$$

Полный дифференциал функции равен сумме произведений первых частных производных на соответствующие дифференциалы аргументов:

$$dz = \frac{\partial z(x,y)}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial z(x,y)}{\partial y}\cdot dy. \qquad (3.4)$$

Каждое слагаемое правой части формулы (3.4) называется частным дифференциалом:

$$d_x z = \frac{\partial z}{\partial x}dx,\ d_y z = \frac{\partial z}{\partial y}dy. \qquad (3.5)$$

Таким образом,

$$dz = d_x z + d_y z. \qquad (3.6)$$

Если имеем функцию любого числа переменных

$$W = f(x, y, u, v, \ldots t),$$
$$dW = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial u}du + \ldots + \frac{\partial f}{\partial t}dt. \tag{3.7}$$

Полным дифференциалом второго порядка называется полный дифференциал от ее полного дифференциала:

$$d^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}dydx + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}dy^2. \tag{3.8}$$

Для полного дифференциала третьего порядка

$$d^2 z = \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}dx^3 + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}dx^2 dy + 3\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}dxdy^2 + \frac{\partial^3 z}{\partial y^3}dy^3. \tag{3.9}$$

При достаточно малых $|\Delta x|$ и $|\Delta y|$ имеет место приближенное равенство $\Delta z \approx dz$. Поэтому равенство (3.3) можно переписать в следующем виде:

$$f(x + \Delta x, y + \Delta y) = f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y. \tag{3.10}$$

Последняя формула используется в приближенных вычислениях.

Пример 1: найти полный дифференциал и полное приращение функции $z = xy$ в точке (2,3), при $\Delta x = 0.1, \Delta y = 0.2$.

Решение.

Учитывая (3.3), полное приращение функции

$$\Delta z = (x + \Delta x)(y + \Delta y) - xy = y\Delta x + x\Delta y + \Delta x \Delta y.$$

Подставляя данные из условия задачи, получим:

$$\Delta z = 3 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.2 + 0.1 \cdot 0.2 = 0.72.$$

Находим частные производные:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = (xy)'_x = y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = (xy)'_y = x.$$

Учитывая (3.4) и подставляя координаты точки, получим:

$$dz = y \cdot dx + x \cdot dy = y\Delta x + x\Delta y,$$
$$dz = 3 \cdot 0.1 + 2 \cdot 0.2 = 0.7.$$

Пример 2: найти полный дифференциал функции $u = e^{x^2+y^2}\sin^2 z$.

Решение.

Дифференцируя по одной из переменных, считаем все другие постоянными:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{x^2+y^2}(x^2 + y^2)'_x \sin^2 z = 2xe^{x^2+y^2}\sin^2 z,$$
$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2ye^{x^2+y^2}\sin^2 z,$$
$$\frac{\partial u}{\partial z} = e^{x^2+y^2}\, 2\sin z\,(\sin z)'_z = 2e^{x^2+y^2}\sin z \cos z = e^{x^2+y^2}\sin 2z.$$

В соответствии с (3.7) получим

$$du = e^{x^2+y^2}(2x\sin^2 z dx + 2y\sin^2 z dy + \sin 2z dz).$$

Пример 3: вычислить приближенно: $1.02^{3.01}$.

Решение.

Рассмотрим функцию $z = x^y$. Мы можем записать $1.02^{3.01} = (x+\Delta x)^{(y+\Delta y)}$, где $x=1,\ \Delta x = 0.02,\ \ y=3, \Delta y = 0.01$. Предварительно находим частные производные:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1},\ \ \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x.$$

Учитывая (3.10), можно записать:

$$(x+\Delta x)^{(y+\Delta y)} = x^y + yx^{y-1}\Delta x + x^y \ln x \Delta y.$$

Следовательно, $1.02^{3.01} \approx 1^3 + 3\cdot 1^{3-1}\cdot 0.02 + 1^3 \ln 1 \cdot 0.01 \approx 1.06.$

Задания для решения

1. Найти полный дифференциал первого и второго порядка функций:

1.1 $z = x^3 + x^2y^2 - 5y^5$;

1.2. $z = \ln(x+6y)$;

1.3. $z = \frac{1}{5}\sqrt{(y^3+x^2)^3} + 20$;

1.4. $z = \sqrt[6]{x^5y^7} - 7$;

1.5. $z = arctg\frac{x+2y}{1-xy}$;

1.6. $z = ctg(xy) - e^{xy}$;

1.7. $z = \arcsin\sqrt{xy}$;

1.8. $z = e^{-\sqrt{x^2+y^2}}$;

1.9. $z = \arccos(x - 3y^3)$;

1.10. $z = \cos\sqrt{x^2+y}$.

2. Найти значение полного дифференциала функции:

2.1 $z = x + y - \sqrt{x^2+y^2}$ при *x=3, y=4,* $\Delta x = 0{,}1,\ \Delta y = 0{,}2$;

2.2 $z = e^{xy}$ при *x=1, y=1,* $\Delta x = 0{,}15,\ \Delta y = 0{,}1$;

2.3 $z = \frac{xy}{x^2-y^2}$ при *x=2, y=1,* $\Delta x = 0{,}01,\ \Delta y = 0{,}03$;

2.4 $z = \frac{x+3y}{y-3x}$ при *x=2, y=4,* $\Delta x = 0{,}1,\ \Delta y = 0{,}2$;

2.5 $u = \frac{x+y}{z}$ при *x=1, y=-2 z=-1,* $\Delta x = 0{,}1,\ \Delta y = 0{,}2;\ \Delta z = 0{,}5$;

2.6 $z = arcctg\frac{x}{y}$ при *x=1, y=3,* $\Delta x = 0{,}01,\ \Delta y = -0{,}05$;

2.7 $z = \frac{x}{x-y}$ при *x=2, y=1,* $\Delta x = -\frac{1}{3},\ \Delta y = \frac{1}{2}$;

2.8 $z = \frac{x^2}{y}$ при *x=1, y=2,* $\Delta x = 0{,}1,\ \Delta y = 0{,}2$;

2.9 $z = x^2y^2 + \sqrt{x}$ при *x=1, y=4,* $\Delta x = 0{,}1,\ \Delta y = 0{,}01$;

2.10 $z = arctg\sqrt{x^2 + y}$ при *x=2, y=1,* $\Delta x = 0{,}3,\ \Delta y = 0{,}02.$

3. Вычислить приближенно:

3.1 $1{,}04^{2,02}$;

3.2. $\ln\left(\sqrt{1{,}03} + \sqrt[4]{0{,}98} - 1\right)$;

3.3. $1{,}94^2 e^{0,121}$;

3.4. $\sin 1{,}59 tg 3{,}09$;

3.5. $1{,}08^{3,96}$;

3.6. $\dfrac{\sin 1{,}49 arctg 0{,}07}{2^{2,95}}$;

3.7. $\sqrt[3]{67}$;

3.8. $tg 47^\circ$;

3.9. $\cos 94^\circ$;

3.10. $\sin 183^\circ$.

Замечание: после предварительного анализа градусы необходимо перевести в радианы.

3.3 Дифференцирование сложных и неявных функций

Пусть задана функция двух переменных в виде $z = f(u, \upsilon)$. Причем u и υ, являются функциями независимых переменных *x* и *y,* т. е.

$$u = \varphi(x, y),\ \upsilon = \psi(x, y).$$

В этом случае $z = f(\varphi(x, y), \psi(x, y))$ - сложная функция независимых переменных *x* и *y.* Её частные производные можно найти, используя следующие формулы

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \upsilon}\cdot\frac{\partial \upsilon}{\partial x}, \tag{3.11}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \upsilon}\cdot\frac{\partial \upsilon}{\partial y}. \tag{3.12}$$

Если задана функция $z = f(u, \upsilon, l, s)$, где $u = \varphi(x, y),\ \upsilon = \psi(x, y),$ $l = \chi(x, y),\quad s = \eta(x, y)$, то формулы принимают вид

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \upsilon}\cdot\frac{\partial \upsilon}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial l}\cdot\frac{\partial l}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial x}, \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \upsilon}\cdot\frac{\partial \upsilon}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial l}\cdot\frac{\partial l}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial s}\cdot\frac{\partial s}{\partial y}. \tag{3.14}$$

В случае, когда функция $z = f(x, y, u, \upsilon)$ и $y = y(x),\ u = u(x),\ \upsilon = \upsilon(x)$, то можно записать

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \upsilon}\cdot\frac{\partial \upsilon}{\partial x}.$$

т.к. y, u, υ - функции только одного *x*, то частные производные обращаются в обыкновенные, кроме того $\dfrac{\partial x}{\partial x} = 1$, поэтому

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} + \frac{\partial z}{\partial u}\cdot\frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial \upsilon}\cdot\frac{d\upsilon}{dx}. \tag{3.15}$$

Функция $z = f(x,y,z)$ называется неявной, если она задается уравнением

$$F(x,y,z) = 0, \tag{3.16}$$

неразрешенным относительно z.

Теорема: Пусть непрерывная функция $y = y(x)$ задается неявно уравнением

$$F(x,y) = 0,$$

где $F(x,y)$, $F'_x(x,y)$, $F'_y(x,y)$ - непрерывные функции, причем $F'_y(x,y) \neq 0$.

Тогда функция $y(x)$ имеет производную:

$$y'_x = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}. \tag{3.17}$$

Рассмотрим уравнение вида

$$F(x,y,z) = 0.$$

В этом случае справедливы следующие формулы

$$z'_x = -\frac{F'_x(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}, \quad z'_y = -\frac{F'_y(x,y,z)}{F'_z(x,y,z)}. \tag{3.18}$$

Пример 1: найти частные производные функции: $z = x^2 + \sqrt{y}$, $y = \sin x$.

Решение.

Находим $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{2\sqrt{y}}$, и $\frac{\partial y}{\partial x} = \cos x$.

Согласно выражению (3.15) можно записать: $\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx}$.

Результат запишется в виде $\frac{dz}{dx} = 2x + \frac{\cos x}{2\sqrt{y}} = 2x + \frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$.

Пример 2: найти производную функции z, заданной неявно уравнением: $e^z + x^2 y + z + 5 = 0$.

Решение.

Здесь $F(x,y,z) = e^z + x^2 y + z + 5$, $F'_x = 2xy$, $F'_y = x^2$, $F'_z = e^z + 1$. По формулам (3.18) имеем: $z'_x = -\frac{2xy}{e^z + 1}$, $z'_y = -\frac{x^2}{e^z + 1}$.

Задания для решения

1. Найти производную сложной функции:

1.1 $u = e^{x-2y}$, $x = \sin t, y = t^3; \frac{du}{dt} - ?$ **1.2.** $u = z^2 + y^2 + z, z = \sin t, y = e^t; \frac{du}{dt} - ?$

1.3. $z = \arcsin(x - y), x = 3t; y = 4t^3; \frac{dz}{dt} - ?$ **1.4.** $u = \ln(e^x + e^y), y = x^3; \frac{du}{dx} - ?$

1.5. $z = arctg(xy),\ y = e^x;\ \dfrac{dz}{dx} - ?$ **1.6.** $u = \arcsin\dfrac{x}{z},\ z = \sqrt{x^2+1};\ \dfrac{du}{dx} - ?$

1.7. $z = tg(t + x^2 - y), x = \dfrac{1}{t}, y = \sqrt{t}\ ; \dfrac{dz}{dt} - ?$ **1.8.** $u = \dfrac{e^x(y-z)}{5}, y = \sin x, z = \cos x; \dfrac{du}{dx} - ?$

1.9. $z = x^2 y - y^2 x,\ x = u\cos\upsilon,\ y = u\sin\upsilon;\ \dfrac{dz}{du} - ?\ \dfrac{dz}{d\upsilon} - ?$

1.10. $z = x^2 \ln y,\ x = \dfrac{u}{\upsilon},\ y = 3u - 2\upsilon;\ \dfrac{dz}{du} - ?\ \dfrac{dz}{d\upsilon} - ?$

2. Найти частные производные функции *z(x,y),* заданной неявно:

2.1 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1;$ **2.2.** $x^2 - 2y^2 + z^2 - 4x + 2z - 5 = 0;$

2.3. $z^3 + 3xyz = a^3;$ **2.4.** $e^z - xyz = 0;$

2.5. $z^3 - xy^2 = -z + x^4 - 25;$ **2.6.** $z - \ln xy = 7y^8 + 4;$

2.7. $\sqrt{x^3 + y^3} + z = 9;$ **2.8.** $\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z = 10;$

2.9. $e^x + y + zx = 5;$ **2.10.** $xy = z^5 - x + 12.$

3. Вычислить значения частных производных функции *z(x,y),* заданной неявно в точке $M_0(x,y,z)$ с точностью до двух знаков после запятой:

3.1 $z^3 + 3xyz + 3y = 8,\ M_0(1,1,1);$ **3.2.** $e^z + x + 2y + z = 4,\ M_0(1,1,0);$

3.3. $3x - 3y + z = yz,\ M_0(2,2,3);$ **3.4.** $e^{z-1} = \cos x \cos y + 1,\ M_0(0,\dfrac{\pi}{2},1);$

3.5. $x + y + z = xyz,\ M_0(3,0,3);$ **3.6.** $x^2 - 2xz + y^2 + z^2 = 5,\ M_0(2,0,1);$

3.7. $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 8,\ M_0(0,1,5);$ **3.8.** $x^2 yz = x^2 - z^4,\ M_0(5,0,1);$

3.9. $x^2 + y^2 + z = y + z^2,\ M_0(2,1,0);$ **3.10.** $x + \cos^2 y + \cos^2 z = 4, M_0(1,\dfrac{\pi}{4},\dfrac{\pi}{6}).$

3.4 Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть поверхность задана уравнением $z = f(x,y)$. Уравнение касательной плоскости в точке $M(x_0, y_0, z_0)$ к данной поверхности имеет вид:

$$z - z_0 = f'_x(x_0,y_0)\cdot(x - x_0) + f'_y(x_0,y_0)\cdot(y - y_0). \qquad (3.19)$$

Прямая, проходящая через точку M и перпендикулярная касательной плоскости, построенной в этой точке поверхности, называется ее ***нормалью.*** Используя условие перпендикулярности прямой и плоскости, легко получить каноническое уравнение нормали:

$$\frac{x - x_0}{f'_x(x_0,y_0)} = \frac{y - y_0}{f'_y(x_0,y_0)} = \frac{z - z_0}{-1}. \qquad (3.20)$$

Если поверхность задана уравнением $F(x,y,z)=0$, то уравнение касательной плоскости, с учетом того, что частные производные могут быть найдены, как производные неявной функции имеет вид:

$$F'_x(x_0,y_0,z_0)\cdot(x-x_0)+F'_y(x_0,y_0,z_0)\cdot(y-y_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)\cdot(z-z_0)=0, \quad (3.21)$$

а уравнение нормали –

$$\frac{x-x_0}{F'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{y-y_0}{F'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{z-z_0}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}. \quad (3.22)$$

Пример 1: записать уравнения касательной плоскости и нормали к параболоиду вращения: $z=x^2+y^2$ в точке $M(1,-1,2)$.

Решение. Находим $z'_x=f'_x(x,y)=2x$, $z'_y=f'_y=2y$, $f'_x(1,-1)=2$, $f'_y(1,-1)=-2$. Учитывая (3.19) получаем уравнение касательной плоскости:

$$z-2=2\cdot(x-1)-2\cdot(y+1).$$

Согласно выражению (3.20) можно записать уравнение нормали:

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-2}{-1}.$$

Пример 2: найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности $x^3+y^2+z^3+2xyz-7=0$ в точке $M(2,-1,0)$.

Решение. Поскольку $F(x,y,z)=x^3+y^2+z^3+2xyz-7$, $F'_x=3x^2+2yz$, $F'_y=2y+2xz$, $F'_z=3z^2+2xy$, $F'_x(M_0)=3\cdot2^2+2(-1)\cdot0=12$, $F'_y(M_0)=2(-1)+0=-2$, $F'_z(M_0)=-4$, то на основании уравнений (3.21) и (3.22) получаем

$$12\cdot(x-2)-2\cdot(y+1)-4\cdot(z-0)=0$$

(уравнение касательной плоскости),

$$\frac{x-2}{12}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z-0}{-4}$$

(уравнение нормали).

Задания для решения

1. Найти уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности в заданной точке $M(x_0,y_0,z_0)$:

1.1 $x^2+y^2+z^2-xy+5z=7, M_0(1,2,-1)$; **1.2.** $2x^3+xy^2+z^2+5zy^3-2=0, M_0(1,0,-1)$;

1.3. $2x^2-y^2+z^2+y+x=8, M_0(-1,1,2)$; **1.4.** $x^2+y^2+z^2-6y+4z=0, M_0(2,1,-1)$;

1.5. $x^3-5y^2+z^2+y+x=9, M_0(3,1,2)$; **1.6.** $z=2x^2-3y^2+xy+3x+1, M_0(1,-1,2)$;

1.7. $z=x^2+y^3+5xy+7x+1, M_0(1,1,1)$; **1.8.** $z=x^2-y^2-7xy+y, M_0(1,-1,1)$;

1.9. $z=3x^2+3y^2+2xy-9x, M_0(4,-1,1)$; **1.10.** $z=12x^2+7y^2+2xy+x, M_0(5,-1,2)$;

2. Для эллипсоида $x^2+2y^2+z^2=1$ записать уравнение касательной плоскости, параллельной плоскости $x-y+2z=0$.

3. Записать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $z=1+x^2+y^2$ в точке $M(1,1,z_0)$.

4. Записать уравнение касательной плоскости и нормали к поверхности $x^2z-xyz+y^2-x-3=0$ в точке $M(-2,3,z_0)$.

3.5 Экстремум функции двух переменных

Пусть функция $z=f(x,y)$ определена в некоторой области D и точка $M_0(x_0,y_0)\in D$.

Определение 1. Точка (x_0,y_0), называется *точкой максимума* функции $z=f(x,y)$, если существует такая δ-окрестность точки, что для каждой точки (x,y) из этой окрестности отличной от (x_0,y_0), выполняется неравенство

$$f(x_0,y_0)>f(x,y).$$

Определение 2. Точка (x_0,y_0), называется *точкой минимума* функции $z=f(x,y)$ если существует такая δ-окрестность точки (x_0,y_0), что для каждой точки (x,y) из этой окрестности отличной от (x_0,y_0), выполняется неравенство $f(x_0,y_0)<f(x,y)$.

Максимум и минимум функции называют ее ***экстремумами.***

Теорема 1 *(необходимые условия экстремума).*

Если функция $z=f(x,y)$ достигает экстремума в точке (x_0,y_0), то каждая частная производная первого порядка от z в этой точке или обращается в нуль, или не существует.

Точки, в которых $\dfrac{\partial z}{\partial x},\dfrac{\partial z}{\partial y}$ обращаются в нуль или не существуют, называются **критическими точками** функции $z=f(x,y)$.

Теорема 2 *(достаточное условие экстремума).*

Пусть в критической точке (x_0,y_0) и некоторой ее окрестности функция $z=f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные до второго порядка включительно. Вычислим в точке (x_0,y_0) значения:

$$A=f''_{xx}(x_0y_0),$$
$$B=f''_{xy}(x_0y_0),$$
$$C=f''_{yy}(x_0y_0).$$

Обозначим $\Delta=\begin{vmatrix}A & B\\ B & C\end{vmatrix}=AC-B^2$.

Тогда:

1. если $\Delta > 0$, то функция $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) имеет максимум, если $A < 0$; минимум, если $A > 0$.

2. если $\Delta < 0$, то функция $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0) экстремума не имеет.

3. если $\Delta = 0$, то экстремум в точке (x_0, y_0) может быть, а может и не быть. Нужны дополнительные исследования.

Пример: найти экстремум функции: $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 1$.

Решение. Здесь $\frac{\partial z}{\partial x} = z'_x = 2x - y + 3$, $\frac{\partial z}{\partial y} = z'_y = -x + 2y - 2$. Найдем критические точки, решая систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - y + 3 = 0, \\ -x + 2y - 2 = 0. \end{cases}$$

Получаем точку $M_1\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Находим частные производные второго порядка:

$$z''_{xx} = \frac{\partial}{\partial x}(z'_x) = \frac{\partial}{\partial x}(2x - y + 3) = 2, \; z''_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(z'_x) = \frac{\partial}{\partial y}(2x - y + 3) = -1,$$

$$z''_{yy} = \frac{\partial}{\partial y}(z'_y) = \frac{\partial}{\partial y}(-x + 2y - 2) = 2.$$

В точке $M_1\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$ имеем:

$$A = z''_{xx}\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right) = 2, \; B = z''_{xy}\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right) = -1, \; C = z''_{yy}\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right) = 2.$$

Так как $\Delta = AC - B^2 = 2 \cdot 2 - (-1)^2 = 3 > 0$ и $A > 0$, следовательно в точке $M_1\left(-\frac{4}{3}, \frac{1}{3}\right)$ будет минимум и

$$z_{\min} = \left(-\frac{4}{3}\right)^2 - \left(-\frac{4}{3}\right)\frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + 3\left(-\frac{4}{3}\right) - 2\frac{1}{3} + 1 = -\frac{4}{3}.$$

Задания для решения

1. Исследовать на экстремум следующие функции:

1.1 $z = 3x^2 y - x^3 - y^4$;

1.2. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$;

1.3. $z = 1 + 6x - x^2 - xy - y^2$;

1.4. $z = x^2 + xy + y^2 + x - y + 1$;

1.5. $z = 4(x - y) - x^2 - y^2$;

1.6. $z = 2xy - 2x^2 - 4y^2$;

1.7. $z = x^2 + xy + y^2 - 6x = 9y$;

1.8. $z = 2xy - 5x^2 - 3y^2 + 2$;

1.9. $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$;

1.10. $z = xy - x^2 - y^2 + 9$.

2. Функция z задана неявно: $2x^2+2y^2+z^2+8xz-z+8=0$. Найти ее критические точки.

3. Функция z задана неявно: $5x^2+5y^2+5z^2-2xy-2xz-2yz-72=0$. Найти ее критические точки.

4. Убедиться, что функция $z=x^2+xy+y^2+\dfrac{a^3}{x}+\dfrac{a^2}{y}$ имеет минимум в точке $x=y=\dfrac{a}{\sqrt[3]{3}}$.

5. Убедиться, что при $x=\sqrt{2},\ y=\sqrt{2}$ и при $x=-\sqrt{2},\ y=-\sqrt{2}$ функция $z=x^4+y^4-2x^2-4xy-2y^2$ имеет минимум.

6. Убедиться, что при $x=5,\ y=6$ функция $z=x^3+y^2-6xy-39x+18y+20$ имеет минимум.

3.6 Наибольшее и наименьшее значение функции в замкнутой области

Пусть функция $z=f(x,y)$ определена и непрерывна в ограниченной замкнутой области *D*. Она достигает в некоторых точках *D* своего наибольшего и наименьшего значений (т.н. глобальный экстремум). Эти значения достигаются функцией в точках, расположенных внутри области *D,* или в точках, лежащих на границе области. Для того, чтобы найти наибольшее и наименьшее значение функции надо:

1. Найти все критические точки, принадлежащие области D и вычислить значение функции в них.

2. Найти наибольшее и наименьшие значение функции $z=f(x,y)$ на границах области.

3. Сравнить все найденные значения функции и выбрать из них наибольшее и наименьшее.

Пример: найти наибольшее и наименьшее значение функции $z=x^2y+xy^2+xy,$ в замкнутой области ограниченной линиями: $y=\dfrac{1}{x}, x=1, x=2, y=-\dfrac{3}{2}$ (рисунок 3.2).

Решение.

1. Находим критические точки:

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=z'_x=2xy+y^2+y,\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=z'_y=x^2+2xy+x.$ Приравняем частные производные к нулю и получим систему уравнений:

$$\begin{cases}2xy+y^2+y=0,\\ x^2+2xy+x=0.\end{cases}$$

Решением системы являются точки (0,0), (0,-1), (-1,0), $\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$. Ни одна из них не принадлежит области *D*.

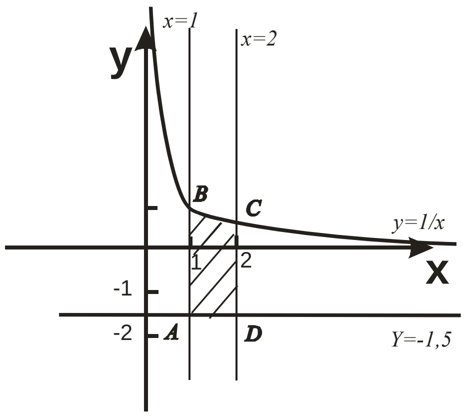


Рисунок 3.2 – Замкнутая область

2. Исследуем функцию z на границе области, состоящей из участков: *AB*, *B*C, *CD, DA*.

На участке AB: $x=1, y\in[-3/2,1]$, $z=y+y^2+y=y^2+2y$, Задача сводится к отысканию наименьшего и наибольшего значений функции одной переменной. Находим критические точки: $z'_y=2y+2$, $2y+2=0,\ y=-1\in[-3/2,1]$.

Вычислим значение функции в точке $(1,-1)$ и на концах отрезка *AB*:

$z(1,-1)=(-1)^2+2(-1)=-1,$

$z(A)=z(1,-1{,}5)=\left(-\frac{3}{2}\right)^2+2\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{9}{4}-3=-\frac{3}{4},$

$z(B)=z(1,1)=1^2+2\cdot1=3.$

На участке BC: $y=\frac{1}{x}$, $z=x+\frac{1}{x}+1, x\in[1,2]$, $z'_x=1-\frac{1}{x^2}$, $1-\frac{1}{x^2}=0$, $x^2-1=0$, $x=1\in[1,2]$, $x=-1\notin[1,2]$. Получили, $z(1,1)=3$. Вычислим значение функции на концах отрезка *BC:* $z(C)=z(2,\frac{1}{2})=3\frac{1}{2}$.

На участке CD: $x=2$, $y\in[-3/2,1/2]$, $z=4y+2y^2+2y=6y+2y^2$. Находим критические точки $z'_y=6+4y,\ 6+4y=0,\ y=-3/2\in[-3/2,1/2]$.

Вычислим значение функции в точке $\left(2,-\frac{3}{2}\right)$ и на концах отрезка *CD:*

$$z\left(2,-\frac{3}{2}\right)=6\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)+2\left(-\frac{3}{2}\right)^2=-9+\frac{9}{2}=-\frac{9}{2},$$

$$z(D)=z\left(2,-\frac{3}{2}\right)=-\frac{9}{2}.$$

На участке DA: $y=-3/2,\quad x\in[1,2],\qquad z=-\frac{3}{2}x^2+\frac{9}{4}x-\frac{3}{2}x,$

$$z'_x=-3x+\frac{9}{4}-\frac{3}{2}=-3x+\frac{3}{4},\ -3x+\frac{3}{4}=0,\ x=\frac{1}{4}\notin[1,2].$$

3. Сравнивая полученные значения, имеем:

$$z_{наиб}=z\left(2,\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{2}=3.5,$$

$$z_{наим}=z\left(2,-\frac{3}{2}\right)=-\frac{9}{2}=-4.5.$$

Задания для решения

1. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z=z(x,y)$ в области D, ограниченной заданными линиями:

1.1 $z=x^2+2xy-4x+8y,\ D: x=0,\ y=0,\ x=1,\ y=2;$

1.2. $z=2x^3-xy^2+y^2\quad D: x=0,\ y=0,\ x=1,\ y=6;$

1.3. $z=5x^2-3xy+y^2,\ D: x=0,\ y=0,\ x=1,\ y=1;$

1.4. $z=x^2-2y^2+4xy-6x-1,\ D: x=0,\ y=0,\ x+y-3=0;$

1.5. $z=\frac{1}{2}x^2-xy,\ D: y=8,\ x=1,\ y=2x^2.$

1.6. $z=2x^2+3y^2+1,\ D: y=\sqrt{9-\frac{9}{4}x^2},\quad y=0.$

1.7. $z=2x^2+2xy-\frac{1}{2}y^2-4x,\ D: x=0,\ y=2,\ y=2x.$

1.8. $z=x^2-2xy+\frac{5}{2}y^2-2x,\ D: x=0,\ y=0,\ x=2,\ y=2.$

1.9. $z=x^2y(4-x-y),\ D: x=0,\ y=0,\ y=6-x.$

1.10. $z=x^2+2xy-y^2-2x+2y,\ D: y=x+2,\ x=2,\ y=0.$

2. Разложить положительное число a на три положительных слагаемых так, чтобы произведение их было наибольшим.

3. Представить положительное число a в виде произведения четырех положительных множителей так, чтобы их сумма была наименьшей.

4. На плоскости Oxy найти точку, сумма квадратов расстояний которой от трех прямых $x=0,\ y=0,\ x+2y-16=0$ была бы наименьшей.

5. Найти стороны треугольника данного периметра *2p*, который при вращении вокруг одной из своих сторон образует тело наибольшего объема.

Литература

1. Письменный, Д. Т. Конспект лекций по высшей математике / Д. Т. Письменный. – Москва: Айрис-пресс, 2004.– 608 с.
2. Гусак, А. А. Высшая математика / А. А. Гусак. – Минск: ТетраСистемс, 2009. – 544 с.
3. Рябушко, А. П. Индивидуальные задания по высшей математике. В 4ч. Ч.2. Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Державец, И. Е. Юруть. – Минск: Выш. школа, 2008. – 304 с.
4. Бугров, Я. С. Сборник задач по высшей математике / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – Москва: Физматлит, 2001. – 304 с.
5. Пискунов, Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. В 2-х т. Т.1, 2 / Н. С. Пискунов. – Санкт-Петербург: Мифрил, 1996. – 416 с.
6. Берман, Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – Москва: Наука, 1990. – 440 с.

Содержание