МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«Витебский государственный технологический университет»

Витебский государственный технологический университет

СПЕЦИАЛЬНЫЕ РАЗДЕЛЫ КУРСА «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА»
Функции комплексных переменных. Аппроксимация функций. Уравнения математической физики

Методические указания к практическим занятиям для студентов всех форм обучения

ВИТЕБСК
2016

УДК 517

Специальные разделы курса «Высшая математика». Функции комплексных переменных. Аппроксимация функций. Уравнения математической физики: методические указания к практическим занятиям для студентов всех форм обучения.

Витебск: Министерство образования Республики Беларусь, УО «ВГТУ», 2016.

Составители: ст. преп. Коваленко А.В.,
доц., к. ф.-м. н. Денисов В.С.,
ст. преп. Дмитриев А.П.,
ст. преп. Завацкий Ю.А.

Методические указания содержат основные теоретические сведения, решение типовых примеров и задачи для самостоятельного решения по специальным разделам учебной программы курса высшей математики: функции комплексного переменного; уравнения математической физики и методы аппроксимирования функций. Предназначены для практических и лабораторных занятий на втором курсе всех форм обучения и может быть использовано при подготовке к зачёту и экзамену по высшей математике студентами всех специальностей.

Одобрено кафедрой математики и информационных технологий УО «ВГТУ»
12 мая 2016 г., протокол № 12.

Рецензент: доц., к.ф.-м.н. Дунина Е. Б.
Редактор: доц., к.ф.-м.н. Никонова Т. В.

Рекомендовано к опубликованию редакционно-издательским
советом УО «ВГТУ» 27 мая 2016 г., протокол № 5.

Ответственный за выпуск: Шалапухо Е. А.

Учреждение образования «Витебский государственный технологический университет»

Подписано к печати 06.12.16. Формат 60x90 1/16. Уч.-изд. лист. 4.4.
Печать ризографическая. Тираж 60 экз. Заказ № 384.

Отпечатано на ризографе учреждения образования «Витебский государственный технологический университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/172 от 12 февраля 2014 г.
210035, Витебск, Московский проспект, 72

Витебский государственный технологический университет

ВВЕДЕНИЕ

Современные наука и техника предъявляют высокие требования к математической подготовке инженеров. Поэтому программы втузовских курсов высшей математики систематически изменяются и расширяются; в зависимости от специализации в них вводятся те или иные дополнительные разделы. Теоретический материал по этим новым разделам разбросан по различным источникам, из-за чего студенты, особенно заочной формы обучения, испытывают большие затруднения при его самостоятельном изучении.

Данное учебное пособие содержит следующие разделы программ всех специальностей УО «ВГТУ»: комплексные числа, функции комплексных переменных, аппроксимация функций с использование метода наименьших квадратов и уравнения математической физики.

Для того чтобы студенты усвоили большой по объёму и очень разнообразный по содержанию материал в ограниченное время, основные понятия рассматриваемых вопросов изложены в сжатой и доступной для понимания форме. Кроме теоретического материала в учебном пособии приведено достаточное количество примеров по всем вышеуказанным разделам. Также каждый раздел содержит задачи для решения на практических занятиях и выполнения контролируемой самостоятельной работы. В конце каждого параграфа приведены вопросы для самоконтроля. В конце данного пособия приведён список использованной литературы.

Перед началом решения задач практического занятия или выполнения домашнего задания студенту необходимо не только рассмотреть решение предложенных типовых примеров, но и изучить теоретический лекционный материал или обратиться к академическим изданиям, для более детального изучения вопросов курса, которые его интересуют.

В первом разделе рассматриваются комплексные числа в различной форме записи и операции над ними, а так же функции комплексных переменных, их дифференцирование и интегрирование. Во втором разделе учебного пособия рассматривается вопрос об аппроксимации функций методом наименьших квадратов, а именно приводятся аппроксимирующие функции исходя из предположения, что аппроксимирующая функция имеет линейную, квадратичную, гиперболическую, экспоненциальную и логарифмическую зависимость. В третьем разделе рассмотрены уравнения математической физики и методы Даламбера и Фурье решения данных уравнений. При изучении специальных разделов высшей математики следует повторить материал, пройденный в предыдущих семестрах, особое внимание, уделив дифференциальному и интегральному исчислению, а также материал смежных дисциплин.

Предложенные методические указания помогут студентам подготовиться к прохождению теста по указанным темам и разделам курса, так как проведение зачёта или экзамена может подразумевать электронный контроль знаний.

Витебский государственный технологический университет

1 ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1.1 КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

1.1.1 Комплексные числа в алгебраической форме записи и алгебраические операции над ними

Существуют задачи, для решения которых множества действительных чисел недостаточно. Например, квадратное уравнение $x^2+1=0$ не имеет корней на множестве действительных чисел, так как не существует действительного числа, квадрат которого равнялся бы -1: $x^2+1=0 \leftrightarrow x^2=-1$. Поэтому возникла необходимость расширения множества действительных чисел.

Комплексными числами называются всевозможные упорядоченные пары $z=(x;y)$ действительных чисел, для которых введены операции сложения и умножения по следующим правилам:

$$(x_1;y_1)+(x_2;y_2)=(x_1+x_2;y_1+y_2), \tag{1.1.1}$$

$$(x_1;y_1)\cdot(x_2;y_2)=(x_1x_2-y_1y_2;x_1y_2+x_2y_1). \tag{1.1.2}$$

Множество комплексных чисел обозначается символом **C**.

Действительные числа x и y называются *действительной* и *мнимой частями* комплексного числа $z=(x;y)$ и обозначаются символами $\mathrm{Re}\,z$ и $\mathrm{Im}\,z$ соответственно.

Два комплексных числа $z_1=(x_1;y_1)$ и $z_2=(x_2;y_2)$ называются *равными*, если равны их действительные и мнимые части, то есть $x_1=x_2$ и $y_1=y_2$. Отношение неравенства на множестве комплексных не определено.

Из определений (1.1.1) и (1.1.2) следует, что любое комплексное число $z=(x;y)$ может быть записано в виде

$$z=(x;y)=(x;0)+(0;1)\cdot(y;0). \tag{1.1.3}$$

Установим взаимно однозначное соответствие $(x;0)\leftrightarrow x$ между множеством $\{(x;0)\,|\,x\in\mathbf{R}\}$ и множеством действительных чисел **R**. Из формул (1.1.1) и (1.1.2) следует, что это соответствие «сохраняет операции:

$$(x_1;0)+(x_2;0)=(x_1+x_2;)\leftrightarrow x_1+x_2,$$

$$(x_1;0)\cdot(x_2;0)=(x_1x_2;0)\leftrightarrow x_1x_2.$$

Комплексное число $(0;1)$ обозначается символом i и называется мнимой единицей (мнимая единица может обозначаться символом j), причём $i^2=-1$.

Равенство (1.1.3) принимает вид

$$z=x+iy$$

и называется *алгебраической формой* комплексного числа $z=(x;y)$.

Так как любое действительное число x можно рассматривать как комплексное число $x=x+0i$, то множество действительных чисел содержится во

Витебский государственный технологический университет

множестве комплексных чисел: $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$. Таким образом, для множеств получаем цепочку включений: $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$.

Число $\overline{z} = x - iy$ называется *сопряжённым* к комплексному числу $z = x + iy$. Вообще, два комплексных числа, отличающиеся лишь знаком при мнимой части, называются *комплексно-сопряжёнными*.

Рассмотрим алгебраические операции над комплексными числами, которые записаны в алгебраической форме записи.

Суммой комплексных чисел называется комплексное число, действительная и мнимая части которого равны суммам соответствующих частей слагаемых:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + iy_1) + (x_2 + iy_2) = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2). \qquad (1.1.4)$$

Разностью комплексных чисел называется комплексное число, действительная и мнимая части которого равны разностям соответствующих частей слагаемых:

$$z_1 - z_2 = (x_1 + iy_1) - (x_2 + iy_2) = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2). \qquad (1.1.5)$$

Сумма или разность двух комплексных чисел может оказаться действительным числом (например, сумма комплексно-сопряжённых чисел $z + \overline{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x \in \mathbf{R}$).

Из формул (1.1.4) (1.1.5) следует, что сложение (вычитание) комплексных чисел производится так же, как сложение (вычитание) векторов. При сложении (вычитании) векторов их соответствующие координаты складываются (вычитаются). При этом модуль разности двух комплексных чисел

$$|z_1 - z_2| = |(x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

есть расстояние между точками z_1 и z_2. Для любых чисел $z_1, z_2 \in \mathbf{C}$ имеет место неравенство треугольника

$$\big||z_1| - |z_2|\big| \le |z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|.$$

Произведение комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ $z_2 = x_2 + iy_2$ определяется формулой

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1). \qquad (1.1.6)$$

Отметим, что произведение двух комплексно-сопряжённых чисел, не равных нулю, равно положительному действительному числу равному сумме квадратов действительной и мнимой части указанных чисел.

Возведение комплексного числа z в степень n ($n \in \mathbf{N}$) рассматривается как умножение числа z на себя n раз. Определим натуральные степени мнимой единицы i для натурального значения n:

$$i^n = \begin{cases} 1, \forall n = 4m, \\ i, \forall n = 4m + 1, \\ -1, \forall n = 4m + 2, \\ -i, \forall n = 4m + 3, \end{cases} \quad m \in \mathbf{N}.$$

Витебский государственный технологический университет

Деление комплексного числа $z_1 = x_1 + iy_1$ *на комплексное число* $z_2 = x_2 + iy_2 \neq 0$ вводится как действие, обратное умножению, то есть под частным z_1/z_2 понимается комплексное число z, такое, что $z_2 z = z_1$. Частное получается путём умножения числителя и знаменателя дроби z_1/z_2 на число $\overline{z}_2$ комплексно-сопряжённое знаменателю:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)\cdot(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)\cdot(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \qquad (1.1.7)$$

Пример 1.1.1. Даны два комплексных числа $z_1 = 1 + 2i$ и $z_2 = 3 + 4i$. Найти $z_1 \cdot \overline{z}_2$, z_1/z_2, z_1^3, z_2^2.

Решение. Запишем сопряжённое число к числу z_2: $\overline{z}_2 = 3 - 4i$.

$$z_1 \cdot \overline{z}_2 = (1 + 2i)\cdot(3 - 4i) = 3 + 6i - 4i - 8i^2 = 3 + 2i + 8 = 11 + 2i.$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{1 + 2i}{3 + 4i} = \frac{(1 + 2i)\cdot(3 - 4i)}{(3 + 4i)\cdot(3 - 4i)} = \frac{3 + 6i - 4i - 8i^2}{9 - 16i^2} = \frac{11 + 2i}{25} = \frac{11}{25} + i\frac{2}{25}.$$

$$z_1^3 = (1 + 2i)^3 = 1 + 6i + 12i^2 + 8i^3 = 1 + 6i - 12 - 8i = -11 - 2i.$$

$$z_2^2 = (3 + 4i)^2 = 9 + 24i + 16i^2 = 9 + 24i - 16 = -7 + 24i.$$

1.1.2 Комплексные числа в тригонометрической и показательной форме записи и алгебраические операции над ними

Любое комплексное число $z = x + iy$ можно изображать геометрической точкой с координатами x и y в декартовой прямоугольной системе координат $\mathbf{R^2}$, либо как вектор $\vec{z}$, проекции которого на ось Ox соответственно равны x и y. В этом случае координатная плоскость Oxy называется *комплексной плоскостью*, ось абсцисс – *действительной осью*, ось ординат – *мнимой осью* комплексной плоскости.

Таким образом, каждому комплексному числу соответствует точка $M(x;y)$ комплексной плоскости и, обратно, каждой точке $M(x;y)$ комплексной плоскости соответствует комплексное число $z = x + iy$. Следовательно, между точками плоскости $\mathbf{R^2}$ и элементами множества комплексных чисел **C** существует взаимно однозначное соответствие. Поэтому комплексная плоскость является геометрической моделью комплексных чисел **C**.

На основании геометрической интерпретации множеств **R** и **C** получаем, что множество комплексных чисел **C** есть расширение множества действительных чисел **R**, так как множеству действительных чисел **R** соответствует множество точек прямой Ox (действительная ось), а множеству комплексных чисел **C** соответствует вся плоскость $\mathbf{R^2}$.

Модулем комплексного числа $z = x + iy$ называется расстояние от точки $M(x;y)$ до начала координат, то есть

Витебский государственный технологический университет

$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}\ .$$

Аргументом комплексного числа $z = x + iy$ называется угол φ, который образует радиус-вектор точки $M(x;y)$ с положительным направлением оси Ox.

Для комплексного числа $z = x + iy \neq 0$ аргумент определяется равенствами:

$$\cos\varphi = \frac{x}{|z|} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}},\ \sin\varphi = \frac{y}{|z|} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \qquad (1.1.8)$$

Модуль комплексного числа определяется однозначно, а аргумент – с точностью до слагаемого $2m\pi, m \in \mathbf{Z}$. Множество всех значений аргумента обозначается $\operatorname{Arg} z$. Значение аргумента, удовлетворяющее условию $0 \le \operatorname{Arg} z < 2\pi$ (в некоторых случаях $-\pi \le \operatorname{Arg} z < \pi$) называется *главным* и обозначается $\arg z$. Тогда множество всех значений аргумента можно представить в виде

$$Arg z = \arg z + 2m\pi,\ m \in \mathbf{Z}.$$

Из формул (1.1.8) получаем $x = |z|\cos\varphi,\ y = |z|\sin\varphi$. Подставляя выражения в алгебраическую форму записи комплексного числа $z = x + iy$, записываем новый вид комплексного числа:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi). \qquad (1.1.9)$$

Выражение (1.1.9) называется *тригонометрической формой* комплексного числа. Для того чтобы перейти от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической форме, находят модуль комплексного числа $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$, затем по формулам (1.1.8) определяют аргумент φ: $\operatorname{tg}\varphi = y/x$.

Пример 1.1.2. Представить комплексное число $z = \sqrt{3} - i$ в тригонометрической форме.

Решение. Найдём модуль комплексного числа и аргумент:

$|z| = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = 2$; $\cos\varphi = \sqrt{3}/2$, $\sin\varphi = -1/2$, то есть $\varphi = 11\pi/6$.

Тогда $z = 2\cdot(\cos(11\pi/6) + i\sin(11\pi/6))$.

Тригонометрической формой комплексного числа удобно воспользоваться при выполнении операций умножения, деления, возведения в степень и извлечения корня.

Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1),\ z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

Произведение комплексных чисел определяется по формуле

$$z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \qquad (1.1.10)$$

Таким образом, при умножении комплексных чисел в тригонометрической форме их модули перемножаются, а аргументы складываются.

Частное комплексных чисел $(z_2 \neq 0)$ определяется по формуле

Витебский государственный технологический университет

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2)+i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right). \qquad (1.1.11)$$

Таким образом, при делении комплексных чисел в тригонометрической форме их модули делятся, а аргументы вычитаются.

Число z^n, где $z=r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)$; $z\in\mathbf{C}$, $n\in\mathbf{N}$, можно рассматривать как умножение z на себя n раз:

$$z^n=r^n\left(\cos\left(n\cdot\varphi\right)+i\sin\left(n\cdot\varphi\right)\right). \qquad (1.1.12)$$

Из формулы (1.1.12) следует, что при значении $r=1$

$$\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)^n=\cos(n\cdot\varphi)+i\sin(n\cdot\varphi). \qquad (1.1.13)$$

Формулу (1.1.13) называют *формулой Муавра*.

Корень $\sqrt[n]{z_0}$ *степени* $n\in\mathbf{N}$ из комплексного числа $z_0=r_0\left(\cos\varphi_0+i\sin\varphi_0\right)$ определяется как комплексное число z, которое, будучи возведено в степень n, даёт число z_0, то есть $z^n=z_0$. Число z_0 имеет вид

$$z=\sqrt[n]{z_0}=\sqrt[n]{r_0}\cdot\left(\cos\frac{\varphi_0+2\pi k}{n}+i\sin\frac{\varphi_0+2\pi k}{n}\right). \qquad (1.1.14)$$

Из формулы (1.1.14) следует, что среди значений $\sqrt[n]{z_0}$ различными являются только n значений, все они получаются при значениях $k=\overline{0;n-1}$.

Исходя из формулы (1.1.14), можно показать, что геометрически точки, соответствующие различным значениям корня n-ой степени из комплексного числа $z_0=r_0\left(\cos\varphi_0+i\sin\varphi_0\right)$, располагаются в вершинах правильного n-угольника с центром в начале координат, причём одна из вершин (соответствующая $k=0$) имеет полярные координаты $\left(\sqrt[n]{r_0};\varphi_0/n\right)$.

Пример 1.1.3. Пусть $z_1=2\left(\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4)\right)$, $z_2=8\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)$. Найти $z_1\cdot z_2$, $\frac{z_2}{z_1}$, z_1^7, $\sqrt[3]{z_2}$.

Решение.

$$z_1\cdot z_2=2\cdot 8\cdot\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\pi\right)\right)=16\left(\cos\frac{5\pi}{4}+\sin\frac{5\pi}{4}\right)=-8\sqrt{2}-8\sqrt{2}\cdot i.$$

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{8}{2}\cdot\left(\cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)\right)=4\left(\cos\frac{3\pi}{4}+\sin\frac{3\pi}{4}\right)=-2\sqrt{2}+2\sqrt{2}\cdot i.$$

$$z_1^7=2^7\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)=64\sqrt{2}-64\sqrt{2}\cdot i$$

$$z=\sqrt[3]{z_2}=\sqrt[3]{8}\cdot\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\pi+2\pi k}{3}\right),\ \text{где } k=0,1,2.$$

Витебский государственный технологический университет

При $k=0$: $\omega_0 = 2\left(\cos\dfrac{\pi+0}{3}+i\sin\dfrac{\pi+0}{3}\right)=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)=1+i\sqrt{3}$.

При $k=1$: $\omega_1 = 2\left(\cos\dfrac{\pi+2\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi+2\pi}{3}\right)=2\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)=-2$.

При $k=2$: $\omega_2 = 2\left(\cos\dfrac{\pi+4\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi+4\pi}{3}\right)=2\left(\cos\dfrac{5\pi}{3}+i\sin\dfrac{5\pi}{3}\right)=1-i\sqrt{3}$.

Рассмотрим ещё одну форму записи комплексного числа, а именно показательную. Чтобы получить показательную форму записи комплексного числа, воспользуемся *формулой Эйлера* (1.1.15). Данная формула устанавливает связь между показательными и тригонометрическими функциями:

$$e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi,\ \varphi\in\mathbf{R}. \qquad (1.1.15)$$

Пусть комплексное число z записано в тригонометрической форме: $z=r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)$. Используя формулу Эйлера, записываем комплексное число в показательной форме

$$z=|z|e^{i\varphi}. \qquad (1.1.16)$$

Функция $e^{i\varphi}$ обладает свойствами показательной функции с действительным показателем, поэтому формулы умножения, деления, возведения в натуральную степень и извлечение корня для комплексных чисел в показательной форме имеют довольно простой вид.

Если $z_1=r_1e^{i\varphi_1}$, $z_2=r_2e^{i\varphi_2}$, то

$$z_1z_2=r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}. \qquad (1.1.17)$$

Если $z_1=r_1e^{i\varphi_1}$, $z_2=r_2e^{i\varphi_2}\neq 0$, то

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}. \qquad (1.1.18)$$

Если $z=re^{i\varphi}$, $n\in\mathbf{N}$, то

$$z^n=r^ne^{in\varphi}. \qquad (1.1.19)$$

и

$$\omega_k=\sqrt[n]{r}\cdot e^{i(\varphi+2\pi k)/n},\ k=\overline{0;n-1}. \qquad (1.1.20)$$

Пример 1.1.4. Пусть $z_1=4e^{\frac{\pi}{6}i}$, $z_2=16e^{\frac{\pi}{8}i}$. Найти $z_1\cdot z_2, \dfrac{z_2}{z_1}, z_1^2, \sqrt[4]{z_2}$.

Решение.

$$z_1\cdot z_2=4\cdot 16\cdot e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{8}\right)}=64\cdot e^{i\frac{7\pi}{24}},$$

$$\frac{z_2}{z_1}=\frac{16}{4}e^{i\left(\frac{\pi}{8}-\frac{\pi}{6}\right)}=4e^{-i\frac{\pi}{24}}=4e^{-i\left(\frac{\pi}{24}+2\pi\right)}=4e^{i\frac{47\pi}{24}},\ z_1^2=4^2e^{i\cdot 2\cdot\frac{\pi}{6}}=16e^{i\frac{\pi}{3}}.$$

Витебский государственный технологический университет

$$z=\sqrt[4]{z_2}=\sqrt[4]{16}\cdot e^{i\cdot\frac{\frac{\pi}{8}+2\pi k}{4}}=2\cdot e^{i\cdot\frac{\frac{\pi}{8}+2\pi k}{4}},\ \text{где}\ k=0,1,2,3.$$

При значении $k=0$: $\omega_0=2\cdot e^{i\cdot\frac{\frac{\pi}{8}+0}{4}}=2\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{32}}$.

При значении $k=1$: $\omega_1=2\cdot e^{i\cdot\frac{\frac{\pi}{8}+2\pi}{4}}=2\cdot e^{i\cdot\frac{17\pi}{32}}$.

При значении $k=2$: $\omega_2=2\cdot e^{i\cdot\frac{\frac{\pi}{8}+4\pi}{4}}=2\cdot e^{i\cdot\frac{33\pi}{32}}$.

При значении $k=3$: $\omega_3=2\cdot e^{i\cdot\frac{\frac{\pi}{8}+6\pi}{4}}=2\cdot e^{i\cdot\frac{49\pi}{32}}$.

1.1.3 Многочлены и алгебраические уравнения. Основная теорема алгебры

Многочленом (полиномом или целой рациональной функцией) n-ой степени называется функция вида

$$P_n(z)=a_0z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+...+a_{n-1}z+a_n,\qquad(1.1.21)$$

где $z\in\mathbf{C}$, $a_0,a_1,a_2,...,a_{n-1},a_n$ - коэффициенты (вообще говоря, комплексные), причём $a_0\neq0$, $n\in\mathbf{N}$.

Алгебраическим уравнением n-ой степени называется уравнение вида

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+a_2z^{n-2}+...+a_{n-1}z+a_n=0,\ \text{где}\ a_0\neq0.\qquad(1.1.22)$$

Число z_0 называется *корнем многочлена* (1.1.21) если при его подстановке в многочлен, данный многочлен обращается в нуль, то есть $P_n(z_0)=0$. Число z_0 называется *корнем уравнения* (1.1.22) если при его подстановке в уравнение, данное уравнение обращается в тождество.

Теорема Гаусса (*основная теорема алгебры). Любой многочлен ненулевой степени имеет, по крайней мере, один корень* (вообще говоря, комплексные).

Комплексное число z_0 является корнем многочлена $P_n(z)$ тогда и только тогда, когда многочлен $P_n(z)$ делится без остатка на бином $z-z_0$, то есть многочлен можно представить в виде

$$P_n(z)=(z-z_0)\cdot Q_{n-1}(z),$$

где $Q_{n-1}(z)$ - многочлен $(n-1)$-ой степени. Если многочлен $P_n(z)$ делится без остатка на выражение $(z-z_0)^m, m\geq1$, но не делится на выражение $(z-z_0)^{m+1}$, то число z_0 называется *корнем кратности m* многочлена $P_n(z)$; при этом

$$P_n(z)=(z-z_0)^m\cdot Q_{n-m}(z),$$

где $Q_{n-m}(z)\neq0$.

Витебский государственный технологический университет

Тогда *основная теорема алгебры* может быть уточнена следующим образом: *многочлен n-ой степени имеет ровно n корней, если каждый корень считать столько раз, какова его кратность.*

Если коэффициенты многочлена $P_n(z)$ – действительные числа и $z_0 = x_0 + iy_0$ - его действительный корень, то сопряжённое число $\overline{z}_0 = x_0 - iy_0$ - также корень этого многочлена, причём эти корни будут иметь одинаковую кратность.

Предположим, что многочлен $P_n(z)$ имеет корни $z_1, z_2, ..., z_k$ $(k \le n)$ кратностей, соответственно $m_1, m_2, ..., m_k$ $(m_1 + m_2 + ... + m_k = n)$. Тогда его можно разложить на линейные множители, то есть будет справедливо тождество

$$P_n(z) = a_0(z - z_1)^{m_1} \cdot (z - z_2)^{m_2} \cdot ... \cdot (z - z_k)^{m_k}.$$

Если при этом коэффициенты многочлена – действительные числа, то, объединяя скобки, соответствующие комплексно сопряжённым корням, можно разложить этот многочлен в произведение линейных и квадратичных множителей с действительными коэффициентами.

Пример 1.1.5. Решить квадратное уравнение $z^2 - 10z + 106 = 0$.

Решение. Находим дискриминант квадратного уравнения: $D = 10^2 - 4 \cdot 1 \cdot 104 = -324$. Следовательно, уравнение на множестве действительных чисел не имеет корней, но имеет комплексные корни. Учитывая равенство $i^2 = -1$, получаем значение дискриминанта квадратного уравнения: $D = 324i^2$. Находим комплексные корни уравнения: $z_{1,2} = \dfrac{-10 \pm 18i}{2} = -5 \pm 9i$.

Пример 1.1.6. Найти корни многочлена $P_6(z) = z^6 + 2z^3 + 1$ и разложить его на множители.

Решение. Так как $z^6 + 2z^3 + 1 = \left(z^3 + 1\right)^2$, то корнями этого многочлена являются корни третей степени из комплексного числа $-1 = 1 \cdot \left(\cos\pi + i\sin\pi\right)$, при этом каждый корень имеет кратность $m = 2$. Воспользуемся формулой (1.1.14) для нахождения корней третей степени:

$$z = \sqrt[3]{z_2} = \sqrt[3]{1} \cdot \left(\cos\frac{\pi + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\pi + 2\pi k}{3} \right), \text{ где } k = 0, 1, 2.$$

При $k = 0$: $\omega_0 = \cos\dfrac{\pi + 0}{3} + i\sin\dfrac{\pi + 0}{3} = \cos\dfrac{\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{1}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

При $k = 1$: $\omega_1 = \cos\dfrac{\pi + 2\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi + 2\pi}{3} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$.

При $k = 2$: $\omega_2 = \cos\dfrac{\pi + 4\pi}{3} + i\sin\dfrac{\pi + 4\pi}{3} = \cos\dfrac{5\pi}{3} + i\sin\dfrac{5\pi}{3} = \dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Витебский государственный технологический университет

Следовательно, разложение заданного многочлена на линейные множители имеет вид

$$z^6+2z^3+1=(z+1)^2\cdot\left(z-\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2\cdot\left(z-\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)^2.$$

Объединяя последние две скобки в один сомножитель, получим разложение многочлена на множители с действительными коэффициентами

$$z^6+2z^3+1=(z+1)^2\cdot\left(z^2-z+1\right)^2.$$

1.1.4 Задания для решения на практических занятиях

1.1.4.1 Даны два комплексных числа $z_1=2+3i$ и $z_2=4-5i$. Найти в алгебраической форме комплексные числа $2z_1+3z_2-4\overline{z}_2+5\overline{z}_1$.

1.1.4.2 Даны два комплексных числа $z_1=1+2i$ и $z_2=3-4i$. Найти в алгебраической форме комплексные числа $4z_1+2z_2-5\overline{z}_2+6\overline{z}_1$.

1.1.4.3 Даны два комплексных числа $z_1=3-4i$ и $z_2=12+5i$. Найти в алгебраической форме комплексные числа: z_1z_2, $z_1\cdot\overline{z}_2$, z_2/z_1, $z_2/\overline{z}_1$, $\overline{z}_2\cdot z_1^3$, z_1^2/z_2.

1.1.4.4 Даны два комплексных числа $z_1=8-6i$ и $z_2=4+3i$. Найти в алгебраической форме комплексные числа: z_1z_2, $\overline{z}_1\cdot z_2$, z_1/z_2, $\overline{z}_2/z_1$, $z_2\cdot\overline{z}_1^2$, z_2^3/z_1.

1.1.4.5 Выполнить указанные операции, представив результат в алгебраической форме:

а) $(2-i)^3-(2+i)^3$;

б) $\left(3i-i^3\right)^2+\left(i-2i^6\right)^2$;

в) $\frac{1}{3+i}+\frac{1}{2-i}-\left(1-4i\right)^2+\left(1+i^{19}\right)^3$;

г) $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^3+\left(\frac{i^5+3}{1-i^{23}}\right)^3$;

д) $\frac{(1+2i)\cdot(5+3i)}{2-i}-\frac{(1-i)\cdot(4+i)}{2+i}$;

е) $\frac{(2+i)\cdot(5+3i)}{3-4i}+\frac{(3-i)\cdot(5+i)}{4+3i}$;

ж) $\frac{(1+i)\cdot(5-4i)}{3-2i}-\frac{(1-2i)\cdot(4-i)}{4+i}$;

з) $\frac{(3-i)\cdot(3-4i)}{i}+\frac{(6+i)\cdot(7-i)}{12-5i}$.

1.1.4.6 Найти действительные решения указанных уравнений:

а) $(1+i)x+(-2+5i)y=-4+17i$;

б) $12\left((2x+i)\cdot(1+i)+(x+y)\cdot(3-2i)\right)=17+6i$;

в) $(5+2i)x+(-3+7i)y=-6+7i$;

г) $12\left((2x+5i)\cdot(1-3i)+(x-y)\cdot(3+4i)\right)=12-7i$.

1.1.4.7 Найти комплексные корни указанных уравнений:

а) $z^2+4z+5=0$;

б) $z^2+4z+13=0$;

в) $z^2-6z+25=0$;

г) $z^2-8z+17=0$;

д) $z^2+26z+196=0$;

е) $z^2+20z+125=0$;

ж) $z^2-30z+250=0$;

з) $z^2-z+5/4=0$.

Витебский государственный технологический университет

1.1.4.8 Решить следующие системы линейных уравнений:

а) $\begin{cases}(3-i)z_1+(4+2i)z_2=1+3i,\\(4+2i)z_1-(2+3i)z_2=7;\end{cases}$ б) $\begin{cases}(2+i)z_1+(2-i)z_2=6,\\(3+2i)z_1+(3-2i)z_2=8.\end{cases}$

1.1.4.9 Представить комплексные числа в тригонометрической и показательной форме записи. Изобразить указанные числа на комплексной плоскости:

а) $-i$; б) $-\sqrt{3}+i$;

в) $-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) $\frac{1-i}{1+i}$;

д) $\sin\frac{\pi}{3}+i\cos\frac{\pi}{3}$; е) $-\cos\frac{\pi}{7}+i\sin\frac{\pi}{7}$.

1.1.4.10 Вычислить $z_1\bar{z}_2$ и $\left(\bar{z}_1/z_2\right)^3$, если $z_1=1-i\sqrt{3}$, $z_1=-\sqrt{3}-i$. Представить комплексные числа в тригонометрической и показательной форме записи, а вычисления произвести в соответствующих формах записи комплексного числа.

1.1.4.11 Вычислить $\bar{z}_1z_2$ и $\left(z_1/\bar{z}_2\right)^2$, если $z_1=\sqrt{8}-i\sqrt{8}$, $z_1=-\sqrt{3}+i$. Представить комплексные числа в тригонометрической и показательной форме, а вычисления произвести в соответствующих формах записи комплексного числа.

1.1.4.12 Вычислить $z_1\bar{z}_2$ и $\left(\bar{z}_1/z_2\right)^3$, если $z_1=\sqrt{32}+i\sqrt{32}$, $z_1=-1-\sqrt{3}i$. Представить комплексные числа в тригонометрической и показательной форме, а вычисления произвести в соответствующих формах записи комплексного числа.

1.1.4.13 Найти и изобразить на комплексной плоскости все корни второй, третьей и четвёртой степени из 1 и -1.

1.1.4.14 Найти все значения корней:

а) $\sqrt{i}$; б) $\sqrt[6]{-64}$;

в) $\sqrt{1+i\sqrt{3}}$; г) $\sqrt[4]{2+i2\sqrt{3}}$;

д) $\sqrt[5]{1-i\sqrt{3}}$; е) $\sqrt[3]{(2-2i)^4}$.

1.1.4.15 Решить уравнения:

а) $z^3-27=0$; б) $z^4+16=0$;

в) $(z+1)^6-64=0$; г) $(z+3)^4+1=0$;

д) $(z-1)^8-256=0$. е) $z^4-81=0$;

ж) $(z-i)^2-16=0$. з) $(z+2i)^2-25=0$.

1.1.4.16 Решить уравнения:

а) $z^4+18z^2+81=0$; б) $z^4+5z^2+4=0$;

в) $z^4+29z^2+100=0$; г) $z^4-(1+i)z^2+2+2i=0$.

Витебский государственный технологический университет

1.1.4.17 Решить уравнения:

а) $z^6+15626z+15625=0$; б) $z^8+6560z^4-6561=0$.

1.1.4.18 Разложить многочлены нелинейные и квадратичные множители с действительными коэффициентами:

а) $P_4(z)=z^4-1$; б) $P_4(z)=z^4+1$;

в) $P_4(z)=z^4+z^2+1$; г) $P_4(z)=z^6+z^3+1$;

д) $P_4(z)=z^4+4z^3+11z^2+14z+10$, если известен один корень $z_1=-1+i$;

е) $P_5(z)=z^5+z^4+z^3-z^2-z-1$, если известен двукратный корень $z_1=z_2=-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$;

ж) $P_4(z)=z^4+6z^3+9z^2+100$, если известен один корень $z_1=1+2i$.

1.1.5 Задания для контролируемой самостоятельной работы

1.1.5.1 Даны два комплексных числа $z_1=4-5i$ и $z_2=2+6i$. Найти в алгебраической форме комплексные числа $3\overline{z}_1-5z_2+4\overline{z}_2-7z_1$.

1.1.5.2 Вычислить $\left(\frac{3-2i^7}{4+5i^3}\right)^2+\left(\frac{i^{11}+2}{2-i^{19}}\right)^3$, представив результат в алгебраической форме.

1.1.5.3 Найти действительные корни уравнения $(1+2i)x+(3-5i)y=1-3i$.

1.1.5.4 Решить уравнение $9z^2-6z+2=0$.

1.1.5.5 Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases}(5+3i)z_1+(4-3i)z_2=8+7i,\\(2-5i)z_1+(4-i)z_2=3-i.\end{cases}$$

1.1.5.6 Представить комплексные числа $z_1=-\sqrt{8}+i\sqrt{8}$ и $z_2=-1$ в тригонометрической и показательной форме. Изобразить числа на комплексной плоскости. Записать комплексные числа $z_1\cdot\overline{z}_2$, $\overline{z}_1/z_2$, z_1^7, $\sqrt[5]{z_2}$ в тригонометрической и показательной формах.

1.1.5.7 Представить комплексные числа $z_1=\sqrt{12}+2i$ и $z_2=-1-i\sqrt{3}$ в тригонометрической и показательной форме. Изобразить числа на комплексной плоскости. Записать комплексные числа $\overline{z}_1\cdot z_2$, $z_1/\overline{z}_2$, z_2^4, $\sqrt[4]{z_1}$ в тригонометрической и показательной формах.

1.1.5.8 Решить кубическое уравнение $z^3+125=0$.

1.1.5.9 Разложить многочлен $P_4(z)=z^4+4z^2+5$ на линейные и квадратичные множители с действительными коэффициентами.

1.1.5.10 Разложить многочлен $P_4(z)=z^8-2z^4+2$ на линейные и квадратичные множители с действительными коэффициентами.

Витебский государственный технологический университет

1.1.6 Вопросы для самоконтроля

1) Какие числа называются комплексными?

2) Какое геометрическое толкование можно дать комплексному числу?

3) Что называется модулем и аргументом комплексного числа и как он определяется?

4) Запишите формулу Эйлера и Муавра.

5) Какой вид имеет комплексное число в алгебраической, тригонометрической и показательной форме записи?

6) Как происходит сложение, умножение, деление и возведение в степень комплексных чисел, заданных в алгебраической форме?

7) Как происходит умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня из комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме?

8) Как происходит умножение, деление, возведение в степень и извлечение корня из комплексных чисел, заданных в показательной форме?

9) Запишите общий вид алгебраического уравнения и многочлена *n*-ой степени. Какие числа называются их корнями?

10) Сформулируйте основную теорему алгебры.

1.2 ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

1.2.1 Последовательности комплексных чисел

Пусть каждому натуральному числу n поставлено в соответствие вполне определённое комплексное число z_n. Записав последовательно эти числа, получим последовательность комплексных чисел (z_n): $z_1, z_2, ..., z_n, ...$ Но $z_n = x_n + iy_n$, поэтому задание последовательности (z_n) равносильно заданию двух последовательностей действительных чисел. Например, если общий член последовательности комплексных чисел задан формулой $z_n = n + i\,n^2$, то члены последовательности запишутся следующим образом: $1+i; 2+4i; ..., n+n\,i, ...$ или $(x_n) = n$, а $(y_n) = n^2$.

Определение 1.2.1 Число $z_0 = x_0 + iy_0$ называется *пределом последовательности комплексных чисел* (z_n) и записывается $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех $n \geq N$ выполняется неравенство $|z_n - z_0| < \varepsilon$.

С геометрической точки зрения это означает, что, как бы мала ни была ε-окрестность точки z_0, все члены последовательности (z_n), начиная с некоторого номера N, находятся в этой ε-окрестности. Если числовая последовательность имеет предел, то она называется *сходящейся*, в противном случае - *расходящейся*.

Витебский государственный технологический университет

Соотношение $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+iy_n)=x_0+iy_0$ эквивалентно двум соотношениям: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ и $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=y_0$, то есть вопрос о сходимости последовательности комплексных чисел (z_n) эквивалентен вопросу об одновременной сходимости двух последовательностей действительных чисел (x_n) и (y_n). Так как, определение предела последовательности комплексных чисел конструктивно не отличается от определения предела последовательности действительных чисел, то свойства и правила предельного перехода у этих последовательностей будут аналогичны.

Теорема 1.2.1 (достаточное условие сходимости последовательности комплексных чисел). Пусть $z_n=r_ne^{i\varphi_n}$, где $r_n=|z_n|$, $\varphi_n=\arg z_n$. Тогда, если $\lim\limits_{n\to\infty}r_n=r_0$, $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n=\varphi_0$, то $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=r_0\cdot e^{i\varphi_0}$.

Пример 1.2.1. Найти предел последовательности (z_n): $z_n=\dfrac{5n}{n-1}+i\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{1/n}$.

Решение. $\lim\limits_{n\to\infty}z_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{5n}{n-1}+i\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{1/n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{5n}{n-1}+i\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{1/n}=5+i$.

Пример 1.2.2. Найти предел последовательности $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n$, где $z=x+iy$.

Решение. Пусть $z_n=\left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty}|z_n|=\lim_{n\to\infty}\left|\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\frac{y^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{1}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x^2+y^2+2xn}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}=e^x,$$

$$\arg z_n=\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)^n=n\cdot\arg\left(1+\frac{z}{n}\right)=n\cdot\operatorname{arctg}\frac{y/n}{1+x/n}=n\cdot\operatorname{arctg}\frac{y}{n+x},$$

$$\lim_{n\to\infty}\arg z_n=\lim_{n\to\infty}\left(n\cdot\operatorname{arctg}\frac{y}{n+x}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\operatorname{arctg}\frac{y}{n+x}}{\frac{y}{n+x}}\cdot\frac{ny}{n+x}\right)=1\cdot y=y.$$

Используя достаточное условие сходимости последовательности комплексных чисел (теорема 1.2.1), получаем

Витебский государственный технологический университет

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = e^x \cdot e^{iy} = e^{x+iy} = e^z .$$

1.2.2 Ряды комплексных чисел

Рассмотрим числовую последовательность (z_n). Выражение вида

$$z_1 + z_2 + ... + z_n + ..., \qquad (1.2.1)$$

называется *числовым рядом с комплексными числами*.

Так же как и в рядах с действительными числами, сходимость ряда (1.2.1) определяется рассмотрением предела последовательности частичных сумм: $S_n = z_1 + z_2 + ... + z_n + ... = \sum_{i=1}^{n} z_i$.

Ряд (1.2.1) называется *сходящимся*, если последовательность (S_n) его частичных сумм стремится к конечному пределу, то есть $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, где число S называется *суммой ряда*. В противном случае ряд называется расходящимся.

Теорема 1.2.2 Ряд с комплексными числами сходится тогда и только тогда, когда сходятся ряды, образованные действительными и мнимыми частями членов данного ряда.

Определение 1.2.2 Ряд (1.2.1) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд, составленный из абсолютных величин его членов

$$|z_1| + |z_2| + ... + |z_n| + ... = \sum_{i=1}^{\infty} |z_i| . \qquad (1.2.2)$$

Так как абсолютная сходимость ряда (1.2.1) означает сходимость ряда (1.2.2) с действительными неотрицательными членами, то для определения абсолютной сходимости рядов комплексных чисел можно использовать любые известные признаки сходимости рядов с неотрицательными членами.

Пример 1.2.3. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt{n}+2i}{n!}$.

Решение. Составляем ряд из модулей членов заданного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+4}{n!}$. Для исследования ряда на сходимость воспользуемся признаком Даламбера.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+5)\cdot n!}{(n+1)!\cdot(n+4)} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+5}{n(n+4)} = 0 < 1 .$$

Следовательно, ряд из модулей сходится, а исходный ряд сходится абсолютно.

Витебский государственный технологический университет

1.2.3 Предел и непрерывность функций комплексных переменных

Понятие функции комплексной переменной является частным случаем общего понятия функции.

Определение 1.2.3 Функция $\omega = f(z) = f(x+iy) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$ называется *функцией комплексной переменной* z на множестве D, если каждому значению $z \in D$ поставлено в соответствие одно или несколько комплексных значений ω, среди которых может быть и бесконечность, при этом $u(x,y) = \operatorname{Re} f(z)$, $v(x,y) = \operatorname{Im} f(z)$.

Совокупность значений функции комплексной переменной $f(z)$, соответствующих всем значениям $z \in D$, называется областью G значений функции $f(z)$. Геометрически заданную на D функцию $f(z)$ можно рассматривать как отображение области D плоскости Oxy в некоторую область G плоскости O_1uv. Если каждому значению $z \in D$ соответствует только одно значение ω, то функцию $\omega = f(z)$ называют односвязанной, а если несколько значений – то многосвязанной. Обратное отображение $\varphi : G \to D$ определяет обратную функцию $z = \varphi(\omega)$.

Под элементарными функциями комплексной переменной понимают обычно следующие функции:

1) $f(z) = az + b$ - линейная функция;

2) $f(z) = z^n$ (n - целое) – степенная функция;

3) $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ - дробно-линейная функция;

4) $f(z) = \dfrac{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0 z^m + b_1 z^{m-1} + \ldots + a_m}$ - общая рациональная функция;

5) $f(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z} \right)$ - функция Жуковского;

6) $f(z) = e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$ - показательная функция;

7) логарифмическая функция определяется как обратная к показательной функции, а именно: натуральным логарифмом, обозначаемым $\operatorname{Ln} z$, комплексного числа $z = re^{i\varphi}$, называется показатель степени $\omega = u + iv$, в которую надо возвести число e, чтобы получить число z, то есть

$$f(z) = \operatorname{Ln} z = \ln r + i(\arg z + 2k\pi);$$

8) тригонометрические и гиперболические функции определяются с помощью показательной функции равенствами

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = -i \sin iz, \quad \operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \cos iz.$$

Пусть $\omega = f(z)$ - однозначная функция, определённая для любого $z \in D$, за исключением, может быть, точки z_0.

Витебский государственный технологический университет

Определение 1.2.4 Число $a = \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ называется *пределом функции* $f(z)$ при значении $z \to z_0$, если для любого произвольного малого положительного числа ε найдётся положительное число $\delta = \delta(\varepsilon)$, такое, что для всех z, отличных от комплексного числа z_0 и удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \delta$, выполняется неравенство $|f(z) - a| < \varepsilon$.

Так как определение предела функции комплексной переменной конструктивно не отличается от определения предела функции действительной переменной, то и свойства и правила предельного перехода будут аналогичны.

Определение 1.2.5 Функция $f(z)$ называется *непрерывной* в точке z_0, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$, другими словами, если справедливо соотношение $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \Delta f(z) = 0$.

Теорема 1.2.3 Функция комплексной переменной $f(z) = u(x, y) + i \cdot v(x, y)$ непрерывна в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ тогда и только тогда, когда функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ непрерывны в точке (x_0, y_0).

Из теоремы 1.2.3 следует, что теоремы о непрерывности функций действительных переменных будут справедливы и для непрерывных функций комплексной переменной.

Если функция непрерывна в каждой точке множества D, то она называется *непрерывной на этом множестве*. *Точками разрыва* функции $f(z)$ называются точки, в которых нарушается непрерывность функции.

Пример 1.2.4. Вычислить предел $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\sin z}{\operatorname{sh} iz}$.

Решение. $\lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\sin z}{\operatorname{sh} iz} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{z \to 0} \dfrac{\sin z}{i \sin z} = \lim\limits_{z \to 0} \dfrac{1}{i} = \dfrac{1}{i} = -i$.

Пример 1.2.5. Вычислить предел $\lim\limits_{z \to 2i} \dfrac{z^2 + 8iz + 20}{z^2 - iz + 2}$.

Решение. $\lim\limits_{z \to 2i} \dfrac{z^2 + 8iz + 20}{z^2 - iz + 2} = \left(\dfrac{0}{0}\right) = \lim\limits_{z \to 2i} \dfrac{(z - 2i) \cdot (z + 10i)}{(z - 2i) \cdot (z + i)} = \lim\limits_{z \to 2i} \dfrac{z + 10i}{z + i} = 4$.

1.2.4 Дифференцирование функций комплексной переменной

Пусть $\omega = f(z)$ - однозначная функция, определённая для любого $z \in D$.

Определение 1.2.6 *Производной функции* $\omega = f(z)$ в произвольно фиксированной точке z называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при стремлении приращения аргумента к нулю, и если этот предел существует и конечен.

Витебский государственный технологический университет

$$\omega' = f'(z) = \frac{d\omega}{dz} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta \omega}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z+\Delta z) - f(z)}{\Delta z}.$$

Если функция $\omega = f(z)$ имеет производную в точке, то она называется *дифференцируемой* в этой точке.

Сформулируем *необходимые условия дифференцируемости* функции $\omega = f(z)$.

Если функция $\omega = f(z) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$ дифференцируема в точке $z = x + iy$, то в точке (x,y) существуют частные производные функций $u = u(x,y)$ и $v = v(x,y)$, причём частные производные удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{1.2.3}$$

которые называются *условиями Коши – Римана*.

Сформулируем теперь *достаточные условия дифференцируемости* функции $\omega = f(z)$.

Для того чтобы функция $\omega = f(z) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$ была дифференцируемой в точке $z = x + iy$, достаточно, чтобы:

1) действительные функции $u = u(x,y)$ и $v = v(x,y)$ были дифференцируемы в точке (x,y);

2) частные производные в этой точке должны удовлетворять условиям Коши – Римана (1.2.3).

Если функция $\omega = f(z) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$ в некоторой точке удовлетворяет достаточным условиям дифференцируемости, то производная в этой точке может быть вычислена по одной из приведённых ниже формул:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{1.2.4}$$

Так как определение производной функции комплексной переменной конструктивно не отличается от определения производной функции действительной переменной, то и свойства и правила дифференцирования будут аналогичны.

Пример 1.2.6. Показать, что $\frac{de^z}{dz}$ существует и равна e^z.

Решение. Рассмотрим функцию $\omega = u + iv = e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$, где $u(x,y) = e^x \cos y$, $v(x,y) = e^x \sin y$. Функции $u = u(x,y)$ и $v = v(x,y)$ дифференцируемы, то есть имеют непрерывные частные производные в любой точке комплексной плоскости. Найдём частные производные и проверим условия Коши – Римана.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y, \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y, \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y, \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y.$$

Витебский государственный технологический университет

Следовательно, $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$, то есть выполняется условие Коши – Римана (1.2.3). Воспользуемся одной из формул (1.2.4):

$$\frac{de^z}{dz}=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=e^x\cos y+ie^x\sin y=e^x(\cos y+i\sin y)=e^x\cdot e^{iy}=e^{x+iy}=e^z,$$

то есть функции e^z дифференцируема и её производная равна $\frac{de^z}{dz}=e^z$.

1.2.5 Аналитические функции

Функция $\omega=f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$ называется *аналитической в точке* z, если она дифференцируема в самой точке z, так и в любой её окрестности. Функция $\omega=f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$ называется *аналитической в области* D, если она аналитична в каждой точке области D. Точка z_0, в которой функция $f(z)$ является аналитичной, называется *правильной точкой* функции. Функция $f(z)$ аналитична в некоторой проколотой окрестности точки z_0 и не аналитична в самой этой точке или не определена в этой точке, то точка z_0 называется *особой точкой* функции $f(z)$.

Используя определение элементарных функций комплексного переменного получаем, что для аналитических функций таблица производных функций комплексных переменных совпадает с таблицей производных функций действительных переменных. Например, $(\cos z)'=-\sin z$, $(a^z)'=a^z\ln a$ и другие.

Часто для проверки аналитичности функции удобнее пользоваться *условиями Коши – Римана* (1.2.3), выраженными не через декартовые координаты, а через полярные координаты:

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \varphi},\quad \frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \varphi}. \tag{1.2.5}$$

Если функция $\omega=f(z)=u(r,\varphi)+i\cdot v(r,\varphi)$ в некоторой точке удовлетворяет достаточным условиям дифференцируемости, то производная в этой точке может быть вычислена по одной из приведённых ниже формул:

$$f'(z)=\frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+i\cdot\frac{\partial v}{\partial r}\right)=\frac{1}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}-i\cdot\frac{\partial v}{\partial \varphi}\right). \tag{1.2.6}$$

Пример 1.2.7. Выяснить вопрос об аналитичности функции $\omega=\overline{z}^2$ в точке $z=0$.

Решение. Для заданной функции $\omega=\overline{z}^2$ определим действительную и мнимую часть заданной функции комплексной переменной $\omega=\overline{z}^2=(x-iy)^2=(x^2-y^2)-2ixy$.

Витебский государственный технологический университет

Действительная часть равна $u(x,y)=x^2-y^2$, а мнимая часть функции комплексной переменной равна $v(x,y)=-2xy$. Проверяем, удовлетворяют ли действительные функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ достаточным условиям дифференцируемости, и, если удовлетворяют, то в каких точках. Для этого найдём частные производные действительной и мнимой части:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\ \frac{\partial u}{\partial y}=-2y,\ \frac{\partial v}{\partial x}=-2y,\ \frac{\partial v}{\partial y}=-2x.$$

Все частные производные непрерывны в каждой точке комплексной плоскости. Условия Коши – Римана $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\ \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$ выполняются лишь в точке $z=0$, так как равенства $2x=-2x$ и $-2y=2y$ выполняются лишь при условии $x=y=0$. Следовательно, функция $\omega=\bar{z}^2$ дифференцируема лишь в точке $z=0$, причём $\omega'(0)=\frac{\partial u(0,0)}{\partial x}+i\cdot\frac{\partial v(0,0)}{\partial x}=0+i\cdot 0=0$. Так как в окрестности точки $z=0$ заданная функция не является дифференцируемой, то она не будет аналитической в точке $z=0$.

Пример 1.2.8. Проверить аналитичность логарифмической функции $\omega=\operatorname{Ln} z$ и доказать, что во всех конечных точках, кроме точки $z=0$, выполняется равенство $(\operatorname{Ln} z)'=1/z$.

Решение. Для функции $f(z)=\operatorname{Ln} z=\ln r+i\cdot(\varphi+2k\pi)$ проверим условие Коши – Римана (1.2.5), для чего находим частные производные

$$\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{1}{r},\ \frac{\partial u}{\partial \varphi}=0,\ \frac{\partial v}{\partial r}=0,\ \frac{\partial v}{\partial \varphi}=1.$$

Следовательно, условия Коши – Римана выполняются за исключением точки $z=0$, то есть функция аналитична во всех точках комплексной плоскости, за исключением точки $z=0$. Подставив эти выражения в формулу (1.2.6), находим выражение для производной $f'(z)$:

$$f'(z)=(\operatorname{Ln} z)'=\frac{r}{z}\cdot\left(\frac{1}{r}+i\cdot 0\right)=\frac{1}{z}.$$

Пример 1.2.9. Вычислить производную функции $\omega=e^{\sin z^2}$.

Решение. Так как функция является аналитической в комплексной плоскости, то находим производную функции по комплексной переменной z, по обычным правилам дифференцирования функции действительной переменной.

$$\omega'=\left(e^{\sin z^2}\right)'=2z\cdot\cos z^2\cdot e^{\sin z^2}.$$

Витебский государственный технологический университет

1.2.6 Интегрирование функций комплексной переменной

Формально интеграл от функции комплексной переменной определяется так же, как интеграл от функции действительной переменной.

Пусть в некоторой области D комплексной плоскости задана однозначная и непрерывная функция $\omega = f(z) = u(x,y) + i \cdot v(x,y)$ и γ - произвольная гладкая или кусочно-гладкая кривая, целиком лежащая в области D. Тогда интеграл от функции комплексной переменной вычисляем по формуле

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \int_\gamma u(x,y)dx - v(x,y)dy + i\int_\gamma v(x,y)dx + u(x,y)dy. \qquad (1.2.7)$$

Формула (2.1.7) даёт выражение для вычисления интеграла по комплексной переменной через два криволинейных интеграла от действительных функций. Отсюда следует, что основные свойства криволинейных интегралов распространяются и на интегралы функций комплексной переменной.

Пример 1.2.10. Вычислить $\int_\gamma \overline{z}^2 dz$ по замкнутому контуру, соединяющей точки $z=0, z=1, z=1+i$, при условии, что контур γ представляет собой треугольник.

Решение. По условию задачи получаем, что контур γ представляет собой треугольник OAB, с вершинами в точках $O(0;0)$, $A(1;0)$ и $B(1;1)$. Следовательно, необходимо вычислить интеграл по контуру $OABO$:

$$\int_\gamma \overline{z}^2 dz = \int_{OABO} \overline{z}^2 dz = \int_{OA} \overline{z}^2 dz + \int_{AB} \overline{z}^2 dz + \int_{BO} \overline{z}^2 dz.$$

Прямая OA имеет уравнение $z = x$, где x изменяется от 0 до 1, $\overline{z} = x$, $\overline{z}^2 = x^2$. Воспользуемся формулой (1.2.7): $\int_{OA} \overline{z}^2 dz = \int_0^1 x^2 dx + 0 = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 = \frac{1}{3}$.

Прямая AB имеет уравнение $z = 1 + iy$, где y изменяется от 0 до 1, $\overline{z} = 1 - iy$, $\overline{z}^2 = 1 - 2iy + i^2y^2 = (1-y^2) - 2iy$. Воспользуемся формулой (1.2.7):

$$\int_{OA} \overline{z}^2 dz = \int_0^1 2ydy + +i\int_0^1 (1-y^2)dy = y^2\Big|_0^1 + i\left(y - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1 = 1 + \frac{2}{3}i.$$

Прямая AB имеет уравнение $z = 1 + iy$, где y изменяется от 0 до 1, $\overline{z} = 1 - iy$, $\overline{z}^2 = 1 - 2iy + i^2y^2 = (1-y^2) - 2iy$. Воспользуемся формулой (1.2.7):

$$\int_{OA} \overline{z}^2 dz = \int_0^1 2ydy + +i\int_0^1 (1-y^2)dy = y^2\Big|_0^1 + i\left(y - \frac{y^3}{3}\right)\Big|_0^1 = 1 + \frac{2}{3}i.$$

Прямая BO имеет уравнение $z = x + ix$, где x изменяется от 1 до 0, $\overline{z} = x - ix$, $\overline{z}^2 = x^2 - 2ix^2 + i^2x^2 = -2ix^2$. Воспользуемся формулой (1.2.7):

$$\int_{OA} \overline{z}^2 dz = \int_1^0 2x^2 dx - 2i\int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}y^3\Big|_1^0 - \frac{2}{3}i\,y^3\Big|_1^0 = -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}i.$$

Витебский государственный технологический университет

Следовательно,

$$\int_{\gamma} \overline{z}^2 dz = \int_{OA} \overline{z}^2 dz + \int_{AB} \overline{z}^2 dz + \int_{BO} \overline{z}^2 dz = \frac{1}{3} + 1 + \frac{2}{3}i - \frac{2}{3} + \frac{2}{3}i = \frac{2}{3} + \frac{4}{3}i.$$

Основную роль во всей теории функций комплексной переменной является формула Коши. Эта формула связывает значение аналитической функции $f(z)$ в любой точке z области D со значением этой функции в граничных точках области D.

Теорема 1.2.4 Пусть $f(z)$ - аналитическая функция в замкнутой односвязанной ориентированной области D с границей γ. Тогда для любой внутренней точки $z \in D$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(s)}{s - z} ds. \qquad (1.2.8)$$

Формула (1.2.8) называется *интегральной формулой Коши*.

Теорема 1.2.5 Пусть $f(z)$ - аналитическая функция в замкнутой многосвязанной области D с внешним контуром γ и внутренними непересекающимися между собой контурами γ_m, где $m = \overline{1,n}$. Тогда для любой внутренней точки $z \in D$ справедлива *интегральная формула Коши для многосвязанной области*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\gamma} \frac{f(s)}{s - z} ds - \frac{1}{2\pi i} \sum_{m=1}^{n} \oint_{\gamma_m} \frac{f(s)}{s - z} ds. \qquad (1.2.9)$$

Пример 1.2.11. Вычислить интеграл $\oint_{|z-1|=1} \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} dz$.

Решение. Подынтегральная функция $\frac{z^2 + 1}{z^2 - 1}$ имеет две особые точки $z = 1$ и $z = -1$. Так как точка $z = -1$ лежит вне окружности $\gamma : |z - 1| = 1$, а точка $z = 1$ - внутри области интегрирования, то представим подынтегральную функцию в виде $\frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} = \frac{z^2 + 1}{z + 1} \cdot \frac{1}{z - 1} = \frac{f(z)}{z - 1}$, где $f(z) = \frac{z^2 + 1}{z + 1}$. По интегральной формуле Коши (1.2.8) вычисляем исходный интеграл

$$\oint_{|z-1|=1} \frac{z^2 + 1}{z^2 - 1} dz = 2\pi i \cdot \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-1|=1} \frac{f(z)}{z - 1} dz \right) = 2\pi i \cdot f(1) = 2\pi i.$$

Витебский государственный технологический университет

Пример 1.2.12. Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=3} \frac{\cos z}{z^2+z-2}dz$.

Решение. Подынтегральная функция $\frac{\cos z}{z^2+z-2} = \frac{\cos z}{(z-1)\cdot(z+2)}$ имеет две особые точки $z_1 = 1$ $z_2 = -2$. Окружим их непересекающимися окружностями γ_1 γ_2, которые лежат внутри круга $|z| < 3$. В результате получаем трёхсвязанную область. По интегральной формуле Коши для многосвязанной области (1.2.9) вычисляем исходный интеграл

$$\oint\limits_{|z|<3} \frac{\cos z\,dz}{z^2+z-2} = \oint\limits_{|z|<3} \frac{\cos z\,dz}{(z-1)\cdot(z+2)} = \oint\limits_{\gamma_1} \frac{\cos z\,dz}{(z-1)\cdot(z+2)} + \oint\limits_{\gamma_2} \frac{\cos z\,dz}{(z-1)\cdot(z+2)} =$$

$$= \oint\limits_{\gamma_1} \frac{\cos z/(z-1)}{z+2}dz + \oint\limits_{\gamma_2} \frac{\cos z/(z+2)}{z-1}dz = 2\pi i\cdot\left(\left.\frac{\cos z}{z-1}\right|_{z=-2} + \left.\frac{\cos z}{z+2}\right|_{z=1}\right) =$$

$$= \frac{2}{3}\pi i\left(\cos 1 - \cos 2\right) = \frac{4}{3}\sin\frac{1}{2}\sin\frac{3}{2}.$$

1.2.7 Задания для решения на практических занятиях

1.2.7.1 Для следующих функций найти действительную и мнимую части:

а) $\omega = z^2 + i$; б) $\omega = \overline{z} - iz^2$;

в) $\omega = (iz+1)/(1+\overline{z})$; г) $\omega = \overline{z}/z$;

д) $\omega = \sin 2iz$; е) $\omega = \mathrm{ch}(z-i)$.

1.2.7.2 Вычислить пределы:

а) $\lim\limits_{z\to -i} \frac{z^2+3iz-2}{z+i}$; б) $\lim\limits_{z\to -i} \frac{z^2-iz-2i}{z^2-3iz-2}$;

в) $\lim\limits_{z\to \pi/4} \frac{\cos 2z}{\mathrm{ch}\,iz + i\,\mathrm{sh}\,iz}$; г) $\lim\limits_{z\to -\pi/2} \frac{e^{2z}+1}{e^z+1}1$

1.2.7.3 Доказать, что функция $f(z) = \overline{z}$ на всей комплексной плоскости.

1.2.7.4 Пользуясь условиями Коши – Римана, выяснить какие из следующих функций являются аналитическими хотя бы в одной точке, а какие нет:

а) $\omega = z\cdot\overline{z}$; б) $\omega = \overline{z}$; в) $\omega = z^2\cdot\overline{z}$; г) $\omega = z\cdot e^z$;

д) $\omega = |z|\cdot\overline{z}$; е) $\omega = e^{z^2}$; ж) $\omega = |z|\mathrm{Re}(\overline{z})$; з) $\omega = \sin 3z - i$.

1.2.7.5 Показать, что $\frac{d(\mathrm{arctg}\,z)}{dz} = \frac{1}{1+z^2}$.

1.2.7.6 Найти угол поворота и коэффициент искажения при отображении функции комплексной переменной $\omega = 2z^2 + z$ в точках $z = 1$ и $z = 0{,}25 + i$.

1.2.7.7 Восстановить аналитическую функцию $f(z) = u(x,y) + i\cdot v(x,y)$ по известной её действительной части $u = 1 - e^x\sin y$.

Витебский государственный технологический университет

1.2.7.8 Восстановить аналитическую функцию $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$ по известной её мнимой части $v=(e^{2x}-1)\dfrac{\sin y}{e^x}$, причём $f(0)=2$.

1.2.7.9 Определить действительную и мнимую часть функции $\omega=f(z)$. Проверить выполнение условий Коши – Римана. В случае выполнения условий Коши – Римана найти производные функций:

а) $f(z)=3\cdot z^2-i\cdot z^3$; б) $f(z)=3\cdot z-i\cdot z^2$;

в) $f(z)=z^3+3\cdot i\cdot z$; г) $f(z)=\cos(3iz+2i)$;

д) $f(z)=e^{3z+i}$; е) $f(z)=e^{-iz}$.

1.2.7.10 Найти значение интеграла $\int\limits_{\gamma} z^2dz$:

а) вдоль отрезка прямой, который соединяет точки $O(0;0)$ и $A(1;1)$;

б) вдоль линии части параболы $y=x^2$, которая соединяет те же точки.

1.2.7.11 Вычислить $\oint\limits_{|z|=1}\dfrac{dz}{z^2+4}$.

1.2.7.12 Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z-1|=6}\dfrac{dz}{z^2-1+3i}$.

1.2.7.13 Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=5}\dfrac{\sin z\,dz}{z^2+2z-3}$.

1.2.7.14 Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z|=2}\dfrac{e^{-z}}{z+1}dz$.

1.2.7.15 Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z-2|=2}\dfrac{z^2+4}{z^2-4}dz$.

1.2.8 Задания для контролируемой самостоятельной работы

1.2.8.1 Для комплекснозначимой функции $z=i-z^3$ найти действительную и мнимую части.

1.2.8.2 Вычислить предел $\lim\limits_{z\to i/2}\dfrac{2z^2-11\cdot i\cdot z-5}{2z^2+7\cdot i\cdot z+4}$.

1.2.8.3 Показать, что если функция $f(z)=u(x,y)+i\cdot v(x,y)$ аналитическая в области D, то в этой области выполняется равенство $\dfrac{\partial u}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}=0$.

1.2.8.4 Показать, что $\dfrac{d(\sin z)}{dz}=\cos z$.

Витебский государственный технологический университет

1.2.8.5 Определить действительную и мнимую часть функции $f(z)=\frac{z^2}{2}-5i$. Проверить выполнение условий Коши – Римана. В случае выполнения условий Коши – Римана найти производную функций $f(z)=\frac{z^2}{2}-5i$.

1.2.8.6 Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z-2|=3}\frac{dz}{e^z}$.

1.2.8.7 Вычислить интеграл $\oint\limits_{|z+1|=1}\frac{z^2+2z+1}{z^2-1}dz$.

1.2.8.8 Вычислить $\oint\limits_{|z|=}\frac{e^z\,dz}{z^2+z-2}$.

1.2.9 Вопросы для самоконтроля

1) Как определяется предел последовательности комплексных чисел?
2) Как устанавливается сходимость ряда комплексных чисел?
3) Какой ряд комплексных чисел называется абсолютно сходящимся?
4) Как установить абсолютную сходимость рядов комплексных чисел?
5) Дайте определение функции комплексной переменной.
6) Как определяется предел функции комплексной переменной в точке?
7) Дайте определение непрерывности функции $f(z)$ в точке z_0.
8) Дайте определение производной функции $f(z)$ в точке z_0.
9) Приведите необходимые условия дифференцируемости функции $f(z)$.
10) Приведите достаточные условия дифференцируемости функции $f(z)$.
11) Какая функция называется аналитической?
12) Каким условиям должна удовлетворять аналитическая функция?
13) Запишите интеграл от функции комплексной переменной по дуге γ.
14) Запишите интегральную формулу Коши для односвязанной области.
15) Запишите интегральную формулу Коши для многосвязанной области.

2 АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ

2.1 ЭМПИРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

2.1.1 Постановка задачи аппроксимации функций

При эмпирическом изучении зависимости переменной y от переменной x производятся измерения переменной y при различных значениях величины x. Представим результаты эксперимента зависимости y от переменной x в виде таблицы 2.1.1 или точечной диаграммы (рисунок 2.1.1).

Витебский государственный технологический университет

Таблица 2.1.1 – Результаты эксперимента

x_i	x_1	x_2	x_3	…	x_i	…	x_n
y_i	y_1	y_2	y_3	…	y_i	…	y_n

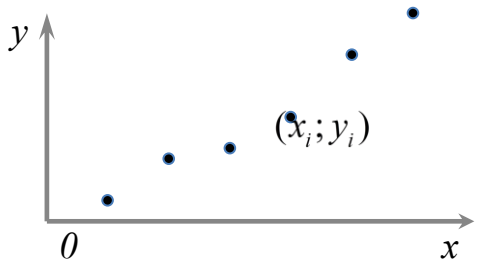

Рисунок 2.1.1 Точечная диаграмма

Важное практическое применение имеет следующая задача: найти аналитическое выражение зависимости функции y от переменной x, то есть необходимо подобрать непрерывную функцию $y=\varphi(x)$, такую, чтобы $y_i=\varphi(x_i)$. Функции $y=\varphi(x)$, полученные в результате решения такого рода задач, называются *эмпирическими* или *аппроксимирующими*.

Подбор аппроксимирующей функции по экспериментальным данным (x_i,y_i), $i=\overline{1,n}$, можно осуществить различными методами исходя из разных моделей эксперимента. Рассмотрим две наиболее распространённые модели.

1. Интерполяционная модель.

Предположим, что некоторая функция $y=f(x)$ задана таблицей значений (x_i,y_i), $i=\overline{1,n}$, (таблица 2.1.1). Пусть значения функции y при выбранных значениях x_i точно известны, а её аналитическое выражение $y=f(x)$ в общем случае считается неизвестной функцией. Необходимо по таблице значений функции $y=f(x)$ подобрать эмпирическую функцию $y=\varphi(x)$, удовлетворяющую условиям $\varphi(x_i)=y_i$, $i=\overline{1,n}$.

Геометрически задача подбора функции $\varphi(x)$ по заданным частным значениям функции $y=f(x)$ означает построение кривой $y=\varphi(x)$, проходящей через точки плоскости с координатами $(x_i,y_i), i=\overline{1,n}$. Через заданные точки (x_i,y_i) можно провести бесконечное множество различных кривых. Таким образом, задача подбора эмпирической функции $y=\varphi(x)$ по точным значениям или узлам $(x_i,y_i), i=\overline{1,n}$, неизвестной функции $y=f(x)$ не определена.

Предположим теперь, что функция $y=\varphi(x)$ не произвольная, а является многочленом степени $n-1$ при n узлах. Тогда задача подбора эмпирической функции $\varphi(x)$ приобретает более определённый характер: по таблице значений $(x_i,y_i), i=\overline{1,n}$, неизвестной функции $y=f(x)$ построить аппроксимирующий многочлен $P_{n-1}(x)$, удовлетворяющий условиям $P_{n-1}(x_i), i=\overline{1,n}$. Построенный

Витебский государственный технологический университет

многочлен называется *интерполяционным многочленом*. Существуют различные виды интерполяционных многочленов: Лагранжа, Ньютона и другие.

В практических расчётах часто используется *кусочно-линейная интерполяция* (функцию на отрезке $[x_k; x_{k+1}]$, $k = \overline{1,n}$, заменяют многочленом Лагранжа первой степени), *кусочно-квадратичная интерполяция* (по любым трём узлам x_{k-1}, x_k, x_{k+1} строят многочлен Лагранжа второй степени) или *сплайн-интерполяция*.

2. *Аппроксимация функций по методу наименьших квадратов*.

Пусть результаты измерений $(x_i, y_i), i = \overline{1,n}$ приведены в виде таблицы или точечной диаграммы. Аналитическое выражение для функции $y = f(x)$ нам неизвестно. Значения функции $y = f(x)$ при значениях $x = x_i$ определены приближённо с некоторой случайной погрешностью.

Наличие случайных погрешностей делает нецелесообразным подбор такой эмпирической функции $y = \varphi(x)$, которая бы точно описывала все экспериментальные данные, то есть график её проходил бы через точки $(x_i, y_i), i = \overline{1,n}$. В этом случае предпочтительно подобрать такую аппроксимирующую функцию $\varphi(x)$, которая бы «сглаживала» случайные погрешности измерений.

Задача построения аппроксимирующей функции $y = \varphi(x)$ по экспериментальным данным в модели метода наименьших квадратов состоит из двух этапов: 1) определение вида аппроксимирующей функции $y = \varphi(x)$, то есть выбор класса функций, к которому принадлежит аппроксимирующая функция (линейная, квадратичная, степенная, линейная и другая); 2) определение параметров $a_0, a_1, a_2, ..., a_k$ аппроксимирующей функции $y = \varphi(x, a_0, a_1, a_2, ..., a_k)$ выбранного вида.

2.1.2 Определение вида аппроксимирующей функции

В общем случае, не существует стандартных методов, которые образовывали бы строгую теоретическую базу для выбора аппроксимирующей функции $y = \varphi(x)$. Однако выбрать аппроксимирующую функцию, если придерживаться следующих приведённых пунктов.

1. При подборе аппроксимирующей функции $y = \varphi(x)$ следует учитывать характер расположения экспериментальных точек $(x_i, y_i), i = \overline{1,n}$, на точечной диаграмме.

Предположим, что на точечной диаграмме точки $(x_i, y_i), i = \overline{1,n}$, располагаются вдоль некоторой линии, например, вдоль прямой. Тогда в качестве аппроксимирующей функции рекомендуется выбирать линейную функцию $\varphi(x) = a \cdot x + b$, зависящую от двух параметров a и b.

Витебский государственный технологический университет

Если расположение точек $(x_i, y_i), i = \overline{1,n}$, на точечной диаграмме напоминает параболу, то в качестве аппроксимирующей функции лучше выбрать квадратичную функцию $\varphi(x) = ax^2 + bx + c$, зависящую от трёх параметров a, b и c.

Обычно при «зрительном» анализе экспериментальных точек, на точечной диаграмме используют графики известных функций. Если характер расположения точек на точечной диаграмме напоминает одну из кривых некоторого семейства (степенных, показательных, логарифмических и других функций), то аппроксимирующая функция $\varphi(x)$ выбирается из этого семейства функций.

Таким образом, на основании точечной диаграммы, можно подобрать достаточно много кривых, проходящих вблизи экспериментальных точек $(x_i, y_i), i = \overline{1,n}$, поэтому вопрос, какую именно из них следует выбрать в качестве аппроксимирующей, решается неоднозначно.

2. При подборе аппроксимирующей функции $y = \varphi(x)$ рекомендуется, если это возможно, провести её «линеаризацию», то есть сделать такую замену переменных, которая сводила бы нелинейную функцию $y = \varphi(x)$ к линейной функции.

Предположим, что замена переменных $t = t(x)$, $z = z(y)$ приводит нелинейную функцию $y = \varphi(x)$ к линейной функции $z = at + b$. Если теперь в системе координат Otz построить точечную диаграмму $(t_i, z_i), i = \overline{1,n}$, то точки должны располагаться вдоль прямой линии. В противном случае не рекомендуется выбирать функцию $\varphi(x)$ из рассматриваемого класса функций.

Как правило, «линеаризация» достигается логарифмированием исходной функции.

3. При подборе аппроксимирующей функции $y = \varphi(x)$ следует по возможности сочетать характер расположения точек на точечной диаграмме с логически-профессиональным анализом условия задачи.

4. Для простоты дальнейших этапов построения аппроксимирующей функции $\varphi(x) = \varphi(x, a_0, a_1, a_2, ..., a_k)$ желательно, чтобы они были линейными относительно параметров a_k.

5. При подборе аппроксимирующей функции для описания «криволинейных» зависимостей предпочтительно использовать параболы не выше третьей степени.

Предположим, что используя выше приведённые пункты 1 – 5, нами определён класс степенных, показательных, логарифмических и других функций, из которых необходимо выбрать аппроксимирующую функцию. После выбора вида аппроксимирующей функции найдём параметры $a_0, a_1, a_2, ..., a_k$ для предполагаемой функции $\varphi(x, a_0, a_1, a_2, ..., a_k)$.

Витебский государственный технологический университет

2.1.3 Определение параметров аппроксимирующей функции по методу наименьших квадратов

Пусть при эмпирическом изучении зависимости переменной y от переменной x производятся измерения переменной y при различных значениях величины x. Результаты эксперимента зависимости y от переменной x представлены в виде таблицы 2.1.1.

Предположим, что известна аппроксимирующая функция $\varphi(x) = \varphi(x, a_0, a_1, a_2, ..., a_k)$. Составляем разности $e_i = \varphi(x_i) - y_i$, где $i = \overline{1,n}$, которые называются *отклонениями* или *погрешностями*. Числа y_i это числа стоящие во второй строке таблицы 2.1.1, $\varphi(x_i)$ - значения аппроксимирующей функции $\varphi(x)$ при соответствующих значениях аргумента x_i, чисел из первой строки таблицы 2.1.1. Требуется подобрать параметры $a_0, a_1, a_2, ..., a_k$ аппроксимирующей функции $\varphi(x)$ так, чтобы отклонения e_i оказались наименьшими.

Наиболее распространённым критерием малости отклонений является критерий, лежащий в основе метода наименьших квадратов: параметры функции $\varphi(x)$ выбрать так, чтобы оказалась минимальной сумма квадратов отклонений: $S = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 \geq 0$. Подбор параметров $a_0, a_1, a_2, ..., a_k$ в аппроксимирующей функции $\varphi(x) = \varphi(x, a_0, a_1, a_2, ..., a_k)$ по методу наименьших квадратов производится таким образом, что сумма квадратов отклонений ординат $\varphi(x_i)$ аппроксимирующей функции от наблюдаемых значений y_i была минимальной, то есть

$$S = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\varphi(x_i, a_0, a_1, ..., a_k) - y_i\right)^2 \to \min. \qquad (2.1.1)$$

Задача определения тех значений параметров $a_0, a_1, a_2, ..., a_k$, при которых функция $S = S(a_0, a_1, a_2, ..., a_k)$, имеющая непрерывные частные производные, достигает минимума, то, на основании необходимого условия локального экстремума функции нескольких переменных, сводится к решению системы уравнений:

$$\frac{\partial S}{\partial a_0} = 0,\ \frac{\partial S}{\partial a_1} = 0,\ \frac{\partial S}{\partial a_2} = 0,\ ...,\ \frac{\partial S}{\partial a_k} = 0. \qquad (2.1.2)$$

Для проверки адекватности предполагаемой эмпирической формулы экспериментальным данным удобно использовать разделённые разности.

Так, например, эмпирическая формула $y = ax + b$ оказывается пригодной, то есть неплохо будет отражать вид зависимости между переменными x и y, если первые разделённые разности $f(x_{i+1}, x_i) = \dfrac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}$ мало отличаются друг от друга.

Витебский государственный технологический университет

В случаях, когда таблица результатов измерений имеет постоянный шаг , то есть каждый из последующих значений x отличается от предыдущего на постоянное число, то достаточно сравнить неразделённые разности $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$, и по их приближённому равенству можно сделать вывод об экспериментальной линейной зависимости.

Эмпирическая функция распределения $y = ax^2 + bx + c$ оказывается пригодной в случае, когда мало отличаются друг от друга разделённые разности второго порядка $f(x_{i+2}; x_{i+1}; x_i) = \dfrac{f(x_{i+2}; x_{i+1}) - f(x_{i+1}; x_i)}{x_{i+2} - x_{i+1}}$, где в числителе стоят разделённые разности первого порядка. Если каждое последующее значение x отличается от предыдущего на одно и то же число, то сравнивают неразделённые разности второго порядка $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$, где $\Delta y_i = y_{i+1} - y_i$ $\left(i = \overline{1,n}\right)$ и, в случае приближённого равенства, делаем вывод о квадратичной зависимости экспериментальных данных.

В дальнейшем рассмотрим методику определения параметров некоторых аппроксимирующих функций по методу наименьших квадратов.

2.1.4 Вопросы для самоконтроля

1) Какие функции называются эмпирическими или аппроксимирующими?

2) Что представляет собой интерполяционная модель подбора аппроксимирующей функции?

3) Какой многочлен называется интерполяционным?

4) Основная идея аппроксимации функций методом наименьших квадратов.

5) Основные правила для определения аппроксимирующей функции.

6) Как провести «линеаризацию» функции?

7) Как определить отклонения или погрешности для нахождения аппроксимирующей функции?

8) Определение параметров аппроксимирующей функции.

2.2 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПАРАМЕТРОВ НЕКОТОРЫХ ЭМПИРИЧЕСКИХ ФУНКЦИИ ПО МЕТОДУ НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ

2.2.1 Определение параметров линейной аппроксимирующей функции по методу наименьших квадратов

Предположим необходимо установить зависимость между двумя величинами x и y, результаты измерений которых занесены в таблицу 2.1.1.

Рассмотрим в декартовой системе координат Oxy точки $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, …, $M_n(x_n; y_n)$, которые изображены на рисунке 2.2.1.

Витебский государственный технологический университет

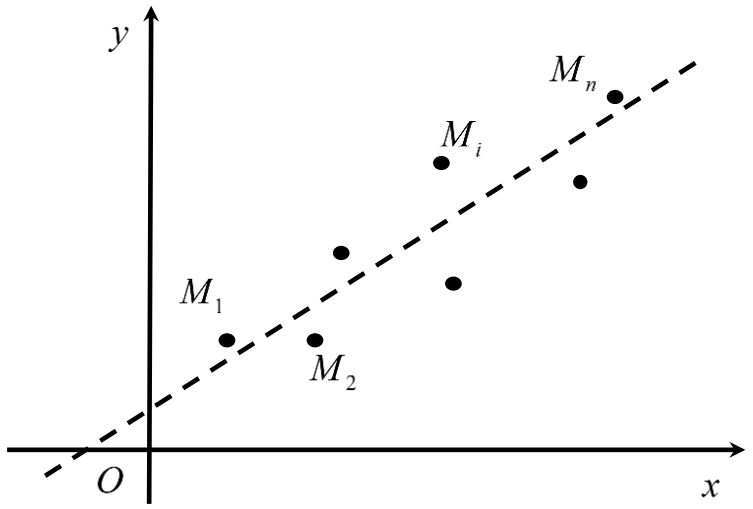

Рисунок 2.2.1 – Экспериментальные точки и линия эмпирической функции, определённой в пункте 2.2.1

Из точечной диаграммы видим, что экспериментальные точки располагаются вдоль некоторой прямой. Но если эти точки почти лежат на одной прямой, то естественно предположить, что между двумя величинами x и y существует линейная зависимость, которая выражается формулой:

$$y = ax + b, \tag{2.2.1}$$

где a и b - параметры, которые необходимо определить.

Представим равенство (2.2.1) в виде

$$ax + b - y = 0. \tag{2.2.2}$$

Точки $M_i(x_i, y_i)$ принадлежат искомой прямой (2.2.1) с определённой погрешностью. Подставляя экспериментальные значения x_i и y_i $\left(i = \overline{1,n}\right)$ в формулу (2.2.2), получаем систему отклонений

$$\begin{cases} e_1 = ax_1 + b - y_1, \\ e_2 = ax_2 + b - y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n = ax_n + b - y_n. \end{cases} \tag{2.2.3}$$

По методу наименьших квадратов подберём неизвестные параметры a и b таким образом, чтобы полученная величина $S = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 \geq 0$ была наименьшей. Учитывая систему (2.2.3) преобразуем функцию S:

$$S = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(ax_i + b - y_i\right)^2. \tag{2.2.4}$$

Функция двух переменных $S = S(a,b)$ является функцией двух переменных относительно переменных a и b. Чтобы эта функция принимала мини-

Витебский государственный технологический университет

мальное значение необходимо частные производные функции по данным переменным приравнять к нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i)x_i = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} 2(ax_i + b - y_i) = 0. \end{cases}$$

Преобразуем эту систему уравнений

$$\begin{cases} a \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + b \cdot n = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \tag{2.2.5}$$

Решая систему (2.2.5), определяем оптимальные значения неизвестных параметров a и b в эмпирической формуле (2.2.1). На рисунке 2.2.1 штриховой линией изображён график аппроксимированной функции $y = ax + b$, коэффициенты которой определены из системы (2.2.5).

Пример 2.2.1. В результате работы фирмы в течение 5 лет получены следующие данные

x_i	1	2	3	4	5
y_i	1	4	3	6	6

где x_i – инвестиционные вложения, y_i – прибыль, которую она получает за год. Значения инвестиционных вложений и прибыли в таблице задаются в условных единицах. Индекс $i = \overline{1;5}$ указывает год исследования работы фирмы. Предполагая, что между прибылью и инвестициями в производство существует некоторая зависимость найти аппроксимирующую функцию, используя метод наименьших квадратов. Определить наиболее правдоподобную величину прибыли на 6 год деятельности фирмы, если она в этот год инвестирует в производство 7 у. е. Считать условия работы фирмы неизменными и независимыми от внешних факторов.

Решение. Построим в декартовой системе координат точки $M_i(x_i; y_i)$, где $i = \overline{1,5}$, то есть точки $M_1(1;1)$, $M_2(2;4)$, $M_3(3;3)$, $M_4(4;6)$, $M_5(5;6)$. Экспериментальные точки M_i изображены на рисунке 2.1.3.

Витебский государственный технологический университет

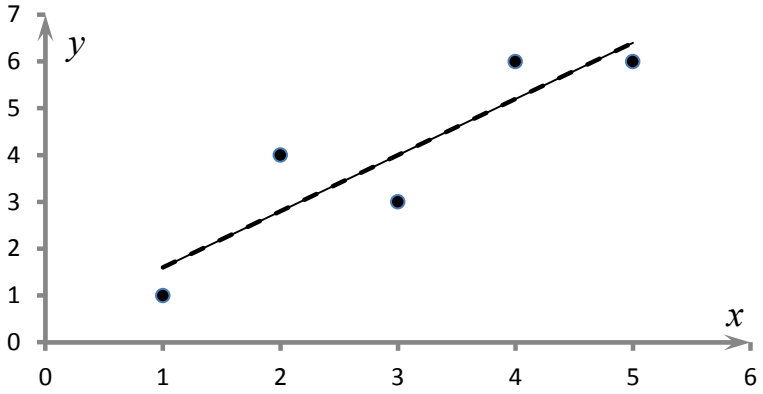

Рисунок 2.2.2 – Экспериментальные точки и линия эмпирической функции, примера 2.2.1.

Зависимость получения прибыли (y) фирмы от инвестиционных вложений (x), выражается функцией $y = f(x)$. Заданные точки приблизительно располагаются вдоль некоторой прямой, поэтому можно предположить линейную зависимость прибыли фирмы от ее инвестиционных вложений.

Используя метод наименьших квадратов, определим линейную функцию $y = ax + b$, которая аппроксимирует исходную $y = f(x)$.

Найдем параметры k и b эмпирической формулы $y = kx + b$ из системы линейных уравнений (2.2.5).

В условии данной задачи зависимость получения прибыли фирмы от инвестиционных вложений проводилась в течение пяти лет, а, следовательно, $n = 5$. Построим вспомогательную таблицу.

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i \cdot y_i$
1	1	1	1	1
2	2	4	4	8
3	3	3	9	9
4	4	6	16	24
5	5	6	25	30
$\sum$	15	20	55	72

В результате получаем систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} 55 \cdot a + 15 \cdot b = 72, \\ 15 \cdot a + 5 \cdot b = 20. \end{cases}$$

Решением данной системы являются числа $a = 1,2$ и $b = 0,4$.

Следовательно, зависимость полученной прибыли фирмой от инвестиционных вложений, может быть выражена функцией: $y = 1,2 \cdot x + 0,4$. На рисунке

Витебский государственный технологический университет

2.1.2 эмпирическая функция изображена штриховой линией. Используя полученную зависимость, можно предположить, что на следующий год, при вложении в производство 7 у. е., фирма получит наиболее правдоподобную прибыль равную 8,8 у. е.

2.2.2 Определение параметров квадратичной аппроксимирующей функции по методу наименьших квадратов

Предположим необходимо установить зависимость между двумя величинами x и y, результаты измерений которых занесены в таблицу 2.1.1.

Рассмотрим в декартовой системе координат Oxy точки $M_1(x_1;y_1)$, $M_2(x_2;y_2)$, …, $M_n(x_n;y_n)$, которые изображены на рисунке 2.2.3.

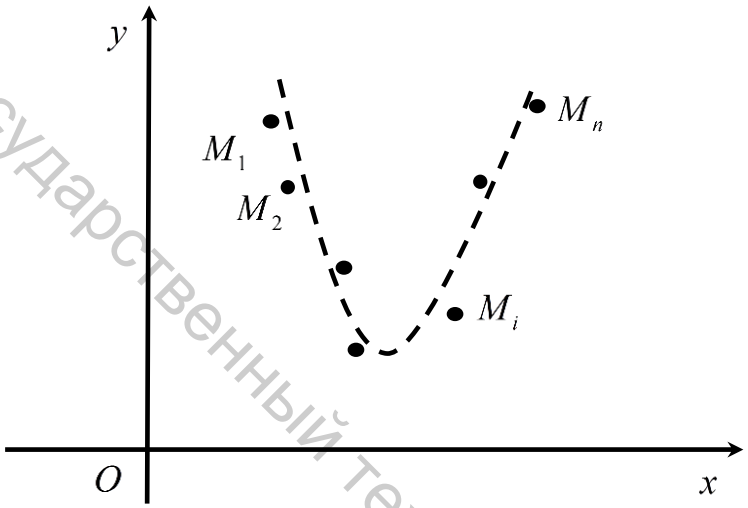

Рисунок 2.2.3 – Экспериментальные точки и линия эмпирической функции, определённой в пункте 2.2.2

Из точечной диаграммы видим, что экспериментальные точки располагаются вдоль некоторой линии, которая напоминает участок параболы. Следовательно, в качестве аппроксимирующей функции можно выбрать параболу вида $y = ax^2 + bx + c$. Подберём параметры a, b и c таким образом, чтобы сумма квадратов отклонений аппроксимирующей функции $y = ax^2 + bx + c$ от экспериментальных значений был наименьшим.

Представим равенство $y = ax^2 + bx + c$ в виде

$$ax^2 + bx + c - y = 0. \qquad (2.2.6)$$

Точки $M_i(x_i, y_i)$ принадлежат искомой параболе с определённой погрешностью. Подставляя экспериментальные значения x_i и y_i $\left(i = \overline{1,n}\right)$ в формулу (2.2.6), получаем систему отклонений

Витебский государственный технологический университет

$$\begin{cases} e_1 = ax_1^2 + bx_1 + c - y_1, \\ e_2 = ax_2^2 + bx_2 + c - y_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ e_n = ax_n^2 + bx_n + c - y_n. \end{cases} \tag{2.2.7}$$

По методу наименьших квадратов подберём неизвестные параметры a, b и c таким образом, чтобы полученная величина $S = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 \geq 0$ была наименьшей. Учитывая систему (2.2.7) преобразуем функцию S:

$$S = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(ax_i^2 + bx_i + c - y_i \right)^2 . \tag{2.2.8}$$

Функция трёх переменных $S = S(a,b,c)$ является функцией трёх переменных относительно переменных a, b и c. Чтобы эта функция принимала минимальное значение необходимо частные производные функции по данным переменным приравнять к нулю:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0, \\ \dfrac{\partial S}{\partial c} \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} 2(ax_i^2 + bx_i + c - y_i) \cdot x_i^2 = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} 2(ax_i^2 + bx_i + c - y_i) \cdot x_i = 0, \\ \sum\limits_{i=1}^{n} 2(ax_i^2 + bx_i + c - y_i) \cdot 1 = 0, \end{cases}$$

Преобразуем эту систему уравнений

$$\begin{cases} a \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 + b \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + c \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 y_i, \\ a \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + b \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + c \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i y_i, \\ a \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b \cdot \sum\limits_{i=1}^{n} x_i + c \cdot n = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i. \end{cases} \tag{2.2.9}$$

Решая систему (2.2.9) определяем оптимальные значения неизвестных параметров a, b и c в эмпирической формуле $y = ax^2 + bx + c$. На рисунке 2.2.3 штриховой линией изображён график аппроксимированной функции $y = ax^2 + bx + c$, коэффициенты которой определены из системы (2.1.11).

Витебский государственный технологический университет

Пример 2.2.2. В результате измерений зависимых величин x и y получены следующие данные, которые представлены в виде таблицы

x	-1	0	1	2	3	4	5
y	11,0	1,6	$-1,4$	0,5	4,8	16,0	28,0

Определить вид зависимости между указанными величинами и найти параметры эмпирической формулы.

Решение. Построим в прямоугольной декартовой системе координат точки $M_i(x_i; y_i)$, где $i=\overline{1,7}$, то есть точки $M_1(-1;11)$, $M_2(0;1,6)$, $M_3(1;-1,4)$, $M_4(2;0,5)$, $M_5(3;4,8)$, $M_6(4;16)$, $M_7(5;28)$. Экспериментальные точки M_i изображены на рисунке 2.2.4.

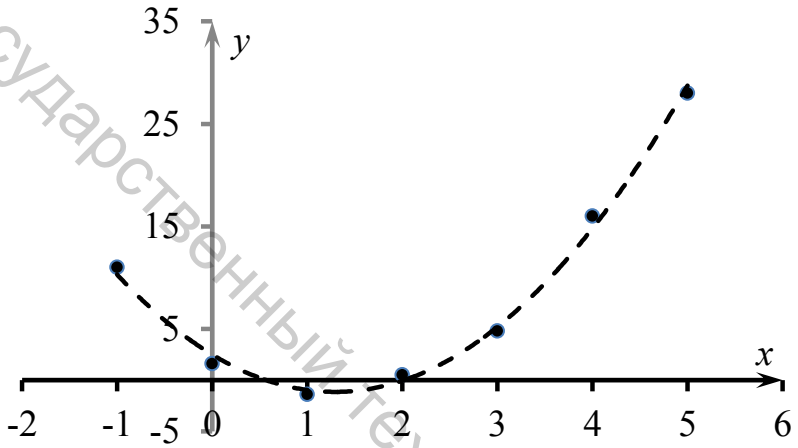

Рисунок 2.2.4 – Экспериментальные точки и линия эмпирической функции, примера 2.2.2.

Из рисунка видим, что экспериментальные точки незначительно отклоняются от некоторой параболы, которая на рисунке 2.2.4 изображена штриховой линией. Поэтому, мы можем предположить, что зависимость между переменными x и y будет выражаться формулой

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Данный вывод подтверждается и приблизительным равенством неразделённых разностей второго порядка, при постоянном шаге: $\Delta^2 y_i = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i$. Найдём неразделённые разности первого порядка: $\Delta y_1 = y_2 - y_1 = -9,4$, $\Delta y_2 = y_3 - y_2 = -3$, $\Delta y_3 = 1,9$, $\Delta y_4 = 4,3$, $\Delta y_5 = 11,2$, $\Delta y_6 = 12$. Вычисляем неразделённые разности второго порядка: $\Delta^2 y_1 = 6,4$, $\Delta^2 y_2 = 4,9$, $\Delta^2 y_3 = 2,4$, $\Delta^2 y_4 = 6,9$, $\Delta^2 y_5 = 0,8$. Первые неразделённые разности монотонно возрастают, а вторые колеблются, в принципе, в сравнительно небольшом промежутке.

Витебский государственный технологический университет

Построим вспомогательную таблицу.

i	x_i	y_i	x_i^2	x_i^3	x_i^4	$x_i \cdot y_i$	$x_i^2 \cdot y_i$
1	-1	11	1	-1	1	-11	11
2	0	1,6	0	0	0	0	0
3	1	-1,4	1	1	1	-1,4	-1,4
4	2	0,5	4	8	16	1	2
5	3	4,8	9	27	81	14,4	43,2
6	4	16	16	64	256	64	256
7	5	28	25	125	625	140	700
$\sum$	14	60,5	56	224	980	207	1010,8

Подставляя полученные значения в систему (2.2.9), приходим к системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 980 \cdot a + \cdot 224 \cdot b + 56 \cdot c = 1010{,}8, \\ 224 \cdot a + 56 \cdot b + 14 \cdot c = 207, \\ 56 \cdot a + 14 \cdot b + 7 \cdot c = 60{,}5. \end{cases}$$

Решаем систему линейных алгебраических уравнений любым методом или с использованием прикладных программ. Решением данной системы являются числа $a = 2{,}1762$, $b = -5{,}6333$ и $c = 2{,}5$.

Таким образом, эмпирическая функция имеет вид

$$y = 2{,}1762 \cdot x^2 - 5{,}6333 \cdot x + 2{,}5.$$

График этой функции изображён на рисунке 2.2.4 штриховой линией.

2.2.3 Определение параметров гиперболической аппроксимирующей функции по методу наименьших квадратов

Предположим необходимо установить зависимость между двумя величинами x и y, результаты измерений которых занесены в таблицу 2.1.1.

Рассмотрим в декартовой системе координат Oxy точки $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, …, $M_n(x_n; y_n)$, которые изображены на рисунке 2.2.5.

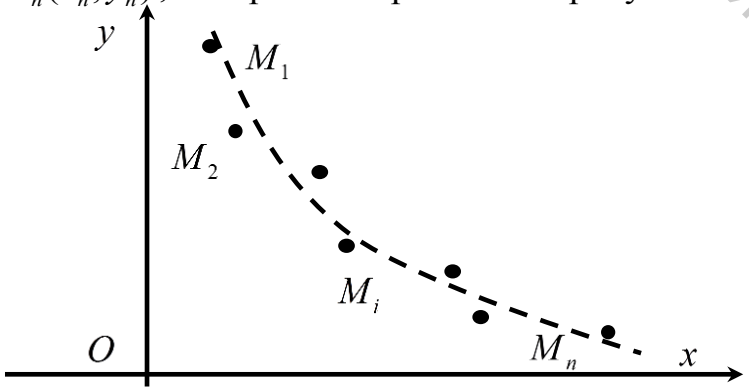

Рисунок 2.2.5 – Экспериментальные точки и линия эмпирической функции, определённой в пункте 2.2.3

Витебский государственный технологический университет

Из точечной диаграммы видим, что экспериментальные точки располагаются вдоль некоторой линии, которая напоминает участок гиперболы. Следовательно, в качестве аппроксимирующей функции можно выбрать гиперболу вида $y=\frac{a}{x}+b$. Подберём параметры a, b и c таким образом, чтобы сумма квадратов отклонений аппроксимирующей функции $y=\frac{a}{x}+b$ от экспериментальных значений был наименьшим.

Введём новую переменную $z=\frac{1}{x}$, тогда уравнение $y=\frac{a}{x}+b$ принимает вид $y=a\cdot z+b$, то есть переменные y и z будут связаны линейной зависимостью с параметрами a и b. В этом случае по методу наименьших квадратов, неизвестные параметры определяются из системы (2.2.5), где вместо экспериментальных точек x_i выбираем точки $z_i=1/x_i$, а $i=\overline{1,n}$. В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i^2}+b\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{y_i}{x_i}, \\ a\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}+b\cdot n=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i, \end{cases} \qquad (2.2.10)$$

решение которой, определяет неизвестные параметры a и b эмпирической гиперболической зависимости.

Выбор гиперболической функции между переменными x и y, может быть объяснён геометрически: если изображение экспериментальных точек $M_i(x_i,y_i)$ группируются вдоль некоторой гиперболы (рисунок 2.2.5), то выбирают гиперболическую зависимость.

Пример 2.2.3. В результате измерений зависимых величин x и y получены следующие данные, которые представлены в виде таблицы

x	1	2	3	6	12
y	9,5	4,5	3,8	1,6	1,4

Определить вид зависимости между указанными величинами и найти параметры эмпирической формулы.

Решение. Построим в прямоугольной декартовой системе координат точки $M_i(x_i;y_i)$, где $i=\overline{1,5}$, то есть точки $M_1(1;9,5)$, $M_2(2;4,5)$, $M_3(3;3,8)$, $M_4(6;1,6)$, $M_5(12;1,4)$. Экспериментальные точки M_i изображены на рисунке 2.2.6.

Витебский государственный технологический университет

Из рисунка видим, что экспериментальные точки незначительно отклоняются от некоторой гиперболы, которая на рисунке 2.2.6 изображена штриховой линией. Поэтому, мы можем предположить, что зависимость между переменными x и y будет выражаться формулой

$$y = a/x + b.$$

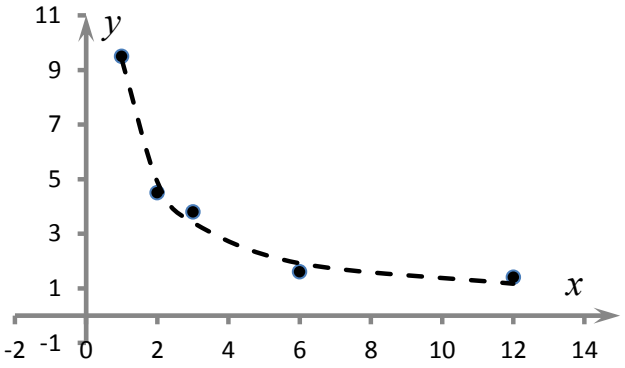

Рисунок 2.2.6 – Экспериментальные точки и линия эмпирической функции, примера 2.2.3

Построим вспомогательную таблицу.

i	x_i	y_i	$1/x_i$	$1/x_i^2$	y_i/x_i
1	1	9,5	1	1	9,5
2	2	4,5	0,5	0,25	2,25
3	3	3,8	0,3333	0,1111	1,26667
4	6	1,6	0,1667	0,0278	0,26667
5	12	1,4	0,0833	0,0069	0,11667
$\sum$	24	20,8	2,0833	1,3958	13,4

Подставляя полученные значения в систему (2.2.10), приходим к системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 1{,}3958 \cdot a + \cdot 2{,}0833 \cdot b = 13{,}4, \\ 2{,}0833 \cdot a + 5 \cdot b = 20{,}8. \end{cases}$$

Решаем систему линейных алгебраических уравнений любым методом или с использованием прикладных программ. Решением данной системы являются числа $a = 8{,}9684$, $b = 0{,}4232$ и $c = 2{,}5$.

Таким образом, эмпирическая функция имеет вид

Витебский государственный технологический университет

$$y = \frac{8,9684}{x} + 0,4232.$$

График этой функции изображён на рисунке 2.2.6 штриховой линией.

2.2.4 Определение параметров экспоненциальной аппроксимирующей функции по методу наименьших квадратов

Предположим необходимо установить зависимость между двумя величинами x и y, результаты измерений которых занесены в таблицу 2.1.1.

Рассмотрим в декартовой системе координат Oxy точки $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, …, $M_n(x_n; y_n)$, которые изображены на рисунке 2.2.7.

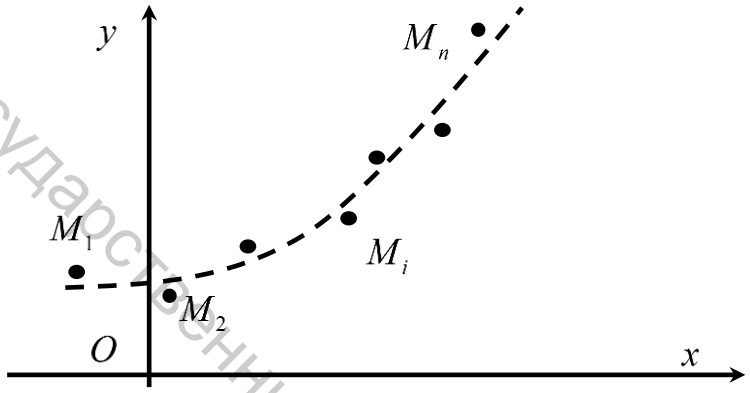

Рисунок 2.2.7 – Экспериментальные точки и линия эмпирической функции, определённой в пункте 2.2.4

Из точечной диаграммы видим, что экспериментальные точки располагаются вдоль некоторой линии, которая напоминает участок показательной функции. Следовательно, в качестве аппроксимирующей функции можно выбрать экспоненциальную функцию вида $y = b \cdot e^{a \cdot x}$. Подберём параметры a и b таким образом, чтобы сумма квадратов отклонений аппроксимирующей функции $y = b \cdot e^{a \cdot x}$ от экспериментальных значений был наименьшим.

Чтобы свести исследование предполагаемой функции к линейному случаю, прологарифмируем выражение $y = b \cdot e^{a \cdot x}$ по основанию e и воспользуемся свойствами логарифма:

$$\ln y = \left(\ln b \cdot e^{a \cdot x}\right) = \ln b + \ln e^{a \cdot x} = \ln b + a \cdot x \cdot \ln e = a \cdot x + \ln b,$$

или

$$\ln y = a \cdot x + \ln b. \qquad (2.2.11)$$

Сравнив формулу (2.2.11) с уравнением линейной зависимостью (2.2.1), делаем вывод о том, что переменные $\ln y$ и x связаны линейной зависимостью с параметрами a и $\ln b$. Для определения неизвестных параметров воспользуемся системой (2.2.5), заменив в ней y_i на величину $\ln y_i$, а параметр b на па-

Витебский государственный технологический университет

раметр $\ln b$. В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных параметров a и $\ln b$:

$$\begin{cases} a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i^2 + \ln b \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \ln y_i, \\ a \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i + n \cdot \ln b = \sum_{i=1}^{n} \ln y_i, \end{cases} \tag{2.2.12}$$

решение которой, определяет неизвестные параметры a и $\ln b$ или b эмпирической экспоненциальной зависимости $y = b \cdot e^{a \cdot x}$.

Выбор экспоненциальной функции между переменными x и y, может быть объяснён геометрически: если изображение экспериментальных точек $M_i(x_i, y_i)$ группируются вдоль некоторой экспоненты (рисунок 2.2.7), то выбирают экспоненциальную зависимость.

Пример 2.2.4. В результате измерений зависимых величин x и y получены следующие данные, которые представлены в виде таблицы

x	-1	-0,5	0	0,5	1
y	0,6	2	2,2	4,3	9,8

Определить вид зависимости между указанными величинами и найти параметры эмпирической формулы.

Решение. Построим в прямоугольной декартовой системе координат точки $M_i(x_i; y_i)$, где $i = \overline{1,5}$, то есть точки $M_1(-1; 0,6)$, $M_2(-0,5; 2,0)$, $M_3(0; 2,2)$, $M_4(0,5; 4,3)$, $M_5(1; 9,8)$. Экспериментальные точки M_i изображены на рисунке 2.2.8.

Из рисунка видим, что экспериментальные точки незначительно отклоняются от некоторой экспоненциальной линии, которая на рисунке 2.2.8 изображена штриховой линией. Поэтому, мы можем предположить, что зависимость между переменными x и y будет выражаться формулой

$$y = b \cdot e^{a \cdot x}.$$

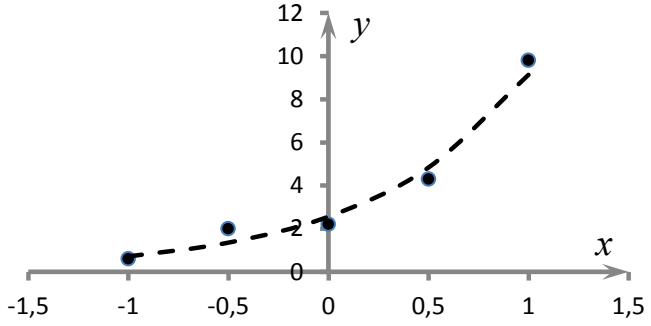

Рисунок 2.2.8 – Экспериментальные точки и линия эмпирической функции, примера 2.2.4

Витебский государственный технологический университет

Для определения неизвестных параметров a и b построим вспомогательную таблицу.

i	x_i	y_i	x_i^2	$\ln y_i$	$x_i \cdot \ln y_i$
1	-1	0,6	1	-0,511	0,51083
2	-0,5	2	0,25	0,6931	-0,3466
3	0	2,2	0	0,7885	0
4	0,5	4,3	0,25	1,4586	0,72931
5	1	9,8	1	2,2824	2,28238
$\sum$	0	18,9	2,5	4,7118	3,17594

Подставляя полученные значения в систему (2.2.12), приходим к системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 2{,}5 \cdot a + 0 \cdot \ln b = 3{,}17594, \\ a \cdot 0 + 5 \cdot \ln b = 4{,}7118, \end{cases}$$

Решаем систему линейных алгебраических уравнений любым методом или с использованием прикладных программ. Решением данной системы являются числа $a = 1{,}2704$, $\ln b = 0{,}9424$ или $b = 2{,}566$.

Таким образом, эмпирическая функция имеет вид

$$y = 2{,}566 \cdot e^{1{,}2704 \cdot x}.$$

График этой функции изображён на рисунке 2.2.8 штриховой линией.

2.2.5 Определение параметров логарифмической аппроксимирующей функции по методу наименьших квадратов

Предположим необходимо установить зависимость между двумя величинами x и y, результаты измерений которых занесены в таблицу 2.1.1.

Рассмотрим в декартовой системе координат Oxy точки $M_1(x_1; y_1)$, $M_2(x_2; y_2)$, …, $M_n(x_n; y_n)$, которые изображены на рисунке 2.1.10.

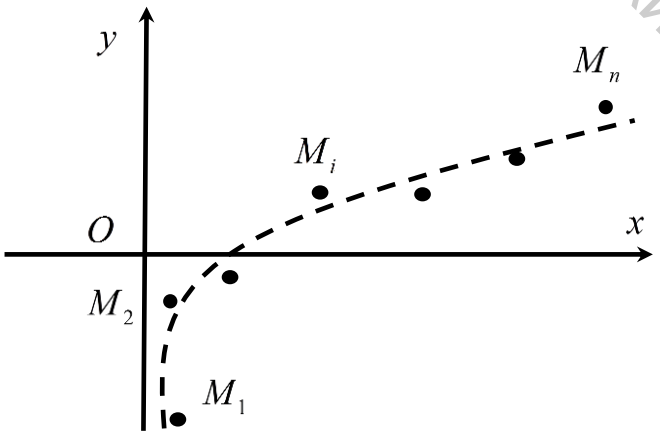

Рисунок 2.2.9 – Экспериментальные точки и линия эмпирической функции, определённой в пункте 2.2.5

Витебский государственный технологический университет

Из точечной диаграммы видим, что экспериментальные точки располагаются вдоль некоторой линии, которая напоминает участок логарифмической функции. Следовательно, в качестве аппроксимирующей функции можно выбрать экспоненциальную функцию вида $y = a \cdot \ln x + b$. Подберём параметры a и b таким образом, чтобы сумма квадратов отклонений $S(a;b) = \sum_{i=1}^{n} \left(a \cdot \ln x_i + b - y_i \right)^2$ аппроксимирующей функции $y = a \cdot \ln x + b$ от экспериментальных значений был наименьшим.

Сравнив формулу $y = a \cdot \ln x + b$ с уравнением линейной зависимостью (2.2.1), делаем вывод о том, что переменные y и $\ln x$ связаны линейной зависимостью с параметрами a и b. Для определения неизвестных параметров воспользуемся системой (2.2.5), заменив в ней x_i на величину $\ln x_i$. В результате получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных параметров a и $\ln b$:

$$\begin{cases} a \cdot \sum_{i=1}^{n} \ln^2 x_i + b \cdot \sum_{i=1}^{n} \ln x_i = \sum_{i=1}^{n} (y_i \cdot \ln x_i), \\ a \cdot \sum_{i=1}^{n} \ln x_i + b \cdot n = \sum_{i=1}^{n} y_i, \end{cases} \tag{2.2.13}$$

решение которой, определяет неизвестные параметры a и b эмпирической логарифмической зависимости $y = a \cdot \ln x + b$.

Выбор логарифмической функции между переменными x и y, может быть объяснён геометрически: если изображение экспериментальных точек $M_i(x_i, y_i)$ группируются вдоль графика некоторой логарифмической функции (рисунок 2.2.9), то выбирают логарифмическую зависимость.

Пример 2.2.5. В результате измерений зависимых величин x и y получены следующие данные, которые представлены в виде таблицы

x	1	2	3	4	5
y	-3,6	1,1	1,9	4,4	4,6

Определить вид зависимости между указанными величинами и найти параметры эмпирической формулы.

Решение. Построим в прямоугольной декартовой системе координат точки $M_i(x_i; y_i)$, где $i = \overline{1,5}$, то есть точки $M_1(1; -3,6)$, $M_2(2; 1,1)$, $M_3(3; 1,9)$, $M_4(4; 4,4)$, $M_5(5; 4,6)$. Экспериментальные точки M_i изображены на рисунке 2.2.10.

Витебский государственный технологический университет

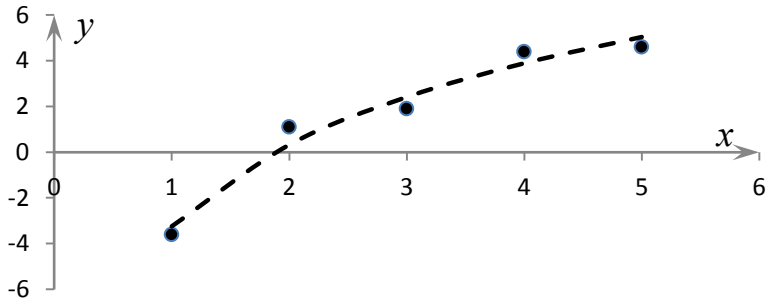

Рисунок 2.2.10 – Экспериментальные точки и линия эмпирической функции, примера 2.2.5

Построим вспомогательную таблицу.

i	x_i	y_i	$\ln x_i$	$\ln^2 x_i$	$y_i \cdot \ln x_i$
1	1	-3,6	0	0	0
2	2	1,1	0,6931	0,4805	0,76246
3	3	1,9	1,0986	1,2069	2,08736
4	4	4,4	1,3863	1,9218	6,0997
5	5	4,6	1,6094	2,5903	7,40341
$\sum$	15	8,4	4,7875	6,1995	16,3529

Подставляя полученные значения в систему (2.2.13), приходим к системе линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} 6{,}1995 \cdot a + \cdot 4{,}7875 \cdot b = 16{,}3529, \\ 4{,}7875 \cdot a + 5 \cdot b = 8{,}4. \end{cases}$$

Решаем систему линейных алгебраических уравнений любым методом или с использованием прикладных программ. Решением данной системы являются числа $a = 5{,}1439$ и $b = -3{,}2453$.

Таким образом, эмпирическая функция имеет вид

$$y = y = 5{,}1439 \cdot \ln x - 3{,}2453.$$

График этой функции изображён на рисунке 2.2.10 штриховой линией.

2.2.6 Задания для решения на практических занятиях

2.2.6.1 При исследовании зависимости длины s (в *метрах*) тормозного пути от скорости движения v (км / ч) автомобиля получены следующие экспериментальные данные:

s	10	15	20	25	30	35	40
v	7,5	8,8	9,8	12,5	15	20	27

Определить вид аппроксимирующей функции.

Витебский государственный технологический университет

2.2.6.2 Равноточные измерения некоторой величины S - торговая площадь магазина, отвечающие ряду значений аргумента T - годовой товарооборот в миллионах рублей. Экспериментальные данные зависимости товарооборота от площади представлены в виде таблицы:

S_i	1	2	3	4	5
T_i	2,2	3,1	4,5	5,5	6,2

Определить наиболее правдоподобный вид зависимости между переменными и найти эмпирическую функцию зависимости для этих переменных.

2.2.6.3 Измерение температуры корпуса работающего агрегата, производимого с интервалом 5 минут, дало следующие результаты:

t	5	10	15	20	25
T	59,3	59,8	60,1	64,9	70,2

Считая, что зависимость между временем измерения температуры и самой температурой корпуса работающего агрегата имеет вид $T = at^2 + bt + c$, найти оценки параметров a, b и c по методу наименьших квадратов.

2.2.6.4 Себестоимость C (у. е.) одного экземпляра книги в зависимости от тиража n (тыс. экз.) характеризуется данными, приведёнными в таблице

n_i	1	2	3	4	5	10	20	30	50	100
C_i	1,25	1,15	1,00	0,80	0,65	0,41	0,36	0,20	0,15	0,1

Применяя способ наименьших квадратов, определить коэффициенты для гиперболической зависимости вида $y = a/x + b$.

2.2.6.5 Конденсатор заряжен до напряжения U_0, отвечающего моменту начала отсчёта времени, после чего он разряжается через некоторое сопротивление. Напряжение U измеряется с округлением до пяти вольт в различные моменты времени. Результаты измерений приведены в таблице:

t_i, (с)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
U_i, (В)	100	75	55	40	30	20	15	10	10	5	5

Известно, что зависимость напряжения U от времени t имеет вид: $U = U_0 \cdot e^{-\omega \cdot t}$. Применяя метод наименьших квадратов, определить коэффициенты U_0 и ω.

2.2.6.6 Станок-автомат выпускает стержни различной длины l. Отклонения Δl от стандартной длины стержня приведены в таблице

l	1	2	3	4	5
Δl	-0,5	0,1	0,9	1,6	1,8

Известно, что зависимость отклонения Δl от длины стержня l имеет вид: $\Delta l = a \cdot \ln l + b$. Применяя метод наименьших квадратов, определить коэффициенты a и b.

2.2.6.7 Равноточные измерения некоторой величины y, отвечающие ряду значений аргумента x, привели к результатам, которые приведены в таблице

Витебский государственный технологический университет

x	0	1	2	3	4
y	-2,4	-5,8	-10,8	-14,3	-19

Установить вид зависимости между величинами x и y (геометрически и с помощью разделённых разностей). Найти параметры эмпирической функции зависимости для этих переменных x и y.

2.2.6.8 Равноточные измерения некоторой величины y, отвечающие ряду значений аргумента x, привели к результатам, которые приведены в таблице

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-7	1,8	6,9	10	8,1	1,1	-5,4

Установить вид зависимости между величинами x и y (геометрически и с помощью разделённых разностей). Найти параметры эмпирической функции зависимости для этих переменных x и y.

2.2.6.9 Пусть зависимость признака y от признака x характеризуется ниже приведённой таблицей

x	2	4	6	8	10
y	5,9	2	1,2	0,9	0,2

Изобразить экспериментальные точки на координатной плоскости. Предположить вид аппроксимирующей функции и, исходя из предположения, определить её параметры.

2.2.6.10 Пусть зависимость признака y от признака x характеризуется ниже приведённой таблицей

x	-2	-1	0	1	2
y	0,5	0,3	1,3	2,3	9,9

Изобразить экспериментальные точки на координатной плоскости. Предположить вид аппроксимирующей функции и, исходя из предположения, определить её параметры.

2.2.6.11 Пусть зависимость признака y от признака x характеризуется ниже приведённой таблицей

x	1	2	3	4	5
y	-0,9	1	1,7	2,1	2,4

Изобразить экспериментальные точки на координатной плоскости. Предположить вид аппроксимирующей функции и, исходя из предположения, определить её параметры.

2.2.6.12 Пусть зависимость признака y от признака x характеризуется ниже приведённой таблицей

x	-1	0	1	2	3
y	-9,8	-3,1	0,5	-1,4	-6,5

Изобразить экспериментальные точки на координатной плоскости. Предположить вид аппроксимирующей функции и, исходя из предположения, определить её параметры.

Витебский государственный технологический университет

2.2.7 Задания для контролируемой самостоятельной работы

2.2.7.1 При исследовании зависимости признака y от признака x получены следующие экспериментальные данные:

x	1	3	5	7	9
y	2,2	7,8	11,6	17,6	21,8

Определить вид зависимости между переменными и найти эмпирическую функцию зависимости для этих переменных.

2.2.7.2 При исследовании зависимости признака y от признака x получены следующие экспериментальные данные:

x	-2	-1	0	1	2	3	4
y	22,3	10,3	4,8	0,6	4,5	9,8	24,6

Определить вид зависимости между переменными и найти эмпирическую функцию зависимости для этих переменных.

2.2.7.3 При исследовании зависимости признака y от признака x получены следующие экспериментальные данные:

x	-5	-4	-3	-2	-1
y	0,8	1	1,2	2,2	5,5

Определить вид зависимости между переменными и найти эмпирическую функцию зависимости для этих переменных.

2.2.7.4 При исследовании зависимости признака y от признака x получены следующие экспериментальные данные:

x	-1	0	1	2	3
y	8,5	4,3	2,5	1,5	0,5

Определить вид зависимости между переменными и найти эмпирическую функцию зависимости для этих переменных.

2.2.7.5 При исследовании зависимости признака y от признака x получены следующие экспериментальные данные:

x	1	2	3	4	5
y	-1,5	1,3	2,5	3,2	3,8

Определить вид зависимости между переменными и найти эмпирическую функцию зависимости для этих переменных.

2.2.8 Вопросы для самоконтроля

1) Как определить параметры линейной аппроксимирующей функции по методу наименьших квадратов?

2) Как определить параметры квадратичной аппроксимирующей функции по методу наименьших квадратов?

Витебский государственный технологический университет

3) Как определить параметры гиперболической аппроксимирующей функции по методу наименьших квадратов?

4) Как определить параметры показательной аппроксимирующей функции по методу наименьших квадратов?

5) Как определить параметры логарифмической аппроксимирующей функции по методу наименьших квадратов?

3 УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

3.1 ЗАДАЧИ И УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

3.1.1 Задачи математической физики

Исследование многих задач механики и физики приводят к исследованию дифференциальных уравнений с частными производными второго порядка, которые называются *уравнениями математической физики*. Вывод уравнений математической физики опирается на механические и физические законы. Изучение физического процесса методами математической физики происходит по следующей схеме: математическая формулировка задачи (постановка задачи математической физики); решение задачи и физическая интерпретация решения.

С математической точки зрения решение задач математической физики осуществляется по следующим направлениям:

1) проводим идеализацию процесса, то есть заменяем реальный процесс моделью, которая учитывает лишь наиболее существенные его черты и пренебрегаем рядом второстепенных черт;

2) выбираем функцию, которая характеризует процесс, и основные законы по которому он происходит (принцип Даламбера, закон сохранения энергии, закон Гука, закон Фурье и другие законы);

3) выводим уравнения относительно выбранной функции, то есть, применяя выбранные законы к элементарной части выбранного объекта, получаем некоторое равенство относительно функции, и её производных;

4) получаем дополнительные или краевые условия:

а) граничные условия (по координатам), которые заданы на границе рассматриваемой среды;

б) начальные условия (по времени), которые относятся к моменту времени, с которого начинается изучение процесса.

Пример 3.1.1. Вывести уравнение распространение тепла в изотропном твёрдом теле.

Решение. Температура тела в произвольной точке $M(x,y,z)$ в момент времени t определяется функциональной зависимостью $U=U(x,y,z,t)$. Коли-

Витебский государственный технологический университет

чество тепла ΔQ, проходящий через некоторый элемент поверхности $\Delta\sigma$, лежащий внутри данного тела, определяется по формуле

$$\Delta Q = k \cdot \Delta П \cdot \Delta t, \qquad (3.1.1)$$

где $\Delta П$ - поток вектора $\operatorname{grad} u$ через элемент площади $\Delta\sigma$, а $k(M)$ - коэффициент теплопроводности тела.

Выделим внутри тела произвольный объём V, ограниченный замкнутой гладкой кривой Σ, и составим уравнение теплового баланса для выделенного объёма. Пусть Q_1 - количество тепла, входящего в объём V через поверхность Σ за промежуток времени Δt. Тогда из формулы (3.1.1) следует, что

$$Q_1 = \oiint_{\Sigma} k(M)\left(\operatorname{grad} U, d\sigma\right)dt.$$

Количество тепла Q_2, выделяемого или поглощаемого в объёме V за промежуток времени Δt за счёт имеющихся в этом объёме источников или стоков с плотностью $F(x,y,z,t)$ равно

$$Q_2 = \iiint_V F(x,y,z,t)dvdt = \iiint_V F(x,y,z,t)dxdydzdt.$$

Используя формулу Остроградского – Гаусса, для общего количества тепла, приходящего в объём V за промежуток времени Δt, получаем выражение

$$Q_1 + Q_2 = \iiint_V \operatorname{div}(k \operatorname{grad} U)dvdt + \iiint_V F(M,t)dvdt. \qquad (3.1.2)$$

С другой стороны, на изменение температуры объёма тела V за время Δt на величину $\Delta_t U \approx \dfrac{\partial U(M,t)}{\partial t}\Delta t$ необходимо затратить следующее количество тепла:

$$Q_3 = \iiint_V \Delta_t U \gamma(x,y,z)\rho(x,y,z)dv \approx \iiint_V \gamma\rho\frac{\partial U}{\partial t}dvdt, \qquad (3.1.3)$$

где γ - теплоёмкость вещества, а ρ - его плотность. Так как $Q_3 = Q_1 + Q_2$, то из соотношений (3.1.2) и (3.1.3) получаем справедливость равенства

$$\iiint_V \left(\gamma\rho\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}(k \operatorname{grad} U) - F(M,t)\right)dv = 0.$$

Так как объём V выбран произвольно, а подынтегральная функция непрерывна, то в любой момент времени будет выполняться равенство

$$\gamma\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \operatorname{div}(k \operatorname{grad} U) + F(M,t). \qquad (3.1.4)$$

Уравнение (3.1.4) называется *уравнением теплопроводности неоднородного изотропного тела*. Если тело однородное, то теплоёмкость, плотность и коэффициент теплопроводности принимают постоянные значения, а уравнение (3.1.4) принимает вид

Витебский государственный технологический университет

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) + f(M,t), \qquad (3.1.5)$$

где $a = \sqrt{k/\gamma\rho}$, $f(M,t) = F(M,t)/\gamma\rho$.

Для вычисления температуры тела в любой точке тела и в любой момент времени необходимо знать распределение температуры внутри тела в начальный момент времени (начальное условие) и тепловой режим на границе тела (граничное условие). Точно так же и для решения других задач математической физики необходимо задание *начальных* и *граничных условий*. Под *постановкой задачи* будем подразумевать выбор функции, которая характеризует исследуемый физический процесс, вывод соответствующего этому процессу уравнения, установление граничных условий и формулировка начальных условий.

Пример 3.1.2. Рассмотрим одномерное однородное тело V с теплоизолированной боковой поверхностью, то есть тонкий стержень, который расположен вдоль оси абсцисс $(0 \le x \le l)$, причём его начальная температура есть некоторая функция от длины стержня x, а на концы стержня подаётся извне заданный тепловой поток. Поставить задачу об определении температуры заданного однородного изотропного стержня.

Решение. Температура стержня зависит только от координаты точки $x \in [0;l]$ и времени t, то есть температура стержня выражается функцией $U = U(x,t)$. Так как внутри стержня источники тепла отсутствуют, то количество поглощаемого или выделяемого тепла за единицу времени в единице объёма, то есть плотность источников или стоков равна нулю, то есть $F(M,t) \equiv 0$. Поэтому уравнение (3.1.5) принимает вид $\dfrac{\partial U(x,t)}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}$, где $a^2 = \dfrac{k}{\gamma\rho}$.

При решении полученного уравнения в частных производных необходимо учитывать начальное условие $U(x,0) = \psi(x)$, где $\psi(x)$ - заданная функция, а $x \in [0;l]$, при этом граничные условия имеют вид

$$U'_x(0,t) = -\frac{1}{k\sigma}\varphi_1(t), \quad U'_x(l,t) = \frac{1}{k\sigma}\varphi_2(t), \quad 0 < t < +\infty,$$

где σ - площадь поперечного сечения стержня, $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ - тепловые потоки в стержень через его концы. Таким образом, поставим задачу примера 3.1.2.

Найти решение $U(x,t)$ *дифференциального уравнения*

$$\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2}, \quad a^2 = \frac{k}{\gamma \cdot \rho}, \quad 0 \le x \le l, \quad 0 < t < +\infty, \qquad (3.1.6)$$

удовлетворяющее начальным условиям:

$$U(x,0) = \psi(x),$$

и *граничным или краевым условиям*:

Витебский государственный технологический университет

$$U'_x(0,t) = -\frac{1}{k\sigma}\varphi_1(t), \quad U'_x(l,t) = \frac{1}{k\sigma}\varphi_2(t).$$

Задача, которая рассмотрена в примере, относится к так называемым *смешанным задачам*, в которых используются как начальные, так и граничные условия, при этом приведённые граничные условия называются *условиями второго рода*.

Рассматриваются также задачи с *условиями первого рода*

$$U(0,t) = \psi_1(t), \quad U(l,t) = \psi_2(t)$$

и с *условиями третьего рода*

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \delta U\right)\Big|_{x=0} = \psi_1(t), \quad \left(\frac{\partial U}{\partial x} + \delta U\right)\Big|_{x=l} = \psi_2(t).$$

Кроме смешанной задачи часто используется *задача Коши*, которая состоит в нахождении решения $U(x,t)$ в области $-\infty < x < +\infty$, $0 < t < +\infty$, которое удовлетворяет только начальным условиям.

3.1.2 Приведение дифференциальных уравнений математической физики к каноническому виду

В данном параграфе рассмотрим только дифференциальные уравнения второго порядка с двумя неизвестными переменными x и y, и с постоянными коэффициентами. Если $F = F(x, y, U, U'_x, U'_y)$ заданная функция своих аргументов, $U = U(x, y)$ - неизвестная функция, а a_{11}, a_{12}, a_{22} - постоянные коэффициенты, то линейное относительно старших производных уравнение имеет вид

$$a_{11}U''_{xx} + 2a_{12}U''_{xy} + a_{22}U''_{yy} + F(x, y, U, U'_x, U'_y) = 0.$$

Линейное уравнение можно представить в виде

$$a_{11}U''_{xx} + 2a_{12}U''_{xy} + a_{22}U''_{yy} + a_{13}U'_x + a_{23}U'_y + a_{33}U + f(x,y) = 0, \quad (3.1.7)$$

где a_{ij} - постоянные коэффициенты, а $f(x,y)$ - заданная функция.

Уравнению (3.1.7) соответствует квадратичная форма

$$P(t_1, t_2) = a_{11}t_1^2 + 2a_{12}t_2t_2 + a_{22}t_2^2, \quad (3.1.8)$$

с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad a_{12} = a_{21}.$$

Найдём собственные значения квадратичной формы, для чего составляем характеристическое уравнение

$$|A - \lambda| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0,$$

решением, которого являются числа λ_1 и λ_2. Для каждого собственного значения определяем собственные векторы $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$, а затем нормируем их: $\vec{e}_1^{\,0} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}$,

Витебский государственный технологический университет

$\vec{e}_2^{\,0} = \begin{pmatrix} \beta \\ \delta \end{pmatrix}$. Составляем матрицу перехода $T = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. Делаем замену переменных $x = \alpha \cdot \xi + \beta \cdot \eta,\ y = \gamma \cdot \xi + \delta \cdot \eta$.

Дифференциальное уравнение (3.1.7) классифицируется в зависимости от собственных значений λ_1 и λ_2 матрицы A квадратичной формы (3.1.8).

1. Уравнение (3.1.7) является уравнением *эллиптического типа*, если $\lambda_1 \neq 0$ и $\lambda_2 \neq 0$ имеют одинаковый знак, или $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0$. В этом случае уравнение (3.1.7) линейной заменой переменной сводится к уравнению

$$\lambda_1 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + \lambda_2 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + f_1(\xi, \eta, U, U'_\xi, U'_\eta) = 0,$$

где ξ, η - новые переменные, а f_1 - известная функция.

2. Уравнение (3.1.7) является уравнением *гиперболического типа*, если $\lambda_1 \neq 0$ и $\lambda_2 \neq 0$ имеют разные знаки, или $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 < 0$. В этом случае уравнение (3.1.7) линейной заменой переменной сводится к уравнению

$$\lambda_1 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} - \lambda_2 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + f_2(\xi, \eta, U, U'_\xi, U'_\eta) = 0,$$

где ξ, η - новые переменные, а f_2 - известная функция.

3. Уравнение (3.1.7) является уравнением параболического типа, если одно из чисел λ_1 или λ_2 равны нулю, или $|A| = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = 0$. В этом случае уравнение (3.1.7) линейной заменой переменной сводятся к уравнению

$$\lambda_1 \frac{\partial^2 U}{\partial \xi^2} + f_3(\xi, \eta, U, U'_\xi, U'_\eta) = 0 \text{ или } \lambda_2 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + f_4(\xi, \eta, U, U'_\xi, U'_\eta) = 0,$$

где ξ, η - новые переменные, а f_3, f_4 - известные функции.

На практике сведение уравнения (3.1.7) к каноническому виду с помощью линейной замены осуществляется по схеме приведения квадратичной формы (3.1.8) ортогональным преобразованием к каноническому виду.

Пример 3.1.3. Привести к каноническому виду дифференциальное уравнение $U''_{xx} - 6 \cdot U''_{xy} + 9 \cdot U''_{yy} + 5 \cdot U'_x - 15 \cdot U'_y = 0$.

Решение. Для дифференциального уравнения составляем квадратичную часть уравнения $P(t_1, t_2) = t_1^2 - 6 \cdot t_1 \cdot t_2 + 9t_2^2$. Матрицу квадратичной части записываем в виде $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$, причём $|A| = 0$, то есть заданное уравнение имеет параболический тип.

Витебский государственный технологический университет

Находим собственные значения $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 10$, а также нормированные собственные векторы $\vec{e}_1^{\,0} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} \end{pmatrix}$ и $\vec{e}_2^{\,0} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{10} \\ -3/\sqrt{10} \end{pmatrix}$, матицы квадратичной части. Вводим замену

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\xi/\sqrt{10} + \eta/\sqrt{10} \\ \xi/\sqrt{10} - 3\eta/\sqrt{10} \end{pmatrix},$$

то есть $x = 3\xi/\sqrt{10} + \eta/\sqrt{10}$, $y = \xi/\sqrt{10} - 3\eta/\sqrt{10}$.

Отсюда

$$\xi = 3x/\sqrt{10} + y/\sqrt{10},\ \eta = x/\sqrt{10} - 3y/\sqrt{10}. \qquad (3.1.9)$$

Преобразуя производные заданного уравнения к новым переменным ξ и η. С учётом равенства (3.1.9) получаем:

$$\begin{aligned} U'_x &= U'_\xi \cdot \xi'_x + U'_\eta \cdot \eta'_x = \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot U'_\xi + \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot U'_\eta; \\ U'_y &= U'_\xi \cdot \xi'_t + U'_\eta \cdot \eta'_y = \frac{1}{\sqrt{10}} \cdot U'_\xi - \frac{3}{\sqrt{10}} \cdot U'_\eta. \end{aligned} \qquad (3.1.10)$$

При замене переменных использовали равенство $\begin{pmatrix} U'_x \\ U'_y \end{pmatrix} = T \cdot \begin{pmatrix} U'_\xi \\ U'_\eta \end{pmatrix}$.

Подставим все производные (3.1.10) в исходное уравнение и, учитывая, что его квадратичная часть равна $10 \cdot U''_{\eta\eta}$, получим его в каноническом виде:

$$U''_{\eta\eta} + \frac{\sqrt{5}}{2} U'_\eta = 0$$

Проверкой убеждаемся, что решением этого уравнения является функция

$$U(\xi, \eta) = \psi_1(\xi) \cdot e^{-\sqrt{5}\eta/\sqrt{2}} + \psi_2(\xi),$$

где $\psi_1(\xi)$ и $\psi_1(\xi)$ - произвольные функции.

Подставив ξ и η из равенств (3.1.9), окончательно находим искомое решение заданного уравнения:

$$U(x, y) = \psi_1(3x/\sqrt{10} + y/\sqrt{10}) \cdot e^{(3y-x)/2} + \psi_2(3x/\sqrt{10} + y/\sqrt{10}).$$

Рассмотренный метод приведения уравнения (3.1.7) к каноническому виду и решение полученного уравнения носит названия *метода характеристик*.

Так как для каждого типа канонических уравнений разработаны определённые методы как аналитического, так и численного решения, то задача приведения уравнения (3.1.7) к каноническому виду представляет практический интерес.

Если в уравнении (3.1.7) коэффициенты a_{ij} переменные, то для него выделяются области эллиптичности, гиперболичности и параболичности.

Витебский государственный технологический университет

Пример 3.1.4. Найти области эллиптичности, гиперболичности и параболичности уравнения $y \cdot U''_{xx} + x \cdot U''_{yy} = 0$.

Решение. Матрица квадратичной части уравнения $A = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix}$ имеет собственные значения $\lambda_1 = x$ и $\lambda_2 = y$. Поэтому дифференциальное уравнение при значениях $xy > 0$ является эллиптическим, при значениях $xy < 0$ - гиперболическим, а при значениях $x = 0$ или $y = 0$ - параболическим.

3.1.3 Задания для решения на практических занятиях

3.1.3.1 Используя уравнение (3.1.6), поставить задачу о распределении температуры внутри однородного изотропного стержня, начальная температура которого равна U_0 при свободном внутреннем теплообмене, если в левом конце (при значении $x = 0$) поддерживается постоянная температура U_0, а через правый конец (при значении $x = l > 0$) происходит теплообмен с окружающей средой, температура которой задана функцией $\psi(x)$.

3.1.3.2 Упругий прямолинейный однородный стержень длиной l и постоянной площадью сечения S выведен из состояния покоя тем, что его поперечным сечениям в момент $t = 0$ сообщены малые продольные смещения и скорости. Предполагая, что во время движения поперечные сечения остаются параллельными плоскости, перпендикулярной к оси стержня, поставить задачу для определения малых продольных колебаний стержня при значении $t > 0$.

Рассмотреть случаи, когда концы стержня: а) закреплены жестко, б) двигаются в продольном направлении по заданным законам, в) свободны, г) закреплены упруго, т. е. каждый из концов испытывает со стороны заделки продольную силу, пропорциональную смещению и направленную противоположно смещению. Влияние силы тяжести на колебание частиц считать пренебрежимо малым по сравнению с влиянием упругих сил, поэтому действием силы тяжести пренебречь.

3.1.3.3 Составить уравнение продольных колебаний стержня с переменной площадью поперечного сечения $S(x)$, считая материал стержня однородным.

3.1.3.4 На упругий однородный прямолинейный стержень, один конец которого жестко закреплен, а другой свободен, действует внешняя сила, направленная вдоль оси стержня, причем объемная плотность ее равна $p(x,t)$. Поставить задачу о малых продольных колебаниях стержня, если при значении $t = 0$ поперечные сечения были неподвижны и находились в не отклонённом положении.

3.1.3.5 Рассматривая однородную двухпроводную линию равномерно распределённых индуктивностей L, сопротивлений R, ёмкостей C и утечки

Витебский государственный технологический университет

G, которые считаются отнесёнными к единице длины, вывести волновое уравнение, называемое также телеграфным уравнением.

3.1.3.6 Определить тип уравнений и привести их к каноническому виду.

а) $U''_{xx}+2\cdot U''_{xy}-3\cdot U''_{yy}+2\cdot U'_x+6\cdot U'_y=0$;

б) $U''_{xx}-4\cdot U''_{xy}-3\cdot U''_{yy}+2\cdot U'_x-3\cdot U'_y=0$;

в) $U''_{xx}-10\cdot U''_{xy}+25\cdot U''_{yy}+4\cdot U'_x-20\cdot U'_y=0$;

г) $U''_{xx}-9\cdot U''_{xy}+16\cdot U''_{yy}+3\cdot U'_x-12\cdot U'_y=0$;

д) $U''_{xx}+U''_{xy}+U''_{yy}+0{,}5\cdot U'_x+0{,}5\cdot U'_y=0$;

е) $U''_{xx}-4\cdot U''_{xy}-3\cdot U''_{yy}=0$.

3.1.3.7 Определить тип уравнений и привести их к каноническому виду.

а) $U''_{xy}+x^2\cdot U''_{yy}+y\cdot U'_x=0$;

б) $\left(1+x^2\right)\cdot U''_{xx}+\left(1+y^2\right)\cdot U''_{yy}+x\cdot U'_x+y\cdot U'_y=0$;

в) $y^2\cdot U''_{xx}+2\cdot x\cdot y\cdot U''_{xy}+x^2\cdot U''_{yy}+2\cdot x\cdot U'_x+2\cdot y\cdot U'_y=0$.

3.1.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

3.1.4.1 На границе бесконечного изотропного однородного цилиндра, направляющая которого – кривая L лежит в плоскости, перпендикулярной образующей, поддерживается заданная температура, поддерживается заданная температура, зависящая только от положения точки на кривой L. Используя уравнение (3.1.5), поставить задачу об установившемся стационарном распределении температуры внутри цилиндра.

3.1.4.2 Поставить задачу о продольных колебаниях однородного стержня в среде с сопротивлением, пропорциональным скорости, если конец $x=0$ закреплен жестко, а конец $x=l$ свободен. Начальные отклонения равны $\varphi(x)$, а начальные скорости отсутствуют.

Указание. При выводе уравнения нужно учесть силу трения, причем сила, действующая на единицу поверхности, равна $-kU_t$, где k - коэффициент трения.

3.1.4.3 Используя уравнение задачи 3.1.3.5 поставить задачу об отыскании закона изменения напряжения и силы тока в длинной линии $\left(0\le x\le\infty\right)$ без потерь (то есть $R=G=0$), если известны начальные напряжение $\varphi(x)$, сила тока $i(x)$, а напряжение в точке $x=0$ постоянно и равно E_0.

3.1.4.4 Определить тип уравнений и привести их к каноническому виду.

а) $U''_{xx}+3\cdot U''_{xy}+U''_{yy}+U'_x=0$;

б) $U''_{xx}-U''_{yy}-2\cdot U'_x-2\cdot U'_y=0$;

в) $U''_{xx}-12\cdot U''_{xy}+36\cdot U''_{yy}+2\cdot U'_x-12\cdot U'_y=0$.

Витебский государственный технологический университет

3.1.5 Вопросы для самоконтроля

1) Какие дифференциальные уравнения называются уравнениями математической физики?

2) Что подразумевается под фразой: постановка задачи математической физики?

3) Какие задачи математической физики называются смешанными?

4) Какие задачи математической физики называются задачами Коши?

5) Сформулируйте задачи математической физики с условиями первого второго и третьего рода.

6) Запишите уравнение теплопроводности неоднородного изотропного тела.

7) Запишите уравнение теплопроводности однородного изотропного тела.

8) Запишите уравнение теплопроводности однородного изотропного стержня.

9) Запишите уравнение свободных колебаний однородной струны.

10) Запишите волновое (телеграфное) уравнение двухпроводной линии?

11) Какой вид имеет квадратичная форма дифференциального уравнения $a_{11}U''_{xx} + 2 \cdot a_{12} \cdot U''_{xy} + a_{22} \cdot U''_{yy} + a_{13} \cdot U'_x + a_{23} \cdot U'_y + a_{33} \cdot U + f(x,y) = 0$?

12) Запишите характеристическое уравнение для квадратичной формы линейного дифференциального уравнения второго порядка в частных производных.

13) Как определяются нормированные собственные векторы, которые соответствуют собственным значениям квадратичной формы дифференциального уравнения?

14) Какие условия определяют дифференциальные уравнения эллиптического, гиперболического и параболического типа?

15) Запишите канонический вид дифференциального уравнения эллиптического, гиперболического и параболического типа.

3.2 АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

3.2.1 Метод Даламбера решения уравнений математической физики

Одним из широко используемых методов решения уравнения колебаний струны является метод характеристик, называемый в этом случае *методом Даламбера*.

Рассмотрим задачу Коши для бесконечной однородной струны при свободных колебаниях: найти решение волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2},\ 0 < t < +\infty;\ -\infty < x < +\infty, \qquad (3.2.1)$$

при начальных условиях

$$U(x,0) = \psi(x);\ U'_t(x,0) = \Phi(x). \qquad (3.2.2)$$

Витебский государственный технологический университет

Для уравнения (3.2.1) уравнения характеристик определяется из соотношения $dx^2 - a^2 dt^2 = 0$ или $dx \mp a\,dt = 0$. Общими интегралами этих уравнений являются прямые $x + at = C_1$ и $x - at = C_2$, где C_1 и C_2 - произвольные константы. Тогда с помощью замены переменной $\xi = x + at$, $\eta = x - at$ уравнение (3.2.1) приводим к дифференциальному уравнению вида $\dfrac{\partial^2 U}{\partial \xi \partial \eta} = 0$. Найдём решение этого дифференциального уравнения в частных производных второго порядка.

Уравнение $U''_{\xi\eta} = 0$ равносильно уравнению $\left(U'_\eta\right)'_\xi = 0$, из которого следует, что производная U'_η зависит только от переменной η, то есть $U'_\eta = \varphi(\eta)$, где $\varphi(\eta)$ - некоторая произвольная функция, зависящая от переменной η. Решение последнего уравнения записываем в виде $U = \int \varphi(\eta) d\eta + f_1(\xi) = f_2(\eta) + f_1(\xi)$, где $f_1(\xi)$ - произвольная функция, зависящая от переменной ξ, а функция $f_2(y)$ совпадает с функцией, совпадающей с функций $\int \varphi(\eta) d\eta$.

Таким образом, общим решением уравнения $U''_{\xi\eta} = 0$ является любая функция вида $U = f_1(\xi) + f_2(\eta)$, где $f_1(\xi)$ и $f_2(\eta)$ - произвольные дифференцируемые функции переменных ξ и η. Тогда решением уравнения (3.2.1) является функция

$$U(x,t) = f_1(x + at) + f_2(x - at), \tag{3.2.3}$$

где f_1 и f_2 - произвольные дважды дифференцируемые функции.

Определим функции f_1 и f_2, исходя из начальных условий (3.2.2). При равенстве $t = 0$ из равенств (3.2.3) и (3.2.2) имеем

$$f_1(x) + f_2(x) = \psi(x). \tag{3.2.4}$$

Аналогично, из равенств (3.2.3) и производной $U'(x,t) = a \cdot f_1(x) - a \cdot f_2(x)$ имеем

$$a \cdot f_1(x) - a \cdot f_2(x) = \Phi(x). \tag{3.2.5}$$

Интегрируя равенство (3.2.5) от нуля до x, находим, что

$$a \cdot f_1(x) - a \cdot f_2(x) = \int_0^x \Phi(t) + C, \tag{3.2.6}$$

где C - произвольная постоянная.

Решая совместно уравнения (3.2.4) и (3.2.6) относительно функций f_1 и f_2, находим эти неизвестные функции:

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\psi(x) + \frac{1}{2a}\int_0^x \Phi(t) + \frac{1}{2}C;$$

$$f_1(x) = \frac{1}{2}\psi(x) + -\frac{1}{2a}\int_0^x \Phi(t) - \frac{1}{2}C.$$

Витебский государственный технологический университет

Отсюда и из формулы (3.2.3) получаем искомое решение задачи Коши для бесконечной струны со свободными колебаниями:

$$U(x,t)=\frac{f(x+at)+f(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_0^{x+at}\Phi(t)dt-\frac{1}{2a}\int_0^{x-at}\Phi(t)dt,$$

или

$$U(x,t)=\frac{f(x+at)+f(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Phi(t)dt. \qquad (3.2.7)$$

Формула (3.2.7) называется *формулой Даламбера для бесконечной струны*.

Пример 3.2.1. Найти форму бесконечной однородной струны, если начальная форма струны имеет вид прямой $\psi(x)=2x$, а начальная скорость равна $\Phi(x)=\sin x$.

Решение. По формуле (3.2.7) находим формулу бесконечной однородной струны

$$U(x,t)=\frac{2x+2at+2x-2at}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\sin t dt=$$

$$=2x+\frac{1}{2a}\left(-\cos(x+at)+\cos(x-at)\right)=2x+\frac{1}{a}\sin at\sin x.$$

Пример 3.2.2. Найти решение уравнения $\frac{\partial^2U}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2U}{\partial x^2}$, $0\le x<+\infty$, $0<t<+\infty$, удовлетворяющее начальным условиям $U(x,0)=x^2$, $U(0,t)=0$, $\frac{\partial U(x,0)}{\partial t}=\sin^2 x$.

Решение. Продолжим функцию $\psi(x)=x^2$ и $\Phi(x)=\sin^2 x$ на отрицательную полуось нечётным образом:

$$\psi_1(x)=\begin{cases}x^2, \text{ при } x\ge 0,\\ -x^2, \text{ при } x<0;\end{cases}\qquad \Phi_1(x)=\begin{cases}\sin^2 x, \text{ при } x\ge 0,\\ -\sin^2 x, \text{ при } x<0.\end{cases}$$

Тогда по формуле Даламбера (3.2.7) решение дифференциального запишется следующим образом:

$$U(x,t)=\frac{f(x+at)+f(x-at)}{2}+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Phi(t)dt=$$

Витебский государственный технологический университет

$$= \begin{cases} \dfrac{\left((x+at)^2+(x-at)^2\right)}{2} + \dfrac{1}{2a}\displaystyle\int_{x-at}^{x+at} \sin^2 z\, dz, \; при\; t \le \dfrac{x}{a}, \\ \dfrac{\left((x+at)^2-(x-at)^2\right)}{2} + \dfrac{1}{2a}\left(\displaystyle\int_{0}^{x+at} \sin^2 z\, dz - \int_{x-at}^{0} \sin^2 z\, dz\right), \; при\; t > \dfrac{x}{a} > 0, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} x^2 + a^2t^2 + 0{,}5t - 0{,}25a^{-1}\cos 2x \sin 2at, \; при\; t \le x/a, \\ 2axt + 0{,}5a^{-1}x - 0{,}25a^{-1}\sin 2x \cos 2at, \; при\; t > x/a > 0. \end{cases}$$

3.2.2 Метод Фурье решения уравнений математической физики

Метод Фурье, широко используемый при решении ряда задач математической физики, состоит в следующем. Искомая функция, зависящая от нескольких переменных, находится в виде произведения функций, каждая из которых зависит лишь от одной переменной. После подстановки этого произведения в исходное уравнение получается несколько обыкновенных дифференциальных уравнений, часть из которых вместе с краевыми условиями исходной задачи являются краевыми задачами Штурма – Лиувилля. Искомое решение представляется рядом по произведениям собственных функций этих задач Штурма – Лиувилля.

Рассмотрим задачу колебаний конечной струны, которая закреплена в точках $x = 0$ и $x = l$. В математической постановке она состоит в решении волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \; 0 \le x \le l, \; t > 0, \tag{3.2.9}$$

при начальных условиях

$$U(x,0) = \psi(x); \; U_t'(x,0) = \Phi(x), \; 0 \le x \le l, \tag{3.2.10}$$

и при краевых условиях

$$U(0,t) = U(l,t) = 0, \; t \ge 0. \tag{3.2.11}$$

По *методу Фурье разделения переменных* ненулевое частное решение указанной задачи находим в виде

$$U(x,t) = M(x) \cdot N(t), \tag{3.2.12}$$

где $M = M(x) \ne 0$ и $N = N(t) \ne 0$ - дважды дифференцируемые функции своих аргументов.

Подставляя выражение (3.2.12) в уравнение (3.2.9), получаем

$$M(x) \cdot N''(t) = a^2 \cdot M''(x) \cdot N(t),$$

или

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{N''(t)}{N(t)} = \frac{M''(x)}{M(x)}. \tag{3.2.13}$$

Левая часть последнего равенства зависит только от переменной t, а правая только от переменной x. Поэтому если зафиксировать, например, $t \ge 0$, то

Витебский государственный технологический университет

отношение $M''(x)/M(x)$ будет константой при любых $x \in [0,l]$. Наоборот, при фиксированном значении $x \in [0,l]$ отношение $N''(t)/\left(a^2 N(t)\right)$ также является константой при любых значениях $t \geq 0$.

Из этого делаем вывод, что оба отношения являются постоянными при любых значения $x \in [0,l]$ и $t \geq 0$, то есть равенство (3.2.13) возможно лишь при условии

$$\frac{1}{a^2} \cdot \frac{N''(t)}{N(t)} = \frac{M''(x)}{M(x)} = -\lambda = \text{Const}.$$

Из последнего равенства переходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} N''(t) + a^2 \cdot \lambda \cdot N(t) = 0; \\ M''(x) + \lambda \cdot M(x) = 0. \end{cases} \tag{3.2.14}$$

Из граничных условий (3.2.11) для функции (3.2.12) имеем:

$$\begin{aligned} U(0,t) = 0 \rightarrow M(0) \cdot N(t) = 0; \\ U(l,t) = 0 \rightarrow M(l) \cdot N(t) = 0. \end{aligned} \tag{3.2.15}$$

Поскольку находится нетривиальное частное решение уравнения (3.2.9), то $N(t) \not\equiv 0$, $\forall t \geq 0$. Поэтому равенства (3.2.15) возможны лишь при условии $M(0) = M(l) = 0$.

Таким образом, задача нахождения функции $M(x) \not\equiv 0$ сводится к следующей краевой задаче: найти нетривиальное решение дифференциального уравнения

$$M''(x) + \lambda \cdot M(x) = 0 \tag{3.2.16}$$

при краевых условиях

$$M(0) = M(l) = 0. \tag{3.2.17}$$

Краевая задача (3.2.16) – (3.2.17) называется *задачей Штурма – Лиувилля*. Числа λ называются *собственными значениями* этой задачи, а отвечающие этим значениям λ нетривиальные решения $M(x)$ - *собственными функциями* задачами Штурма – Лиувилля.

Найдём собственные значения и собственные функции задачи Штурма – Лиувилля. Рассмотрим три случая: $\lambda = 0$, $\lambda < 0$ и $\lambda > 0$.

1. Пусть $\lambda = 0$. Тогда уравнение (3.2.16) имеет вид: $M''(x) = 0$. Оно имеет решение $M(x) = C_1 x + C_2$, где C_1 и C_2 - произвольные постоянные величины. Из граничных условий (3.2.17) следует, что

$$\begin{cases} C_1 \cdot 0 + C_2 = 0; \\ C_1 \cdot l + C_2 = 0; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = 0; \\ C_2 = 0, \end{cases}$$

то есть $M(x) \equiv 0$. Так как находятся нетривиальные решения задачи Штурма – Лиувилля, то значение $\lambda = 0$ не может служить собственным значением данной задачи.

Витебский государственный технологический университет

2. Пусть $\lambda < 0$. В этом случае общим решением дифференциального уравнения (3.2.16) является функция $M(x) = C_1 \cdot e^{\sqrt{-\lambda}\cdot x} + C_2 \cdot e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot x}$. Из граничных условий (3.2.17) следует, что

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 0; \\ C_1 \cdot e^{\sqrt{-\lambda}\cdot l} + C_2 \cdot e^{-\sqrt{-\lambda}\cdot l} = 0; \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C_1 = 0; \\ C_2 = 0, \end{cases}$$

то есть при значении $\lambda < 0$ отличных от нуля решений задачи Штурма – Лиувилля не существует.

3. Пусть $\lambda > 0$. В этом случае общим решением дифференциального уравнения (3.2.16) является функция $M(x) = C_1 \cdot \cos\sqrt{\lambda}\, x + C_2 \cdot \sin\sqrt{\lambda}\, x$.

При значении $x = 0$ получаем $C_1 = 0$, то есть получаем функцию $M(x) = C_2 \cdot \sin\sqrt{\lambda}\, x$. Второе граничное условие даёт $M(l) = C_2 \cdot \sin\sqrt{\lambda}\, l = 0$. В случае $C_2 = 0$ получаем тривиальное решение. Поэтому должно быть $\sin\sqrt{\lambda}\, l = 0$, то есть $\sqrt{\lambda}\, l = k\pi$, $k \in \mathbf{N}$ или $\sqrt{\lambda} = k\pi/l$. Таким образом, получаем нетривиальное решение уравнения (3.2.16): $M(x) = C_2 \cdot \sin k\pi x/l$.

Обозначим через $M_k(x)$ решение, которое соответствует фиксированному значению k, а через A_k - соответствующую константу, то есть

$$M_k(x) = A_k \cdot \sin k\pi x/l. \qquad (3.2.18)$$

Система функций $\{\sin k\pi x/l\}$ является системой собственных функции Штурма – Лиувилля, отвечающим собственным значениям $\lambda = k^2\pi^2/l^2$.

Для найденного значения λ решим первое уравнение системы (3.2.14), которое принимает вид:

$$N''(t) + \frac{k^2\pi^2a^2}{l^2} N(t) = 0.$$

Его общим решением является функция

$$N_k(t) = C_k \cdot \cos\frac{k\pi at}{l} + B_k \cdot \sin\frac{k\pi at}{l},$$

где C_k, B_k - произвольные константы.

Тогда, согласно равенству (3.1.12), частным решением уравнения (3.2.9) является функция

$$U_k(x,t) = \left(a_k \cos\frac{k\pi a}{l} t + b_k \sin\frac{k\pi a}{l} t \right) \cdot \sin\frac{k\pi}{l} x,$$

где $a_k = A_k \cdot C_k$, $b_k = A_k \cdot B_k$ - константы.

Вследствие линейности и однородности волнового уравнения сумма частных решений $U_k(x,t)$ также является его решением, то есть функция

$$U(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\frac{k\pi a}{l} t + b_k \sin\frac{k\pi a}{l} t \right) \cdot \sin\frac{k\pi}{l} x, \qquad (3.2.19)$$

является решением дифференциального уравнения (3.2.9).

Витебский государственный технологический университет

Предположим, что этот ряд сходится и его можно почленно дифференцировать. Тогда из начальных условий (3.2.10) будем иметь:

$$U(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sin\frac{k\pi}{l}x=\psi(x);$$
$$U_t'(x,0)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k\pi a}{l}b_k\sin\frac{k\pi}{l}x=\Phi(x). \qquad (3.2.20)$$

Пусть функции $\psi(x)$ и $\Phi(x)$ разложимы в ряд Фурье по синусам кратных дуг на отрезке $[0,l]$, то есть

$$\psi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\psi_k\sin\frac{k\pi x}{l};\quad \psi_k=\frac{2}{l}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx;$$
$$\Phi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\Phi_k\sin\frac{k\pi x}{l};\quad \Phi_k=\frac{2}{l}\int_0^l\Phi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx;$$

Сравнение этих рядов с формулами (3.2.20) показывает, что для выполнения начальных условий надо положить $a_k=\psi_k$, $b_k=\dfrac{1}{k\pi a}\Phi_k$, то есть

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l\psi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx;$$
$$b_k=\frac{2}{k\pi a}\int_0^l\Phi(x)\sin\frac{k\pi x}{l}dx,\quad k=1,2,... \qquad (3.2.21)$$

Подставив выражение для коэффициентов a_k и b_k в ряд (3.2.19), окончательно найдём решение сформулированной задачи.

Пример 3.2.3. Найти решение уравнения колебания струны, закреплённой в точках $x=0$ и $x=l$, если при значении $t=0$

$$U(x,0)=\psi(x)=A\sin\frac{\pi x}{l};\quad U_t'(x,0)=\Phi(x)=v_0.$$

Решение. Решение задачи определяется рядом (3.2.19). По формулам (3.2.21) определим коэффициенты a_k и b_k:

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l A\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{k\pi x}{l}dx=\begin{cases}A, & k=1;\\ 0, & k>1;\end{cases}$$

$$b_k=\frac{2}{k\pi a}\int_0^l v_0\sin\frac{k\pi x}{l}dx=\begin{cases}0, & k=2n;\\ \dfrac{4v_0l}{(2n+1)^2\pi^2a}, & k=2n+1,\end{cases}\qquad n=0,1,...$$

Следовательно, решением задачи является ряд

$$U(x,t)=A\cos\frac{a\pi}{l}\sin\frac{\pi x}{l}+\frac{4v_0l}{a\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)^2}\sin\frac{a\pi(2n+1)}{l}t\cdot\sin\frac{\pi(2n+1)}{l}x.$$

Витебский государственный технологический университет

3.2.3 Задания для решения на практических занятиях

3.2.3.1 Используя формулу Даламбера найти решение дифференциального уравнения в частных производных $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ при постоянном значении a, если выполнены начальные условия $U(x,0) = \frac{\sin x}{x}$, $\frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = \frac{1}{1+x^2}$, причём $-\infty < x < +\infty$, $0 < t < +\infty$.

3.2.3.2 Используя формулу Даламбера найти закон свободных колебаний бесконечной струны, если начальная скорость каждой её точки равна нулю, а начальное отклонение задаётся функцией

$$u(x,0) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \vee x > 4l, \\ x, & \text{если } 0 < x < 2l, \\ 2l - x, & \text{если } 2l < x < 4l. \end{cases}$$

Построить профиль струны в моменты времени $t = l/a$ и $t = 2l/a$, считая, что параметр a, входящий в уравнение (3.2.1) постоянен, а переменные удовлетворяют условиям: $-\infty < x < +\infty$, $0 < t < +\infty$.

3.2.3.3 Найти по формуле Даламбера форму бесконечной однородной струны, если начальная форма струны имеет вид прямой $\psi(x) = x + 1$, а начальная скорость равна $\Phi(x) = e^x$.

3.2.3.4 Найти по формуле Даламбера решение уравнения $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$, $0 \le x < +\infty$, $0 < t < +\infty$, удовлетворяющее начальным условиям $U(x,0) = x$, $U(0,t) = 0$, $\frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = \cos^2 x$.

3.2.3.5 Используя метод Фурье найти решение уравнения колебания струны, закреплённой в точках $x = 0$ и $x = l$, если при значении $t = 0$

$$U(x,0) = \psi(x) = 0; \quad U_t'(x,0) = \Phi(x) = a^2.$$

3.2.3.6 Используя метод Фурье найти решение уравнения колебания струны, закреплённой в точках $x = 0$ и $x = l$, если при значении $t = 0$

$$U(x,0) = \psi(x) = 0; \quad U_t'(x,0) = \Phi(x) = \sin\frac{\pi x}{l}.$$

3.2.3.7 Используя метод Фурье найти решение уравнения колебания струны, закреплённой в точках $x = 0$ и $x = l$, если при значении $t = 0$

$$U(x,0) = \psi(x) = \frac{4x(l-x)}{l^2}; \quad U_t'(x,0) = \Phi(x) = 0.$$

Витебский государственный технологический университет

3.2.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

3.2.4.1 Найти по формуле Даламбера форму бесконечной однородной струны, если начальная форма струны имеет вид прямой $\psi(x) = x$, а начальная скорость равна $\Phi(x) = \cos x$.

3.2.4.2 Используя формулу Даламбера найти решение дифференциального уравнения в частных производных $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ при постоянном значении a, если выполнены начальные условия $U(x,0) = \frac{\cos x}{x}$, $\frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = -\frac{1}{1+x^2}$, причём $-\infty < x < +\infty$, $0 < t < +\infty$.

3.2.4.3 Используя формулу Даламбера найти закон свободных колебаний бесконечной струны, если начальная скорость каждой её точки равна нулю, а начальное отклонение задаётся функцией

$$u(x,0) = \begin{cases} 0, & \text{если } x < 0 \vee x > 2l, \\ x^2, & \text{если } 0 < x < l, \\ 8 - x, & \text{если } l < x < 2l. \end{cases}$$

Построить профиль струны в моменты времени $t = 3l/2a$ и $t = 2l/a$, считая, что параметр a, входящий в уравнение (3.2.1) постоянен, а переменные удовлетворяют условиям: $-\infty < x < +\infty$, $0 < t < +\infty$.

3.2.4.4 Используя формулу Даламбера найти решение дифференциального уравнения в частных производных $\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ при постоянном значении a, если выполнены начальные условия $U(x,0) = x^3$, $\frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = \frac{x}{1+x^2}$, причём $-\infty < x < +\infty$, $0 < t < +\infty$.

3.2.4.5 Используя метод Фурье найти решение уравнения колебания струны, закреплённой в точках $x = 0$ и $x = l$, если при значении $t = 0$

$$U(x,0) = \psi(x) = l/3; \quad U_t'(x,0) = \Phi(x) = v_0.$$

3.2.5 Вопросы для самоконтроля

1) Какое уравнение называется волновым?
2) Какой вид имеет уравнение Даламбера для бесконечной струны?
3) Запишите общее решение волнового уравнения по формуле Даламбера.
4) В чём состоит сущность метода Фурье?
5) Сформулируйте задачу Штурма – Лиувилля.
6) Запишите решение волнового уравнения по методу Фурье.
7) Запишите формулы нахождения коэффициентов в решении волнового уравнения по методу Фурье.

Витебский государственный технологический университет

ЛИТЕРАТУРА

1. Жевняк, Р. М. Высшая математика. В 5 ч. / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк., 1984. – Ч. 2 – 4.

2. Ершова, В. В. Импульсные функции. Функции комплексной переменной. Операционное исчисление / В. В. Ершова. – Минск : Выш. шк., 1976. – 256 с.

3. Индивидуальные задания по высшей математике: Операционное исчисление. Элементы теории устойчивости. Теория вероятностей. Математическая статистика / А. П. Рябушко [и др.]. – Минск : Выш. шк., 2006. – 336 с.: ил.

4. Руководство к решению задач по высшей математике. В 2 ч. / Е. И. Гурский [и др.]. – Минск : Выш. шк., 1989. – Ч. 1 – 2.

5. Чудесенко, В. Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (Типовые расчёты) / В. Ф. Чудесенко. – Москва : Высш. школа, 1983. – 111 с.

6. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 2 / П. Е. Данко, А. Г. Попов. – Москва :Высш. школа, 1967. – 350.

7. Методические указания и контрольные задания по методу наименьших квадратов для студентов специальности Э. 03.01 / А. П. Дмитриев. – Витебск : УО «ВГТУ», 1996. – 38 с.

8. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. Дифференциальное исчисление функции одной переменной: методические указания к практическим занятиям для студентов первого курса экономических специальностей / А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2012. – 89 с.

9. Высшая математика. Функции нескольких переменны. Интегральное исчисление функции одной переменной. Дифференциальные уравнения: методические указания к практическим занятиям для студентов первого курса экономических специальностей / А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2014. – 99 с.

10. Высшая математика. Числовые и функциональные ряды. Случайные события в теории вероятностей: методические указания к практическим занятиям для студентов второго курса экономических специальностей / А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2014. – 101 с.

11. Высшая математика. Случайные величины в теории вероятностей: методические указания к практическим занятиям для студентов второго курса экономических специальностей / А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2015. – 116 с.

12. Теория вероятностей и математическая статистика: задания для выполнения типовых расчётов для студентов второго курса механико-технологических специальностей / А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2012. – 77 с.

Витебский государственный технологический университет

13. Высшая математика: методические указания и контрольные задания для студентов заочной формы обучения. В 4 ч. / В. С. Денисов [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2006. – Ч. 2 – 4.

14. Карасёв, А. И. Курс высшей математики для экономических вузов. В 2 ч. Ч. 2 / А. И. Карасёв, З. М. Аксютина, Т. И. Савельева. – Москва : Высш. школа, 1990. – 272 с.

15. Ефимов, А. В. Сборник задач по математике для ВТУЗов. Специальные курсы / А. В. Ефимов [и др]. – Москва : Наука, 1984. – 606 с.

16. Гурский, Е. И. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике / Е. И. Гурский. – Минск : Выш.шк, 1984 . – 223 с.

17. Герасимович, А. И. Математическая статистика / А. И. Герасимович. – Минск. : Выш. шк, 1983. – 280 с.

18. Руководство к решению задач по высшей математике. В 2 ч. Ч. 2 / Е. И. Гурский [и др.]. – Минск : Выш. шк., 1989. – 400 с.

19. Кузнецов, А. В. Руководство к решению задач по математическому программированию / А. В. Кузнецов, Н. И. Холод, Л. С. Костевич. – Минск : Выш. школа, 1978. – 256 с.

20. Индивидуальные задания по теории вероятностей и математической статистике: типовые расчёты / Ю. В. Муранов [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2000. – 66 с.

21. Высшая математика. Теория вероятностей. Методические указания к практическим занятиям для студентов дневной и заочной форм обучения / Д. Е. Дунина [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2009. – 102 с.

22. Высшая математика. Теория вероятностей и математическая статистика. Методические указания к практическим занятиям для студентов дневной и заочной форм обучения / Д. Е. Дунина [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2012. – 128 с.

23. Прохоров, Ю. В. Теория вероятностей / Ю. В. Прохоров, Ю. А. Розанов. – Москва : Наука, 1973. – 496 с.

24. Карасёв, А. И. Теория вероятностей и математическая статистика / А. И. Карасёв. – Москва : Статистика, 1979. – 279 с.

25. Колемаев, В. А. Теория вероятностей и математическая статистика / В. А. Колемаев [и др.] – Москва: Высш. школа, 1991. – 400 с.

26. Гринберг, А.С. Теория вероятностей и математическая статистика. Курс лекций / А. С. Гринберг, О. Б. Плющ, Б. В. Новыш. – Академия управления при президенте Республики Беларусь, 2005.–186 с.

27. Гусак, А. А. Теория вероятностей. Справочное пособие к решению задач / А. А. Гусак, Е. А. Бричикова. – Минск: ТетраСистемс, 2007.– 288 с.

28. Белько, И. В. Теория вероятностей и математическая статистика / И. В. Белько, Г. П. Свирид. – Минск: ООО «Новое знание», 2004.– 251 с.

29. Кузнецов, Ю. Н. Математическое программирование / Ю. Н. Кузнецов, В. И. Кузубов, А. Б. Волощенко. – Москва : Высш. школа, 1980. – 300 с.

Витебский государственный технологический университет

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 3

1 Функции комплексной переменной……. 4

1.1 Комплексные числа……... 4

1.1.1 Комплексные числа в алгебраической форме записи и алгебраические операции над ними…….. 4
1.1.2 Комплексные числа в тригонометрической и показательной форме записи и алгебраические операции над ними…….. 6
1.1.3 Многочлены и алгебраические уравнения. Основная теорема алгебры…… 10
1.1.4 Задания для решения на практических занятиях…… 12
1.1.5 Задания для контролируемой самостоятельной работы…… 14
1.1.6 Вопросы для самоконтроля……... 15

1.2 Функции комплексной переменной……. 15

1.2.1 Последовательности комплексных чисел…… 15
1.2.2 Ряды комплексных чисел…….. 17
1.2.3 Предел и непрерывность функций комплексных переменных…. 18
1.2.4 Дифференцирование функций комплексной переменной……. 19
1.2.5 Аналитические функции……... 21
1.2.6 Интегрирование функций комплексной переменной……. 23
1.2.7 Задания для решения на практических занятиях…… 25
1.2.8 Задания для контролируемой самостоятельной работы…… 26
1.2.9 Вопросы для самоконтроля……... 27

2 Аппроксимация функций…….. 27

2.1 Эмпирические формулы…… 27

2.1.1 Постановка задачи аппроксимации функций…….. 27
2.1.2 Определение вида аппроксимирующей функции…….. 29
2.1.3 Определение параметров аппроксимирующей функции по методу наименьших квадратов……. 31
2.1.4 Вопросы для самоконтроля……... 32

2.2 Определение параметров некоторых эмпирических функции по методу наименьших квадратов…… 32

Витебский государственный технологический университет

2.2.1 Определение параметров линейной аппроксимирующей функции по методу наименьших квадратов…… 32
2.2.2 Определение параметров квадратичной аппроксимирующей функции по методу наименьших квадратов…… 36
2.2.3 Определение параметров гиперболической аппроксимирующей функции по методу наименьших квадратов…… 39
2.2.4 Определение параметров экспоненциальной аппроксимирующей функции по методу наименьших квадратов…… 42
2.2.5 Определение параметров логарифмической аппроксимирующей функции по методу наименьших квадратов…… 44
2.2.6 Задания для решения на практических занятиях…… 46
2.2.7 Задания для контролируемой самостоятельной работы…… 49
2.2.8 Вопросы для самоконтроля……... 49

3 Уравнения математической физики…… 50

3.1 Задачи и уравнения математической физики…….. 50

3.1.1 Задачи математической физики…… 50
3.1.2 Приведение дифференциальных уравнений математической физики к каноническому виду……... 53
3.1.3 Задания для решения на практических занятиях…… 56
3.1.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы…… 57
3.1.5 Вопросы для самоконтроля……... 58

3.2 Аналитические методы решения уравнений математической физики…. 58

3.2.1 Метод Даламбера решения уравнений математической физики… 58
3.2.2 Метод Фурье решения уравнений математической физики…….. 61
3.2.3 Задания для решения на практических занятиях…… 65
3.2.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы…… 66
3.2.5 Вопросы для самоконтроля……... 66

Литература…….. 67

Витебский государственный технологический университет