МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«Витебский государственный технологический университет»

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
Элементы математической статистики и линейного программирования

Методические указания к практическим занятиям для студентов второго курса экономических специальностей

ВИТЕБСК
2016

УДК 519.22:519.6 (075.8)

Высшая математика. Элементы математической статистики и линейного программирования: методические указания к практическим занятиям для студентов второго курса экономических специальностей.

Витебск: Министерство образования Республики Беларусь, УО “ВГТУ”, 2016.

Составители: ст. преп. Коваленко А.В.,
доц., к. ф.-м. н. Денисов В.С.,
ст. преп. Дмитриев А.П.,
ст. преп. Завацкий Ю.А.,
доц., к. ф.-м. н. Загурский В.Н.

Методические указания содержат основные теоретические сведения, задания к практическим занятиям, примеры для самостоятельного выполнения, вопросы к экзамену или зачёту по пяти разделам курса «Высшая математика»: математическая статистика, линейное программирование, симплекс-метод, транспортная задача и динамическое программирование. Методические указания предназначены для проведения практических занятий у студентов второго курса экономического факультета дневной и заочной форм обучения.

Одобрено кафедрой математики и информационных технологий УО «ВГТУ»
4 ноября 2015 г., протокол № 3.

Рецензент: ст. преп. Статковский Н.С.
Редактор: доц., к.ф.-м.н. Никонова Т.В.

Рекомендовано к опубликованию редакционно-издательским советом
УО «ВГТУ» 30 ноября 2015 г., протокол № 9.

Ответственный за выпуск: Шалапухо Е.А.

Учреждение образования «Витебский государственный технологический университет»

Подписано к печати 07.10.16. Формат 60x90 1/16. Уч.-изд. лист. 6.8.
Печать ризографическая. Тираж 160 экз. Заказ № 298.
Отпечатано на ризографе учреждения образования «Витебский государственный технологический университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 1/172 от 12 февраля 2014 г.
210035, Витебск, Московский проспект, 72.

ВВЕДЕНИЕ

Методические указания составлены на основе практических занятий, которые авторы проводили на протяжении многих лет преподавания дисциплины «Высшая математика» в Витебском государственном технологическом университете. Приведённый материал проверен на нескольких поколениях студентов и содержит необходимые сведения для будущих экономистов. Среди рассмотренных в указаниях типовых примеров есть задачи, имеющие практическую направленность и связанные с дисциплинами, которые будут изучать студенты-экономисты в следующих семестрах.

Данное издание предназначено для студентов экономического факультета. Приведены теоретические вопросы для сдачи экзамена или зачёта, содержание и тематика практических занятий по указанному курсу. Методические указания написаны в соответствии с учебной программой дисциплины «Высшая математика» для студентов экономических специальностей второго года обучения.

В методических указаниях содержатся рекомендации по основным темам пяти важных разделов высшей математики: математическая статистика, линейное программирование, симплекс-метод, транспортная задача и динамическое программирование. Согласно учебной программе курса «Высшая математика» для студентов экономических специальностей на четвёртый семестр обучения, все эти разделы студенты должны изучить на девяти аудиторных занятиях. Каждое практическое занятие представляет собой методический материал для его проведения, содержит решения типовых примеров, подборку рекомендуемых к решению задач по теме занятия и задания для выполнения контролируемой самостоятельной работы. В начале каждого практического занятия приведён краткий теоретический материал, который необходимо знать студенту при подготовке к аудиторной и самостоятельной работе по заданной теме, однако этих сведений недостаточно для сдачи экзамена или зачёта по предмету. Прежде чем приступать к решению задач практического занятия или выполнения домашнего задания, студенту необходимо изучить теоретический курс лекционного материала или обратиться к академическим изданиям для более детального изучения разделов курса, которые его интересуют. Наименование занятий, а также их структура построены в соответствии с учебной программой дисциплины «Высшая математика» для студентов экономических специальностей, а также могут применяться на практических занятиях студентами других специальностей различных форм обучения. Студенты заочной формы обучения могут применять изложенный в методических указаниях теоретический и практический материал для самостоятельной работы по предмету «Высшая математика» и выполнению контрольных заданий.

Предложенные методические указания также помогут студентам подготовиться к прохождению теста по указанным темам и разделам курса, так как проведение зачёта или экзамена может подразумевать электронный контроль знаний.

ПЕРЕЧЕНЬ ВОПРОСОВ УЧЕБНОЙ ПРОГРАММЫ ПО КУРСУ «ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ СПЕЦИАЛЬНОСТЕЙ (ЧЕТВЁРТЫЙ СЕМЕСТР)

1. Предмет и задачи математической статистики.
2. Генеральная и выборочная совокупность.
3. Статистический ряд. Статистическое распределение случайной величины.
4. Эмпирическая функция распределения.
5. Графическое изображение статистических рядов.
6. Классификация точечных оценок.
7. Метод моментов.
8. Метод наибольшего правдоподобия.
9. Интервальные оценки параметров распределения. Точность нахождения точечных оценок. Доверительная вероятность и доверительный интервал.
10. Доверительные интервалы для математического ожидания случайной величины, имеющей нормальное распределение при известном среднем квадратическим отклонении.
11. Доверительные интервалы для математического ожидания случайной величины, имеющей нормальное распределение при неизвестном среднем квадратическим отклонении.
12. Доверительные интервалы для среднего квадратического отклонения случайной величины, имеющей нормальное распределение.
13. Статистическая проверка параметрических гипотез.
14. Статистический критерий значимости проверки нулевой гипотезы.
15. Статистическая проверка непараметрических гипотез.
16. Критерий согласия χ^2.
17. Критерий согласия λ Колмогорова.
18. Основные задачи регрессионного и корреляционного анализа.
19. Линейная регрессия.
20. Коэффициент корреляции.
21. Линейный корреляционный анализ.
22. Модели регрессий.
23. Математические методы и модели, которые применяются в экономических исследованиях.
24. Общая схема формирования экономико-математических моделей.
25. Классификация методов математического программирования.
26. Задачи линейного программирования.
27. Форма записи задач линейного программирования.
28. Графические методы решения задач линейного программирования.
29. Алгоритм симплекс-метода.
30. Построение начального опорного плана.
31. Нахождение оптимального опорного плана.

32. Метод введения искусственного базиса.

33. Задачи со смешанными ограничениями.

34. Геометрическая интерпретация симплекс-метода в случае двух переменных.

35. Постановка двойственной задачи.

36. Двойственный симплекс-метод.

37. Математическая модель транспортной задачи.

38. Построение первоначального опорного плана.

39. Закрытая и открытая модели транспортной задачи.

40. Алгоритм решения сбалансированной транспортной задачи.

41. Проверка на оптимальность невырожденного оптимального плана.

42. Проверка на оптимальность невырожденного оптимального плана правилом серо-западного угла.

43. Проверка на оптимальность невырожденного оптимального плана распределительным методом.

44. Проверка на оптимальность невырожденного оптимального плана методом потенциалов.

45. Проверка на оптимальность невырожденного оптимального плана методом потенциалов.

46. Понятие динамического программирования.

47. Задачи динамического программирования.

48. Геометрическая иллюстрация задачи динамического программирования.

49. Построение оптимального управления в задачах динамического программирования.

50. Оптимальность и рекуррентные соотношения в задачах динамического программирования.

51. Метод функциональных уравнений.

52. Нахождение оптимального решения задач динамического программирования на основе функциональных уравнений.

53. Планирование производственных программ динамического программирования.

54. Распределение средств на расширение производственных процессов путём оптимизации распределения во времени тех или иных ресурсов в задачах динамического программирования.

55. Принцип распределения Беллмана в задачах динамического программирования.

56. Условная оптимизация задачи оптимального распределения капиталовложений.

57. Безусловная оптимизация задачи оптимального распределения капиталовложений.

58. Задача об оптимальной стратегии замены оборудования.

ПРАКТИКУМ ПО РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ

1 СТАТИСТИЧЕСКОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЫБОРКИ
(практическое занятие № 1)

Содержание: генеральная и выборочная совокупность, статистический ряд, статистическое распределение случайной величины, эмпирическая функция распределения, графическое распределение статистических рядов.

1.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Построим математическую модель эксперимента. Для этого продублируем эксперимент в одинаковых условиях независимым образом n раз. В результате опыта множество исходов эксперимента, которое описывается случайной величиной ξ, будет образовывать некоторое конечное множество $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ из множества возможных значений Ω_ξ случайной величины ξ. Наблюдаемые значения x_i случайной величины ξ называются *вариантами*. Множество Ω_ξ возможных значений случайной величины ξ называется *генеральной совокупностью*, а число элементов множества Ω_ξ – *объёмом генеральной совокупности*. Множество $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ называется *выборкой* или *выборочной совокупностью*, а число элементов, входящих в выборку, называется *объёмом выборки*. Выборка должна быть *репрезентативной* или представительной, то есть должна хорошо отображать свойства генеральной совокупности Ω_ξ.

Исходы эксперимента дискретной случайной величины можно представить в виде таблицы (или *простого статистического ряда*), которая состоит из двух строк, в первой из которой указываются номера эксперимента, а во второй приводятся значения исходов эксперимента. Простой статистический ряд является первоначальной формой статистического ряда.

i – номер эксперимента	1	2	...	n
x_i – исход эксперимента	x_1	x_2	...	x_n

Для оценки распределения случайной величины ξ производят группировку исходных данных. Если исходные данные случайной величины ξ, которые принимают значения $x_1, x_2, ..., x_n$, располагаются в порядке возрастания, то статистический ряд называется вариационным. Определим частоты m_i или частости $\omega_i = m_i/n$ (относительные частоты) появления одинаковых значений случайной величины ξ. В результате получаем сгруппированные статистические ряды следующего вида:

x_i – исход эксперимента	x_1	x_2	...	x_k
m_i – частоты	m_1	m_2	...	m_k

x_i – исход эксперимента	x_1	x_2	...	x_k
m_i/n – частости	m_1/n	m_2/n	...	m_k/n

При записи вариационных рядов необходимо учитывать следующие равенства: $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$, $\sum_{i=1}^{k} m_i/n = 1$.

Предположим, что случайная величина ξ является непрерывной. Группировка данных заключается в разбиении интервала наблюдаемых значений случайной величины ξ на k частичных интервалов равной длины h: $[x_0; x_1)$, $[x_1; x_2)$, ..., $[x_{k-1}; x_k]$ и нахождении частоты m_i или частости m_i/n попадания наблюдаемых значений в частичные интервалы. Количество интервалов выбирается произвольно, обычно не меньше трёх, но не более двадцати. Для определения числа интервалов разбиения может быть использована формула $k = 1 + 3{,}3222 \cdot \lg N$, где N – количество элементов совокупности. В случае равных интервалов величина интервала может быть определена по формуле

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k} = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3{,}3222 \cdot \lg N}.$$

В результате составляются интервальные статистические ряды следующего вида $\left(\sum_{i=1}^{k} m_i = n,\ \sum_{i=1}^{k} m_i/n = 1 \right)$:

Интервалы наблюдаемых значений СВ ξ	$[x_0; x_1)$	$[x_1; x_2)$	...	$[x_{k-1}; x_k]$
m_i – частоты	m_1	m_2	...	m_k

Интервалы наблюдаемых значений СВ ξ	$[x_0; x_1)$	$[x_1; x_2)$	...	$[x_{k-1}; x_k]$
m_i/n – частости	m_1/n	m_2/n	...	m_k/n

Определение 1.1.1 Перечень наблюдаемых значений случайной величины ξ (или интервалов наблюдаемых значений) и соответствующие им частостей $\omega_i = m_i/n$ называется статистическим законом распределения случайной величины ξ.

Частость события $B_i = [x_{i-1}; x_i)$ является случайной величиной с математическим ожиданием, равным вероятности этого события, то есть $M(m_i/n) = P(x_{i-1} < \xi < x_i) = p_i$. Закон больших чисел в схеме Бернулли утверждает, что если эксперимент повторяется n раз при одинаковых условиях, то частость события сходится к вероятности этого же события: $\frac{m_i}{n} \xrightarrow{P} p_i$. Поэтому во второй строке интервального статистического ряда стоят оценки (приближённые значения) вероятностей p_i.

Определение 1.1.2 *Эмпирической функцией распределения* случайной величины ξ называется функция $F^*(x)$, определяющая для каждого значения x частность события $(\xi < x)$:

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n}, \tag{1.1.1}$$

где n_x – число значений x_i, меньших значения x; n – объём выборки.

Из теоремы Бернулли следует, что при большом объёме выборки эмпирическая функция распределения $F^*(x)$ и функция распределения случайной величины $F(x) = P(\xi < x)$ мало отличаются друг от друга. Отличие эмпирической функции распределения от теоретической состоит в том, что теоретическая функция распределения определяет вероятность события $(\xi < x)$, а эмпирическая функция определяет относительную частоту этого же события. На рисунке 1.1.1 изображён график эмпирической функции распределения некоторой случайной величины ξ.

Для эмпирической функции распределения справедливы все свойства интегральной функции распределения. Действительно, из определения эмпирической функции распределения следует, что:

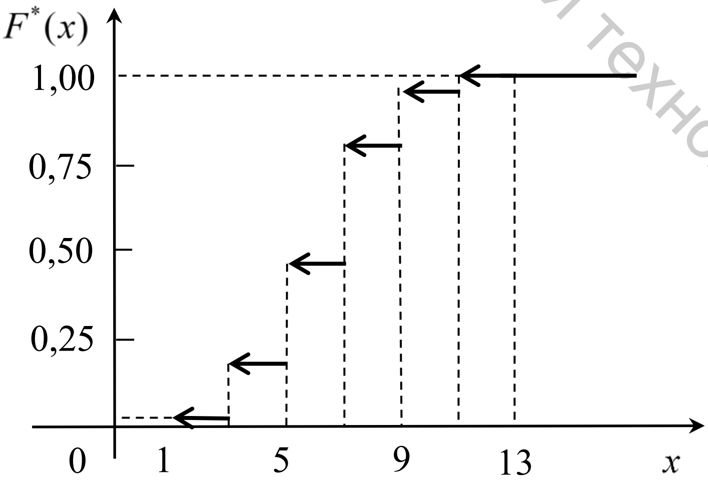


Рисунок 1.1.1 – Эмпирическая функция распределения случайной величины ξ

1) значения эмпирической функции распределения принадлежат отрезку $[0;1]$;

2) если x_1 – наименьшее, а x_n – наибольшее наблюдаемое значение, то $F^*(x) = 0$ при значении $x \le x_1$ и $F^*(x) = 1$ при значении $x > x_n$.

В отличие от интегральной функции распределения $F(x)$ эмпирическая функция распределения $F^*(x)$ является неслучайной – для разных выборок она получается различной.

Основное значение эмпирической функции распределения состоит в том, что она используется в качестве оценки интегральной функции распределения.

Для наглядности вариационные ряды представляют графиками и диаграммами. Наиболее распространёнными графиками являются полигон, гистограмма и кумулята. Полигон применяется как для дискретных, так и для интервальных спастических рядов, а гистограмма – только для изображения интервальных рядов.

Определение 1.1.3 *Полигоном частот* называют ломаную линию, отрезки которой соединяют точки $(x_1;m_1)$, $(x_2;m_2)$, …, $(x_k;m_k)$, где x_i – варианты выборки, а m_i – соответствующие им частоты.

Определение 1.1.4 *Полигоном относительных частот* или *полигоном частостей* называют ломаную линию, отрезки которой соединяют точки $(x_1;\omega_1)$, $(x_2;\omega_2)$, …, $(x_k;\omega_k)$, где x_i – варианты выборки, а ω_i – соответствующие им относительные частоты $\omega_i = m_i/n$ или частости.

При непрерывном распределении случайной величины разбиваем весь интервал, в котором заключены все наблюдаемые значения случайной величины, на интервалы длиной h и определяем m_i – сумму частот вариант, которые попали в *i*-й интервал.

Определение 1.1.5 *Гистограммой частот* называется ступенчатая фигура, состоящая из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной h, а высоты равны отношению m_i/h.

Площадь частичного *i*-го прямоугольника равна $h \cdot m_i/h = m_i$ – сумме частот вариант, попавших в *i*-й интервал. Площадь гистограммы частот равна сумме всех частот, то есть объёму выборки n.

Определение 1.1.6 *Гистограммой относительных частот или частостей* называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной h, а высоты равны отношению $\omega_i/h = m_i/nh$.

Площадь частичного *i*-го прямоугольника равна $h \cdot \omega_i/h = \omega_i$ – относительной частоте вариант, попавших в *i*-й интервал. Площадь гистограммы частостей равна сумме всех относительных частот, то есть единице. Если на гистограмме частостей соединить середины верхних сторон элементарных прямоугольников, то полученная замкнутая ломаная линия образует полигон распределения относительных частот. На рисунках 1.1.2 и 1.1.3 изображены полигоны и гистограммы частостей некоторых случайных величин ξ и η, соответственно.

Из принципа построения полигона и гистограммы относительных частот следует, что площадь под полигоном и гистограммой частостей равна единице. В теории вероятностей гистограмме и полигону относительных частот соответствует график плотности распределения вероятностей.

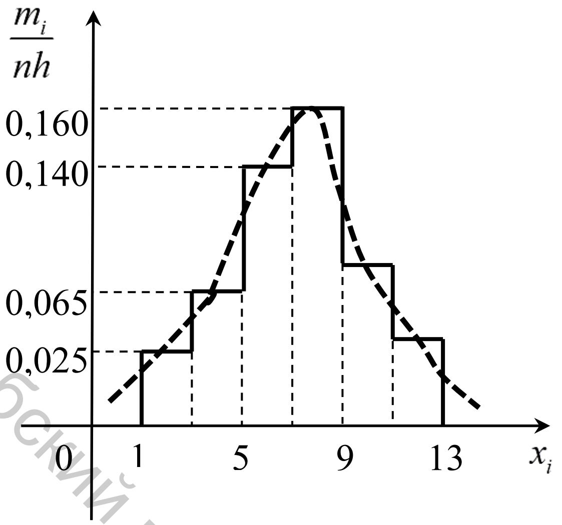


Рисунок 1.1.2 – Полигон и гистограмма частостей СВ ξ

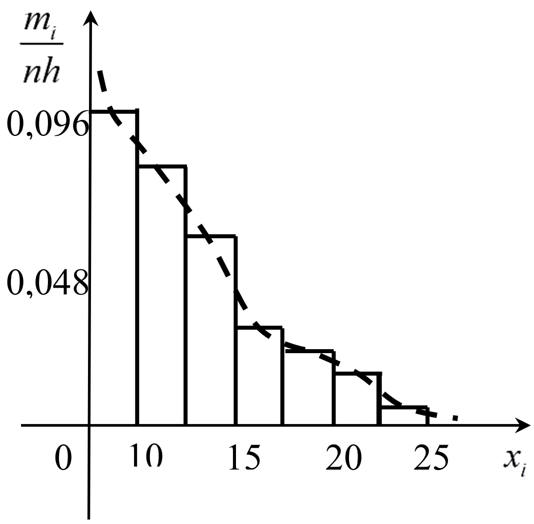


Рисунок 1.1.3 – Полигон и гистограмма частостей СВ η

Гистограмму и полигон частот интервального статистического ряда удобно использовать для визуального подбора модели распределения. Так, гистограмма, изображённая на рисунке 1.1.2, напоминает кривую Гаусса, поэтому можно выдвинуть гипотезу о нормальном распределении случайной величины ξ. Вид гистограммы на рисунке 1.1.3 по форме напоминает экспоненциальную кривую. Поэтому можно выдвинуть гипотезу о показательном распределении случайной величины η.

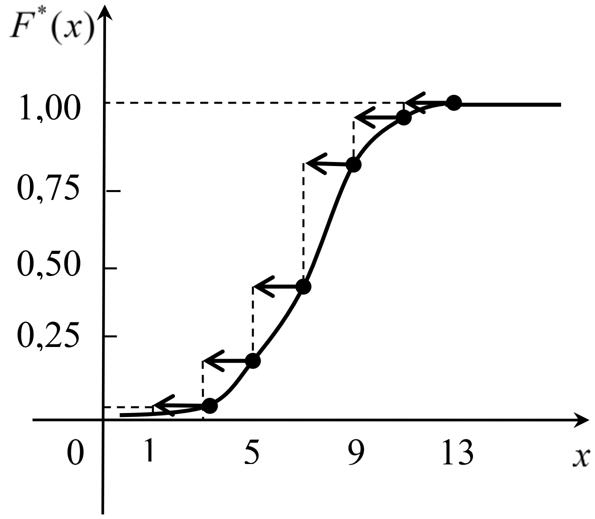


Рисунок 1.1.4 – Кумулята СВ ξ

Для построения кумуляты на оси абсцисс откладывают наблюдаемые значения случайной величины, а на оси ординат – накопленные относительные частоты, то есть накопленные частости.

Определение 1.1.7 *Накопленной частостью* в точке x называется суммарная частость членов статистического ряда, значения которых меньше x.

Значения накопленных частостей являются значениями эмпирической функции распределения $F^*(x)$. В теории вероятностей кумуляте соответствует график функции распределения $F(x) = P(\xi < x)$. На рисунке 1.1.4 изображена кумулята интервального ряда некоторой случайной величины ξ сплошной линией. При построении используются значения эмпирической функции распределения $F^*(x)$.

1.2 Примеры решения типовых задач

1.2.1 На потоке производится замер времени (в минутах) на решение поставленной задачи. Производится выборка среди студентов, которые решали заданную задачу. Время на решение задач представлено в виде таблицы:

t_i – время на решение задачи	11	15	13	15	13	15	11	15	13	15

Найти распределение частот и относительных частот. Построить полигон частот и полигон относительных частот. По данному распределению выборки найти эмпирическую функцию распределения и построить её график.

Решение. В результате опыта случайная величина принимает три значения 11, 13 и 15 минут. Два студента затратили 11 минут на решение поставленной задачи, три – 13 минут, а 5 студентов – 15 минут, то есть случайная величина T – время на решение задачи студентами, равно 11, 13 и 15, а частоты этих событий – 2, 3 и 5, соответственно. Следовательно, статистический ряд распределения частот имеет вид

t_i	11	13	15
m_i	2	3	5

Найдём объём выборки: $n = 2 + 3 + 5 = 10$. Определим относительные частоты: $\omega_1 = m_1/n = 2/10 = 0,2$, $\omega_2 = 3/10 = 0,3$, $\omega_2 = 5/10 = 0,5$. Записываем распределение относительных частот:

t_i	11	13	15
m_i/n	0,2	0,3	0,5

Построим полигон частот (рисунок 1.2.1) и полигон относительных частот (рисунок 1.2.2).

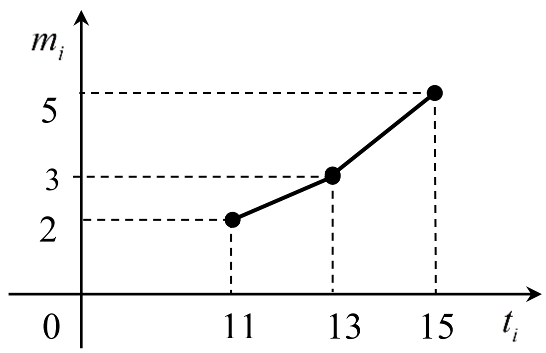


Рисунок 1.2.1 – Полигон частот случайной величины T

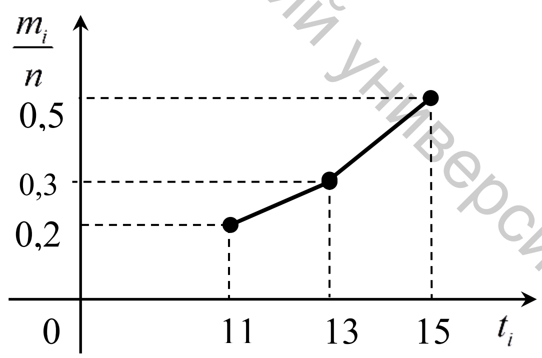


Рисунок 1.2.2 – Полигон относительных частот СВ T

Найдём эмпирическую функцию распределения по заданному распределению выборки. Наименьшая варианта равна 11, следовательно,

$$F^*(t) = 0 \text{ при } t \le 11.$$

Значение $T < 13$, а именно $t_1 = 11$, наблюдалось два раза, следовательно,

$$F^*(t) = 2/10 = 0,2 \text{ при } 11 < t \le 13.$$

Значение $T < 15$, а именно $t_1 = 11$ и $t_2 = 13$, наблюдалось $2+3=5$ раз, следовательно,

$$F^*(t) = 5/10 = 0,5 \text{ при } 13 < t \le 15.$$

Так как $t = 15$ – наибольшая варианта, то

$$F^*(t) = 1 \text{ при } t > 15.$$

Запишем искомую эмпирическую функцию распределения СВ T:

$$F^*(t) = \begin{cases} 0, & t \le 11, \\ 0,2, & 11 < t \le 13, \\ 0,5, & 13 < t \le 15, \\ 1, & t > 15. \end{cases}$$

График эмпирической функции распределения заданной случайной величины T изображён на рисунке 1.2.3.

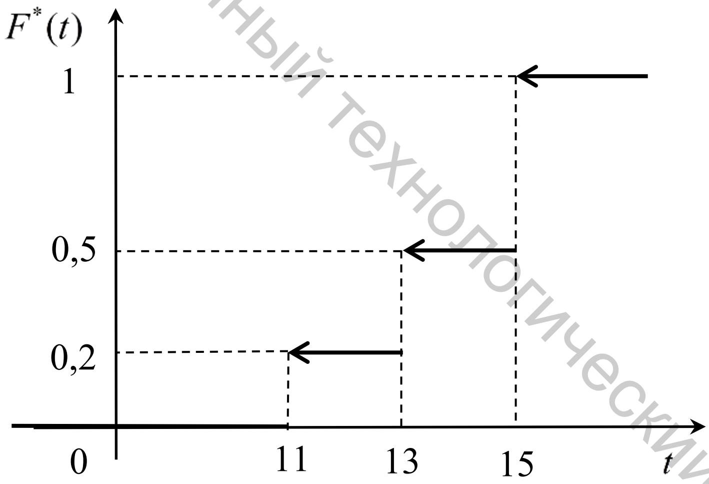


Рисунок 1.2.3 – Эмпирическая функция распределения случайной величины T

1.2.2 Пусть случайная величина ξ – температура воздуха в градусах Цельсия, измеряемая в регионе в течение суток. Из генеральной совокупности извлекается выборка объёмом $n = 200$. Для заданной выборки построить сгруппированный статистический ряд, разбивая размах варьирования на шесть интервалов. Найти эмпирическую функцию распределения и построить её график. Построить гистограмму, полигон распределения частостей или относительных частот, а так же кумуляту полученного статистического ряда. По графику гистограммы сделать прогноз о распределении случайной величины ξ. Значения выборки температуры приведены в виде таблицы:

7,1	5,0	9,6	1,2	9,9	4,0	4,5	12,8	8,1	4,8	5,2	8,3	7.6	8,2
8,2	8,8	5,4	5,4	11,6	5,6	8,8	7,8	5,8	4,8	8,1	9,1	6,1	6,0
3,0	9,4	7,3	8,3	5,1	9,8	6,8	5,2	7,0	5,0	9,5	6,9	11,0	8,9
9,0	9,5	5,4	1,6	10,0	2,8	7,8	8,8	10,2	8,4	3,4	1,9	9,0	4,6
1,7	12,0	9,7	7,4	8,9	5,7	12,6	7,9	8,0	8,1	5,3	6,3	7,1	10,0
5,0	6,0	6,9	9,7	6,4	7,4	5,4	8,9	2,9	10,9	7,7	12,7	5,1	8,0
11,8	7,0	3,5	2,5	11,4	10,4	8,8	10,7	11,2	4,0	4,1	4,3	4,2	6,3
5,2	4,7	6,0	5,6	8,2	3,7	3,6	7,5	5,3	7,3	6,5	8,4	7,9	12,2
7,4	7,2	8,7	4,2	6,6	7,3	13,0	12,4	8,7	6,0	8,5	5,1	6,5	9,4
5,0	4,8	5,2	3,7	10,0	6,0	8,6	8,6	6,9	7,6	6,7	8,5	6,9	6,0
6,8	8,8	7,7	9,8	7,8	7,8	7,2	4,0	10,4	5,4	8,6	5,2	3,9	7,1
9,2	4,9	8,1	2,6	6,0	6,0	10,6	6,9	7,5	10,5	6,1	7,5	10,9	5,4
6,1	6,2	5,9	1,3	3,5	8,0	10,8	7,9	3,8	8,3	10,3	13,0	8,5	3,1
7,5	7,5	5,7	6,7	5,5	10,2	8,0	10,5	5,3	7,4	12,9	10,3	5,1	7,6
3,3	3,2	7,6	1,0										

Решение. Составим вариационный ряд, расположив результаты эксперимента в порядке возрастания.

1,0	1,2	1,3	1,6	1,7	1,9	2,5	2,6	2,8	2,9	3,0	3,1	3,2	3,3
3,4	3,5	3,5	3,6	3,7	3,7	3,8	3,9	4,0	4,0	4,0	4,1	4,2	4,2
4,3	4,5	4,6	4,7	4,8	4,8	4,8	4,9	5,0	5,0	5,0	5,0	5,1	5,1
5,1	5,1	5,2	5,2	5,2	5,2	5,2	5,3	5,3	5,3	5,4	5,4	5,4	5,4
5,4	5,4	5,5	5,6	5,6	5,7	5,7	5,8	5,9	6,0	6,0	6,0	6,0	6,0
6,0	6,0	6,0	6,1	6,1	6,1	6,2	6,3	6,3	6,4	6,5	6,5	6,6	6,7
6,7	6,8	6,8	6,9	6,9	6,9	6,9	6,9	7,0	7,0	7,1	7,1	7,1	7,2
7,2	7,3	7,3	7,3	7,4	7,4	7,4	7,4	7,5	7,5	7,5	7,5	7,5	7,6
7,6	7,6	7,6	7,7	7,7	7,8	7,8	7,8	7,8	7,9	7,9	7,9	8,0	8,0
8,0	8,0	8,1	8,1	8,1	8,1	8,2	8,2	8,2	8,3	8,3	8,3	8,4	8,4
8,5	8,5	8,5	8,6	8,6	8,6	8,7	8,7	8,8	8,8	8,8	8,8	8,8	8,9
8,9	8,9	9,0	9,0	9,1	9,2	9,4	9,4	9,5	9,5	9,6	9,7	9,7	9,8
9,8	9,9	10,0	10,0	10,0	10,2	10,2	10,3	10,3	10,4	10,4	10,5	10,5	10,6
10,7	10,8	10,9	10,9	11,0	11,2	11,4	11,6	11,8	12,0	12,2	12,4	12,6	12,7
12,8	12,9	13,0	13,0										

Минимальный элемент выборки равен 1,0, а максимальный элемент равен 13,0, число интервалов разбиения $k = 6$. Находим длину частичного интервала:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k} = \frac{13 - 1}{6} = 2.$$

Заданный отрезок $[1;13]$ разбиваем на шесть равных интервалов, длина которых равна двум градусам Цельсия. В каждом из интервалов разбиения вычисляем число вариант, которые попали в данный интервал, то есть находим частоты m_i. Составим интервальный статистический ряд, при этом укажем середины интервалов, которые необходимы для построения гистограммы, а также накопленные относительные частоты для построения эмпирической функции распределения и кумуляты.

Номер интервала i	Частичные интервалы	Середины интервалов	Частоты m_i	Относительные частоты m_i/n	Накопленные частости $\sum_{i=1}^{n} m_i/n$
1	$[1;3)$	2	10	0,05	0,05
2	$[3;5)$	4	26	0,13	0,18
3	$[5;7)$	6	56	0,28	0,46
4	$[7;9)$	8	64	0,32	0,78
5	$[9;11)$	10	30	0,15	0,93
6	$[11;13]$	12	14	0,07	1,00

Составим эмпирическую функцию распределения. По определению, эмпирическая функция распределения равна нулю, если $x \le 1$.

Если случайная величина принимает значение из интервала $(1;3]$, то $F^*(x) = 0,05$. При расчётах используем формулу 1.1.1.

Если же случайная величина попадает в интервал $(3;5]$, то эмпирическая функция распределения примет значение $F^*(x) = 0,05 + 0,13 = 0,18$.

В случае попадания случайной величины в интервал $(5;7]$ значение эмпирической функции распределения равно $F^*(x) = 0,05 + 0,13 + 0,28 = 0,46$.

Для значений случайной величины, которые лежат в интервале $(7;9]$, эмпирическая функция распределения принимает числовое значение, которое равно $F^*(x) = 0,05 + 0,13 + 0,28 + 0,32 = 0,78$.

В интервале $(9;11]$ значение эмпирической функции распределения равно $F^*(x) = 0,05 + 0,13 + 0,28 + 0,32 + 0,15 = 0,93$.

На интервале $(11;13]$ эмпирическая функция принимает значение, которое равно значению $F^*(x) = 0,05 + 0,13 + 0,28 + 0,32 + 0,15 + 0,07 = 1$.

По определению, эмпирическая функция распределения равна единице, если случайная величина принимает значение, большее 13.

Таким образом, значения эмпирической функции распределения записаны в последнем столбце интервального статистического ряда. Запишем эмпирическую функцию распределения в аналитическом виде:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } \quad x \le 1; \\ 0{,}05, & \text{если } 1 < x \le 3; \\ 0{,}18, & \text{если } 3 < x \le 5; \\ 0{,}46, & \text{если } 5 < x \le 7; \\ 0{,}78, & \text{если } 7 < x \le 9; \\ 0{,}93, & \text{если } 9 < x \le 11; \\ 1, & \text{если } 11 < x \le 13; \\ 1, & \text{если } \quad x > 13. \end{cases}$$

График заданной эмпирической функции распределения случайной величины ξ – температура воздуха в градусах Цельсия, измеряемая в регионе в течение суток, изображён на рисунке 1.1.1. На графике эмпирической функции распределения по оси абсцисс откладываются значения случайной величины, а по оси ординат отмечаются накопленные относительные частоты или частости.

При построении гистограммы частостей или относительных частот на оси абсцисс откладываем частичные интервалы наблюдаемых значений заданной случайной величины ξ. На каждом из полученных интервалов строим прямоугольник с высотой m_i/nh, где h является длиной указанного интервала. С геометрической точки зрения, площадь построенного прямоугольника будет равна частости заданного частичного интервала. Гистограмма частостей заданной случайной величины ξ – температура воздуха в регионе в течение суток, изображена на рисунке 1.1.2 в виде прямоугольников.

Если на гистограмме частостей соединить середины верхних сторон элементарных прямоугольников, то полученная линия образует полигон частостей. На рисунке 1.1.2 полигон частостей заданной случайной величины изображён штриховой линией.

В случае построения кумуляты, на оси абсцисс откладываем частичные интервалы наблюдаемых значений заданной случайной величины ξ, а по оси ординат – накопленные частости. Изображаем точки, абсциссы которых совпадают с правым концом частичного интервала, не входящего в него, а ординаты равны накопленным относительным частотам. Соединяя полученные точки плавной линией, строим график кумуляты. График кумуляты заданной случайной величины ξ – температура воздуха в данном регионе, изображён на рисунке 1.1.4 сплошной линией. На этом же рисунке изображён график эмпирической функции распределения (линии со стрелками).

Так как гистограмма заданной случайной величины ξ – температуры воздуха в регионе, которая изображена на рисунке 1.1.2, напоминает кривую нормального распределения, то можно выдвинуть гипотезу о нормальном распределении заданной случайной величины.

1.3 Задания для решения на практическом занятии

1.3.1 Найти эмпирическую функцию распределения по заданному распределению выборки:

x_i	2	4	7	10	12
m_i	5	26	44	18	7

1.3.2 Найти эмпирическую функцию распределения по заданному распределению выборки:

x_i	5	10	15	20	25	30
m_i	72	46	38	24	12	8

1.3.3 Результаты исследования непрерывной случайной величины ξ представлены в виде интервального статистического ряда:

Частичный интервал	$[1;4)$	$[4;7)$	$[7;10)$	$[10;13)$	$[13;16]$
Сумма частот вариант интервала	12	18	30	24	16

Найти эмпирическую функцию распределения и кумуляту. Построить их графики.

1.3.4 Результаты исследования непрерывной случайной величины η представлены в виде интервального статистического ряда:

Частичный интервал	$[2;3)$	$[3;4)$	$[4;5)$	$[5;6)$	$[6;7]$
Сумма частот вариант интервала	15	14	10	6	5

Найти эмпирическую функцию распределения и кумуляту. Построить их графики.

1.3.5 Построить полигон частот и полигон относительных частот по данному распределению выборки случайной величины ξ:

x_i	1	2	4	5	7
m_i	25	13	12	6	4

По виду графиков статистического ряда предположить закон распределения случайной величины ξ.

1.3.6 Построить полигон частот и полигон относительных частот по данному распределению выборки случайной величины η:

x_i	23	25	27	28	33	35
m_i	18	22	17	23	19	21

По виду графиков статистического ряда предположить закон распределения случайной величины η.

1.3.7 Построить гистограмму частот по данному распределению выборки случайной величины ξ (объём выборки равен $n=100$):

Частичный интервал	$[1;4)$	$[4;7)$	$[7;10)$	$[10;13)$	$[13;16]$
Сумма частот вариант интервала	12	18	30	24	16

По виду гистограммы частот статистического распределения выдвинуть гипотезу о законе распределения случайной величины ξ.

1.3.8 Построить гистограмму относительных частот по данному распределению выборки случайной величины η (объём выборки равен $n=100$):

Частичный интервал	$[1;4)$	$[4;7)$	$[7;10)$	$[10;13)$	$[13;16]$
Сумма частот вариант интервала	12	18	30	24	16

По виду гистограммы относительных частот статистического распределения выдвинуть гипотезу о законе распределения случайной величины η.

1.3.9 Из генеральной совокупности случайной величины ξ – среднего роста человека, произведена выборка, в которой оказалось только пять значений 160, 165, 170, 175 и 180 сантиметров. Данные эксперимента представлены в виде таблицы.

160	180	165	175	165	165	170	165	175	165
170	170	160	170	180	170	175	175	165	170
165	175	170	175	170	175	165	170	170	175
175	170	175	165	175	160	180	175	175	175
170	165	180	170	170	170	175	180	160	170

Найти объём выборки и записать статистический ряд в виде распределения частот и относительных частот. Построить эмпирическую функцию распределения и кумуляту по статистическому распределению случайной величины. Построить полигон частот и полигон относительных частот статистического распределения. На основании графиков статистического ряда выдвинуть гипотезу о распределении заданной случайной величины ξ.

1.3.10 В результате опыта произведено изучение случайной величины η. Из генеральной совокупности извлечена выборка, которая представлена в виде таблицы.

4,0	2,8	8,6	5,7	7,3	2,4	10,0	4,7	9,6	3,2
12,8	14,0	2,4	10,4	3,8	9,4	2,5	7,5	2,3	13,2
2,7	8,7	4,2	3,6	4,4	6,0	7,4	6,2	11,0	2,0
8,8	2,2	11,8	4,3	6,5	5,5	4,6	3,4	6,3	8,1
5,3	4,0	6,7	8,5	3,2	8,3	2,1	8,2	4,8	5,2
7,0	6,8	3,7	2,0	5,6	4,5	11,4	3,8	7,6	4,9
6,9	5,9	2,6	6,6	11,6	2,2	5,4	5,2	3,3	6,4
3,0	7,1	11,2	4,3	8,4	3,5	8,9	12,4	8,0	2,5
13,6	4,1	7,2	3,0	2,8	10,8	3,9	4,9	5,1	7,7
2,6	3,1	5,8	9,5	10,2	4,6	6,1	2,9	3,6	5,0

Для заданной выборки построить сгруппированный статистический ряд, разбивая размах варьирования на шесть интервалов. Найти эмпирическую функцию распределения и построить её график. Построить гистограмму, полигон частот, полигон распределения частостей или относительных частот, а также кумуляту полученного статистического ряда.

1.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

1.4.1 Из генеральной совокупности случайной величины ξ извлечена выборка, которая представлена в виде таблицы. Для заданной выборки построить сгруппированный статистический ряд, разбивая размах варьирования на шесть интервалов. Найти эмпирическую функцию распределения и построить её график. Построить гистограмму, полигон частот, полигон распределения частостей или относительных частот и кумуляту полученного статистического ряда.

1.4.1.1

4,1	6,0	2,5	6,5	3,6	2,6	4,9	1,5	2,8	4,1
3,3	4,3	4,3	3,7	7,0	4,8	6,2	3,5	1,2	6,4
2,0	3,1	1,4	6,1	4,7	5,8	1,0	4,4	3,4	1,6
4,9	1,9	3,0	4,6	2,8	3,0	4,2	5,5	4,2	3,3
5,3	3,5	4,5	2,2	3,9	4,4	2,9	3,8	5,0	4,0

1.4.1.2

364	330	324	341	356	347	357	361	328	344
325	358	340	372	329	366	337	370	354	360
343	348	325	350	362	336	363	345	359	324
350	333	352	327	335	363	348	356	338	372
332	368	369	334	348	347	326	331	341	339

1.4.1.3

12	1	72	40	32	58	6	33	64	11
36	50	14	3	16	44	23	54	8	68
0	26	38	15	42	5	46	21	40	19
48	13	2	30	56	17	31	7	20	52
24	10	28	66	4	34	60	45	35	9

1.4.1.4

400	140	215	180	225	110	200	320	290	150
245	240	325	230	270	220	280	210	300	295
175	255	235	130	350	170	215	160	245	200
200	310	260	265	220	340	230	285	205	265
250	190	210	330	270	275	100	240	325	375

1.4.1.5

38,0	36,5	36,0	36,7	37,2	36,5	37,6	36,1	36,0	37,5
36,8	37,7	37,4	38,2	36,2	36,8	36,6	37,1	36,4	36,5
37,2	38,1	37,0	36,3	36,8	36,3	37,3	36,7	37,8	38,2
36,4	36,9	37,8	37,5	36,4	38,3	37,7	36,1	36,6	36,3
37,6	37,3	36,6	37,1	37,9	36,2	36,3	38,4	36,8	37,9

1.4.1.6

1,0	2,0	1,2	0,1	2,1	0,9	6,0	4,6	1,8	0,9
2,2	0,1	2,3	1,3	0,3	3,4	2,4	0,4	3,1	4,8
3,0	1,1	0,6	4,0	5,3	0,0	1,6	1,7	0,8	1,9
0,5	4,2	3,9	0,2	1,4	1,5	0,7	5,7	3,3	2,5
2,7	5,0	3,1	2,8	0,2	4,4	3,2	2,6	0,1	1,0

1.4.1.7

98	40	135	92	68	88	86	74	98	140
43	95	64	49	106	75	55	82	115	80
85	118	46	63	90	20	72	65	76	78
60	96	30	66	73	52	82	84	35	120
100	62	94	103	80	70	130	109	82	58

1.4.1.8

1,8	11,5	4,9	6,0	2,6	7,8	10,9	6,3	5,0	3,8
7,2	2,2	6,6	8,6	7,5	9,0	11,8	0,2	9,6	12,0
4,3	10,0	8,4	2,4	0,6	10,6	3,0	9,4	0,0	5,5
2,0	4,6	1,0	10,3	5,6	2,8	0,4	3,2	6,9	9,8
8,0	8,2	12,0	5,2	8,8	4,5	9,2	11,2	3,4	1,6

1.4.1.9

105	260	345	340	95	368	275	35	455	60
690	124	55	80	245	25	169	460	187	570
115	10	133	205	20	160	70	178	40	196
5	391	230	0	151	50	520	65	290	45
225	110	15	142	414	320	30	575	65	310

1.4.1.10

14,0	6,4	2,4	7,5	6,8	2,8	7,0	9,6	7,5	7,8
6,2	10,0	6,0	9,8	11,0	7,0	3,0	7,4	5,4	12,0
2,0	4,2	6,5	13,0	4,6	9,4	7,2	11,5	7,6	7,0
4,0	8,0	10,5	4,4	2,6	4,8	13,0	5,2	9,2	5,8
8,3	3,8	8,6	6,6	6,5	10,7	5,0	3,5	2,1	8,9

1.4.1.11

225	238	235	251	248	253	241	234	256	249
250	227	223	236	240	236	221	243	233	220
232	234	228	239	221	231	254	225	242	231
226	244	247	222	230	247	235	255	223	246
238	224	252	229	237	220	244	226	245	232

1.4.1.12

36	8	0	12	22	44	4	5	6	7
8	17	54	21	30	23	15	5	34	9
27	10	20	1	41	3	50	16	17	35
9	19	29	38	13	15	24	33	26	18
18	1	11	32	2	14	3	25	8	45

1.4.1.13

175	460	490	470	505	400	310	435	150	397
455	265	465	230	420	100	420	520	389	450
400	475	341	415	357	365	205	381	445	320
325	405	125	349	245	425	373	435	535	470
250	333	410	280	450	295	430	130	440	190

1.4.1.14

65	79	51	60	90	52	78	64	53	92
72	66	88	62	63	83	55	88	69	54
86	73	67	81	76	91	84	72	56	85
57	87	80	75	54	71	93	68	79	70
86	60	74	89	82	77	55	85	86	58

1.4.1.15

1,8	0,7	2,4	2,0	2,1	0,5	2,7	3,3	2,9	2,2
1,2	0,5	0,8	1,5	0,1	3,0	0,4	0,7	0,8	2,3
2,5	1,3	0,1	0,0	1,0	1,7	0,6	0,3	0,5	1,1
0,4	1,9	0,2	0,9	1,6	1,1	0,4	1,4	0,2	3,4
0,6	0,3	1,4	1,8	0,3	2,6	1,4	3,5	1,2	0,1

1.4.1.16

40	130	94	48	96	115	56	84	125	88
100	92	138	76	160	152	98	128	86	38
90	10	104	142	108	80	82	115	60	98
134	72	44	106	78	52	112	70	158	120
70	102	74	64	148	110	156	190	118	68

1.4.1.17

2,1	3,7	5,5	3,9	5,7	3,5	5,0	2,0	2,1	5,2
1,3	2,2	4,6	4,7	3,4	4,9	1,9	2,8	2,0	2,5
3,0	1,4	2,3	3,3	4,8	1,8	2,7	5,1	6,0	2,9
4,5	3,1	1,5	2,4	1,7	2,6	3,6	5,9	4,1	4,3
4,0	5,7	3,2	1,6	2,5	5,5	4,9	2,5	5,3	6,1

1.4.1.18

200	20	150	65	160	125	80	170	280	45
25	210	15	250	70	45	190	135	40	180
100	55	110	10	120	230	130	35	10	145
195	25	175	220	5	75	30	245	300	240
50	105	60	115	165	0	260	85	95	90

1.4.1.19

7,0	2,0	7,6	15,5	9,9	11,0	14,0	10,2	9,4	11,8
10,0	13,5	12,4	10,6	5,0	8,5	11,2	17,0	11,6	15,0
5,5	10,2	18,0	7,9	10,8	1,0	8,8	11,4	10,0	9,7
12,0	7,3	4,0	12,6	19,0	12,8	17,5	9,1	4,5	16,5
14,5	12,2	10,4	13,0	8,2	16,0	10,0	6,0	10,4	3,0

1.4.1.20

196	161	151	184	193	153	166	155	204	177
157	197	185	191	183	195	158	203	167	178
160	186	198	163	172	182	202	180	179	168
169	189	162	199	164	201	173	187	154	175
187	159	170	171	200	165	181	174	191	205

1.4.1.21

10	55	35	11	41	47	39	3	66	5
22	1	12	33	15	2	50	29	30	20
1	13	8	43	26	16	28	7	19	32
14	23	0	25	9	27	17	53	5	11
7	44	24	6	60	21	4	18	35	6

1.4.1.22

75	128	154	134	104	152	143	154	166	124
125	172	120	150	158	199	155	215	149	168
170	225	174	100	137	160	179	164	112	164
116	152	131	187	155	200	162	195	162	85
150	191	95	156	183	140	108	146	175	148

1.4.1.23

51	77	56	75	15	42	23	58	48	31
29	53	41	14	47	16	65	22	69	60
45	28	13	57	32	24	17	46	21	72
70	12	27	40	25	39	37	18	33	20
11	43	55	30	59	61	44	35	19	50

1.4.1.24

2,8	2,6	5,6	6,9	3,9	1,7	0,3	4,1	3,0	1,2
5,2	7,4	3,0	5,8	1,8	0,4	4,5	0,2	4,9	4,3
0,9	5,4	4,7	1,9	0,5	2,9	1,5	5,0	0,0	1,6
2,4	0,8	2,0	1,0	3,4	7,0	3,8	1,4	7,8	0,1
6,5	2,2	0,7	3,2	6,0	3,6	6,2	6,4	1,3	5,1

1.4.1.25

90	54	50	35	74	50	51	78	65	38
53	59	85	63	58	48	34	59	52	52
32	70	62	56	30	80	58	51	42	66
61	55	54	72	57	55	60	36	58	80
40	69	59	45	64	53	76	57	75	56

1.4.1.26

4,1	4,6	3,8	6,2	5,1	4,5	5,6	3,6	5,8	6,1
4,7	4,2	6,0	5,2	4,9	5,5	4,4	5,0	6,6	5,0
3,6	5,3	4,3	3,9	6,3	4,0	5,4	4,3	4,9	5,5
6,6	3,7	5,4	4,4	4,0	5,7	6,5	5,3	4,2	3,6
5,5	5,5	6,1	5,6	4,5	6,4	4,8	5,9	5,2	4,1

1.4.1.27

120	10	240	175	180	30	90	55	330	110
50	130	5	140	15	190	170	250	105	200
60	260	55	0	10	20	210	100	270	40
25	65	220	75	150	160	35	125	45	290
360	210	70	60	80	85	280	30	230	300

1.4.1.28

25	29	15	5	16	23	14	7	22	9
10	14	26	18	12	1	19	17	14	17
20	15	11	13	27	16	24	2	24	8
18	21	15	0	19	12	28	11	16	10
4	9	16	22	23	6	13	17	3	30

1.4.1.29

810	840	930	819	882	925	852	980	958	898
960	965	900	934	822	942	890	954	833	945
870	813	970	866	938	886	950	831	915	860
905	990	844	975	910	825	904	894	990	836
839	874	816	878	848	946	828	985	856	920

1.4.1.30

5	32	18	24	12	26	7	28	9	3
40	1	34	11	1	13	38	23	2	30
16	17	10	19	48	0	14	39	46	10
7	9	31	5	20	36	22	15	29	6
8	42	6	27	4	21	36	3	8	44

2 СТАТИСТИЧЕСКАЯ ОЦЕНКА ПАРАМЕТРОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
(практическое занятие № 2)

Содержание: классификация точечных оценок, интервальные оценки параметров распределения, доверительные интервалы для нормального распределения.

2.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Предположим из генеральной совокупности с функцией распределения $F(x,\Theta)$, где Θ – неизвестный параметр, извлечена выборка $x_1, x_2, ..., x_n$. Задача оценивания неизвестного параметра Θ состоит в построении приближённых формул

$$\Theta \approx u(x_1, x_2, ..., x_n). \qquad (2.1.1)$$

Функцию (2.1.1) называют *выборочной* или *статистической функцией*, а её значение в приближённом равенстве – *оценкой* и обозначают $\hat{\Theta} = u(x_1, x_2, ..., x_n)$. Любая выборка является конечной и случайной, следовательно, статистические функции $\hat{\Theta}$ также являются случайными. Таким образом, будем рассматривать оценку $\hat{\Theta} = u(x_1, x_2, ..., x_n)$ неизвестного параметра Θ как случайную величину, а её значение, вычисленное по заданной выборке объёмом n, как одну реализацию случайной величины, то есть как одно из множества её возможных значений.

В математической статистике рассматриваются точечные и интервальные оценки параметров распределения.

Точечная оценка параметра Θ определяется одним числом $\hat{\Theta}=u(x_1,x_2,...,x_n)$. *Интервальной оценкой* называют оценку, которая определяется двумя числами $\hat{\Theta}_1$ и $\hat{\Theta}_2$ – концами интервала, накрывающего оцениваемый параметр Θ.

Рассмотрим классификацию точечных оценок. Чтобы точечная оценка неизвестного параметра $\hat{\Theta}=u(x_1,x_2,...,x_n)$ была «хорошей» прежде всего с точки зрения точности и надёжности оценок, желательно, чтобы найденные на основании статистических функций $\hat{\Theta}=u(x_1,x_2,...,x_n)$ оценки неизвестных параметров были тесно сгруппированы около значений оцениваемых параметров распределения, то есть чтобы рассеивание случайной величины $\hat{\Theta}$ около параметра Θ было по возможности минимальным.

Определение 2.1.1 Оценка $\hat{\Theta}=u(x_1,x_2,...,x_n)$ называется *состоятельной*, если при увеличении числа испытаний оценка сходится по вероятности к оцениваемому параметру, то есть если $\lim\limits_{n\to\infty}P\left(\left|\Theta-\hat{\Theta}\right|<\varepsilon\right)=1$.

Определение 2.1.2 Оценка $\hat{\Theta}=u(x_1,x_2,...,x_n)$ называется *несмещённой* (оценкой без систематической ошибки), если её математическое ожидание равно оцениваемому параметру, то есть $M\left(\hat{\Theta}\right)=\Theta$.

Если последнее равенство не выполняется, то оценка называется *смещённой* (содержащей систематическую ошибку). Наряду с несмещёнными оценками $\hat{\Theta}=u(x_1,x_2,...,x_n)$ применяются асимптотически несмещённые оценки, для которых $M\left(\hat{\Theta}\right)\to\Theta$ при увеличении объёма выборки.

Дисперсия любой несмещённой оценки одного параметра Θ удовлетворяет неравенству Рао-Крамера

$$D\left(\hat{\Theta}\right)\geq-\frac{1}{N\cdot M\left(\dfrac{\partial^2\ln f(x,\Theta)}{\partial\Theta^2}\right)}, \qquad (2.1.2)$$

где $f(x,\Theta)$ – плотность распределения вероятностей случайной величины; N - число произведённых испытаний. В случае дискретной случайной величины плотность распределения вероятностей $f(x,\Theta)$ заменяется функцией распределения вероятностей.

Определение 2.1.3 Оценка $\hat{\Theta}=u(x_1,x_2,...,x_n)$, для которой в неравенстве Рао-Крамера (2.1.2) достигается знак равенства, называется *эффективной*.

Определение 2.1.4 Оценка $\hat{\Theta}=u(x_1,x_2,...,x_n)$ называется *достаточной*, если она использует всю информацию относительно оцениваемого параметра, содержащуюся в выборке.

Достаточные оценки построены таким образом, что никакие другие оценки не могут дать какой-либо дополнительной информации об оцениваемых параметрах.

Рассмотрим точечные оценки неизвестных параметров распределения.

Несмещённой оценкой генеральной средней (математического ожидания) является *выборочная средняя*

$$\overline{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i x_i}{n}, \tag{2.1.3}$$

где x_i – варианта выборки; m_i – частота варианты x_i; $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$.

Смещённой оценкой генеральной дисперсии служит *выборочная дисперсия*

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^{k} m_i \left(x_i - \overline{x}_B\right)^2}{n} = \overline{x_B^2} - \overline{x}_B^{\,2}. \tag{2.1.4}$$

Выборочная дисперсия является смещённой оценкой генеральной дисперсии $D_Г$, так как $M\left(D_B\right) = \frac{n-1}{n} \cdot D_Г \neq D_Г$.

Положительное значение квадратного корня из выборочной дисперсии называется *выборочным средним квадратическим отклонением* $\sigma_B = \sqrt{D_B}$.

Несмещённой оценкой генеральной дисперсии служит «*исправленная дисперсия*», которая определяется по формуле

$$s^2 = \frac{n}{n-1} \cdot D_B = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{k} m_i \left(x_i - \overline{x}_B\right)^2. \tag{2.1.5}$$

Несмещённой оценкой среднего квадратического отклонения генеральной совокупности является «исправленное» среднее квадратическое отклонение

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{\frac{n}{n-1} \cdot D_B} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{k} m_i \left(x_i - \overline{x}_B\right)^2}. \tag{2.1.6}$$

Если рассматривается интервальный статистический ряд, то в качестве вариант берутся середины частичных интервалов.

Точечная оценка неизвестного параметра Θ, найденная по выборке объёма n из генеральной совокупности с функцией распределения $F(x,\Theta)$, не позволяет непосредственно ответить на вопрос, какую ошибку мы совершаем, принимая вместо точного значения неизвестного параметра Θ его приближённое значение или оценку $\hat{\Theta} = u(x_1, x_2, ..., x_n)$.

В связи с этим более выгодно пользоваться интервальной оценкой, основанной на определении некоторого интервала, внутри которого с определённой вероятностью находится неизвестное значение параметра Θ. Предположим, что по результатам выборки объёма n найдена выборочная характеристика $\hat{\Theta} = u(x_1, x_2, ..., x_n)$, которая является точечной оценкой неизвестного параметра Θ. Чем меньше разность $\left|\Theta - \hat{\Theta}\right|$, тем точнее будет оценка. Таким образом, положительное число ε характеризует точность оценки $\left|\Theta - \hat{\Theta}\right| < \varepsilon$. При этом точность ε зависит от объёма выборки. Поэтому можно только говорить о вероятности $1-\alpha$, с которой это неравенство выполняется.

Определение 2.1.5 *Доверительной вероятностью* оценки называют вероятность $P = 1-\alpha$ выполнения неравенства $\left|\Theta - \hat{\Theta}\right| < \varepsilon$.

Доверительная вероятность точечной оценки показывает, что при извлечении выборки одинакового объёма из одной и той же генеральной совокупности с функцией распределения $F(x,\Theta)$ в $(1-\alpha)$ 100 % случаях параметр Θ будет накрываться данным интервалом.

Определение 2.1.6 *Доверительным интервалом* называется интервал $\left(\hat{\Theta} - \varepsilon; \Theta + \varepsilon\right)$, накрывающий неизвестный параметр Θ с заданной доверительной вероятностью $P = 1-\alpha$, с уровнем значимости α.

Рассмотрим случайную величину ξ, которая подчинена нормальному закону распределения.

Интервальной оценкой математического ожидания a случайной величины ξ, имеющей нормальное распределение *при известном среднем квадратическом отклонении* σ и выборочной средней $\bar{x}_B$, является доверительный интервал

$$\bar{x}_B - u_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B + u_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \quad (2.1.7)$$

Квантили нормального распределения $u_{\alpha/2}$ находят по таблицам функции Лапласа (приложение 3) из условия $2 \cdot \Phi(u_{\alpha/2}) = 1-\alpha$. Доверительный интервал покрывает математическое ожидание a с заданной вероятностью или надёжностью $1-\alpha$. Точность оценки математического ожидания (предельная погрешность) равна $\varepsilon = u_{\alpha/2}\sigma / \sqrt{n}$.

Интервальной оценкой математического ожидания a случайной величины ξ, имеющей нормальное распределение *при неизвестном среднем квадратическом отклонении* σ и известной выборочной средней $\bar{x}_B$, является доверительный интервал

$$\bar{x}_B - t_{\alpha/2;\, n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \bar{x}_B + t_{\alpha/2;\, n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}. \quad (2.1.8)$$

Квантили t-распределения $t_{\alpha/2;\, n-1}$ находят по таблицам распределения Стьюдента (приложение 5). Доверительный интервал покрывает математическое ожидание a с заданной вероятностью или надёжностью $1-\alpha$. Точность оценки математического ожидания (предельная погрешность) равна $\varepsilon = t_{\alpha/2;\,n-1}\, s\big/\sqrt{n}$.

Интервальной оценкой среднего квадратического отклонения σ случайной величины ξ, имеющей нормальное распределение, является доверительный интервал

$$s \cdot \gamma_1 < \sigma < s \cdot \gamma_2, \qquad (2.1.9)$$

где $\gamma_1 = \sqrt{\dfrac{n-1}{\chi^2_{\alpha/2;\,n-1}}}$, $\gamma_2 = \sqrt{\dfrac{n-1}{\chi^2_{1-\alpha/2;\,n-1}}}$, $s = \sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{k} m_i\left(x_i - \overline{x}_B\right)^2}$.

Коэффициенты γ_1 и γ_2, соответствующие доверительной вероятности $P = 1-\alpha$ и числу степеней свободы $\nu = n-1$, находятся по таблице (приложение 7).

Так как $n \to \infty$, распределение χ^2 приближается к нормальному распределению, то при достаточно большом объёме выборки $(n \ge 50)$ доверительный интервал для среднего квадратического отклонения можно найти по формуле

$$P\left(\frac{s}{1+u_{\alpha/2}\big/\sqrt{2n}} < \sigma < \frac{s}{1-u_{\alpha/2}\big/\sqrt{2n}}\right) = 1-\alpha, \qquad (2.1.10)$$

где $u_{\alpha/2}$ – квантиль стандартизированного нормального распределения, соответствующий доверительной вероятности $1-\alpha$.

2.2 Примеры решения типовых задач

2.2.1 Из генеральной совокупности, исследования случайной величины T – температура тела человека, измеряемая в течение определённого промежутка времени, извлечена выборка объёма $n = 100$. Данные представлены в виде статистического ряда

варианта t_i	36,2	36,4	36,6	36,8	37,0
частота m_i	6	18	52	20	4

Найти выборочную среднюю температуру, выборочную и исправленную дисперсии измерения температуры.

Решение. Находим выборочную среднюю по формуле (2.1.3):

$$\overline{t}_B = \frac{\sum_{i=1}^{5} m_i t_i}{n} = \frac{6\cdot 36{,}2 + 18\cdot 36{,}4 + 52\cdot 36{,}6 + 20\cdot 36{,}8 + 4\cdot 37{,}0}{100} = 36{,}596.$$

Находим выборочную дисперсию по формуле (2.1.4):

$$D_B = \frac{\sum_{i=1}^{5} m_i\left(t_i - \overline{t}_B\right)^2}{n} = \frac{6\cdot(36{,}2-36{,}596)^2 + 18\cdot(36{,}4-36{,}596)^2}{100} +$$

$$+\frac{52\cdot(36,6-36,596)^2+20\cdot(36,8-36,596)^2+4\cdot(37,0-36,596)^2}{100}=0,031184.$$

Находим исправленную дисперсию по формуле (2.1.5):

$$s^2=\frac{n}{n-1}\cdot D_B=\frac{100}{100-1}\cdot 0,031184=0,0315.$$

2.2.2 Из генеральной совокупности исследуемой случайной величины ξ произведена выборка объёмом $n=100$, которые записаны в виде интервального статистического ряда

Частичный интервал	$[2;4)$	$[4;6)$	$[6;8)$	$[8;10)$	$[10;12]$
Сумма частот вариант интервала	8	20	42	18	12

Найти выборочную среднюю, выборочную дисперсию и выборочное среднее квадратическое отклонение, исправленную дисперсию и исправленное среднее квадратическое отклонение наблюдаемых значений случайной величины ξ.

Решение. В начале находим середины интервалов и выбираем их в качестве вариант наблюдаемых значений случайной величины ξ: $x_1=3$, $x_2=5$, $x_3=7$, $x_4=9$, $x_5=11$.

Находим выборочную среднюю по формуле (2.1.3):

$$\overline{x}_B=\frac{\sum_{i=1}^{5}m_i x_i}{n}=\frac{8\cdot 3+20\cdot 5+42\cdot 7+18\cdot 9+12\cdot 11}{100}=7,12.$$

Находим выборочную дисперсию по формуле (2.1.4):

$$D_B=\frac{\sum_{i=1}^{5}m_i\left(x_i-\overline{x}_B\right)^2}{n}=\frac{8\cdot(3-7,12)^2+20\cdot(5-7,12)^2}{100}+$$

$$+\frac{42\cdot(7-7,12)^2+18\cdot(9-7,12)^2+12\cdot(11-7,12)^2}{100}=4,7056.$$

Находим исправленную дисперсию по формуле (2.1.5):

$$s^2=\frac{n}{n-1}\cdot D_B=\frac{100}{100-1}\cdot 4,7056=4,7531.$$

Выборочное среднее квадратическое отклонением равно $\sigma_B=\sqrt{D_B}=$ $=\sqrt{4,7056}=2,169$, а «исправленное» среднее квадратическое отклонение равно $s=\sqrt{s^2}=\sqrt{4,7531}=2,18$.

2.2.3 Пусть случайная величина ξ имеет нормальное распределение с известным средним квадратическим отклонением $\sigma=3$. Найти доверительный интервал для математического ожидания, если среднее выборочное наблюдаемых значений $n=36$ прямых равноточных измерений равно $\overline{x}_B=18$, а уровень значимости равен $\alpha=0,05$.

Решение. Пользуясь таблицей функции Лапласа (приложение 3), определим квантиль стандартизированного нормального распределения, учитывая, что доверительная вероятность равна $P = 1-\alpha = 1-0,05 = 0,95$:

$$2\cdot\Phi(u_{\alpha/2}) = 1-\alpha,\ 2\cdot\Phi(u_{\alpha/2}) = 0,95,\ \Phi(u_{\alpha/2}) = 0,475,\ u_{\alpha/2} = 1,96.$$

Для определения доверительного интервала для математического ожидания воспользуемся неравенством (2.1.7): $\overline{x}_B - u_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_B + u_{\alpha/2}\cdot\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

$$18-1,96\cdot\frac{3}{\sqrt{36}} < a < 18+1,96\cdot\frac{3}{\sqrt{36}} \text{ или } 17,02 < a < 18,98.$$

Следовательно, искомый доверительный интервал имеет вид $(17,02;18,98)$. Раскроем смысл полученного результата: если будет произведено достаточно большое число выборок заданного объёма, то в 95 % случаев из них доверительные интервалы накроют математическое ожидание и только в 5 % случаев оцениваемое математическое ожидание может выйти за пределы доверительных интервалов.

2.2.4 Найти минимальный объём выборки, на основании которой можно было бы оценить математическое ожидание времени исполнения некоторой операции с ошибкой, не превышающей 15 часов, и надёжностью $P = 1-\alpha = 0,9$, если предположить, что время выполнения указанной операции ξ является случайной величиной, имеющей нормальное распределение с средним квадратическим отклонением $\sigma = 60$.

Решение. Пользуясь таблицей функции Лапласа (приложение 3), определим квантиль стандартизированного нормального распределения:

$$2\cdot\Phi(u_{\alpha/2}) = 1-\alpha,\ 2\cdot\Phi(u_{\alpha/2}) = 0,9,\ \Phi(u_{\alpha/2}) = 0,45,\ u_{\alpha/2} = 1,64.$$

Воспользуемся формулой, связывающей предельную погрешность ε оценки математического ожидания по выборочной средней: $\varepsilon = u_{\alpha/2}\sigma\big/\sqrt{n}$. Следовательно, $n \geq \dfrac{u_{\alpha/2}^2\cdot\sigma^2}{\varepsilon^2} = \dfrac{1,64^2\cdot 60^2}{15^2} = 43,0336$. Таким образом, $n = 44$.

2.2.5 В результате исследования некоторой случайной величины ξ – линейный размер некоторого объекта, подчинённого нормальному закону распределения, произведена выборка объёмом $n = 5$: $x_1 = 2, x_2 = 2,1, x_3 = 2,2, x_4 = 2,1$, $x_5 = 2$. Оценить с помощью доверительного интервала математическое ожидание линейного размера. Доверительную вероятность $P = 1-\alpha$ принять равной 0,99. Найти минимальное число измерений, которое необходимо выполнить, чтобы с надёжностью $1-\alpha = 0,99$ можно было утверждать, что предельная погрешность точечной оценки исследуемой величины не превышала 0,002. Построить доверительный интервал, покрывающий среднее квадратическое отклонение σ с надёжностью $P = 1-\alpha = 0,99$.

Решение. Найдём точечные оценки неизвестных параметров: математического ожидания a и среднего квадратического отклонения σ.

$$\hat{a} = \overline{x}_B = \frac{2 \cdot 2 + 2 \cdot 2{,}1 + 1 \cdot 2{,}2}{5} = 2{,}08.$$

$$\hat{\sigma} = s = \sqrt{\frac{1}{5-1}\left(2 \cdot (2-2{,}08)^2 + 2 \cdot (2{,}1-2{,}08)^2 + 1 \cdot (2{,}2-2{,}08)^2\right)} = 0{,}08.$$

По таблице распределения Стьюдента (приложение 5) по доверительной вероятности $P = 1 - \alpha = 0{,}99$ и числу степеней свободы $\nu = n - 1 = 4$ находим квантиль t-распределения: $t_{\alpha/2;\, n-1} = t_{0{,}005;\, 4} = 4{,}604$. Для определения доверительного интервала воспользуемся неравенством (2.1.8).

$$\overline{x}_B - t_{\alpha/2;\, n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} < a < \overline{x}_B + t_{\alpha/2;\, n-1} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}.$$

$$2{,}08 - 4{,}604 \cdot \frac{0{,}08}{\sqrt{5}} < a < 2{,}08 + 4{,}604 \cdot \frac{0{,}08}{\sqrt{5}} \text{ или } 1{,}915 < a < 2{,}245.$$

Следовательно, искомый доверительный интервал имеет вид $(1{,}915; 2{,}245)$. Таким образом, если будет произведено достаточно большое число выборок заданного объёма, то в 99 % случаев из них доверительные интервалы накроют математическое ожидание и только в 1 % случаев оцениваемое математическое ожидание может выйти за пределы доверительных интервалов.

Для расчёта истинного числа измерений, необходимых для определения истинного линейного размера объекта с погрешностью, не превышающей $\varepsilon = 0{,}02$, воспользуемся формулой предельной погрешности: $\varepsilon = t_{\alpha/2;\, n-1}\, s \big/ \sqrt{n}$.

Следовательно, $n \ge \dfrac{t^2_{\alpha/2;\, n-1} \cdot s^2}{\varepsilon^2} = \dfrac{(4{,}604)^2 \cdot (0{,}08)^2}{(0{,}002)^2} \approx 33{,}91$ измерения.

Таким образом, для того чтобы предельная погрешность ε истинного значения линейного размера исследуемого объекта не превышала $\varepsilon = 0{,}002$, следует, помимо пяти проделанных измерений, выполнить ещё $n - 5 = 34 - 5 = 29$ измерений.

По заданной доверительной вероятности $P = 1 - \alpha = 0{,}99$ и числу степеней свободы $\nu = n - 1 = 5 - 1 = 4$, используя таблицу доверительных интервалов для среднего квадратического отклонения σ (приложение 7), находим нижнюю границу $\gamma_1 = 0{,}519$ и верхнюю границу $\gamma_2 = 4{,}390$. Для определения доверительного интервала для среднего квадратического отклонения воспользуемся неравенством (2.1.9): $s \cdot \gamma_1 < \sigma < s \cdot \gamma_2$.

Следовательно, искомый доверительный интервал равен:

$$0{,}08 \cdot 0{,}519 < \sigma < 0{,}08 \cdot 4{,}390 \text{ или } 0{,}04152 < \sigma < 0{,}3512.$$

Таким образом, искомый доверительный интервал имеет вид $(0{,}04152; 0{,}3512)$. То есть, если будет произведено достаточно большое число выборок заданного объёма, то в 99 % случаев из них доверительные интервалы накроют среднее квадратическое отклонение и только в 1 % случаев оцениваемое среднее квадратическое отклонение может выйти за пределы доверительных интервалов.

2.3 Задания для решения на практическом занятии

2.3.1 Из генеральной совокупности, исследования СВ ξ, извлечена выборка объёма $n = 100$. Данные представлены в виде статистического ряда:

варианта x_i	7,2	7,6	8,4	8,0	7,4
частота m_i	8	20	45	15	12

Найти выборочную среднюю, выборочную и исправленную дисперсии и соответствующие средние квадратические отклонения.

2.3.2 В итоге пяти измерений длины стержня одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты (в *мм*): $x_1 = 70$, $x_2 = 72$, $x_3 = 81$, $x_4 = 83$, $x_5 = 81$. Найти: а) выборочную среднюю длину стержня; б) выборочную и исправленную дисперсию ошибок прибора; в) выборочное и исправленное среднее квадратическое отклонение.

2.3.3 В итоге шести измерений некоторой физической величины одним прибором (без систематических ошибок) получены следующие результаты: $x_1 = 2$, $x_2 = 5$, $x_3 = 8$, $x_4 = 7$, $x_5 = 5$, $x_6 = 3$. Найти: а) выборочную среднюю исследуемой величины; б) выборочную и исправленную дисперсию; в) выборочное и исправленное среднее квадратическое отклонение.

2.3.4 Среди студентов факультета производится измерение роста. Из общего числа студентов, которые произвели измерения роста, произведена выборка в количестве 100 студентов. В результате получен интервальный статистический ряд.

Рост	Число студентов
$[160;164)$	9
$[164;168)$	15
$[168;172)$	20
$[172;176)$	29
$[176;180)$	17
$[180;184)$	7
$[184;188]$	3

Найти: а) выборочную среднюю роста обследованных студентов; б) выборочную и исправленную дисперсию роста обследованных студентов; в) выборочное и исправленное среднее квадратическое отклонение роста обследованных студентов.

2.3.5 В результате опыта произведено изучение случайной величины η. Из генеральной совокупности извлечена выборка, которая представлена в виде таблицы, представленной в задаче № 1.3.10. Найти: а) выборочную среднюю исследуемой величины, определённую в задаче № 1.3.10; б) выборочную и исправленную дисперсию данной случайной величины; в) выборочное и исправленное среднее квадратическое отклонение этой величины.

2.3.6 Найти доверительный интервал для оценки с надёжностью 0,98 неизвестного математического ожидания нормально распределённой случайной величины ξ генеральной совокупности, если заданы генеральное среднее квадратическое отклонение $\sigma = 4$, а выборочная средняя равна $\overline{x}_B = 20$ и объём выборки равен $n = 80$.

2.3.7 Выборка из большой партии электроламп содержит 200 ламп. Средняя продолжительность горения лампы выборки оказалась равной 800 часов. Найти с надёжностью 0,90 доверительный интервал для средней продолжительности горения лампы всей партии, если известно, что среднее квадратическое отклонение, продолжительности горения лампы равно 50 часов.

2.3.8 Станок-автомат штампует детали. По выборке объёма $n = 200$ вычислена выборочная средняя длины изготовленных деталей. Найти с надёжностью 0,99 точность ε, с которой выборочная средняя оценивает математическое ожидание линейного размера детали, если среднее квадратическое отклонение равно 10 *мм*.

2.3.9 Найти минимальный объём выборки, при котором с надёжностью 0,95, точность оценки математического ожидания генеральной совокупности нормально распределённой случайной величины по выборочной средней будет равна $\varepsilon = 0,4$, если среднее квадратическое отклонение равно $\sigma = 5$.

2.3.10 По данным независимых равноточных измерений некоторой физической величины найдена средняя выборочная $\overline{x}_B = 55$ и исправленное среднее квадратическое отклонение $s = 4$. Оценить истинное значение измеряемой величины при помощи доверительного интервала с надёжностью $P = 1 - \alpha = 0,95$.

2.3.11 По данным выборки объёма $n = 50$ из генеральной совокупности найдено исправленное среднее квадратическое отклонение $s = 2$ нормально распределённой случайной величины. Найти доверительный интервал, покрывающий генеральное среднее квадратическое отклонение σ с надёжностью 0,9.

2.3.12 Найти минимальный объём выборки, на основании которой можно было бы оценить математическое ожидание времени исполнения некоторой работы с ошибкой, не превышающей 10 часов, и надёжностью $P = 1 - \alpha = 0,99$, если предположить, что время выполнения указанной работы ξ является случайной величиной, имеющей нормальное распределение со средним квадратическим отклонением $\sigma = 80$.

2.3.13 В результате исследования некоторой случайной величины ξ, подчинённой нормальному закону распределения, произведена выборка: $x_1 = 3{,}5,\ x_2 = 4{,}1,\ x_3 = 5{,}7,\ x_4 = 4{,}1,\ x_5 = 3{,}5$. Оценить с помощью доверительного интервала математическое ожидание измерений. Доверительную вероятность $P = 1 - \alpha$ принять равной 0,95. Найти минимальное число измерений, которое необходимо выполнить, чтобы с надёжностью 0,95 можно было утверждать, что предельная погрешность точечной оценки исследуемой величины не превышала 0,005. Построить доверительный интервал, покрывающий среднее квадратическое отклонение σ с надёжностью $P = 1 - \alpha = 0{,}95$.

2.3.14 Определить численность выборки при обследовании остатков на расчётных счетах у клиентов банка, чтобы с вероятностью 0,9 предельная ошибка равнялась 15 денежным единицам, а среднее квадратическое отклонение – 350 денежным единицам.

2.3.15 При подсчёте объёмов ежедневных продаж джемперов предпринимателем в течение месяца получены следующие результаты: 1; 8; 7; 10; 13; 4; 9; 9; 10; 14; 8; 7; 9; 6; 8; 11; 3; 15; 5; 5; 11; 6; 5; 12; 6; 7; 8; 14; 11; 9. Найти: а) выборочную среднюю ежедневных продаж джемперов предпринимателем; б) выборочную и исправленную дисперсию; в) выборочное и исправленное среднее квадратическое отклонение объёмов продаж джемперов.

2.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

2.4.1 Из генеральной совокупности случайной величины ξ извлечена выборка, которая представлена в виде таблицы в задаче 1.4.1. Найти выборочную среднюю, выборочную дисперсию и выборочное среднее квадратическое отклонение, исправленную дисперсию и исправленное среднее квадратическое отклонение наблюдаемых значений случайной величины ξ.

2.4.2 Из генеральной совокупности нормально распределённой случайной величины ξ – месячной заработной платы рабочих предприятия, рассчитанной в условных денежных единицах, извлечена выборка: x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7. Требуется:

1) с помощью доверительного интервала оценить математическое ожидание случайной величины ξ – месячной заработной платы рабочих предприятия, при известном среднем квадратическом отклонении $\sigma = \sigma_0$ и уровне значимости $\alpha = \alpha_1$;

2) найти минимальный объём выборки, на основании которой можно было бы оценить математическое ожидание месячной заработной платы рабочих с ошибкой, не превышающей ε_1 условных денежных единиц месячной заработной оплаты при известном среднем квадратическом отклонении $\sigma = \sigma_0$ и уровне значимости $\alpha = \alpha_2$;

3) с помощью доверительного интервала оценить математическое ожидание нормально распределённой случайной величины ξ при неизвестном среднем квадратическом отклонении и уровне значимости $\alpha = \alpha_3$;

4) найти минимальный объём выборки, на основании которой можно было бы оценить математическое ожидание случайной величины ξ – месячной заработной платы рабочих с ошибкой, не превышающей ε_2 условных денежных единиц месячной заработной оплаты при неизвестном среднем квадратическом отклонении и уровне значимости $\alpha = \alpha_1$;

5) с помощью доверительного интервала оценить при уровне значимости $\alpha = \alpha_2$ среднее квадратическое отклонение нормально распределённой случайной величины ξ.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	σ_0	α_1	α_2	α_3	ε_1	ε_1
2.4.1.1	3,2	3,5	3,7	4,0	3,7	3,5	3,2	0,5	0,05	0,01	0,40	0,164	0,023
2.4.1.2	3,8	4,2	4,6	5,0	4,6	4,2	3,8	0,6	0,10	0,02	0,01	0,154	0,038
2.4.1.3	4,5	5,0	5,5	6,0	5,5	5,0	4,5	1,0	0,20	0,05	0,02	0,125	0,047
2.4.1.4	5,2	5,8	6,4	7,0	6,4	5,8	5,2	1,2	0,01	0,10	0,05	0,105	0,015
2.4.1.5	5,9	6,6	7,3	8,0	7,3	6,6	5,9	1,4	0,02	0,01	0,20	0,172	0,059
2.4.1.6	6,6	7,4	8,2	9,0	8,2	7,4	6,6	1,6	0,40	0,02	0,10	0,147	0,065
2.4.1.7	7,3	8,2	9,1	10,0	9,1	8,2	7,3	1,8	0,20	0,05	0,40	0,115	0,077
2.4.1.8	7,7	8,8	9,9	11,0	9,9	8,8	7,7	2,0	0,02	0,10	0,01	0,136	0,083
2.4.1.9	5,4	7,6	9,8	12,0	9,8	7,6	5,4	4,0	0,05	0,01	0,02	0,183	0,009
2.4.1.10	3,1	6,4	9,7	13,0	9,7	6,4	3,1	5,0	0,01	0,02	0,05	0,199	0,092
2.4.1.11	0,7	0,8	0,9	1,0	0,9	0,8	0,7	0,2	0,10	0,05	0,20	0,167	0,024
2.4.1.12	1,4	1,6	1,8	2,0	1,8	1,6	1,4	0,5	0,40	0,10	0,10	0,152	0,039
2.4.1.13	2,1	2,4	2,7	3,0	2,7	2,4	2,1	0,7	0,05	0,01	0,40	0,124	0,043
2.4.1.14	1,3	1,7	2,1	2,5	2,1	1,7	1,3	0,9	0,10	0,02	0,01	0,106	0,012
2.4.1.15	2,0	2,5	3,0	3,5	3,0	2,5	2,0	1,2	0,20	0,05	0,02	0,173	0,051
2.4.1.16	3,3	3,7	4,1	4,5	4,1	3,7	3,3	0,8	0,01	0,10	0,05	0,148	0,068
2.4.1.17	4,0	4,5	5,0	5,5	5,0	4,5	4,0	1,1	0,02	0,01	0,20	0,113	0,072
2.4.1.18	4,7	5,3	5,9	6,5	5,9	5,3	4,7	1,2	0,40	0,02	0,10	0,138	0,084
2.4.1.19	5,4	6,1	6,8	7,5	6,8	6,1	5,4	1,4	0,10	0,05	0,40	0,185	0,007
2.4.1.20	6,1	6,9	7,7	8,5	7,7	6,9	6,1	1,6	0,05	0,10	0,01	0,196	0,098
2.4.1.21	6,8	7,7	8,6	9,5	8,6	7,7	6,8	1,6	0,20	0,01	0,02	0,163	0,028
2.4.1.22	7,5	8,5	9,5	10,5	9,5	8,5	7,5	2,0	0,01	0,02	0,05	0,155	0,035
2.4.1.23	6,7	8,3	9,9	11,5	9,9	8,3	6,7	3,2	0,02	0,05	0,10	0,127	0,044
2.4.1.24	4,4	7,1	9,8	12,5	9,8	7,1	4,4	3,0	0,40	0,10	0,20	0,107	0,017
2.4.1.25	2,1	5,9	9,7	13,5	9,7	5,9	2,1	4,1	0,05	0,01	0,40	0,179	0,056
2.4.1.26	0,9	1,1	1,3	1,5	1,3	1,1	0,9	0,4	0,10	0,02	0,01	0,143	0,062
2.4.1.27	1,7	2,0	2,3	2,6	2,3	2,0	1,7	0,6	0,20	0,05	0,02	0,117	0,075
2.4.1.28	2,4	2,8	3,2	3,6	3,2	2,8	2,4	0,9	0,01	0,10	0,05	0,132	0,081

2.4.1.29	1,0	1,6	2,2	2,8	2,2	1,6	1,0	0,8	0,02	0,01	0,20	0,187	0,005
2.4.1.30	1,6	2,3	3,0	3,7	3,0	2,3	1,6	1,4	0,40	0,02	0,10	0,193	0,096

3 СТАТИСТИЧЕСКАЯ ПРОВЕРКА ГИПОТЕЗ (практическое занятие № 3)

Содержание: статистическая гипотеза, статистический критерий значимости проверки нулевой гипотезы, проверка гипотезы о нормальном распределении, статистическая проверка непараметрических гипотез по критерию согласия χ^2 Пирсона.

3.1 Теоретический материал по теме практического занятия

При решении экономических и инженерных задач приходится делать предположения о виде законов распределения случайных величин или о соотношении между их числовыми характеристиками. Такие предположения в математической статистике называют *гипотезами.*

Определение 3.1.1 Статистическая гипотеза называется *непараметрической*, если в ней сформулированы предположения относительно функции распределения.

Определение 3.1.2 Статистическая гипотеза называется *параметрической*, если в ней сформулированы предположения относительно значений параметров функции распределения исследуемой случайной величины.

Одновременно с выдвигаемой гипотезой законов распределения случайной величины можно выдвинуть и другие альтернативные гипотезы. Если выдвинутая гипотеза отвергается, то принимается другая альтернативная гипотеза. Исходя из этого предположения, гипотезы подразделяются на нулевые и альтернативные.

Определение 3.1.3 *Нулевой* гипотезой H_0 называют основную или выдвинутую первоначально гипотезу.

При выдвинутой нулевой гипотезе различие между сравниваемыми величинами отсутствуют, а наблюдаемые отклонения объясняются лишь случайными изменениями выборки.

Определение 3.1.4 *Альтернативной* называется гипотеза H_a, которая составляет конкуренцию нулевой гипотезе H_0 в том смысле, что если нулевая гипотеза отвергается, то за основу принимается альтернативная гипотеза.

Определение 3.1.5 Параметрическая гипотеза называется *простой*, если она содержит только одно предположение относительно параметров распределения.

Например, если a – математическое ожидание случайной величины ξ, то гипотеза $H_0: a = 0$ является простой гипотезой.

Определение 3.1.6 Параметрическая гипотеза называется *сложной*, если она состоит из конечного или бесконечного числа простых гипотез.

Например, если a – математическое ожидание нормально распределённой случайной величины, то альтернативная гипотеза $H_a : a > 1$ является сложной, так как она состоит из бесконечного множества простых гипотез $H_0 : a = c$, где c – любое число большее единицы.

Определение 3.1.7 *Статистическим критерием* называют случайную величину K, с помощью которой принимаются решения о принятии или отвержении нулевой гипотезы.

Для проверки нулевых гипотез по выборочным данным рассчитываются частные значения входящих в критерий величин и таким образом получают частное или наблюдаемое значение критерия

Определение 3.1.8 *Ошибкой первого рода* называется ошибка отклонения верной нулевой гипотезы H_0.

Определение 3.1.9 *Уровнем значимости* статистического критерия называется вероятность α совершения ошибки первого рода.

Определение 3.1.10 *Ошибкой второго рода* называется ошибка принятия ложной нулевой гипотезы H_0.

Определение 3.1.11 Нулевой непараметрической гипотезой называется гипотеза относительного общего вида функции распределения случайной величины ξ, то есть гипотеза вида $H_0 : F(x) = F_0(x)$.

Проверка гипотезы о предполагаемом распределении производится на основании вычисления некоторой выборочной статистики (критерия), распределение которой получено из предположения истинности нулевой гипотезы и сравнения наблюдаемого значения этой выборочной статистики с критическим значением. Приняв ту или иную гипотезу, из неё выводят определённое следствие и рассматривают, насколько оно оправдывается на опыте, то есть проверяется согласие принятой гипотезы с опытом.

Для проверки нулевой гипотезы о виде закона распределения случайной величины рассмотрим один из наиболее распространённых критериев согласия, а именно критерий χ^2 Пирсона. Данный критерий позволяет проверить гипотезу о согласии данных выборки с конкретным распределением для любой случайной величины, как непрерывной, так и дискретной.

Критерий χ^2 – один из наиболее используемых критериев для проверки гипотезы о виде закона распределения случайных величин. Указанный критерий позволяет проводить проверку гипотезы соответствия опытного закона распределения теоретическому закону распределения не только в случаях, когда последний известен полностью, но и тогда, когда параметры теоретического закона распределения определяются на основе опытных данных. Таким образом, χ^2 Пирсона даёт возможность произвести проверку согласия эмпирической функции распределения с гипотетической функцией $F(x)$, принадлежащей к некоторому множеству функций определённого вида (нормальных, показательных, биномиальных и так далее).

Предположим, что проведено n независимых опытов, в каждом из которых случайная величина ξ приняла определённое значение. Результаты опытов оформляются в виде статистического интервального ряда, который содержит k интервалов, с указанием частот m_i, попадания случайной величины ξ в заданный интервал, где $i=\overline{1;k}$, а $\sum_{i=1}^{k} m_i = n$. При этом в каждом из интервалов желательно иметь 5 – 10 наблюдаемых значений случайной величины ξ.

Рассмотрим схему применения критерия χ^2 Пирсона.

1. Исходя из теоретического или предполагаемого закона распределения, находят вероятности p_i попадания случайной величины ξ в каждый из k полученных интервалов.

2. Вычисляем значение критерия χ^2 (выборочную статистику), которое соответствует опытным данным по формуле

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}. \tag{3.1.1}$$

3. Определяем число ν степеней свободы распределения по формуле

$$\nu = k - r - 1. \tag{3.1.2}$$

где r - число параметров предполагаемого закона распределения, вычисленных опытным путём, а k - число частичных интервалов.

4. Критерий χ^2 построен таким образом, что чем ближе к нулю наблюдаемое значение χ^2, тем вероятнее, что нулевая гипотеза справедлива. Поэтому для проверки нулевой гипотезы применяется критерий χ^2 с правосторонней критической областью. Для того чтобы проверить нулевую гипотезу, необходимо найти по таблицам квантилей χ^2-распределения по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы ν критическое значение $\chi^2_{\alpha;\nu}$, удовлетворяющее условию $P\left(\chi^2 \geq \chi^2_{\alpha;\nu}\right) = \alpha$. Сравнивая наблюдаемое значение выборочной статистики χ^2, вычисленное по формуле (3.1.1), с критическим значением $\chi^2_{\alpha;\nu}$, принимаем одно из двух решений:

а) если $\chi^2_{набл} \geq \chi^2_{\alpha;\nu}$, то нулевая гипотеза H_0 отвергается в пользу альтернативной H_a, то есть считается, что гипотетическая функция $F(x)$ не согласуется с результатами эксперимента;

б) если $\chi^2_{набл} < \chi^2_{\alpha;\nu}$, то считается, что нет оснований для отклонения нулевой гипотезы H_0, то есть гипотетическая функция $F(x)$ хорошо согласуется с результатами эксперимента.

3.2 Примеры решения типовых задач

3.2.1 Результаты исследования 200 предприятий по стоимости основных производственных фондов (случайная величина ξ) в условных денежных единицах представлены в виде сгруппированного интервального статистического ряда:

Интервалы стоимости производственных фондов, у. е.	$[19;20)$	$[20;21)$	$[21;22)$	$[22;23)$	$[23;24)$	$[24;25]$
Частоты m_i	10	26	56	64	30	14

Проверить нулевую гипотезу о нормальном распределении стоимости производственных фондов предприятий при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

Решение. Из условия следует, что точные параметры предполагаемого нормального распределения неизвестны, поэтому нулевая гипотеза может быть записана в виде: $H_0 : F(x)$ является функцией нормального распределения с двумя параметрами, математическим ожиданием $M(x) = \hat{a} = \overline{x}_B$ и дисперсией $D(x) = \hat{\sigma}^2 = s^2$.

Для проверки предложенной нулевой гипотезы определяем значения x_i' середин интервалов и находим точечные оценки математического ожидания и среднего квадратического отклонения нормально распределённой случайной величины ξ.

$$\hat{a} = \overline{x}_B = \frac{\sum_{i=1}^{6} m_i x_i'}{n} =$$

$$= \frac{10 \cdot 19{,}5 + 26 \cdot 20{,}5 + 56 \cdot 21{,}5 + 64 \cdot 22{,}5 + 30 \cdot 23{,}5 + 14 \cdot 24{,}5}{200} = 22{,}1 \text{ (у. е.)};$$

$$\hat{\sigma}^2 = s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{6} m_i (x_i' - \overline{x}_B)^2}{n-1} =$$

$$= \frac{10 \cdot (-2{,}6)^2 + 26 \cdot (-1{,}6)^2 + 56 \cdot (-0{,}6)^2 + 64 \cdot 0{,}4^2 + 30 \cdot 1{,}4^2 + 14 \cdot 2{,}4^2}{199} = 1{,}52 \text{ (у. е.)};$$

$$\hat{\sigma} = s = \sqrt{1{,}52} \text{ (у. е.)}.$$

Для проверки гипотезы о нормальном распределении случайной величины ξ с помощью критерия χ^2 в начале интервалы наблюдаемых значений нормируют, то есть выражают их в единицах среднего квадратического отклонения s: $u_i = (x_i - \overline{x}_B)/s$, причём наименьшее значение u_i полагают равным $(-\infty)$, наибольшее – $(+\infty)$.

Вычислим теоретические вероятности p_i попадания случайной величины ξ с математическим ожиданием 22,1 и средним квадратическим отклонением 1,52 условных денежных единиц в частичные интервалы $\left[x_{i-1};x_i\right)$ по формуле

$$p_i = P\left(x_{i-1} \le \xi < x_i\right) = \Phi(u_i) - \Phi(u_{i-1})\,; \ \ (i = \overline{1;6}),$$

где $\Phi(u_i) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\displaystyle\int_0^{u_i} e^{-\frac{t^2}{2}}dt$, значения которой находят по таблице значений функции Лапласа (приложение 3).

Например, вероятность того, что случайная величина попадёт в первый частичный интервал $(-\infty;20)$, равна:

$$p_1 = P\left(-\infty < \xi < 20\right) = \Phi\left(\frac{20-20,1}{1,233}\right) - \Phi\left(\frac{-\infty-22,1}{1,233}\right) = \Phi(-1,70) - \Phi(-\infty) =$$

$$= \Phi(+\infty) - \Phi(1,70) = 0,5 - 0,45543 = 0,04457\,.$$

$$p_2 = P\left(20 \le \xi < 21\right) = \Phi\left(\frac{21-20,1}{1,233}\right) - \Phi\left(\frac{20-22,1}{1,233}\right) = \Phi(-0,89) - \Phi(-1,70) =$$

$$= \Phi(1,70) - \Phi(0,89) = 0,45543 - 0,31327 = 0,14216$$

и так далее. После этого вычисляются теоретические частоты нормального распределения $n_{теор} = np_i$ и наблюдаемое значение критерия $\chi^2_{набл} = \displaystyle\sum_{i=1}^{k}\frac{\left(m_i - np_i\right)^2}{np_i}$.

Вычисления, необходимые для определения наблюдаемого значения выборочной статистики χ^2, приведём в таблице:

Интервалы изменения наблюдаемых значений СВ ξ	Частоты m_i	Нормированные интервалы $\left[u_{i-1};u_i\right)$	p_i	np_i	$(m_i - np_i)^2$	$\dfrac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$
$[19;20)$	10	$(-\infty;-1,70)$	0,04457	9	1	0,11
$[20;21)$	26	$[-1,70;-0,89)$	0,14216	28,4	5,76	0,20
$[21;22)$	56	$[-0,89;-0,08)$	0,28918	56,2	0,04	0,0007
$[22;23)$	64	$[-0,08;+0,73)$	0,29918	59,8	17,64	0,29
$[23;24)$	30	$[+0,73;+1,54)$	0,17092	34,2	17,64	0,52
$[24;25]$	14	$[+1,54;+\infty)$	0,06178	12,4	2,56	0,23
$\sum$	200		1,00000	200,0		$\chi^2_{набл} = 1,35$

В результате вычислений получили наблюдаемое значение критерия $\chi^2_{набл} = 1{,}35$. Найдём по таблице квантилей χ^2-распределения по заданному уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и числу степеней свободы $\nu = k - r - 1 = 6 - 2 - 1 = 3$ критическое значение $\chi^2_{0{,}05;3} = 7{,}815$. Так как $\chi^2_{набл} = 1{,}35 < \chi^2_{0{,}05;3} = 7{,}815$, то нет оснований для отклонения нулевой гипотезы о нормальном распределении стоимости производственных фондов предприятий с параметрами $a = 22{,}1$ и $\sigma = 1{,}233$.

3.2.2 В цехе с 5 станками ежедневно регистрируется число вышедших из строя станков (случайная величина ξ). Всего проведено 100 наблюдений. Получены следующие числовые данные $\left(n = \sum_{i=1}^{6} m_i = 100 \right)$:

Число вышедших из строя станков	0	1	2	3	4	5
Частоты m_i	8	28	31	18	9	6

Проверить гипотезу о том, что распределение числа вышедших из строя станков (случайная величина ξ) имеет распределение Пуассона при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

Решение. Согласно условию задачи, необходимо проверить нулевую гипотезу H_0: $F(x)$ – функция распределения числа вышедших из строя станков имеет вид $F(x,\mu) = \sum_{i=1}^{x} \frac{\mu^i \cdot e^{-\mu}}{i!}$ с параметром $\hat{\mu} = \overline{x}_B = \frac{8 \cdot 0 + 28 \cdot 1 + 31 \cdot 2 + 18 \cdot 3}{100} + \frac{9 \cdot 4 + 6 \cdot 5}{100} = 2{,}1$. Вычислим теоретические вероятности p_i выхода из строя x_i станков в течение n наблюдений по формуле Пуассона (приложение 1):

$$p_i = P_n(x_i) = \frac{\hat{\mu}^{x_i} \cdot e^{-\hat{\mu}}}{x_i!} = \frac{(2{,}1)^{x_i} \cdot e^{-2{,}1}}{x_i!}; \; x_i = \overline{0;5}.$$

Вычисления, необходимые для определения наблюдаемого значения выборочной статистики χ^2, приведём в таблице:

Число вышедших из строя станков	Частоты m_i	p_i	np_i	$(m_i - np_i)^2$	$\frac{(m_i - np_i)^2}{np_i}$
0	8	0,122	12,2	17.64	1,45
1	28	0,257	25,7	5,29	0,21
2	31	0,270	27,0	16,00	0,59
3	18	0,189	18,9	0,81	0,04
4	9	0,099	9,9	0,81	0,08
5	6	0,063	6,3	0,03	0,01
$\sum$	100	1,000	100,0		$\chi^2_{набл} = 2{,}38$

В результате вычислений получили наблюдаемое значение критерия $\chi^2_{набл} = 2{,}38$. Найдём по таблице квантилей χ^2-распределения по заданному уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и числу степеней свободы $\nu = k - r - 1 = 6 - 1 - 1 = 4$ критическое значение $\chi^2_{0,05;4} = 9{,}488$. Так как $\chi^2_{набл} = 2{,}38 < \chi^2_{0,05;3} = 9{,}488$, то нет оснований для отклонения нулевой гипотезы о том, что распределение числа вышедших из строя станков является распределением Пуассона с параметром $\mu = 2{,}1$.

3.3 Задания для решения на практическом занятии

3.3.1 Используя критерий χ^2 Пирсона, при уровне значимости 0,05 установить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности с данными выборки объёма $n = 100$.

Частичный интервал	$[4;9)$	$[9;14)$	$[14;19)$	$[19;24)$	$[24;29)$	$[29;34)$	$[34;39]$
Частоты m_i	5	9	14	41	15	10	6

3.3.2 Имеются данные распределения товарооборота 50 магазинов города за год. Данные товарооборота приведены в таблице, где в первом столбце указан товарооборот в условных денежных единицах, а во втором – число магазинов, товарооборот которых оказался в данном интервале.

Частичный интервал	Частоты m_i	Частичный интервал	Частоты m_i	Частичный интервал	Частоты m_i
$[70;100)$	1	$[190;220)$	8	$[310;340)$	2
$[100;130)$	2	$[220;250)$	8	$[340;370)$	2
$[130;160)$	5	$[250;280)$	6	$[370;400)$	1
$[160;190)$	8	$[280;310)$	5	$[400;430)$	2

Используя критерий χ^2 Пирсона, при уровне значимости 0,10 установить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности с данными выборки объёма $n = 50$.

3.3.3 Из большой партии деталей было отобрано 500 штук с целью исследования закона распределения деталей по линейной длине. Результаты опытов приведены в таблице:

Частичный интервал	Частоты m_i	Частичный интервал	Частоты m_i
$[19{,}85;19{,}95)$	160	$[20{,}35;20{,}45)$	15
$[19{,}95;20{,}05)$	125	$[20{,}45;20{,}55)$	13
$[20{,}05;20{,}15)$	80	$[20{,}55;20{,}65)$	12
$[20{,}15;20{,}25)$	50	$[20{,}65;20{,}75)$	8
$[20{,}25;20{,}35)$	35	$[20{,}75;20{,}85]$	2

Используя критерий χ^2 Пирсона, при уровне значимости 0,02, установить, согласуется ли гипотеза о показательном распределении генеральной совокупности с данными выборки объёма $n = 500$.

3.3.4 На телефонной станции производились наблюдения за числом неправильных соединений в минуту. Всего проведено 200 наблюдений. Получены следующие числовые данные $\left(n = \sum_{i=1}^{6} m_i = 100 \right)$:

Число неверных соединений (случайная величина ξ)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Частоты m_i	8	12	20	29	31	33	27	24	10	6

Проверить гипотезу о том, что распределение числа вышедших из строя станков (случайная величина ξ) имеет распределение Пуассона при уровне значимости $\alpha = 0{,}1$.

3.3.5 Данные об урожайности ржи на различных участках сельскохозяйственного предприятия приведены в следующей таблице:

Урожайность, ц/га	$[8;11)$	$[11;14)$	$[14;17)$	$[17;20)$	$[20;23)$	$[23;26)$	$[26;29]$
Доля участка, % общей площади	3	10	24	30	20	8	5

Составить интервальный статистический ряд распределения относительных частот наблюдаемых значений непрерывной случайной величины ξ – урожайности ржи на различных участках сельхозугодий. Построить гистограмму и полигон относительных частот урожайности ржи. По видам гистограммы и полигона относительных частот случайной величины ξ сделать предварительный выбор вида закона распределения урожайности ржи, в центнерах с гектара, на различных участках сельхозугодий. Найти эмпирическую функцию распределения и построить её график. Вычислить числовые характеристики выборки: среднюю выборочную, выборочную дисперсию, выборочное среднеквадратическое отклонение.

Найти интервальные оценки параметров нормального распределения (математического ожидания и среднего квадратического отклонения) с доверительной вероятностью $P = 1 - \alpha = 0{,}98$.

Построить доверительный интервал для математического ожидания урожайности ржи, если известно среднее квадратическое отклонение $\sigma = 6$ ц/га. Проверить согласие эмпирической функции распределения с модельной нормальной функцией распределения при помощи критерия χ^2 Пирсона.

3.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

3.4.1 При исследовании непрерывной случайной величины ξ, эксперимент продублировали n раз при одних и тех же условиях. В результате эксперимента все полученные значения случайной величины ξ попали в промежуток $[x_0;x_k]$. После обработки данных интервал наблюдаемых значений случайной величины разбит на интервалы равной длины $[x_0;x_1)$, $[x_1;x_2)$, …, $[x_{k-1};x_k]$. Результаты исследования случайной величины ξ представлены в виде интервального статистического ряда. В первой строке интервального ряда указываются интервалы наблюдаемых значений случайной величины ξ, а во второй – частоты m_i появления значений этой СВ ξ в указанном интервале $\left(\sum_i m_i = n\right)$.

1. Описать случайную величину ξ, которая могла бы соответствовать интервальному статистическому ряду вашего варианта, указав при этом единицы измерения значений выбранной случайной величины. При решении остальных пунктов задания необходимо указывать наименование вами выбранной случайной величины.

2. Составить интервальный статистический ряд распределения относительных частот наблюдаемых значений непрерывной случайной величины ξ. Построить гистограмму и полигон относительных частот СВ ξ. По видам гистограммы и полигона относительных частот случайной величины ξ сделать предварительный выбор вида закона распределения этой случайной величины.

3. Найти эмпирическую функцию распределения и построить её график.

4. Вычислить числовые характеристики выборки: среднюю выборочную, выборочную дисперсию (смещённую и несмещённые оценки), выборочное среднеквадратическое отклонение.

5. В зависимости от того какое предположение Вы сделали насчёт вида закона для случайной величины ξ, записать её плотность распределения вероятностей и функцию распределения.

6. Исходя из предположения, которое было выдвинуто относительно закона распределения случайной величины ξ, найти интервальные оценки параметров распределения (математическое ожидание и среднее квадратическое отклонение) с доверительной вероятностью $P = 1-\alpha$, где $\alpha = 0{,}01$, если номер варианта равен $4k$; $\alpha = 0{,}02$, если номер варианта равен $4k+1$; $\alpha = 0{,}05$, если номер варианта равен $4k+2$; $\alpha = 0{,}1$, если номер варианта равен $4k+3$. По условию задачи среднее квадратическое отклонение неизвестно, поэтому для записи доверительного интервала для математического ожидания при известном среднем квадратическом отклонении принять его равным $\sigma = \dfrac{x_k - x_0}{2}$.

7. Проверить согласие эмпирической функции распределения с модельной нормальной функцией распределения при помощи критерия согласия χ^2.

3.4.1.1

18 – 20	20 – 22	22 – 24	24 – 26	26 – 28	28 – 30	30 – 32	32 – 34	34 – 36	36 – 38
14	36	130	210	102	82	61	45	15	5

3.4.1.2

31 – 34	34 – 37	37 – 40	40 – 43	43 – 46	46 – 49	49 – 52	52 – 55	55 – 58	58 – 61
3	16	32	45	86	175	135	56	32	20

3.4.1.3

1 – 5	5 – 9	9 – 13	13 – 17	17 – 21	21 – 25	25 – 29	29 – 33	33 – 37	37 – 41
9	13	27	78	167	86	54	47	12	7

3.4.1.4

37 – 42	42 – 47	47 – 52	52 – 57	57 – 62	62 – 67	67 – 72	72 – 77	77 – 82
12	16	46	76	133	87	45	21	14

3.4.1.5

12 – 18	18 – 24	24 – 30	30 – 36	36 – 42	42 – 48	48 – 54	54 – 60	60 – 66
12	24	43	65	97	64	32	13	10

3.4.1.6

1,3 – 2,0	2,0 – 2,7	2,7 – 3,4	3,4 – 4,1	4,1 – 4,8	4,8 – 5,5	5,5 – 6,2	6,2 – 6,9	6,9 – 7,6
14	30	54	80	42	21	17	8	4

3.4.1.7

4,6 – 5,4	5,4 – 6,2	6,2 – 7,0	7,0 – 7,8	7,8 – 8,6	8,6 – 9,4	9,4 – 10,2	10,2 – 11,0	11,0 – 11,8
8	10	14	28	64	25	16	9	6

3.4.1.8

36,5 – 36,7	36,7 – 36,9	36,9 – 37,1	37,1 – 37,3	37,3 – 37,5	37,5 – 37,7	37,7 – 37,9	37,9 – 37,9	37,9 – 38,1
4	8	16	21	61	27	16	7	2

3.4.1.9

168 – 171	171 – 174	174 – 177	177 – 180	180 – 183	183 – 186	186 – 189	189 – 192
2	5	11	22	48	18	8	6

3.4.1.10

3,4 – 3,8	3,8 – 4,2	4,2 – 4,6	4,6 – 5,0	5,0 – 5,4	5,4 – 5,8	5,8 – 6,2	6,2 – 6,6
3	5	8	12	16	36	20	4

3.4.1.11

65 – 66	66 – 67	67 – 68	68 – 69	69 – 70	70 – 71	71 – 72	72 – 73	73 – 74	75 – 76
10	24	63	158	121	78	56	23	12	5

3.4.1.12

47,1 – 47,3	47,3 – 47,5	47,5 – 47,7	47,7 – 47,9	47,9 – 48,1	48,1 – 48,3	48,3 – 48,5	48,5 – 48,7	48,7 – 48,9
6	18	38	87	126	96	26	12	5

3.4.1.13	12,3 – 12,7	12,7 – 13,1	13,1 – 13,5	13,5 – 13,9	13,9 – 14,3	14,3 – 14,7	14,7 – 15,1	15,1 – 15,5	15,5 – 15,9
	4	17	35	87	129	91	27	12	3

3.4.1.14	189 – 194	194 – 199	199 – 204	204 – 209	209 – 214	214 – 219	219 – 224	224 – 229	229 – 234
	4	6	13	34	75	98	70	12	3

3.4.1.15	10,1 – 11,1	11,1 – 12,1	12,1 – 13,1	13,1 – 14,1	14,1 – 15,1	15,1 – 16,1	16,1 – 17,1	17,1 – 18,1	18,1 – 19,1
	5	14	44	73	41	18	12	6	2

3.4.1.16	162 – 166	166 – 170	170 – 174	174 – 178	178 – 182	182 – 186	186 – 190	190 – 194
	6	11	15	32	56	29	14	5

3.4.1.17	2,0 – 2,3	2,3 – 2,6	2,6 – 2,9	2,9 – 3,2	3,2 – 3,5	3,5 – 3,8	3,8 – 4,1	4,1 – 4,4
	4	6	18	26	64	21	9	4

3.4.1.18	8,15 – 8,18	8,18 – 8,21	8,21 – 8,24	8,24 – 8,27	8,27 – 8,30	8,30 – 8,33	8,33 – 8,36
	4	8	18	38	21	10	6

3.4.1.19	2304 – 2314	2314 – 2324	2324 – 2334	2334 – 2344	2344 – 2354	2354 – 2364	2364 – 2374
	3	6	20	37	18	9	5

3.4.1.20	158,2 – 158,4	158,4 – 158,6	158,6 – 158,8	158,8 – 160,0	160,0 – 160,2	160,2 – 160,4	160,4 – 160,6
	3	10	24	68	29	15	5

3.4.1.21	0,12 – 0,125	0,125 – 0,13	0,13 – 0,135	0,135 – 0,14	0,14 – 0,145	0,145 – 0,15	0,15 – 0,155
	2	8	12	38	16	10	4

3.4.1.22	350 – 351	351 – 352	352 – 353	353 – 354	354 – 355	355 – 356
	4	10	14	32	19	11

3.4.1.23	48 – 52	52 – 56	56 – 60	60 – 64	64 – 68	68 – 72
	3	12	32	17	12	4

3.4.1.24	15,1 – 15,3	15,3 – 15,5	15,5 – 15,7	15,7 – 15,9	15,9 – 16,1	16,1 – 16,3
	2	5	16	35	18	4

3.4.1.25	17,0 – 17,6	17,6 – 18,2	18,2 – 18,8	19,4 – 20,0	20,6 – 21,2	21,8 – 22,4	23,0 – 23,6	23,6 – 24,2
	3	5	16	41	56	39	18	6

3.4.1.26	0,45 – 0,85	0,85 – 1,25	1,25 – 1,65	1,65 – 2,05	2,05 – 2,45	2,45 – 2,85	2,85 – 3,25	3,25 – 3,65
	3	8	18	39	17	13	9	5

3.4.1.27	20 – 25	25 – 30	30 – 35	35 – 40	40 – 45	45 – 50	50 – 55	55 – 60	60 – 65
	3	9	36	93	158	86	39	5	3

3.4.1.28	14 – 17	17 – 20	20 – 23	23 – 26	26 – 29	29 – 32	32 – 35	35 – 38	38 – 41	41 – 44
	3	5	37	127	413	148	43	13	7	4

3.4.1.29	5,15 – 5,35	5,35 – 5,55	5,55 – 5,75	5,75 – 5,95	5,95 – 6,15	6,15 – 6,35
	2	9	32	47	38	10

3.4.1.30	1700 – 1720	1720 – 1740	1740 – 1760	1760 – 1780	1780 – 1800	1800 – 1820
	34	45	98	142	86	39

4 ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ
(практические занятия № 4 – 5)

Содержание: математические методы и модели, применяемые в экономических исследованиях, общая схема формирования экономико-математических моделей, классификация методов математического программирования, задача линейного программирования, форма записи задач линейного программирования, графический метод решения задач линейного программирования.

4.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Математическое программирование – область математики, разрабатывающая теорию и численные методы решения многомерных экстремальных задач с ограничениями, то есть задач на экстремум функции многих переменных с ограничениями на область изменения этих переменных. *Целевой функцией* называют функцию, экстремальное значение которой необходимо найти. *Экстремальным значением* называют максимальное или минимальное значение. *Системой ограничений* называют условия, которым должно удовлетворять решение задачи. *Математическая модель задачи* – это постановка исходной задачи в виде целевой функции и системы ограничений.

Рассмотрим общую схему построения экономико-математических моделей:

1. Выбор некоторого числа переменных величин, задание числовых значений которых однозначно определяет одно из возможных состояний исследуемой совокупности. Совокупность неизвестных величин будем обозначать: $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, а полученные числовые значения для вектора $\bar{x}$ будем называть решением или планом задачи.

2. Построение целевой функции. Это может быть прибыль, объем выпуска, затраты производства и другие. Целевую функцию обозначим $Z = z(\bar{x})$.

3. Построение (составление) системы ограничений.

Система ограничений – это совокупность условий, налагаемых на неизвестные величины. Математически ограничения выражаются в виде уравнений и неравенств. Совокупность решений, удовлетворяющих системе ограничений, образует *область допустимых решений* (ОДР) задачи.

Задача математического программирования формируется следующим образом:

найти план $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, принимающий экстремальное значение целевой функции Z, то есть

$$\max Z = z(x_1, x_2, ..., x_n) \text{ или } \min Z = z(x_1, x_2, ..., x_n) \qquad (4.1.1)$$

при ограничениях

$$\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le b_i \;\; (i = 1, ..., m_1), \qquad (4.1.2)$$

$$\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) = b_i \;\; (i = m_1 + 1, ..., m_2), \qquad (4.1.3)$$

$$\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) \ge b_i \;\; (i = m_2 + 1, ..., m), \qquad (4.1.4)$$

$$x_j \ge 0 \quad (j = 1, ..., n), \qquad (4.1.5)$$

где b_i – некоторые заданные действительные числа.

Целевая функция (4.1.1) и ограничения (4.1.2) – (4.1.5) являются экономико-математической моделью задачи математического программирования.

При этом план $\bar{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, удовлетворяющий системе ограничений (4.1.2) – (4.1.5) задачи, называется *допустимым*. Допустимый план, при котором целевая функция принимает экстремальное значение, называется *оптимальным* и обозначается $\bar{x}^*$, а экстремальное значение целевой функции обозначается $Z^* = z(\bar{x}^*)$.

Оптимальное решение является не обязательно единственным. Возможны случаи, когда оно не существует, когда имеется конечное или бесчисленное множество оптимальных решений.

В зависимости от целевой функции $z(\bar{x})$ и функций $\varphi_i(\bar{x})$, которые определяют ограничения, рассматриваются разделы математического программирования:

1. Если целевая функция $Z = z(\bar{x})$ и функции $\varphi_i(\bar{x})$ $(i = \overline{1, m})$, входящие в систему ограничений, линейны (первой степени) относительно входящих в

модель задачи неизвестных x_j $\left(j=\overline{1,n}\right)$, то такие задачи относят к разделу *линейного программирования*.

2. Если в задаче математического программирования целевая функция $z(\bar{x})$ и (или) хотя бы одна из функций системы ограничений $\varphi_i(\bar{x})$ $\left(i=\overline{1,m}\right)$ является нелинейной функцией относительно входящих в задачу неизвестных x_j $\left(j=\overline{1,n}\right)$, то такие задачи относят к разделу *нелинейного программирования* (НЛП).

3. Если на все или некоторые переменные x_j наложено условие дискретности, например целочисленности (x_j принимает значения 0, 1, 2, …), то такие задачи рассматриваются в разделе *дискретного математического программирования*, в частности *целочисленном программировании*.

4. Если параметры целевой функции или системы ограничений изменяются во времени или процесс решения задачи имеет многошаговый характер, то такие задачи решаются методами *динамического программирования*.

В перечисленных выше разделах математического программирования предполагается, что вся информация о протекании процессов заранее известна и достоверна. Такие методы оптимизации называются *детерминированными.*

5. Если параметры, входящие в функцию цели, или ограничения задачи являются случайными, недостоверными величинами или если приходится принимать решения в условиях риска, неполной или недостоверной информации, то говорят о проблеме стохастической оптимизации, а соответствующий раздел называется *стохастическим программированием*. К нему относятся *теория массового обслуживания, математическая теория игр* и некоторые другие.

Рассмотрим задачи линейного программирования.

Линейное программирование – это наука о методах исследования и отыскания экстремальных значений линейной функции, на неизвестные которой наложены линейные ограничения. Таким образом, задачи линейного программирования относятся к задачам на условный экстремум функции.

Общей задачей линейного программирования называется следующая задача:

$$\max(\min)Z=\sum c_j x_j \tag{4.1.6}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i \quad \left(i=1,\ldots,m_1\right), \tag{4.1.7}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad \left(i=m_1+1,\ldots,m_2\right), \tag{4.1.8}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i \quad \left(m_2+1,\ldots,m\right), \tag{4.1.9}$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j=1,\ldots,n\right), \tag{4.1.10}$$

где a_{ij}, c_j, b_i – заданные действительные числа, Z – *целевая функция*, а условия (4.1.7) – (4.1.10) – ограничениями задачи линейного программирования.

Вектор $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$, координаты которого удовлетворяют указанным ограничениям, называется *допустимым решением задачи.* Множество допустимых решений задачи называют *областью допустимых решений.* Допустимое решение, на котором целевая функция достигает своего максимума (минимума), называется *оптимальным решением* или *оптимальным планом задачи линейного программирования.*

Симметричной (стандартной) формой записи задачи линейного программирования называется задача максимизации целевой функции (4.1.6) при ограничениях вида (4.1.7) и (4.1.10) или задача минимизации целевой функции (4.1.6) при ограничениях вида (4.1.9) и (4.1.10), то есть

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j ;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ \left(i = \overline{1,m}\right), \ x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,n}\right),$$

или

$$\min Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j ;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \ \left(i = \overline{1,m}\right), \ x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,n}\right),$$

где c_j, a_{ij}, b_i – некоторые заданные действительные числа.

Канонической формой записи задачи линейного программирования называется задача минимизации или максимизации целевой функции (4.1.6) при ограничениях вида (4.1.8) и (4.1.10), то есть

$$\min(\max) Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ \left(i = \overline{1,m}\right),$$

$$x_j \ge 0 \ \left(j = \overline{1,n}\right).$$

Рассмотрим приемы, позволяющие переходить от одной формы записи условий задачи к другой форме записи.

1. Переход от задачи на минимум к задаче на максимум осуществляется умножением целевой функции на (-1). Действительно, если функция $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ достигает минимума при значениях $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$, то функция $-\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ достигает при тех же значениях переменных максимума.

2. Переход от неравенства вида « $\le$ » к неравенствам вида « $\ge$ » (и наоборот) также осуществляется умножением исходного неравенства на (-1).

3. Переход от неравенства к равенству осуществляется введением дополнительной неотрицательной переменной $x_{n+l} \ge 0$ $\left(l = \overline{1,m}\right)$. Так, если, к примеру, дано $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i$, то, вводя x_{n+l}, получим:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + x_{n+l} = b_i \quad \left(i = \overline{1,m},\ l = \overline{1,m}\right).$$

4. При переходе от равенств к неравенствам можно руководствоваться следующим: если дано $A = B$, то это можно формально записать в виде двух неравенств: $A \le B$ и $A \ge B$.

5. Введение условий неотрицательности переменных. Пусть на переменную x_k это условие не было наложено. Тогда вместо этой переменной можно ввести две неотрицательные переменные x_k' и x_k'' и представить $x_k = x_k' - x_k''$, где $x_k' \ge 0$ $x_k'' \ge 0$, что всегда возможно выполнить.

Изложенными приёмами общая задача линейного программирования может быть сведена к симметричной и канонической формам записи задач линейного программирования и наоборот. Однако поскольку в процессе таких преобразований вводятся дополнительные переменные, то после того, как задача решена, нужно произвести обратный переход к исходным переменным, определяющим непосредственный экономический смысл задачи.

Рассмотрим графический метод решения задач линейного программирования.

Графический метод основан на геометрической интерпретации задачи линейного программирования и применяется в основном при решении задач двумерного пространства и только некоторых задач трёхмерного пространства, так как довольно трудно построить многогранник решений, который образуется в результате пересечения полупространств. Задачу пространства размерности больше трёх изобразить вообще невозможно.

Пусть задача линейного программирования задана в двумерном пространстве, то есть ограничения содержат две переменные.

Найти минимальное (максимальное) значение функции

$$Z = C_1 x_1 + C_2 x_2 \tag{4.1.11}$$

при выполнении условий

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \le b_m, \end{cases} \tag{4.1.12}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \tag{4.1.13}$$

Допустим, что система (4.1.12) при условии (4.1.13) совместна и многоугольник решений ограничен. Каждое из неравенств (4.1.12) и (4.1.13) определяет полуплоскость с граничной прямой: $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ $\left(i = \overline{1,m}\right)$, $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Линейная функция (4.1.11) при фиксированных значениях Z является уравнением прямой линии $C_1x_1 + C_2x_2 = Const$. Построим многоугольник решений системы ограничений (4.1.12) и график линейной функции при значении $Z = 0$ (рис. 4.1.1). Тогда поставленной задаче линейного программирования можно дать следующую интерпретацию. Найти точку многоугольника решений, в которой прямая $C_1x_1 + C_2x_2 = Const$ – опорная и функция Z достигает минимума (максимума).

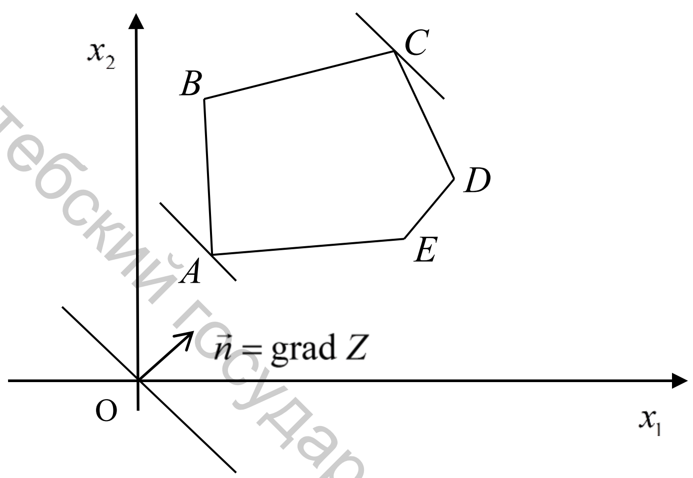


Рисунок 4.1.1 – Многоугольник решений

Значения $Z = C_1x_1 + C_2x_2$ возрастают в направлении вектора $\vec{n} = \text{grad } Z = \left(C_1, C_2\right)$, поэтому прямую $Z = 0$ передвигаем параллельно самой себе в направлении нормального вектора.

Из рисунка 4.1.1 следует, что прямая дважды становится опорной по отношению к многоугольнику решений (в точках A и C), причём минимальное значение целевая функция $Z = C_1x_1 + C_2x_2$ принимает в точке A, а максимальное значение принимает в точке C.

Координаты точки A находим, решая систему уравнения прямых AB и AE. Координаты точки C определяем как точку пересечения прямых BC CD.

Если многоугольник решений представляет собой неограниченную область, то возможны два варианта.

1. Прямая $C_1x_1 + C_2x_2 = Const$, передвигаясь в направлении нормального вектора или противоположно ему, постоянно пересекает многоугольник решений и ни в какой точке не является опорной к нему. В этом случае линейная функция не ограничена на многоугольнике решений как сверху, так и снизу.

2. Прямая, передвигаясь, всё же становится опорной относительно многоугольника решений. Тогда в зависимости от вида области линейная функция может быть ограниченной сверху и неограниченной снизу, ограниченной снизу и неограниченной сверху, либо ограниченной как сверху, так и снизу.

С помощью графического метода может быть решена задача линейного программирования, если система ограничений содержит n неизвестных и m линейно независимых уравнений, причём n m связаны соотношением $n - m = 2$.

Рассмотрим задачу линейного программирования.

Найти минимальное значение функции $Z = C_1x_1 + C_2x_2 + ...C_nx_n$ при ограничениях

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2, \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_n \geq 0, \end{cases} \tag{4.1.14}$$

где все уравнения линейно независимы и выполняется соотношение $n - m = 2$.

Используя метод Жордана – Гаусса, производим m исключений, в результате которых базисными неизвестными оказались, например m первых неизвестных $x_1, x_2, ..., x_m$, а свободными – два последних: x_{m+1} и x_n, то есть система ограничений принимает вид:

$$\begin{cases} x_1 + a'_{1m+1}x_{m+1} + ... + a'_{1n}x_n = b'_1, \\ x_2 + a'_{2m+1}x_{m+1} + ... + a'_{2n}x_n = b'_2, \\ .... \\ x_m + a'_{mm+1}x_{m+1} + ... + a'_{mn}x_n = b'_m, \\ x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, ..., x_n \geq 0, \end{cases} \tag{4.1.15}$$

С помощью уравнений преобразования системы выражаем линейную функцию только через свободные неизвестные и, учитывая, что все базисные переменные – неотрицательные, отбрасываем их, переходя к системе ограничений, выраженных в виде неравенств. Таким образом, приходим к следующей задаче линейного программирования.

Найти минимальное (максимальное) значение линейной функции

$$Z = C'_{m+1}x_{m+1} + C'_nx_n \tag{4.1.16}$$

при выполнении условий

$$\begin{cases} a'_{1m+1}x_{m+1} + a'_{1n}x_n \leq b'_1, \\ a'_{2m+1}x_{m+1} + a'_{2n}x_n \leq b'_2, \\ .... \\ a'_{mm+1}x_{m+1} + a'_{mn}x_n \leq b'_m, \\ x_{m+1} \geq 0,\ x_n \geq 0. \end{cases} \tag{4.1.17}$$

Преобразованная задача содержит два неизвестных. Решая её графическим методом, находим оптимальные значения x_{m+1} и x_n, а затем, подставляя их в систему (4.1.15), находим оптимальные значения $x_1, x_2, ..., x_m$.

4.2 Примеры решения типовых задач

4.2.1 Имеются стержни длиной 5 м. Необходимо их разрезать на заготовки 2-х видов: вида A – длиной 1,5 м; вида B – длиной 0,8 м для производства 20 изделий. На каждое изделие требуется две длинных заготовки (A) и три коротких (B). Определить число стержней, которое необходимо разрезать каждым из возможных способов, чтобы изготовить нужное число изделий и минимизировать отходы. Составить экономико-математическую модель задачи.

Решение. Построим карту раскроя одного стержня, перебрав все возможные способы.

Способ	Количество заготовок типа A (по 1,5 м)	Количество заготовок типа B (по 0,8 м)	Отходы, м
I	3	–	0,5
II	2	2	0,4
III	1	4	0,3
IV	–	6	0,2

Для изготовления 20 изделий потребуется заготовок A: 20×2 = 40 шт. и заготовок B: 20×3 = 60 шт.

1. Введем переменные. Обозначим за x_1 – количество стержней, которые будут разрезаны первым способом, x_2 – вторым способом, x_3 – третьи способом и x_4 - четвёртым способом.

2. Целевая функция Z – отходы. По условию задачи её необходимо минимизировать. Найдем отходы, полученные при разрезании стержней:

$0,5 \cdot x_1$ – отходы, полученные при разрезании x_1 стержней I способом, так как $5 - 3 \cdot 1,5 = 0,5$;

$0,4 \cdot x_2$ – отходы, полученные при разрезании x_2 стержней II способом, так как $5 - 2 \cdot 1,5 - 2 \cdot 0,8 = 0,4$;

$0,3 \cdot x_3$ – отходы, полученные при разрезании x_3 стержней III способом, так как $5 - 1 \cdot 1,5 - 4 \cdot 0,8 = 0,3$;

$0,2 \cdot x_4$ – отходы, полученные при разрезании x_4 стержней IV способом, так как $5 - 6 \cdot 0,8 = 0,2$ 5 - 6·0,8=0,2.

Тогда $\min Z = 0,5 \cdot x_1 + 0,4 \cdot x_2 + 0,3 \cdot x_3 + 0,2 \cdot x_4$.

3) Составим систему ограничений задачи.

Ограничение на заготовки A.

При разрезании x_1 стержней I способом получим $3 \cdot x_1$ заготовок типа A, x_2 стержней II способом – $2 \cdot x_2$ заготовок типа A, x_3 стержней III способом – x_3 заготовок типа A, при разрезании x_4 стержней IV способом заготовок типа A не образуется. Таким образом, всего получим $3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3$ заготовок типа А, что по условию задачи должно быть не менее 40 штук, то есть $3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 40$.

Аналогично получим ограничение на заготовки типа В:

$$2x_2 + 4x_3 + 6x_4 \geq 60.$$

Составим ограничения на смысл переменных. Так как количество стержней может быть только неотрицательным числом, то $x_i \geq 0 \left(i = \overline{1,4} \right)$ и x_i – целые.

Итак, экономико-математическая модель данной задачи имеет вид:

$$\min Z = 0,5x_1 + 0,4x_2 + 0,3x_3 + 0,2x_4;$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 40, \\ 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 \geq 60, \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,4}, \\ x_i - \textit{целые}. \end{cases}$$

4.2.2 Предприятие за 10 часов должно произвести 31 единицу продукции вида P_1 и 36 единиц продукции вида P_2. Для производства продукции каждого вида может быть использовано оборудование A_1 или A_2. Производительность оборудования этих групп различна и определяется величиной a_{ij} ед./ч, а стоимость 1 часа работы оборудования составляет c_{ij} усл. ден. ед./ч $\left(i = 1; 2,\ j = 1; 2 \right)$, где i – индекс, отличающий вид оборудования, а j – вид продукции. Требуется определить оптимальный план работы групп оборудования, на протяжении 10 часов, при котором будет выполнен план выпуска продукции с минимальной себестоимостью.

Составить экономико-математическую модель задачи. Записать её в канонической форме записи.

Решение. Для наглядности составим таблицу:

	Продукция P_1	Продукция P_2	
Оборудование A_1	$a_{11} = 5$ ед./ч $c_{11} = 8$ усл. ден. ед./ч	$a_{12} = 3$ ед./ч $c_{12} = 7$ усл. ден. ед./ч	10 ч
Оборудование A_2	$a_{21} = 4$ ед./ч $c_{21} = 4$ усл. ден. ед./ч	$a_{22} = 6$ ед./ч $c_{22} = 2$ усл. ден. ед./ч	10 ч
	31 ед.	36 ед.	

1. Обозначим за x_{ij} - время работы оборудования A_i по выпуску продукции P_j, $\left(i = 1; 2,\ j = 1; 2 \right)$.

2. Целевая функция будет представлять собой затраты на выпуск продукции, которые необходимо минимизировать. Так как затраты по выпуску про-

дукции P_j на оборудование A_i составляют $c_{ij} \cdot x_{ij}$, то целевая функция будет иметь вид:

$$\min Z = \sum c_{ij} x_{ij} \left(i = 1; 2,\ j = 1; 2 \right),$$

то есть

$$\min Z = 8x_{11} + 7x_{12} + 4x_{21} + 2x_{22}.$$

3. Составим систему ограничений.

Ограничение на выпуск продукции P_1.

На оборудовании A_1 будет произведено $a_{11}x_{11}$ единиц продукции P_1. На оборудовании A_2 будет произведено $a_{21}x_{21}$ единиц продукции P_1. Таким образом, всего продукции P_1 будет произведено $a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21}$, что по условию должно быть равно 31, то есть получаем ограничение

$$a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21} = 31, \text{ или } 5x_{11} + 4x_{21} = 31.$$

Аналогично получим ограничение по выпуску продукции P_2:

$$a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22} = 36, \text{ или } 3x_{11} + 6x_{21} = 36.$$

Ограничение на время работы оборудования A_1.

Время работы оборудования A_1 по выпуску обоих видов продукции не превышает плановый период 10 ч, следовательно, ограничение будет иметь вид:

$$x_{11} + x_{12} \le 10.$$

Аналогично получаем ограничение на время работы оборудования A_2:

$$x_{21} + x_{22} \le 10.$$

Введем ограничения на смысл переменных, так как время не может быть отрицательным, то

$$x_{ij} \ge 0 \left(i = 1; 2,\ j = 1; 2 \right).$$

Таким образом, экономико-математическая модель данной задачи будет иметь вид:

$$\min z = 8x_{11} + 7x_{12} + 4x_{21} + 2x_{22}.$$

$$\begin{cases} 5x_{11} + 4x_{21} = 31, \\ 3x_{12} + 6x_{22} = 36, \\ x_{11} + x_{12} \le 10, \\ x_{21} + x_{22} \le 10, \\ x_{ij} \ge 0 \left(i = 1; 2,\ j = 1; 2 \right). \end{cases}$$

Экономико-математическую модель задачи представим в канонической форме записи:

$$\min Z = 8x_{11} + 7x_{12} + 4x_{21} + 2x_{22};$$

$$
\begin{cases}
5x_{11} + 4x_{21} = 31, \\
3x_{12} + 6x_{22} = 36, \\
x_{11} + x_{12} + x_3 = 10, \\
x_{21} + x_{22} + x_4 = 10, \\
x_y \ge 0 \left(i = 1;\, 2,\ j = 1;\, 2 \right), \\
x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0.
\end{cases}
$$

Введенные дополнительные переменные x_3 и x_4 имеют экономический смысл, связанный с содержанием задачи. Здесь x_3, x_4 – время простоя оборудования $А_1$ и $А_2$ соответственно.

4.2.3 Предприятие может выпускать продукцию двух видов: $П_1$ и $П_2$. Используется три вида ресурсов: оборудование, сырье и электроэнергия. Нормы расхода, лимиты ресурсов и прибыль от единицы продукции представлены в таблице:

Ресурсы	Нормы расхода на единицу продукции		Лимит (запас) ресурса
	$П_1$	$П_2$	
Оборудование	2	3	30
Сырье	1	1	12
Электроэнергия	2	1	20
Прибыль от единицы продукции	5	4	

Построить экономико-математическую модель выпуска продукции.

Решение. Введем переменные:

x_1, x_2 – объем выпускаемой продукции $П_1$ и $П_2$ соответственно.

Z – прибыль от продажи всей выпущенной продукции.

Экономико-математическая модель данной задачи будет иметь вид:

$$\max Z = 5x_1 + 4x_2;$$

$$
\begin{cases}
2x_1 + 3x_2 \le 30, \\
x_1 + x_2 \le 12, \\
2x_1 + x_2 \le 20, \\
x_1 \ge 0, \\
x_2 \ge 0.
\end{cases}
$$

4.2.4 Пусть экономико-математическая модель задачи имеет_следующий вид:

$$\min Z = 3x_1 + x_2 - 2x_3;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_2 - 3x_3 \le 2, \\ x_1 + 2x_3 = 0, \\ x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Записать в канонической форме задачу линейного программирования.

Решение. Чтобы получить общую задачу линейного программирования, необходимо, чтобы на все переменные было наложено условие не отрицательности. Для наложения этого ограничения на переменную x_3 воспользуемся правилом введения условия не отрицательности переменных. Введем новые неотрицательные переменные x_3' и x_3'', таким образом, что $x_3 = x_3' - x_3''$.

Тогда общая задача линейного программирования будет иметь вид:

$$\min Z = 3x_1 + x_2 - 2\left(x_3' - x_3''\right);$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 3, \\ x_2 - 3\left(x_3' - x_3''\right) \le 2, \\ x_1 + 2\left(x_3' - x_3''\right) = 0, \\ x_i \ge 0\ \ (i = 1;\, 2),\ x'_3 \ge 0,\ x''_3 \ge 0, \end{cases}$$

или (раскрыв скобки):

$$\min Z = 3x_1 + x_2 - 2x_3' + 2x_3'';$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 3, & \\ x_2 - 3x_3' + 3x_3'' \le 2, & (4.2.3.1) \\ x_1 + 2x_3' - 2x_3'' = 0, & (4.2.3.2) \\ x_i \ge 0\ \ (i = 1;\, 2),\ x'_3 \ge 0,\ x''_3 \ge 0. & \end{cases}$$

В симметричной (стандартной) форме записи задача будет иметь вид:

$$\min Z = 3x_1 + x_2 - 2x_3' + 2x_3'';$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 3, & \\ -x_2 + 3x_3' - 3x_3'' \ge -2, & (4.2.3.3) \\ x_1 + 2x_3' - 2x_3'' \ge 0, & (4.2.3.4) \\ -x_1 - 2x_3' + 2x_3'' \ge 0, & \\ x_i \ge 0\left(i = 1;\, 2\right), & \\ x'_3 \ge 0,\ x_3'' \ge 0. & \end{cases}$$

Здесь ограничение (4.2.3.1) умножено на число (-1), а ограничение (4.2.3.2) заменено двумя ограничениями:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3' - 2x_3'' \geq 0, \\ x_1 + 2x_3' - 2x_3'' \leq 0, \end{cases}$$

откуда, умножая второе ограничение на (-1), получим ограничение (4.2.3.4) вида « $\geq$ ».

Таким образом, из исходных ограничений задачи линейного программирования были получены новые ограничения задачи, записанные в виде неравенств (4.2.3.3) и (4.2.3.4).

Следовательно, в канонической форме записи исходная задача линейного программирования будет иметь вид:

$$\min Z = 3x_1 + x_2 - 2x_3' + 2x_3'';$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_4 = 3, \\ x_2 - 3x_3' + 3x_3'' + x_5 = 2, \\ x_1 + 2x_3' - 2x_3'' = 0, \\ x_i \geq 0 \left(i = \overline{1,5}\right), \\ x_3' \geq 0,\ x_3'' \geq 0. \end{cases}$$

4.2.5 Найти максимальное и минимальное значение функции Z из области, заданной системой ограничений.

$$Z = x_1 - 3x_2,$$

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 \geq 14, \\ x_1 - x_2 \geq 0, \\ x_1 \geq 0,\ x_1 \leq 8,\ x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Решение. Вначале построим многоугольник решений. Для этого в системе координат Ox_1x_2 изобразим граничные прямые:

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 = 14, & (L_1) \\ x_1 = 8, & (L_2) \\ x_1 - x_2 = 0, & (L_3) \end{cases}$$

причем $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$.

Для определения, какую полуплоскость определяет соответствующее неравенство, подставим координаты какой-нибудь точки в неравенства, например, начала координат. Полученная область заштрихована на рисунке 4.2.1. Пересечение заданных полуплоскостей и определяет многоугольник решения.

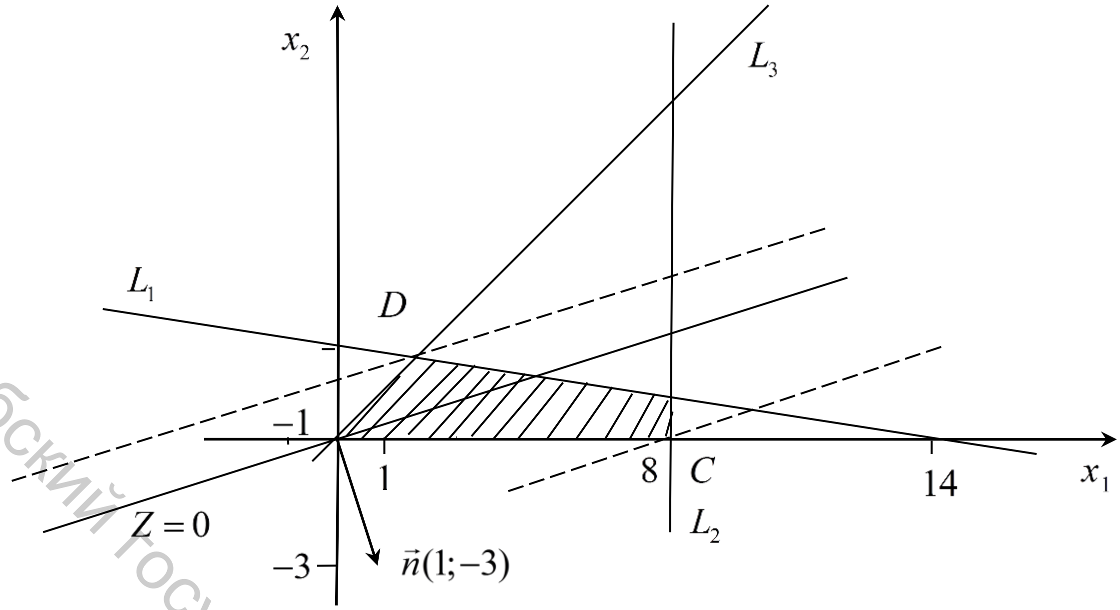


Рисунок 4.2.1 – Многоугольник решений задачи 4.2.5

Для того, чтобы построить прямую $Z = x_1 - 3x_2$, строим нормальный вектор $\vec{n}(1;-3)$, который перпендикулярен прямой. Прямая, проходящая через начало координат и перпендикулярная нормальному вектору $\vec{n}(11;-3)$, и будет являться прямой, которая соответствует целевой функции $Z = 0$. Затем прямую $x_1 - 3x_2 = 0$ перемещаем параллельно самой себе по направлению нормального вектора $\vec{n}(1;-3)$ через многоугольник решения. Первая и последняя точка соприкосновения прямой $x_1 - 3x_2 = 0$ с многоугольником решения будут давать оптимальное решение, именно первая точка – минимальное значение функции $Z = x_1 - 3x_2$, а последняя точка соприкосновения этой прямой – максимальное значение заданной функции.

Вектор $\vec{n}(1;-3)$ указывает направление возрастания целевой функции Z. Оптимальное решение в задачах линейного программирования может достигаться лишь в точках, принадлежащих границе многоугольника решений (рис. 4.2.1).

В нашем случае, как видно из рисунка, функция Z принимает минимальное значение в точке D, а максимальное значение – в точке C. Точка C лежит на пересечении прямой L_2 и оси координат Ox_1. Для определения её координат необходимо решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = 8, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Откуда находим $x_1 = 8, x_2 = 0$. Подставив эти значения в целевую функцию $Z = x_1 - 3x_2$, получаем её максимальное значение: $Z_{\max} = Z(8;0) = 8$.

Точка D лежит на пересечении прямой L_1 и прямой L_3. Для определения её координат необходимо решить систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 = 14, \\ x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Откуда находим $x_1 = 1\frac{3}{4}, x_2 = 1\frac{3}{4}$. Подставив эти значения в целевую функцию $Z = x_1 - 3x_2$, получаем её минимальное значение: $Z_{\min} = Z(1\frac{3}{4};1\frac{3}{4}) = 1\frac{3}{4} - 3 \cdot 1\frac{3}{4} = -3\frac{1}{2}$.

4.3 Задания для решения на практическом занятии

4.3.1 Завод производит два вида продукции: велосипеды и мотоциклы. При этом цех по сборке велосипедов имеет мощность 100 тыс. штук в год, а цех по сборке мотоциклов – 30 тысяч. Механические цеха заводов оснащены взаимозаменяемым оборудованием, и одна группа цехов может производить либо детали для 120 тысяч велосипедов, либо для 40 тысяч мотоциклов, либо любую комбинацию деталей, ограниченную этими данными. Другая группа цехов может выпускать детали либо для 80 тысяч велосипедов, либо для 60 тысяч мотоциклов, либо любую допустимую их комбинацию. В результате реализации каждой тысячи велосипедов завод получает прибыль в 2 тысячи условных денежных единиц, а каждой тысячи мотоциклов – 3 тысячи условных денежных единиц.

Построить экономико-математическую модель выпуска продукции, которая даст максимальную прибыль

4.3.2 На строительство домов на 100 строительных площадках выбраны пять типовых проектов. По каждому из проектов известны длительность закладки фундаментов и строительства остальной части здания, а также жилая площадь дома. Параллельно можно вести закладку 10 фундаментов и строительство 15 зданий. Данные приведены в таблице:

Вид работы	Длительность выполнения (дни) работ типового проекта				
	I	II	III	IV	V
Закладка фундамента	20	30	35	30	40
Остальные работы	40	20	60	35	25
Жилая площадь, м^2	3000	2000	5000	4000	6000

Составить план строительства, максимизирующий ввод жилой площади в течение года (300 рабочих дней), при условии, что домов II типа должно быть построено не менее 10.

4.3.3 В сплав может входить не менее 4 % никеля и не более 80 % железа. Для составления сплава используется три вида сырья, содержащего никель, железо и прочие вещества. Стоимость различных видов сырья и процентное содержание в нём компонентов сплава представлены в таблице:

Компоненты сплава	Содержание компонентов для вида сырья, %		
	I	II	III
Железо	70	90	85
Никель	5	2	7
Прочие вещества	25	8	8
Стоимость, у. е./кг	6	4	5

Составить экономико-математическую модель задачи таким образом, чтобы стоимость одного килограмма сплава была минимальной.

4.3.4 Три типа самолётов следует распределить между двумя авиалиниями. В таблице заданы количество самолётов каждого типа, месячный объём перевозок каждым самолётом на каждой авиалинии и соответствующие эксплуатационные расходы

Тип самолёта	Число самолётов	Месячный объём перевозок одним самолётом по авиалиниям		Эксплуатационные расходы на один самолёт по авиалиниям	
		I	II	I	II
№ 1	40	20	15	20	30
№ 2	30	25	20	60	25
№ 3	20	30	50	50	65

Распределить самолёты по авиалиниям таким образом, чтобы при минимальных суммарных эксплуатационных расходах перевезти по каждой из них соответственно не менее 200 и 300 единиц груза.

4.3.5 Построить на плоскости область решений системы линейных неравенств и найти наименьшее и наибольшее значения линейной функции Z в этой области:

а) $Z = x_1 + x_2$;

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \geq 6; \\ 9x_1 + 8x_2 \leq 157; \\ -3x_1 + 11x_2 \geq 16; \end{cases}$$

б) $Z = 3x_1 + 2x_2$;

$$\begin{cases} -4x_1 + 5x_2 \leq 29; \\ 3x_1 - x_2 \leq 14; \\ 5x_1 + 2x_2 \geq 38. \end{cases}$$

4.3.6 Найти графическим методом оптимальный план задач линейного программирования

4.3.6.1 $Z = -2x_1 + 5x_2$ (min)

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \ge 14, \\ 5x_1 + 6x_2 \le 30, \\ 3x_1 + 8x_2 \ge 24, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

4.3.6.2 $Z = 3x_1 - x_2$ (max)

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 \ge 14, \\ -x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ 7x_1 + 10x_2 \le 28, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

4.3.6.3 $Z = 2x_1 - 10x_2$ (min)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 - 5x_2 \ge -5, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

4.3.6.4 $Z = x_1 - 6x_2$ (min)

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 0, \\ x_1 - 3x_2 \ge -3, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

4.3.6.5 $Z = 2x_1 - 5x_2$ (max)

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \le 12, \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 24, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

4.3.6.6 $Z = 2x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 + 4x_5$ (max)

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 - 18x_4 + 2x_5 = -4, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 - 21x_4 + 4x_5 = 22, \\ 3x_1 - 2x_2 + 8x_3 - 43x_4 + 11x_5 38, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0.$$

4.3.7 Из Минска в Витебск необходимо перевезти оборудование трёх типов: 84 единицы I типа, 80 единиц II типа и 150 единиц III типа. Для перевозки оборудования завод может заказать два вида транспорта: автомобильный (вид А) и железнодорожный (вид Б). Количество оборудования каждого типа, вмещаемого на определённый вид транспорта, а также сменные затраты, связанные с эксплуатацией единицы транспорта (в условных денежных единицах), приведены в таблице:

Тип оборудования	Количество оборудования для вида транспорта	
	А	Б
I	3	2
II	4	1
III	3	13
Затраты	8	12

Спланировать перевозки так, чтобы транспортные расходы были минимальными. Решить графически заданную задачу линейного программирования.

4.3.8 Трикотажная фабрика использует для производства джемперов и жилетов шерсть, кашемир и акрил, запасы, которых составляют соответственно 900, 400 и 300 кг. Количество пряжи каждого вида (в кг), необходимой для изготовления 10 изделий, а также прибыль, полученная от их реализации, приведены в таблице:

Вид сырья	Затраты пряжи на 10 изделий	
	джемпера	жакеты
Шерсть	4	2
Кашемир	2	1
Акрил	1	1
Прибыль	6	5

Установить план выпуска изделий, который максимизирует прибыль. Решить графически заданную задачу линейного программирования.

4.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

4.4.1 Найти графическим методом оптимальный план задач линейного программирования.

4.4.1.1 $Z = x_1 - 2x_2$

$$\begin{cases} x_1 + 7x_2 \le 14, \\ -x_1 + 3x_2 \ge 0, \\ x_1 \le 10, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

4.4.1.2 $Z = -x_1 - x_2$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \ge 10, \\ 2x_1 - x_2 \ge 10, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

4.4.1.3 $Z = x_1 + x_2$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 = 1, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

4.4.1.4 $Z = -x_1 - 4x_2$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ 6x_1 + x_2 \le 18, \\ x_1 - x_2 \ge 0, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

4.4.1.5 $Z = -2x_1 + 5x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 30, \\ x_1 + x_2 \le 12, \\ 2x_1 + x_2 \ge 20, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

4.4.1.6 $Z = -x_1 - 2x_2$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 6, \\ x_1 + 3x_2 \le 9, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

4.4.1.7 $Z = 2x_1 + x_2$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 12, \\ x_1 - 2x_2 \ge 0, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

4.4.1.8 $Z = x_1 + 3x_2$

$$\begin{cases} -x_1 + 4x_2 \ge 4, \\ x_1 + 2x_2 = 0, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

4.4.1.9 $Z = 2x_1 + 3x_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \\ 2x_1 - x_2 \ge -2, \\ 0 \le x_1 \le 4, \\ 0 \le x_2 \le 4. \end{cases}$$

4.4.1.10 $Z = 2x_1 - 4x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 - 6x_2 \le 12, \\ x_1 + x_2 \le 9, \\ -7x_1 + x_2 \le 14, \\ x_1 + x_2 \ge 2, \\ 0 \le x_2 \le 8,\ x_1 \ge 0. \end{cases}$$

4.4.1.11 $Z = x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 - x_2 \le 1, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

4.4.1.12 $Z = x_1 + 3x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 0, \\ 3x_1 + x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

4.4.1.13 $Z = 2x_1 - 11x_2$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \ge 6, \\ x_1 + x_2 \ge 9, \\ -7x_1 + 2x_2 \ge 14, \\ x_1 + x_2 \le 2, \\ x_2 \ge 7, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

4.4.1.14 $Z = x_1 + x_2$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 1, \\ 2x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 - 2x_2 \le 1, \\ 2x_1 - x_2 \le 1, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

4.4.1.15 $Z = 2x_1 + 3x_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1, \\ 2x_1 - x_2 \ge 0, \\ 5x_1 + x_2 \ge 15, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

4.4.1.16 $Z = 15x_1 + 21x_2$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 4, \\ 2x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 + 2x_2 \le 6, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

4.4.1.17 $Z = 4x_1 + 7x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 \le 6, \\ x_1 + x_2 \le 10, \\ 2x_1 + 2x_2 \ge 3, \\ 2x_1 - x_2 \ge 0, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

4.4.1.18 $Z = -x_1 - 2x_2$

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 \le 4, \\ x_1 - 2x_2 \le 2, \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 12, \\ x_1 + x_2 \ge -5, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

4.4.1.19 $Z = 2x_1 + 7x_2$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 6, \\ 2x_1 + x_2 \ge 4, \\ x_1 - 2x_2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \le 10, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

4.4.1.20 $Z = 2x_1 + 3x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 12, \\ -x_1 + 2x_2 \ge -2, \\ x_1 - x_2 \ge -1, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

4.4.1.21 $Z = 3x_1 + x_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_1 - x_2 \le 0, \\ 2x_1 \ge 1, \\ 0 \le x_2 \le 4. \end{cases}$$

4.4.1.22 $Z = x_1 + 7x_2$

$$\begin{cases} -x_1 - 5x_2 \le 0, \\ -3x_1 + x_2 \le 0, \\ 7x_1 + 5x_2 \le 35, \\ 6x_1 + 14x_2 \ge 21, \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

4.4.1.23 $Z = 2x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 \ge -6, \\ 3x_1 + x_2 \ge 3, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

4.4.1.24 $Z = x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1 - 2x_2 \le 1, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

4.4.1.25 $Z = 3x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 8, \\ -x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 + 2x_2 \ge 2, \\ -x_1 + 2x_2 \ge -2, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

4.4.1.26 $Z = 15x_1 + 21x_2$

$$\begin{cases} 7x_1 - 2x_2 \le -14, \\ x_1 + 11x_2 \le 13, \\ -x_1 - x_2 \ge -3, \\ 4x_1 + 5x_2 \ge 20, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

4.4.1.27 $Z = 3x_1 - 15x_2$

$$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 \le 9, \\ 2x_1 + x_2 \ge 10, \\ -x_1 + 4x_2 \ge 0, \end{cases}$$
$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0.$$

4.4.1.28 $Z = x_1 + 4x_2$

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 \ge -4, \\ -x_1 + x_2 \le 5, \\ x_1 - 2x_2 \ge -2, \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 12, \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

4.4.1.29 $Z = x_1 - x_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 1, \\ x_1 - 2x_2 \le 1, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 2, \\ 3x_1 + 2x_2 \le 3, \\ 2x_1 + 2x_2 \ge 1, \quad x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \end{cases}$$

4.4.1.30 $Z = x_1 + x_2$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 3, \\ x_1 - x_2 \ge -1, \\ 0 \le x_1 \le 1, \\ 0 \le x_2 \le 3. \end{cases}$$

5 СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ
(практические занятия № 6 – 7)

Содержание: алгоритм симплекс-метода, геометрическая интерпретация симплекс-метода в случае двух переменных, нахождение начального опорного плана, метод искусственного базиса для нахождения начального опорного плана, нахождение начального опорного плана путём преобразования таблицы Жордана, исследование на оптимальность опорного плана при минимизации целевой функции, переход к новому, не худшему опорному плану.

5.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Особенностью задач линейного программирования является то, что целевая функция достигает экстремума на границе области допустимых решений (ОДР).

Допустимый план, принадлежащий границе ОДР, называется *опорным.*

Алгоритм симплекс- метода

1. Находим какой-либо начальный опорный план $\bar{x}^0$.

2. Проверяем его на оптимальность. Если план оптимален, то задача решена, иначе переходим к пункту 3.

3. По правилам преобразования таблицы Жордана переходим к не худшему опорному плану. Переходим к пункту 2.

С геометрической точки зрения перебор опорных планов можно толковать как переход по ребрам из одной вершины многогранника планов (области допустимых решений) в другую, по направлению к вершине $\bar{x}^*$, в которой целевая функция достигает экстремального значения.

Геометрическая интерпретация в случае двух переменных

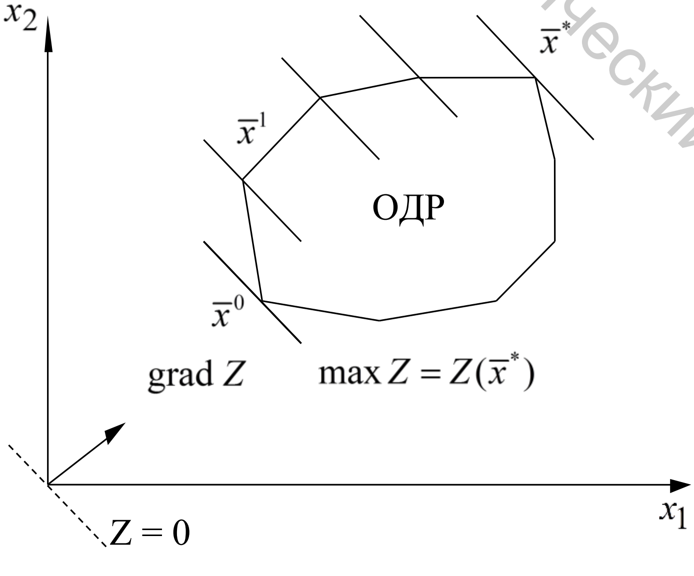


Рисунок 5.1.1 – Графическая интерпретация

Отыскание начального опорного плана (1 пункт алгоритма)

Пусть система ограничений задачи линейного программирования представлена в канонической форме записи.

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \qquad b_i \geq 0 \ \left(i=\overline{1,m}\right).$$

Говорят, что ограничение имеет *предпочтительный вид*, если при неотрицательности правой части $\left(b_i \geq 0\right)$ левая часть ограничения содержит переменную, входящую с коэффициентом, равным единице, а в остальные ограничения-равенства – с коэффициентом, равным нулю.

Например, в системе ограничений

$$\begin{cases} \underline{x_1} + 2x_2 - 4x_4 = 5, \\ 2x_2 + \underline{x_3} + 2x_4 = 8, \\ x_2 - 3x_4 = 3, \end{cases}$$

первое и второе ограничения имеют предпочтительный вид, а третье – нет (предпочтительные переменные подчеркнуты).

Если каждое ограничение системы имеет предпочтительный вид, то система представлена в предпочтительном виде. В этом случае легко найти ее опорное решение. Предпочтительные переменные будут базисными, а остальные - свободными. Все свободные переменные нужно приравнять к нулю, тогда базисные переменные будут равны свободным членам.

Например, в системе ограничений

$$\begin{cases} x_1 + \underline{x_2} - x_5 = 10, \\ 5x_1 + \underline{x_3} + 3x_5 = 80, \\ -5x_1 + \underline{x_4} + 2x_5 = 32, \end{cases}$$

предпочтительными (базисными) являются переменные: x_2, x_3, x_4, а свободными являются переменные x_1, x_5.

Приравниваем свободные переменные x_1, x_5 к нулю, тогда базисные переменные примут значения: $x_2 = 10$, $x_3 = 80$, $x_4 = 32$.

Получим начальный опорный план $\overline{x}^0 = \left(0, 10, 80, 32, 0\right)$.

Отыскание начального опорного плана методом искусственного базиса

В случае, когда ограничение не имеет предпочтительного вида, к его левой части добавляют искусственную переменную w_i $\left(i=\overline{1,m}\right)$. В целевую функцию переменные $w_i\left(i=\overline{1,m}\right)$ вводят с коэффициентом «M» в случае решения задачи на минимум и с коэффициентом «$-M$» в случае решения задачи на максимум, где M – большое положительное число. Полученная задача называется M-задачей, соответствующей исходной. Она всегда имеет предпочтительный вид. Пусть исходная задача линейного программирования имеет каноническую форму записи

$$\max(\min) Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + c_0 ;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \qquad \text{где } b_i \geq 0 \ \left(i = \overline{1,m}\right), \ x_j \geq 0 \ \left(j = \overline{1,n}\right).$$

Если ни одно из ограничений не имеет предпочтительной переменной, то M-задача запишется в следующем виде:

$$\max Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{i=1}^{m} M w_i \ \text{ или } \min Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} M w_i ;$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + w_i = b_i \ \left(i = \overline{1,m}\right),$$

$$x_j \geq 0 \ \left(j = \overline{1,n}\right),$$

$$w_i \geq 0 \ \left(j = \overline{1,m}\right).$$

Тогда начальный опорный план этой задачи: $\overline{x}^0 = \left(\underbrace{0; 0; \ldots; 0;}_{n} \ b_1; b_2; \ldots; b_m \right)$.

Если некоторое уравнение имеет предпочтительный вид, то в него не следует вводить искусственную переменную.

Например, воспользуемся канонической формой записи задачи линейного программирования примера 4.2.2 и найдем начальный опорный план методом искусственного базиса.

Составим M -задачу: $\min Z = 8x_{11} + 7x_{12} + 4x_{21} + 2x_{22} + Mw_1 + Mw_2$;

$$\begin{cases} 5x_{11} + 4x_{21} + \underline{w_1} = 31, \\ 3x_{12} + 6x_{22} + \underline{w_2} = 36, \\ x_{11} + x_{12} + \underline{x_3} = 10, \\ x_{21} + x_{22} + \underline{x_4} = 10, \\ x_{ij} \geq 0, \ i = \overline{1,2}, \ j = \overline{1,2}, \\ x_3 \geq 0, x_4 \geq 0, \\ w_1 \geq 0, w_2 \geq 0. \end{cases}$$

Тогда начальный опорный план: $\overline{x}^0 = (0, 0, 0, 0, 10, 10, 31, 36)$, значение целевой функции на этом плане

$$Z = z(\overline{x}^0) = 8 \cdot 0 + 7 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + M \cdot 31 + M \cdot 36 = 67M .$$

Отыскание начального опорного плана путем преобразования таблицы Жордана

Для заполнения таблицы Жордана каноническую форму задачи линейного программирования преобразовываем к следующему виду:

$$\min Z = c_0 - \left(-c_1 x_1 - \ldots - c_n x_n\right); \qquad (5.1.1)$$

$$\begin{cases} 0 = b_1 - \left(a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n\right), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = b_m - \left(a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n\right), \\ x_j \geq 0 \ \left(j = \overline{1,n}\right), \end{cases} \qquad (5.1.2)$$

где все $b_i \geq 0 \quad \left(i = \overline{1,m}\right)$.

Таблица Жордана содержит $n - r + 2$ столбцов, где n – число переменных, r – число переменных в предпочтительном виде и $m + 2$ строк, где m – число ограничений-равенств. В столбце «БП» записываются базисные (предпочтительные) переменные. Если ограничение не имеет предпочтительной переменной, то записывается «0». Столбец «1» – столбец свободных членов b_i $\left(i = \overline{1,m}\right)$ системы ограничений (5.1.2) а в Z-строке элемент c_0 из (5.1.1). Остальные столбцы «СП», в основной части которых находится элементы a_{ij} из системы (5.1.2). В Z-строке в столбцах «СП» записываются коэффициенты при свободных переменных, стоящие в скобках выражения (5.1.1). Каждому ограничению из системы (5.1.2) соответствует строка основной части таблицы. Целевой функции (5.1.1) соответствует последняя строка таблицы:

		СП				
БП	1	x_1	…	x_s	…	x_n
0	b_1	a_{11}	…	a_{1s}	...	a_{1n}
...	...	...	…	...	....	...
0	b_k	a_{k1}	…	a_{ks}	...	a_{kn}
...	...	...	…	...	...	...
0	b_m	a_{m1}	…	a_{ms}	...	a_{mn}
Z	c_0	$-c_1$	…	$-c_s$	...	$-c_n$

Для нахождения начального опорного плана необходимо в результате Жордановых преобразований избавиться от нулей в первом столбце таблицы.

Преобразование таблицы называется шагом Жордановых исключений и осуществляется относительно выбранного разрешающего элемента. Разрешающий элемент выбирается среди положительных чисел основной части таблицы (которая выделена прямоугольником) по наименьшему отношению свободных членов (элементы столбца «1») к соответствующим положительным элементам столбца, выбранного разрешающим.

Пусть s-й столбец является разрешающим, тогда если $\dfrac{b_k}{a_{ks}} = \min\limits_i \left\{ \dfrac{b_i}{a_{is}} \right\}$ для $a_{is} > 0$, то a_{ks} – разрешающий элемент.

Шаг Жордановых исключений осуществляется по следующим правилам:

1. Ноль первого столбца в строке разрешающего элемента меняется местами с переменной x_s.

2. Разрешающий элемент заменяется обратной величиной.

3. Остальные элементы разрешающей строки делятся на разрешающий элемент.

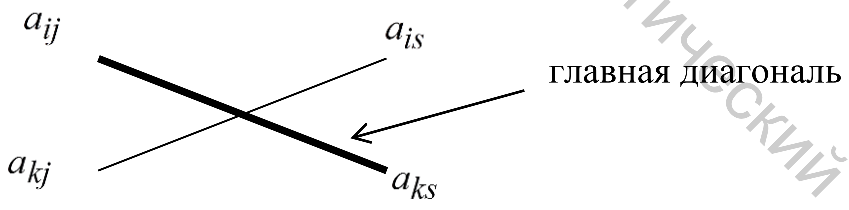
4. Остальные элементы разрешающего столбца делятся на разрешающий элемент и меняют знак на противоположный.

5. Прочие элементы вычисляются по формуле

$$a'_{ij} = \frac{a_{ij} \cdot a_{ks} - a_{is} \cdot a_{kj}}{a_{ks}} \qquad (i \neq k, j \neq s).$$

Диагональ «прямоугольника», на которой расположен разрешающий элемент a_{ks} и преобразуемый элемент a_{ij} назовем главной, а другую диагональ – побочной.

Преобразованный элемент a'_{ij} равен разности произведений элементов, расположенных на главной и побочной диагоналях, деленной на разрешающий элемент.



6. Нулевые столбцы вычеркиваются.

Если система ограничений совместна, то через некоторое число шагов все нули в левом столбце будут замещены переменными x_j. Тогда начальный опорный план найдём, приравняв свободные переменные к нулю, а базисные (столбец «БП») – к соответствующим свободным членам (столбец «1»).

Если в ходе Жордановых преобразований встретится 0-строка, в которой все элементы неположительные, то данная система не имеет неотрицательных решений, хотя и является совместной.

Допустим, после некоторого числа шагов Жордановых преобразований все нули в левом столбце замещены переменными x_j, то есть получили таблицу:

		СП				
БП	1	x_{r+1}	…	x_s	...	x_n
x_1	b_1^*	a_{1r+1}^*	…	a_{1s}^*	...	a_{1n}^*
...	...	...	…	...	...	...
x_k	b_k^*	a_{kr+1}^*	…	a_{ks}^*	...	a_{kn}^*
...	...	...	…	...	...	...
x_r	b_r^*	a_{rr+1}^*	…	a_{rs}^*	...	a_{rn}^*
Z	c_0^*	c_{r+1}^*	…	c_s^*	...	c_n^*

Тогда компоненты начального опорного план $\overline{x}^0$ являются значениями переменных:

БП: $x_1 = b_1^*, \ldots, x_k = b_k^*, \ldots, x_r = b_r^*$,

СП: $x_{r+1} = 0, ..., x_s = 0, ..., x_n = 0$.

Таким образом, начальный опорный план $\overline{x}^0 = \left(b_1^*, ..., b_k^*, ..., b_r^*, \underbrace{0, ..., 0}_{n-r} \right)$ и значение целевой функции на этом плане $Z\left(\overline{x}^0\right) = c_0^*$.

Исследование на оптимальность опорного плана при минимизации целевой функции (второй пункт алгоритма)

Заполним Жорданову таблицу, исходя из задачи, записанной в виде

$$\min Z = c_0^* - \left(c_{r+1}^* \cdot x_{r+1} + ... + c_n^* \cdot x_n\right);$$

$$\begin{cases} x_1 = b_1^* - \left(a_{1r+1}^* \cdot x_{r+1} + ... + a_{1n}^* \cdot x_n\right), \\ \qquad .... \\ x_r = b_r^* - \left(a_{rr+1}^* \cdot x_{r+1} + ... + a_{rn}^* \cdot x_n\right), \\ x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1,n}\right). \end{cases}$$

где $x_1, ..., x_r$ – предпочтительные переменные.

Воспользуемся конечной таблицей при нахождении начального опорного плана методом Жордановых исключений.

1. Если в Z-строке нет положительных элементов (не считая свободного члена) - план ***оптимален.*** Если в Z-строке нет также и нулевых элементов, то оптимальное решение ***единственное***, если же есть хотя бы один нулевой элемент, то оптимальных планов ***бесконечное множество***.

2. Если в Z-строке есть хотя бы один положительный элемент, а в соответствующем ему столбце нет положительных элементов, то целевая функция

неограниченна в ОДР (вследствие неограниченности ОДР). В этом случае ***задача неразрешима***. (Необходимо проверить правильность составления экономико-математической модели).

3. Если в Z-строке есть хотя бы один положительный элемент и в столбце, содержащем этот элемент, есть хотя бы один положительный элемент, то можно перейти к новому опорному плану, более близкому к оптимальному.

Переход к новому, не худшему опорному плану (третий пункт алгоритма)

1. В последней таблице выбираем разрешающий элемент, руководствуясь следующими правилами:

а) выбрать в Z-строке симплекс-таблицы наибольший положительный элемент. Пусть это будет c_s^*, тогда столбец x_s будет разрешающим;

б) найти отношения $\dfrac{b_l^*}{a_{ls}^*}$ для положительных элементов ($a_{ls} > 0$) столбца x_S;

в) выбрать среди этих отношений наименьшее, скажем $\dfrac{b_k^*}{a_{ks}^*}$, тогда элемент a_{ks}^* – есть разрешающий (генеральный).

2. Перейти от данной таблицы к следующей таблице по правилам работы с симплекс-таблицей (см. шаг Жордановых исключений).

Замечание: При решении задачи линейного программирования на максимум целевой функции, ее можно преобразовать в эквивалентную ей задачу на минимум, и решать вышеизложенным методом.

5.2 Примеры решения типовых задач

5.2.1 Предприятие лёгкой промышленности объединенного типа за время планового периода $T = 12$ часов должно выполнить план производства продукции P_1 и P_2. Плановый объём продукции P_1 составляет $N_1 = 40$ единиц, а продукции P_2 – $N_2 = 45$ единиц. Для производства продукции каждого вида использовано оборудование A_1 и A_2.

Производительность оборудования этих групп различна и определяется величиной a_{ij} ед./ч., а стоимость одного часа работы одного часа оборудования составляет c_{ij} у.е./ч. $(i = 1; 2, j = 1; 2)$, где i – индекс, отличающий вид оборудования, j – вид продукции. Требуется оформить оптимальный план непрерывной работы групп оборудования, при котором будет выполнен план выпуска продукции с минимальной себестоимостью и в заданный срок.

Задачу неоходимо решить симплекс-методом и указать экономический смысл полученного решения. Исходные данные приведены в таблице:

Плановый период, T	Производительность оборудования, a_{ij}				Стоимость единицы времени работы оборудования, c_{ij}				Плановый объём продукции	
	a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	c_{11}	c_{12}	c_{21}	c_{22}	N_1	N_2
12	4	6	5	3	3	4	3	1	40	45

Решение.

Для наглядности составим таблицу

	Продукция P_1	Продукция P_2	
Оборудование A_1	$a_{11}=4$ ед./ч. $c_{11}=3$ у.е./ч.	$a_{12}=6$ ед./ч. $c_{12}=4$ у.е./ч.	12 часов
Оборудование A_2	$a_{21}=5$ ед./ч. $c_{21}=3$ у.е./ч.	$a_{22}=3$ ед./ч. $c_{22}=1$ у.е./ч.	12 часов
	40 ед.	45 ед.	

Обозначим через x_{ij} – время работы оборудования A_i по выпуску продукции P_j, $(i=1;2,\ j=1;2)$.

Целевая функция будет представлять собой затраты на выпуск продукции, которые необходимо минимизировать. Так как затраты по выпуску продукции P_j на оборудование A_i составляют величину, равную $c_{ij}\cdot x_{ij}$, то целевая функция будет иметь вид: $\min Z=\sum c_{ij}\cdot x_{ij}$ $(i=1;2,\ j=1;2)$. В нашем случае целевая функция принимает вид:

$$\min Z=3x_{11}+4x_{12}+3x_{21}+x_{22}.$$

Определим систему ограничений на выпуск продукций и на время работы заданных оборудований.

Рассчитаем ограничения на выпуск продукции P_1 предприятием лёгкой промышленности. На оборудовании A_1 будет произведено продукции $a_{11}x_{11}$ или $4x_{11}$ единиц продукции P_1. На оборудовании A_2 будет произведено продукции $a_{21}x_{21}$ или $5a_{21}$ единиц продукции P_1. Следовательно, на оборудованиях A_1 и A_2

будет произведено $a_{11}x_{11}+a_{21}x_{21}$ единиц продукции P_1, что по условию $N_1=40$ единиц продукции. Таким образом, получаем ограничение $a_{11}x_{11}+a_{21}x_{21}=N_1$, или в условиях задачи $4x_{11}+5x_{21}=40$.

Аналогично, проведем расчет ограничения на выпуск продукции P_2 предприятием связи. На оборудовании A_1 будет произведено продукции $a_{12}x_{12}$ или $6x_{12}$ единиц продукции P_2. На оборудовании A_2 будет произведено продукции $a_{22}x_{22}$ или $3a_{22}$ единиц продукции P_2. Следовательно, на оборудованиях A_1 и A_2 будет произведено продукции $a_{12}x_{12}+a_{22}x_{22}$ единиц продукции P_2, что по условию $N_2=45$ единиц продукции. Таким образом, получаем ограничение $a_{12}x_{12}+a_{22}x_{22}=N_2$, или в условиях задачи $6x_{12}+3x_{22}=45$.

Определим ограничения на время работ оборудования A_1 и A_2. Время работы оборудования A_1 предприятием связи по выпуску обоих видов продукции P_1 и P_2 не превышает плановый период времени $T=12$ часов. Следовательно, ограничение будет иметь вид: $x_{11}+x_{12}\le 12$. Аналогично получаем ограничение на время работы оборудования A_2: $x_{21}+x_{22}\le 12$. Исходя из смысла переменных, так как время не может быть отрицательным, получаем ограничения: $x_{ij}\ge 0$ $\left(i=1;2,\ j=1;2\right)$.

Таким образом, экономико-математическая модель заданной задачи будет иметь вид:

$$\min Z=3x_{11}+4x_{12}+3x_{21}+x_{22},$$

$$\left.\begin{aligned}&4x_{11}+5x_{21}=40,\\&6x_{12}+3x_{22}=45,\\&x_{11}+x_{12}\le 12,\\&x_{21}+x_{22}\le 12,\end{aligned}\right\}\qquad x_{ij}\ge 0\ \left(i=1;2,\ j=1;2\right).$$

Решим задачу линейного программирования симплекс-методом.

Найдем начальный опорный план задачи линейного программирования методом Жордановых исключений. Для заполнения таблицы Жордана запишем каноническую форму задачи линейного програмирования, введя дополнительные неотрицательные переменные x_3 и x_4:

$$\min Z=0-\left(-3x_{11}-4x_{12}-3x_{21}-x_{22}\right),$$

$$\left.\begin{aligned}&0=40-(4x_{11}+5x_{21}),\\&0=45-(6x_{12}+3x_{22}),\\&x_3=12-(x_{11}+x_{12}),\\&x_4=12-(x_{21}+x_{22}).\end{aligned}\right\}\qquad x_{ij}\ge 0\ \left(i=\overline{1,2};\,j=\overline{1,2}\right),\,x_3\ge 0,\,x_4\ge 0.$$

Заполним первую Жорданову таблицу. Начальный опорный план будет найден, если в первом столбце таблицы все элементы равны нулю. Пусть x_{12} – разрешающий столбец, так как абсолютная величина Z-строки максимальная. Для нахождения разрешающей строки составим отношения свободных членов к соответствующим элементам этого столбца. В этом стобце имеется только два положительных элемента: “6” и ”1”. Тогда отношения равны: $\frac{45}{6}=7,5$ и $\frac{12}{1}=12$. Так как $7,5<12$, то в качестве разрешающей строки выбираем вторую строку. Элемент, который стоит на пересечении разрешаюшего столбца и разрешающей строки являетя разрешающим злементом и равен 6.

	1	x_{11}	x_{12}	x_{21}	x_{22}	отношения
0 =	40	4	0	5	0	
0 =	45	0	6	0	3	7,5
x_3 =	12	1	1	0	0	12
x_4 =	12	0	0	1	1	
Z	0	-3	-4	-3	-1	

Шаг Жордановсих исключений относительно найденного разрешающего элемента приводит к таблице:

	1	x_{11}	0	x_{21}	x_{22}
0 =	40	4	0	5	0
x_{12} =	7,5	0	$\frac{1}{6}$	0	0,5
x_3 =	4,5	1	$-\frac{1}{6}$	0	-0,5
x_4 =	12	0	0	1	1
Z	30	-3	$\frac{2}{3}$	-3	1

Вычеркивая 0–столбец, получаем симплекс-таблицу.

	1	x_{11}	x_{21}	x_{22}
0 =	40	4	5	0
x_{12} =	7,5	0	0	0,5
x_3 =	4,5	1	0	-0,5
x_4 =	12	0	1	1
Z	30	-3	-3	1

Пусть x_{21} – разрешающий столбец. Для нахождения разрешающей строки составим отношения свободных членов к соответствующим элементам этого столбца. В этом стобце имеется только два полжительных элемента: “5” и ”1”. Тогда отношения равны: $\frac{40}{5}=8$ и $\frac{12}{1}=12$.

	1	x_{11}	x_{21}	x_{22}	отношения
0 =	40	4	5	0	8
x_{12} =	7,5	0	0	0,5	
x_3 =	4,5	1	0	0,5	
x_4 =	12	0	1	1	12
Z	30	-3	-3	1	

Так как $8<12$, в качестве разрешающей строки выбираем первую строку. Элемент, который стоит на пересечении разрешаюшего столбца и разрешающей строки, являетя разрешающим злементом и равен 6.

	1	x_{11}	0	x_{22}
x_{21} =	8	0,8	0,2	0
x_{12} =	7,5	0	0	0,5
x_3 =	4,5	1	0	-0,5
x_4 =	4	-0,8	-0,2	1
Z	54	-0,6	0,6	1

Вычеркивая 0–столбец, получаем симплекс-таблицу.

	1	x_{11}	x_{22}
x_{21} =	8	0,8	0
x_{12} =	7,5	0	0,5
x_3 =	4,5	1	-0,5
x_4 =	4	-0,8	1
Z	54	-0,6	1

Найдем начальный опорный план, приравняв свободные переменные к нулю, то есть $x_{11}=x_{22}=0$, а базисные переменные – к свободным членам, то есть $x_{21}=8, x_{12}=7{,}5, x_3=4{,}5, x_4=4$.

Следовательно, начальный опорный план: $\overline{x}^0=(0;\, 7{,}5;\, 8;\, 0;\, 4{,}5;\, 4)$. На этом плане значение целевой функции $z(\overline{x}^0)=54$.

Итак, благодаря преобразованиям Жордана исходную задачу, исходя из последней симплекс-таблицы, можно записать в виде

$$\min Z = 54 - \left(-0,6x_{11} + x_{22}\right),$$

$$\left.\begin{aligned} x_{21} &= 8 - 0,8x_{11}, \\ x_{12} &= 7,5 - 0,5x_{22}, \\ x_3 &= 4,5 - (x_{11} - 0,5x_{22}), \\ x_4 &= 4 - (-0,8x_{11} + x_{22}), \end{aligned}\right\} \; x_{ij} \ge 0,\ \left(i = 1;\,2,\ j = 1;\,2\right),\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0.$$

Так как в Z-строке есть положительный элемент, то найденный опорный план не является оптимальным. Положительный максимальный элемент Z-строки находится в x_{22} столбце, а следовательно, этот столбец будет разрешающим. По наименьшему отношению элементов столбца свободных членов к положительным элементам разрешающего столбца выбираем разрешающую строку. Наименьшее отношение равно 4 в строке x_4. Следовательно, эта строка является разрешающей. На пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца стоит разрешающий элемент, равный 1.

	1	x_{11}	x_{22}	отношения
x_{21} =	8	0,8	0	
x_{12} =	7,5	0	0,5	15
x_3 =	4,5	1	-0,5	
x_4 =	4	-0,8	1	4
Z	54	-0,6	1	

Шаг Жордановсих исключений относительно найденного разрешающего элемента приводит к таблице:

	1	x_{11}	x_4
x_{21} =	8	0,8	0
x_{12} =	5,5	0,4	-0,5
x_3 =	6,5	0,6	0,5
x_{22} =	4	-0,8	1
Z	50	0,2	-1

Так как положительный максимальный элемент Z-строки находится в x_{11} столбце, то этот столбец будет разрешающим. По наименьшему отношению элементов столбца свободных членов к положительным элементам разрешающего столбца выбираем разрешающую строку. Наименьшее отношение равно 10 в строке x_{21}. Следовательно, эта строка является разрешающей. На пересечении разрешающей строки и разрешающего столбца стоит разрешающий элемент, равный 0,8.

	1	x_{11}	x_{22}	отношения
x_{21} =	8	0,8	0	10
x_{12} =	5,5	0,4	-0,5	$13\frac{3}{4}$
x_3 =	6,5	0,6	0,5	$10\frac{5}{6}$
x_4 =	4	-0,8	1	
Z	50	0,2	-1	

Шаг Жордановсих исключений относительно найденного разрешающего элемента приводит к таблице:

	1	x_{21}	x_4
x_{11} =	10	1,25	0
x_{12} =	1,5	-0,5	-0,5
x_3 =	0,5	-0,75	0,5
x_{22} =	12	1	1
Z	48	-0,25	-1

Так как в Z-строке нет положительных элементов, то полученный план оптимален. $\overline{x}^*: x_{11}=10$, $x_{12}=1{,}5$, $x_{21}=0$, $x_{22}=12$, $x_3=0{,}5$, $x_4=0$ или $\overline{x}^*=(0;5{,}5;8;4;7;0)$. На оптимальном плане значение целевой функции $z(\overline{x}^*)=48$.

Экономический смысл полученного решения: для того, чтобы затраты были минимальными, необходимо, чтобы оборудование A_1 выпускало 10 часов продукцию P_1 и 1,5 часа продукцию P_2, а оборудование A_2 выпускало 12 часов продукцию P_2. При этом продукция будет выпущена с минимальными затратами, равными 48 условным денежным единицам, и в заданный срок.

5.3 Задания для решения на практическом занятии

5.3.1 Решить задачу симплекс-методом.

$$Z = 8x_1 + 6x_2 \to \max;$$

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + x_3 = 20; \\ 6x_1 + 12x_2 + x_4 = 72; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1;4}\right).$$

5.3.2 Решить задачу симплекс-методом.

$$Z = x_3 - 2x_4 - 3x_5 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 15x_5 = 4; \\ \quad\quad x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 3; \\ 2x_1 \quad + x_3 + 5x_4 \quad\quad = 7; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1,5}\right).$$

5.3.3 Решить задачу симплекс-методом, используя метод искусственного базиса.

$$Z = 8x_1 - 6x_2 - 5x_3 + 2x_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = 16; \\ 4x_1 - 6x_2 + 3x_3 - 7x_4 = 20; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1;4}\right).$$

5.3.4 Решить задачу симплекс-методом, используя метод искусственного базиса.

$$Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 2; \\ x_1 + 14x_2 + 10x_3 - 10x_4 = 24; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1;4}\right).$$

5.3.5 Решить задачу симплекс-методом, используя метод искусственного базиса.

$$Z = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6 \to \min;$$

$$\begin{cases} x_1 + x_4 + 6x_6 = 9; \\ 3x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_6 = 2; \\ x_1 + 2x_2 + x_5 + 2x_6 = 6; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1;6}\right).$$

5.3.6 Решить задачу симплекс-методом, используя метод искусственного базиса.

$$Z = x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 \to \min;$$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 2; \\ 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + 4x_5 = 3; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0 \quad \left(j = \overline{1;5}\right).$$

5.3.7 Решить задачу симплекс-методом, используя метод искусственного базиса.

$$Z = x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - x_6 \to \max;$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 - 3x_4 + 4x_5 + x_6 = 6; \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 + x_6 = 2; \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \quad \left(j = \overline{1;6}\right).$$

5.3.8 Цех выпускает три вида изделий. Суточный плановый выпуск составляет 90 единиц изделий типа I, 70 единиц изделий типа II и 60 единиц изделий типа III. Суточные ресурсы: 780 единиц производственного оборудования, 850 единиц сырья и 790 единиц электроэнергии. Их расход на одно изделие указан в таблице:

Ресурсы	Расход ресурсов на изделие		
	I	II	III
Оборудование	2	3	4
Сырьё	1	4	5
Электроэнергия	3	4	2

Стоимость изделия первого типа равна 8 у.е., второго – 7 у.е., а третьего – 6 у.е.

Сколько надо производить изделий каждого вида, чтобы стоимость продукции, выпущенной сверх плана, была максимальной?

5.3.9 Для производства обуви четырёх моделей на фабрике используются два вида кожи. Ресурсы рабочей силы и материала для изготовления каждой пары обуви, а также прибыль от реализации единицы продукции приведены в таблице:

Ресурсы	Запас ресурсов	Затраты ресурсов на одну пару обуви по моделям			
		№ 1	№ 2	№ 3	№ 4
Рабочее время, чел./ч	1000	1	2	2	1
Кожа первого вида	500	2	1	0	0
Кожа второго вида	1200	0	1	4	1
Прибыль, у.е.		2	40	10	15

Составить план выпуска по ассортименту, максимизирующему прибыль

5.3.10 Для грузовых перевозок создаётся автоколонна. Для приобретения автомобилей выделено 600 у.е. Можно заказать автомобили трёх марок – А, Б и В, характеризующиеся данными, приведёнными в таблице:

Марка автомобиля	Стоимость автомобиля, у.е.	Количество водителей, обслуживающих автомобиль за смену	Число рабочих смен в сутки	Производительность автомобиля за смену, т/км
А	10	1	3	2100
Б	20	2	3	3600
В	23	2	3	3780

Количество автомобилей не должно превышать 30, а общее число водителей в автоколонне должно быть не больше 144 человек. Сколько автомобилей каждой марки следует заказать, чтобы автоколонна имела максимальную производительность (т/км) в расчёте на одни сутки? Считать, что каждый автомобиль будет использоваться в течение всех трёх смен, а водители будут работать по одной смене в сутки.

5.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

5.4.1 Предприятие лёгкой промышленности объединенного типа за время планового периода $T=12$ часов должно выполнить план производства продукции P_1 и P_2. Плановый объём продукции P_1 составляет N_1 единиц, а продукции P_2 – N_2 единиц. Для производства продукции каждого вида использовано оборудование A_1 и A_2.

Производительность оборудования этих групп различна и определяется величиной a_{ij} ед./ч., а стоимость одного часа их работы составляет c_{ij} у.е./ч. $(i=1;2,\ j=1;2)$, где i, j – индексы, определяющие вид оборудования и продукции. Требуется определить оптимальный план непрерывный работы групп оборудования, при котором будет выполнен план выпуска продукции с минимальной себестоимостью и в заданный срок.

Задачу неоходимо решить симплекс-методом и указать экономический смысл полученного решения. Исходные данные приведены в таблице:

	Плановый период, T	Производительность оборудования, a_{ij}				Стоимость единицы времени работы оборудования, c_{ij}				Плановый объем продукции	
		a_{11}	a_{12}	a_{21}	a_{22}	c_{11}	c_{12}	c_{21}	c_{22}	N_1	N_2
5.4.1.1	10	4	6	8	4	2	5	6	1	48	36
5.4.1.2	12	4	5	9	4	2	2	4	3	45	50
5.4.1.3	8	3	5	6	4	5	3	2	3	18	60
5.4.1.4	9	4	3	4	8	3	2	3	2	32	40
5.4.1.5	12	6	8	9	7	5	2	3	4	54	56

5.4.1.6	9	7	5	6	8	3	4	3	5	42	60
5.4.1.7	10	3	5	5	4	4	4	5	4	40	40
5.4.1.8	8	6	3	4	8	5	5	4	3	30	60
5.4.1.9	10	5	4	7	6	4	2	5	3	35	48
5.4.1.10	10	5	3	4	6	8	7	4	2	31	36
5.4.1.11	9	5	7	9	5	3	6	7	2	46	34
5.4.1.12	11	5	6	7	5	3	3	5	4	48	52
5.4.1.13	7	4	6	7	5	6	2	4	4	32	54
5.4.1.14	10	5	4	5	9	4	3	4	3	35	43
5.4.1.15	11	7	9	9	8	6	3	4	5	52	52
5.4.1.16	9	8	6	7	9	4	5	4	6	44	50
5.4.1.17	8	4	6	6	5	5	5	6	5	42	38
5.4.1.18	9	7	4	3	9	6	6	5	4	45	4
5.4.1.19	11	6	5	8	7	5	3	6	4	41	42
5.4.1.20	12	6	4	5	7	9	8	5	3	30	37
5.4.1.21	10	3	5	7	3	2	4	5	1	32	18
5.4.1.22	12	3	4	8	3	1	1	3	2	40	42
5.4.1.23	8	2	4	5	3	4	2	1	2	39	25
5.4.1.24	7	3	2	3	7	2	1	2	1	20	40
5.4.1.25	6	5	7	8	6	4	1	2	3	38	44
5.4.1.26	8	6	4	5	7	2	3	2	4	42	36
5.4.1.27	8	2	4	4	3	3	3	4	3	34	36
5.4.1.28	10	5	2	3	7	4	4	3	2	35	45
5.4.1.29	11	4	3	6	5	3	1	4	2	42	38
5.4.1.30	12	4	2	3	5	7	6	3	1	30	50

6 ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

(практические занятия № 8 - 9)

Содержание: постановка транспортной задачи по критерию стоимости в матричной форме, закрытая и открытая модели транспортной задачи, алгоритм решения сбалансированной транспортной задачи, построение исходного опорного плана, проверка на оптимальность невырожденного оптимального плана, переход к нехудшему опорному плану.

6.1 Теоретический материал по теме практического занятия

Постановка транспортной задачи по критерию стоимости в матричной форме

В m пунктах отправления $A_1, A_2, ..., A_m$ сосредоточен однородный груз в количествах соответственно $a_1, a_2, ..., a_m$ единиц. Имеющийся груз необходимо доставить потребителям $B_1, B_2, ..., B_n$, спрос которых выражается величинами $b_1, b_2, ..., b_n$ единиц. Известна стоимость c_{ij} перевозки единицы груза из i-го ($i=\overline{1,m}$) пункта отправления в j-й ($j=\overline{1,n}$) пункт назначения.

Требуется составить план перевозок, который полностью удовлетворяет спрос потребителей в грузе, и при этом суммарные транспортные издержки минимизируются. Для наглядности, условие транспортной задачи можно представить таблицей, которую будем называть *распределительной*. Распределительную таблицу называют иногда табличной или матричной моделью транспортной задачи.

Поставщик	Потребитель				Запас груза a_i
	B_1	B_2	...	B_n	
A_1	x_{11} c_{11}	x_{12} c_{12}	...	x_{1n} c_{1n}	a_1
A_2	x_{21} c_{21}	x_{22} c_{22}	...	x_{2n} c_{2n}	a_2
...	...	...	...	...	
A_m	x_{m1} c_{m1}	x_{m2} c_{m2}	...	x_{mn} c_{mn}	a_m
Потребность в грузе b_j	b_1	b_2	...	b_n	

Для построения экономико-математической модели ТЗ введем переменные $x_{ij}\left(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\right)$ – количество груза, которое необходимо доставить из i-го пункта отправления в j-й пункт назначения.

Матрицу $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & ... & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & ... & x_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ x_{m1} & x_{m2} & ... & x_{mn} \end{pmatrix}$ будем называть *матрицей перевозок*.

Цель транспортной задачи – минимизировать общие затраты на реализацию плана перевозок, следовательно, целевая функция будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \min Z = c_{11}x_{11} + c_{12}x_{12} + ... + c_{1n}x_{1n} + c_{21}x_{21} + c_{22}x_{22} + ... \\ + c_{2n}x_{2n} + ... + c_{m1}x_{m1} + c_{m2}x_{m2} + ... + c_{mn}x_{mn}. \end{aligned} \tag{6.1.1}$$

Составим систему ограничений, которая будет определять ОДР данной задачи в случае, когда $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$. Первые m уравнений системы (6.1.2) – это ограничения на запас груза у поставщиков, следующие n уравнений системы (6.1.2) – это ограничения на потребности потребителей в грузе, неравенства системы – это ограничения на смысл переменных (количество груза не может быть отрицательным).

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+\ldots+x_{1n}=a_1, \\ x_{21}+x_{22}+\ldots+x_{2n}=a_2, \\ \quad \ldots\ldots\ldots \\ x_{m1}+x_{m2}+\ldots+x_{mn}=a_m, \\ x_{11}+x_{21}+\ldots+x_{m1}=b_1, \\ x_{12}+x_{22}+\ldots+x_{m2}=b_2, \\ \quad \ldots\ldots\ldots \\ x_{1n}+x_{2n}+\ldots+x_{mn}=b_n, \\ x_{ij}\ge 0\left(i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}\right). \end{cases} \tag{6.1.2}$$

Будем называть план перевозок

$$x^0=\begin{pmatrix} x_{11}^0 & x_{12}^0 & \ldots & x_{1n}^0 \\ x_{21}^0 & x_{22}^0 & \ldots & x_{2n}^0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{m1}^0 & x_{m2}^0 & \ldots & x_{mn}^0 \end{pmatrix}$$

допустимым планом, если он удовлетворяет системе ограничений (6.1.2).

Допустимый план перевозок, доставляющий минимум целевой функции, называется *оптимальным*.

Закрытая и открытая модели транспортной задачи

Модель транспортной задачи называют закрытой (сбалансированной), если суммарный объем груза, имеющегося у поставщиков, равен суммарному спросу потребителей, то есть выполняется равенство:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Если для транспортной задачи выполняется одно из условий:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j , \tag{6.1.3}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j , \tag{6.1.4}$$

то модель задачи называют ***открытой (несбалансированной)***.

Для разрешимости транспортной задачи с открытой моделью необходимо преобразовать ее в закрытую модель.

Так, при выполнении условия (6.1.3) необходимо ввести фиктивный $(n+1)$-й пункт назначения B_{n+1}, то есть в матрице задачи добавляется столбец. Спрос фиктивного потребителя полагают равным небалансу, то есть $b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j$, а стоимость перевозок равной нулю, то есть $c_{in+1} = 0 \left(i = \overline{1,m} \right)$. Переменные x_{in+1} – это количество груза, которое останется в i-ом пункте отправления. Аналогично при выполнении условия (6.1.4) вводится фиктивный поставщик A_{m+1}, то есть в матрице задачи добавляется строка. Запас груза фиктивного поставщика равен: $a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i$, а тарифы (стоимости перевозок) равны нулю, то есть $c_{m+1j} = 0 \left(j = \overline{1,n} \right)$. Переменные x_{m+1j} – это количество груза, недостающее j-му пункту назначения.

При преобразовании открытой модели задачи в закрытую модель целевая функция не изменяется, так как все слагаемые, соответствующие дополнительным перевозкам, равны нулю.

Целевая функция (6.1.1) и система ограничений (6.1.2) являются экономико-математической моделью сбалансированной транспортной задачи.

Алгоритм решения сбалансированной транспортной задачи

1. Строим исходный опорный план.
2. Проверяем его на оптимальность. Если план оптимален, задача решена. Иначе переходим к пункту 3.
3. Переходим к не худшему опорному плану. Возвращаемся к пункту 2.

Построение исходного опорного плана (первый пункт алгоритма)

Построение опорных планов, а также преобразование их будем производить непосредственно в распределительной таблице. Если в плане перевозок переменная x_{ik} равна некоторому числу $a \neq 0$, то число записываем в соответствующую клетку $(i;k)$ и считаем ее занятой или базисной, если же $x_{ik} = 0$, то клетку $(i;k)$ оставляем свободной.

Существует несколько методов построения исходного опорного плана. Рассмотрим методы «*северо-западного угла*» и «*минимального элемента*» при решении примера 6.2.1.

Проверка на оптимальность невырожденного опорного плана методом потенциалов (второй пункт алгоритма)

1. Каждому поставщику поставим в соответствие потенциал u_i $\left(i = \overline{1,m} \right)$, а каждому потребителю – потенциал v_j $\left(j = \overline{1,n} \right)$.

Тогда каждой занятой клетке будет соответствовать уравнение:

$$u_i + v_j = c_{ij}.$$

Так как всех занятых клеток должно быть $m+n-1$, то есть на единицу меньше числа потенциалов, то для нахождения $u_i \left(i=\overline{1,m}\right), v_j \left(j=\overline{1,n}\right)$ необходимо решить систему из $m+n-1$ уравнений $u_i + v_j = c_{ij}$ с $m+n$ неизвестными. Система является линейно-зависимой, и чтобы найти частное решение, одному из потенциалов нужно придать произвольное числовое значение, тогда остальные потенциалы определяются однозначно.

2. Для исследования плана на оптимальность для каждой свободной клетки считаем оценки по формуле:

$$s_{ij} = c_{ij} - \left(u_i + v_j\right).$$

При этом:

а) если все оценки положительны, то найденный опорный план оптимален и единственен $\left(s_{ij} > 0\right)$;

б) если наряду с положительными оценками встречаются и нулевые оценки $\left(s_{ij} \geq 0\right)$, то найденный опорный план оптимален, но не единственен;

в) если оценка хотя бы одной свободной клетки отрицательна $\left(s_{ij} < 0\right)$, то опорный план не является оптимальным, его можно улучшить за счет загрузки этой клетки. Если таких клеток несколько, то наиболее перспективной для загрузки является клетка с наименьшей оценкой. Например, для клеток (i,k) и (i,t) имеем оценки $s_{ik} = -5,\ s_{it} = -10$. Здесь наиболее потенциальной (перспективной для загрузки) является клетка (i,t).

Переход к нехудшему опорному плану (третий пункт алгоритма)

Улучшим план перевозок за счет загрузки свободной клетки с отрицательной оценкой, для этого для наиболее перспективной свободной клетки строится замкнутый цикл с вершинами в загруженных клетках. Вершинам этого цикла условно присваиваются знаки: свободной клетке – плюс, следующей по часовой или против часовой стрелке занятой клетке – минус, следующей – снова плюс и т. д. Из поставок в клетках цикла с «отрицательными» вершинами выбирается наименьшее количество груза, которое и перемещается по клеткам этого цикла: прибавляется к поставкам в «положительных» вершинах и вычитается из поставок в «отрицательных» вершинах, в результате чего баланс цикла не нарушится.

Цикл пересчета

В общем случае цикл пересчета представляет собой замкнутую ломаную линию, состоящую из звеньев, пересекающихся под прямым углом. Каждое звено соединяет две клетки строки (столбца). Цикл включает одну свободную клетку, остальные клетки цикла заняты. В цикле всегда четное число клеток. Для свободной клетки всегда можно построить единственный цикл.

Если из занятых клеток образуется цикл, то план перевозок не является опорным. Цикл может быть построен лишь для свободной клетки.

6.2 Примеры решения типовых задач

6.2.1 На заводах 1, 2 и 3 производится однородная продукция в количестве $a_1 = 200$, $a_2 = 600$, $a_3 = 500$ единиц. При этом затраты на производство единицы продукции на заводах составляют $c_1 = 6$, $c_2 = 4$, $c_3 = 7$ денежных единиц. Четырем потребителям требуется соответственно $b_1 = 150$, $b_2 = 400$, $b_3 = 200$ $b_4 = 700$ единиц продукции. Расходы c_{ij} по перевозке единицы продукции с i-го завода j-тому потребителю известны: $c_{11} = 5$, $c_{12} = 4$, $c_{13} = 7$, $c_{14} = 7$, $c_{21} = 3$, $c_{22} = 2$, $c_{23} = 5$, $c_{24} = 9$, $c_{31} = 6$, $c_{32} = 1$, $c_{33} = 5$, $c_{34} = 7$. Для полного удовлетворения потребностей необходимо увеличить выпуск продукции на третьем заводе. При этом дополнительные затраты на производство единицы дополнительной продукции равны $\triangle c = 3$.

Найти план доставки продукции потребителю, при котором полностью удовлетворяется спрос, а совокупные затраты, связанные с изготовлением продукции и её доставкой потребителям, минимизируются.

Определить минимальные совокупные затраты на производство продукции и её доставку потребителям по оптимальному плану расширения выпуска продукции.

Решение. Условие задачи можно записать в виде таблицы. Обозначим первый завод A_1, второй завод – A_2, а третий завод – A_3. По условию имеем четыре потребителя выше указанных заводов – B_1, B_2, B_3, B_4. Тогда условие задачи можно записать в виде таблицы:

Заводы	Потребители				Количество продукции, выпускаемой заводом
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	4	7	7	200
A_2	3	2	5	9	600
A_3	6	1	5	7	500
Потребность потребителей в продукции заводов	150	400	200	700	1450/1300

Решим задачу путем расширения мощности третьего завода A_3, за счет увеличения выпуска продукции, для полного удовлетворения потребностей потребителей с дополнительными затратами на производство единицы продукции, равными $\Delta c = 3$.

Введём фиктивного поставщика A_4. Так как потребность потребителей составляет 1450 единиц продукции, а суммарный объём продукции тремя заводами равен 1300, то необходимо увеличить выпуск продукции вторым заводом на $150 = 1450 - 1300$ единиц. Таким образом, фиктивный поставщик A_4 будет выпускать 150 единиц продукции, но при этом затраты на выпуск единицы продукции увеличатся и составят $c_4 = c_3 + \vartriangle c = 7 + 3 = 10$ денежных единиц. Следовательно, совокупные затраты на производство составят $Z_{пр.} = 200 \cdot 6 + 600 \cdot 4 + 500 \cdot 7 + 150 \cdot 10 = 8600$ денежных единиц. Рассчитаем минимальные совокупные затраты на транспортировку продукции от заводов к потребителю. При этом тариф фиктивного поставщика составит $c_{41} = c_{31} + \vartriangle c = 6 + 3 = 9$, $c_{42} = c_{32} + \vartriangle c = 1 + 3 = 4$, $c_{43} = c_{33} + \vartriangle c = 5 + 3 = 8$, $c_{44} = c_{34} + \vartriangle c = 7 + 3 = 10$ денежных единиц.

Заводы	Потребители				Количество продукции, выпускаемой заводом
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	5	4	7	7	200
A_2	3	2	5	9	600
A_3	6	1	5	7	500
A_4	9	4	8	10	150
Потребность потребителей в продукции заводов	150	400	200	700	1450

Найдем начальный опорный план методом «*минимального элемента*». Будем распределять продукцию заводов, начиная с загрузки клетки с минимальным расходом c_{ij} по перевозке единицы продукции с i-того завода j-тому потребителю. При этом в клетку записываем максимально возможное число поставки. Затем из рассмотрения исключаем строку, соответствующую заводу, продукция которого полностью израсходована, или столбец, который соответствует потребителю, спрос на продукцию которого полностью удовлетворен. После этого из оставшихся клеток выбирают клетку с минимальным расходом по перевозке продукции. Процесс распределения заканчивается, когда все запасы заводов исчерпаны и при этом спрос потребителей удовлетворен.

Из распределительной таблицы видно, что наименьшие затраты на перевозку соответствуют маршруту $A_3 - B_2$, а именно клетка $(3;2)$. В эту клетку записываем максимальное число поставки $x_{32} = \min(400;500) = 400$ единиц продукции, которые поступают с третьего завода A_3 потребителю B_2, при этом второй потребитель полностью получил продукцию, и второй столбец мы можем исключить из рассмотрения. На третьем заводе A_3 осталось продукции $500-400=100$ единиц. Из оставшихся элементов c_{ij} выбираем наименьший элемент. Наименьшую стоимость по перевозке продукции имеет клетка $(2;1)$, для которой $c_{21}=3$. В клетку $(2;1)$ помещаем максимальное число поставки $x_{21}=\min(150;600)=150$ единиц продукции, отправленных первым заводом A_2 потребителю B_1. При этом из рассмотрения можно вычеркнуть первый столбец, так как первый потребитель B_1 получил всю продукцию. На втором заводе A_2 осталось продукции $600-150=450$ единиц.

Из оставшихся элементов c_{ij} выбираем наименьший элемент. Наименьшую стоимость по перевозке продукции имеют клетки $(2;3)$ и $(3;3)$, для которых $c_{23}=c_{33}=5$. В клетку $(2;3)$ помещаем максимальное число поставки $x_{23}=\min(450;200)=200$ единиц продукции, выпущенных вторым заводом A_2 потребителю B_3. При этом из рассмотрения можно вычеркнуть третий столбец, так как потребитель B_3 получил всю продукцию. На втором заводе A_2 осталось продукции $450-200=250$ единиц.

Аналогично наименьшую стоимость по перевозке продукции имеют клетки $(1;4)$ и $(3;4)$, для которых $c_{14}=c_{34}=7$. В клетку $(1;4)$ помещаем максимальное число поставки $x_{14}=\min(700;200)=200$ единиц продукции, выпущенных первым заводом A_1 потребителю B_4. При этом из рассмотрения можно вычеркнуть первую стоку, так как продукция первого завода полностью израсходована. Четвертому потребителю необходимо поставить $700-200=500$ единиц продукции.

Из оставшихся клеток клетка (3;4) имеет минимальную стоимость, равную $c_{34}=7$. В клетку (3;4) помещаем $x_{14}=\min(500,100)=100$ единиц продукции, отправленных третьим заводом A_3 потребителю B_4. При этом из рассмотрения можно вычеркнуть третью строку, так как продукция третьего завода полностью израсходована. Четвертому потребителю необходимо поставить $500-100=400$ единиц продукции. Заполняем клетку $(2;4)$: $x_{24}=\min(250;400)=250$. В неё помещаем $x_{24}=250$ единиц продукции, отправленных вторым заводом A_2 четвертому потребителю B_4. Незаполненной осталась клетка (4;4) и $x_{44}=150$ единиц продукции. Таким образом, получили таблицу, в которой записан исходный опорный план.

Заводы	Потребители				Количество продукции, выпускаемой заводом	
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	5	4	7	7 200	200	u_1
A_2	3 150	2	5 200	9 250	600	u_2
A_3	6	1 400	5	7 100	500	u_3
A_4	9	4	8	10 150	150	u_4
Потребность потребителей в продукции заводов	150	400	200	700	1450	
	v_1	v_2	v_3	v_4		

Полученный опорный план может быть записан также в виде матрицы

$$X_1^0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 200 \\ 150 & 0 & 200 & 250 \\ 0 & 400 & 0 & 100 \\ 0 & 0 & 0 & 150 \end{pmatrix}.$$

Транспортные издержки для этого плана составляют:
$z(X_1^0) = 7 \cdot 200 + 3 \cdot 150 + 5 \cdot 200 + 9 \cdot 250 + 1 \cdot 400 + 7 \cdot 100 + 10 \cdot 150 = 7700$ денежных единиц.

Проверим оптимальность полученного опорного плана *методом потенциалов*. Каждому заводу поставим в соответствие потенциал $u_i (i = \overline{1;4})$, каждому потребителю потенциал $v_j (j = \overline{1;4})$. Тогда каждой занятой клетке будет соответствовать уравнение: $u_i + v_j = c_{ij}$. В нашем случае получаем систему

$$\begin{cases} u_1 + v_4 = 7, \\ u_2 + v_1 = 3, \\ u_2 + v_3 = 5, \\ u_2 + v_4 = 9, \\ u_3 + v_2 = 1, \\ u_3 + v_4 = 7, \\ u_4 + v_4 = 10, \end{cases}$$

решение которой даёт потенциалы заводов и потребителей. Система линейно-зависимая, для нахождения одного из решений придадим одному из потенциалов числовое значение, например $u_1 = 0$. Тогда $v_1 = 1$, $v_2 = 1$, $v_4 = 7$, $u_2 = 2$, $u_3 = 0$, $v_3 = 3$, $u_4 = 7$. Для исследования начального опорного плана на оптимальность находим для каждой свободной клетки оценки $s_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$:

$$\begin{cases} s_{11} = c_{11} - (u_1 + v_1) = 5 - (0+1) = 4, \\ s_{12} = c_{12} - (u_1 + v_2) = 4 - (0+1) = 3, \\ s_{13} = c_{13} - (u_1 + v_3) = 7 - (0+3) = 4, \\ s_{22} = c_{22} - (u_2 + v_2) = 2 - (2+1) = -1, \\ s_{31} = c_{31} - (u_3 + v_1) = 6 - (0+1) = 5, \\ s_{33} = c_{33} - (u_3 + v_3) = 5 - (0+3) = 2, \\ s_{41} = c_{41} - (u_4 + v_1) = 9 - (3+1) = 5, \\ s_{42} = c_{42} - (u_4 + v_2) = 4 - (3+1) = 0, \\ s_{43} = c_{43} - (u_4 + v_3) = 8 - (3+3) = 2. \end{cases}$$

Так как имеется отрицательная оценка $s_{22} = -1$, то опорный план не является оптимальным. Его можно улучшить за счет загрузки клетки (2;2), содержащей отрицательную оценку. Составляем цикл пересчета относительно этой клетки.

Заводы	Потребители				Количество продукции выпускаемой заводом	
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	5	4	7	7 200	200	$u_1 = 0$
A_2	3 150	2 +	5 200	9 250 –	600	$u_2 = 2$
A_3	6	1 400 –	5	7 100 +	500	$u_3 = 0$
A_3	9	4	8	10 150	150	$u_4 = 3$
Потребность потребителей в продукции заводов	150	400	200	700	1450	
	$v_1 = 1$	$v_2 = 1$	$v_3 = 3$	$v_4 = 7$		

Из клеток, помеченных знаком «–», выбираем наименьшее число продукции (250), и будем её прибавлять к клеткам, помеченным знаком «+» и вычитать из клеток, помеченными знаком «$-$». В результате приходим к новому плану транспортировки продукции заводами-потребителям.

Заводы	Потребители				Количество продукции, выпускае-мой заводом	
	B_1	B_2	B_3	B_4		
A_1	5	4	7	7 200	200	$u_1 = 0$
A_2	3 150	2 250	5 200	9	600	$u_2 = 1$
A_3	6	1 150	5	7 350	500	$u_3 = 0$
A_3	9	4	8	10 150	150	$u_4 = 3$
Потребность потребителей в продукции заводов	150	400	200	700	1450	
	$v_1 = 2$	$v_2 = 1$	$v_3 = 4$	$v_4 = 7$		

Полученный новый опорный план является невырожденным, так как число заполненных клеток равно $7 = m + n - 1 = 4 + 4 - 1 = 7$. Проверим его на оптимальность, для чего найдём потенциалы строк и столбцов из решения системы:

$$\begin{cases} u_1 + v_4 = 7, \\ u_2 + v_1 = 3, \\ u_2 + v_2 = 2, \\ u_2 + v_3 = 5, \\ u_3 + v_2 = 1, \\ u_3 + v_4 = 7, \\ u_4 + v_4 = 10. \end{cases}$$

Система линейно-зависимая, для нахождения одного из решений придадим одному из потенциалов числовое значение, например $u_1 = 0$. Тогда $v_1 = 2$, $v_2 = 1$, $v_3 = 4$, $u_2 = 1$, $u_3 = 0$, $v_4 = 7$, $u_4 = 3$. Для исследования опорного плана на оптимальность находим для каждой свободной клетки оценки $s_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$:

$$\begin{cases} s_{11} = c_{11} - (u_1 + v_1) = 5 - (0+2) = 3, \\ s_{12} = c_{12} - (u_1 + v_2) = 4 - (0+1) = 3, \\ s_{13} = c_{13} - (u_1 + v_3) = 7 - (0+4) = 3, \\ s_{24} = c_{24} - (u_2 + v_4) = 9 - (1+7) = 1, \\ s_{31} = c_{31} - (u_3 + v_1) = 6 - (0+2) = 4, \\ s_{33} = c_{33} - (u_3 + v_3) = 5 - (0+4) = 1, \\ s_{41} = c_{41} - (u_4 + v_1) = 9 - (7+2) = 0, \\ s_{42} = c_{42} - (u_4 + v_2) = 4 - (3+1) = 0, \\ s_{43} = c_{43} - (u_4 + v_3) = 8 - (3+4) = 1. \end{cases}$$

Так как все оценки неотрицательны, то найденный опорный план является оптимальным, так как имеются нулевые оценки, но он не единственен.

Итак, получили оптимальный план

$$X_1^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 200 \\ 150 & 250 & 200 & 0 \\ 0 & 150 & 0 & 350 \\ 0 & 0 & 0 & 150 \end{pmatrix}$$

Минимальные транспортные издержки для этого плана составляют: $z(X_1^*) = 7 \cdot 200 + 3 \cdot 150 + 2 \cdot 250 + 5 \cdot 200 + 1 \cdot 150 + 7 \cdot 350 + 10 \cdot 150 = 7450$ денежных единиц.

Итак, по оптимальному плану, необходимо:

- с завода A_1 потребителю B_4 доставить 200 единиц продукции;
- с завода A_2 потребителю B_1 доставить 150 единиц продукции, потребителю B_2 – 250 единиц продукции, а потребителю B_3 – 200 единиц продукции ;
- с завода A_3 потребителю B_2 доставить 150 единиц продукции, потребителю B_4 – 350 единиц продукции;
- после увеличения выпуска продукции третий завод A_3 доставит потребителю B_4 150 единиц продукции.

Совокупные затраты на производство составили $Z_{пр.} = 8600$ денежных единиц. Тогда совокупные затраты на производство и транспортировку продукции потребителям, в случае расширения мощности третьего завода, составят: $Z_1 = Z_{пр.} + z(X_1^*) = 8600 + 7450 = 16050$ денежных единиц.

6.3 Задания для решения на практическом занятии

6.3.1 Найти опорный план транспортной задачи.

Поставщик	Потребитель				Запасы груза
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	6	7	3	5	100
A_2	1	2	5	6	150
A_3	3	10	20	1	50
Потребность потребителей в грузе	75	80	60	85	300

6.3.2 Найти опорный план транспортной задачи.

Поставщик	Потребитель			Запасы груза
	B_1	B_2	B_3	
A_1	4	5	1	10
A_2	6	3	4	8
A_3	1	2	4	12
Потребность в грузе	6	14	10	30

6.3.3 Методом потенциалов решить заданную транспортную задачу.

Поставщик	Потребитель				Запасы груза
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	2	4	1	50
A_2	2	3	1	5	40
A_3	3	2	4	4	20
Потребность потребителей в грузе	30	25	35	20	110

6.3.4 Три сельхозпредприятия выделяют соответственно 30, 40 и 20 центнеров молока для ежедневного снабжения четырёх пунктов. Стоимость перевозки и потребности пунктов представлены в виде таблицы:

Совхоз	Потребитель				Предназначено для вывоза
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2	3	5	4	30
A_2	3	2	4	1	40
A_3	4	3	2	6	20
Потребность потребителей в молоке	20	25	35	10	90

6.3.5 Решить транспортную задачу с открытой моделью методом потенциалов. Данные к задаче представлены в виде таблицы.

Поставщик	Потребитель				Запасы груза
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	1	5	2	25
A_2	4	6	7	3	25
A_3	2	8	4	5	15
Потребность потребителей в грузе	9	20	16	25	65<70

6.3.6 Решить транспортную задачу с открытой моделью методом потенциалов. Данные к задаче представлены в виде таблицы.

Поставщик	Потребитель				Запасы груза
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	3	2	4	1	40
A_2	2	3	1	5	50
A_3	3	2	4	4	30
Потребность потребителей в грузе	35	40	40	30	120<145

6.3.7 Составить план перевозок грузов с наименьшей общей стоимостью от четырёх поставщиков $A_i \left(i=\overline{1;4}\right)$ соответственно в количествах 100, 400, 100 и 100 единиц к пяти потребителям $B_j \left(j=\overline{1;5}\right)$ соответственно в количествах 50, 100, 150, 200 и 250 единиц; стоимость перевозок единицы груза указаны в таблице:

A_i \ B_j	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5
A_1	1	6	8	12	16
A_2	16	10	8	6	15
A_3	4	1	9	11	13
A_4	3	2	7	7	15

6.4 Задания для контролируемой самостоятельной работы

6.4.1 На заводах 1, 2 и 3 производится однородная продукции в количестве $a_{1,}\, a_2$ и a_3 единиц. При этом затраты на производство единицы продукции на заводах составляют $c_{1,}\, c_2$ и c_3 ден. ед. Четырем потребителям требуется соответственно b_1, b_2, b_3, b_4 единиц продукции. Расходы c_{ij} по перевозке единицы продукции с i-го завода j-му потребителю известны. Для полного удовлетворения потребностей необходимо увеличить выпуск продукции на k-ом заводе. При этом дополнительные затраты на производство единицы дополнительной продукции равны Δc.

Требуется:

1. Найти план доставки продукции потребителю, при котором полностью удовлетворяется спрос, а совокупные затраты, связанные с изготовлением продукции и ее доставкой потребителям, минимизируются.

2. Определить минимальные совокупные затраты на производство продукции и доставку ее потребителям по оптимальному плану расширения выпуска продукции.

Исходные данные по вариантам заданий указаны в таблице.

Указания: вариант увеличения выпуска продукции рассматривать в ходе решения как самостоятельный пункт производства в едином комплексе с данными пунктами (заводами 1,2,3).

6.4.1.1 $a_1 = 700$, $a_2 = 300$, $a_3 = 600$, $c_1 = 5$, $c_2 = 7$, $c_3 = 4$, $b_1 = 350$, $b_2 = 550$, $b_3 = 250$, $b_4 = 650$, $c_{11} = 7$, $c_{12} = 8$, $c_{13} = 7$, $c_{14} = 9$, $c_{21} = 8$, $c_{22} = 5$, $c_{23} = 3$, $c_{24} = 8$, $c_{31} = 7$, $c_{32} = 4$, $c_{33} = 3$, $c_{34} = 7$, $k = 1$, $\Delta c = 6$.

6.4.1.2 $a_1 = 70$, $a_2 = 90$, $a_3 = 50$, $c_1 = 6$, $c_2 = 5$, $c_3 = 4$, $b_1 = 50$, $b_2 = 70$, $b_3 = 40$, $b_4 = 40$, $c_{11} = 5$, $c_{12} = 4$, $c_{13} = 3$, $c_{14} = 6$, $c_{21} = 4$, $c_{22} = 3$, $c_{23} = 5$, $c_{24} = 1$, $c_{31} = 2$, $c_{32} = 4$, $c_{33} = 1$, $c_{34} = 5$, $k = 2$, $\Delta c = 5$.

6.4.1.3 $a_1 = 600$, $a_2 = 400$, $a_3 = 700$, $c_1 = 2$, $c_2 = 4$, $c_3 = 3$, $b_1 = 500$, $b_2 = 300$, $b_3 = 800$, $b_4 = 200$, $c_{11} = 4$, $c_{12} = 10$, $c_{13} = 6$, $c_{14} = 8$, $c_{21} = 5$, $c_{22} = 7$, $c_{23} = 3$, $c_{24} = 9$, $c_{31} = 4$, $c_{32} = 8$, $c_{33} = 6$, $c_{34} = 2$, $k = 3$, $\Delta c = 3$.

6.4.1.4 $a_1 = 300$, $a_2 = 600$, $a_3 = 1000$, $c_1 = 7$, $c_2 = 6$, $c_3 = 2$, $b_1 = 500$, $b_2 = 700$, $b_3 = 400$, $b_4 = 450$, $c_{11} = 4$, $c_{12} = 5$, $c_{13} = 7$, $c_{14} = 9$, $c_{21} = 7$, $c_{22} = 4$, $c_{23} = 9$, $c_{24} = 7$, $c_{31} = 8$, $c_{32} = 2$, $c_{33} = 3$, $c_{34} = 8$, $k = 1$, $\Delta c = 6$.

6.4.1.5 $a_1 = 200$, $a_2 = 500$, $a_3 = 300$, $c_1 = 6$, $c_2 = 3$, $c_3 = 5$, $b_1 = 350$, $b_2 = 150$, $b_3 = 250$, $b_4 = 450$, $c_{11} = 2$, $c_{12} = 4$, $c_{13} = 3$, $c_{14} = 7$, $c_{21} = 6$, $c_{22} = 8$, $c_{23} = 4$, $c_{24} = 2$, $c_{31} = 9$, $c_{32} = 5$, $c_{33} = 3$, $c_{34} = 8$, $k = 2$, $\Delta c = 3$.

6.4.1.6 $a_1 = 500$, $a_2 = 700$, $a_3 = 800$, $c_1 = 8$, $c_2 = 3$, $c_3 = 5$, $b_1 = 600$, $b_2 = 400$, $b_3 = 750$, $b_4 = 350$, $c_{11} = 5$, $c_{12} = 2$, $c_{13} = 3$, $c_{14} = 4$, $c_{21} = 7$, $c_{22} = 8$, $c_{23} = 6$, $c_{24} = 5$, $c_{31} = 6$, $c_{32} = 9$, $c_{33} = 7$, $c_{34} = 2$, $k = 3$, $\Delta c = 4$.

6.4.1.7 $a_1 = 800$, $a_2 = 300$, $a_3 = 500$, $c_1 = 7$, $c_2 = 5$, $c_3 = 6$, $b_1 = 650$, $b_2 = 250$, $b_3 = 350$, $b_4 = 550$, $c_{11} = 3$, $c_{12} = 8$, $c_{13} = 5$, $c_{14} = 4$, $c_{21} = 9$, $c_{22} = 3$, $c_{23} = 7$, $c_{24} = 6$, $c_{31} = 4$, $c_{32} = 8$, $c_{33} = 7$, $c_{34} = 5$, $k = 1$, $\Delta c = 4$.

6.4.1.8 $a_1 = 250$, $a_2 = 450$, $a_3 = 300$, $c_1 = 4$, $c_2 = 5$, $c_3 = 8$, $b_1 = 200$, $b_2 = 400$, $b_3 = 150$, $b_4 = 400$, $c_{11} = 9$, $c_{12} = 3$, $c_{13} = 4$, $c_{14} = 6$, $c_{21} = 3$, $c_{22} = 2$, $c_{23} = 5$, $c_{24} = 3$, $c_{31} = 4$, $c_{32} = 7$, $c_{33} = 9$, $c_{34} = 6$, $k = 2$, $\Delta c = 2$.

6.4.1.9 $a_1 = 600$, $a_2 = 450$, $a_3 = 750$, $c_1 = 7$, $c_2 = 5$, $c_3 = 9$, $b_1 = 500$, $b_2 = 700$, $b_3 = 750$, $b_4 = 650$, $c_{11} = 7$, $c_{12} = 5$, $c_{13} = 9$, $c_{14} = 3$, $c_{21} = 8$, $c_{22} = 4$, $c_{23} = 3$, $c_{24} = 12$, $c_{31} = 8$, $c_{32} = 4$, $c_{33} = 6$, $c_{34} = 7$, $k = 3$, $\Delta c = 4$.

6.4.1.10 $a_1 = 900$, $a_2 = 300$, $a_3 = 600$, $c_1 = 5$, $c_2 = 3$, $c_3 = 4$, $b_1 = 450$, $b_2 = 650$, $b_3 = 350$, $b_4 = 550$, $c_{11} = 3$, $c_{12} = 6$, $c_{13} = 4$, $c_{14} = 9$, $c_{21} = 2$, $c_{22} = 5$, $c_{23} = 8$, $c_{24} = 4$, $c_{31} = 3$, $c_{32} = 7$, $c_{33} = 4$, $c_{34} = 9$, $k = 1$, $\Delta c = 6$.

6.4.1.11 $a_1 = 750$, $a_2 = 250$, $a_3 = 600$, $c_1 = 4$, $c_2 = 7$, $c_3 = 4$, $b_1 = 300$, $b_2 = 600$, $b_3 = 200$, $b_4 = 700$, $c_{11} = 6$, $c_{12} = 7$, $c_{13} = 7$, $c_{14} = 8$, $c_{21} = 8$, $c_{22} = 5$, $c_{23} = 3$, $c_{24} = 8$, $c_{31} = 7$, $c_{32} = 4$, $c_{33} = 3$, $c_{34} = 7$, $k = 1$, $\Delta c = 5$.

6.4.1.12 $a_1 = 80$, $a_2 = 80$, $a_3 = 50$, $c_1 = 5$, $c_2 = 5$, $c_3 = 5$, $b_1 = 40$, $b_2 = 80$, $b_3 = 30$, $b_4 = 50$, $c_{11} = 5$, $c_{12} = 5$, $c_{13} = 3$, $c_{14} = 6$, $c_{21} = 4$, $c_{22} = 4$, $c_{23} = 5$, $c_{24} = 2$, $c_{31} = 2$, $c_{32} = 4$, $c_{33} = 1$, $c_{34} = 5$, $k = 2$, $\Delta c = 6$.

6.4.1.13 $a_1 = 550$, $a_2 = 450$, $a_3 = 700$, $c_1 = 3$, $c_2 = 4$, $c_3 = 4$, $b_1 = 450$, $b_2 = 350$, $b_3 = 750$, $b_4 = 250$, $c_{11} = 4$, $c_{12} = 9$, $c_{13} = 6$, $c_{14} = 7$, $c_{21} = 5$, $c_{22} = 7$, $c_{23} = 3$, $c_{24} = 9$, $c_{31} = 6$, $c_{32} = 8$, $c_{33} = 6$, $c_{34} = 2$, $k = 3$, $\Delta c = 4$.

6.4.1.14 $a_1 = 250$, $a_2 = 650$, $a_3 = 1000$, $c_1 = 5$, $c_2 = 4$, $c_3 = 5$, $b_1 = 450$, $b_2 = 750$, $b_3 = 350$, $b_4 = 500$, $c_{11} = 3$, $c_{12} = 5$, $c_{13} = 7$, $c_{14} = 6$, $c_{21} = 7$, $c_{22} = 8$, $c_{23} = 5$, $c_{24} = 7$, $c_{31} = 8$, $c_{32} = 2$, $c_{33} = 4$, $c_{34} = 8$, $k = 1$, $\Delta c = 7$.

6.4.1.15 $a_1 = 150$, $a_2 = 550$, $a_3 = 300$, $c_1 = 5$, $c_2 = 3$, $c_3 = 6$, $b_1 = 300$, $b_2 = 200$, $b_3 = 200$, $b_4 = 500$, $c_{11} = 3$, $c_{12} = 4$, $c_{13} = 3$, $c_{14} = 8$, $c_{21} = 5$, $c_{22} = 8$, $c_{23} = 5$, $c_{24} = 2$, $c_{31} = 8$, $c_{32} = 5$, $c_{33} = 4$, $c_{34} = 8$, $k = 2$, $\Delta c = 5$.

6.4.1.16 $a_1 = 450$, $a_2 = 750$, $a_3 = 800$, $c_1 = 7$, $c_2 = 3$, $c_3 = 6$, $b_1 = 550$, $b_2 = 450$, $b_3 = 700$, $b_4 = 400$, $c_{11} = 5$, $c_{12} = 3$, $c_{13} = 2$, $c_{14} = 4$, $c_{21} = 7$, $c_{22} = 9$, $c_{23} = 6$, $c_{24} = 6$, $c_{31} = 7$, $c_{32} = 9$, $c_{33} = 6$, $c_{34} = 2$, $k = 3$, $\Delta c = 7$.

6.4.1.17 $a_1 = 750$, $a_2 = 300$, $a_3 = 550$, $c_1 = 5$, $c_2 = 6$, $c_3 = 7$, $b_1 = 600$, $b_2 = 300$, $b_3 = 300$, $b_4 = 600$, $c_{11} = 3$, $c_{12} = 7$, $c_{13} = 5$, $c_{14} = 3$, $c_{21} = 9$, $c_{22} = 3$, $c_{23} = 7$, $c_{24} = 6$, $c_{31} = 2$, $c_{32} = 8$, $c_{33} = 7$, $c_{34} = 5$, $k = 1$, $\Delta c = 6$.

6.4.1.18 $a_1 = 200$, $a_2 = 450$, $a_3 = 350$, $c_1 = 7$, $c_2 = 6$, $c_3 = 5$, $b_1 = 150$, $b_2 = 450$, $b_3 = 100$, $b_4 = 450$, $c_{11} = 8$, $c_{12} = 3$, $c_{13} = 6$, $c_{14} = 6$, $c_{21} = 4$, $c_{22} = 2$, $c_{23} = 5$, $c_{24} = 4$, $c_{31} = 4$, $c_{32} = 6$, $c_{33} = 9$, $c_{34} = 8$, $k = 2$, $\Delta c = 5$.

6.4.1.19 $a_1 = 550$, $a_2 = 450$, $a_3 = 800$, $c_1 = 9$, $c_2 = 8$, $c_3 = 7$, $b_1 = 450$, $b_2 = 750$, $b_3 = 700$, $b_4 = 700$, $c_{11} = 7$, $c_{12} = 6$, $c_{13} = 9$, $c_{14} = 3$, $c_{21} = 7$, $c_{22} = 4$, $c_{23} = 3$, $c_{24} = 12$, $c_{31} = 5$, $c_{32} = 4$, $c_{33} = 6$, $c_{34} = 4$, $k = 3$, $\Delta c = 6$.

6.4.1.20 $a_1 = 800$, $a_2 = 350$, $a_3 = 650$, $c_1 = 4$, $c_2 = 3$, $c_3 = 4$, $b_1 = 400$, $b_2 = 700$, $b_3 = 300$, $b_4 = 600$, $c_{11} = 2$, $c_{12} = 6$, $c_{13} = 4$, $c_{14} = 5$, $c_{21} = 2$, $c_{22} = 5$, $c_{23} = 8$, $c_{24} = 4$, $c_{31} = 3$, $c_{32} = 8$, $c_{33} = 4$, $c_{34} = 9$, $k = 1$, $\Delta c = 7$.

6.4.1.21 $a_1 = 750$, $a_2 = 300$, $a_3 = 550$, $c_1 = 6$, $c_2 = 7$, $c_3 = 4$, $b_1 = 300$, $b_2 = 600$, $b_3 = 300$, $b_4 = 600$, $c_{11} = 7$, $c_{12} = 8$, $c_{13} = 5$, $c_{14} = 9$, $c_{21} = 8$, $c_{22} = 5$, $c_{23} = 3$, $c_{24} = 7$, $c_{31} = 7$, $c_{32} = 4$, $c_{33} = 4$, $c_{34} = 7$, $k = 1$, $\Delta c = 5$.

6.4.1.22 $a_1 = 80$, $a_2 = 80$, $a_3 = 50$, $c_1 = 3$, $c_2 = 5$, $c_3 = 4$, $b_1 = 40$, $b_2 = 80$, $b_3 = 20$, $b_4 = 60$, $c_{11} = 4$, $c_{12} = 6$, $c_{13} = 3$, $c_{14} = 6$, $c_{21} = 4$, $c_{22} = 4$, $c_{23} = 5$, $c_{24} = 1$, $c_{31} = 2$, $c_{32} = 4$, $c_{33} = 2$, $c_{34} = 5$, $k = 2$, $\Delta c = 6$.

6.4.1.23 $a_1 = 650$, $a_2 = 350$, $a_3 = 700$, $c_1 = 7$, $c_2 = 4$, $c_3 = 3$, $b_1 = 400$, $b_2 = 300$, $b_3 = 900$, $b_4 = 200$, $c_{11} = 4$, $c_{12} = 10$, $c_{13} = 5$, $c_{14} = 8$, $c_{21} = 5$, $c_{22} = 8$, $c_{23} = 3$, $c_{24} = 9$, $c_{31} = 5$, $c_{32} = 8$, $c_{33} = 6$, $c_{34} = 2$, $k = 3$, $\Delta c = 4$.

6.4.1.24 $a_1 = 350$, $a_2 = 600$, $a_3 = 950$, $c_1 = 5$, $c_2 = 6$, $c_3 = 2$, $b_1 = 400$, $b_2 = 800$, $b_3 = 300$, $b_4 = 550$, $c_{11} = 4$, $c_{12} = 5$, $c_{13} = 7$, $c_{14} = 6$, $c_{21} = 7$, $c_{22} = 5$, $c_{23} = 9$, $c_{24} = 7$, $c_{31} = 8$, $c_{32} = 3$, $c_{33} = 3$, $c_{34} = 8$, $k = 1$, $\Delta c = 5$.

6.4.1.25 $a_1 = 150$, $a_2 = 500$, $a_3 = 350$, $c_1 = 4$, $c_2 = 3$, $c_3 = 5$, $b_1 = 300$, $b_2 = 200$, $b_3 = 200$, $b_4 = 500$, $c_{11} = 2$, $c_{12} = 4$, $c_{13} = 8$, $c_{14} = 7$, $c_{21} = 6$, $c_{22} = 8$, $c_{23} = 4$, $c_{24} = 5$, $c_{31} = 9$, $c_{32} = 5$, $c_{33} = 4$, $c_{34} = 8$, $k = 2$, $\Delta c = 5$.

6.4.1.26 $a_1 = 550$, $a_2 = 700$, $a_3 = 750$, $c_1 = 4$, $c_2 = 3$, $c_3 = 5$, $b_1 = 500$, $b_2 = 500$, $b_3 = 650$, $b_4 = 450$, $c_{11} = 6$, $c_{12} = 2$, $c_{13} = 3$, $c_{14} = 4$, $c_{21} = 7$, $c_{22} = 7$, $c_{23} = 6$, $c_{24} = 8$, $c_{31} = 6$, $c_{32} = 9$, $c_{33} = 5$, $c_{34} = 2$, $k = 3$, $\Delta c = 8$.

6.4.1.27 $a_1 = 700$, $a_2 = 350$, $a_3 = 550$, $c_1 = 4$, $c_2 = 5$, $c_3 = 6$, $b_1 = 600$, $b_2 = 300$, $b_3 = 300$, $b_4 = 600$, $c_{11} = 3$, $c_{12} = 8$, $c_{13} = 5$, $c_{14} = 2$, $c_{21} = 9$, $c_{22} = 3$, $c_{23} = 7$, $c_{24} = 6$, $c_{31} = 7$, $c_{32} = 8$, $c_{33} = 7$, $c_{34} = 6$, $k = 1$, $\Delta c = 5$.

6.4.1.28 $a_1 = 200$, $a_2 = 450$, $a_3 = 350$, $c_1 = 4$, $c_2 = 5$, $c_3 = 6$, $b_1 = 200$, $b_2 = 400$, $b_3 = 100$, $b_4 = 450$, $c_{11} = 9$, $c_{12} = 9$, $c_{13} = 4$, $c_{14} = 6$, $c_{21} = 3$, $c_{22} = 2$, $c_{23} = 5$, $c_{24} = 3$, $c_{31} = 4$, $c_{32} = 6$, $c_{33} = 9$, $c_{34} = 6$, $k = 2$, $\Delta c = 5$.

6.4.1.29 $a_1 = 400$, $a_2 = 550$, $a_3 = 850$, $c_1 = 8$, $c_2 = 5$, $c_3 = 9$, $b_1 = 400$, $b_2 = 800$, $b_3 = 750$, $b_4 = 650$, $c_{11} = 7$, $c_{12} = 5$, $c_{13} = 5$, $c_{14} = 3$, $c_{21} = 8$, $c_{22} = 4$, $c_{23} = 3$, $c_{24} = 12$, $c_{31} = 8$, $c_{32} = 7$, $c_{33} = 6$, $c_{34} = 7$, $k = 3$, $\Delta c = 5$.

6.4.1.30 $a_1 = 800$, $a_2 = 350$, $a_3 = 650$, $c_1 = 5$, $c_2 = 6$, $c_3 = 4$, $b_1 = 450$, $b_2 = 650$, $b_3 = 350$, $b_4 = 550$, $c_{11} = 4$, $c_{12} = 6$, $c_{13} = 5$, $c_{14} = 9$, $c_{21} = 2$, $c_{22} = 5$, $c_{23} = 8$, $c_{24} = 4$, $c_{31} = 3$, $c_{32} = 7$, $c_{33} = 4$, $c_{34} = 9$, $k = 1$, $\Delta c = 8$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Жевняк, Р. М. Высшая математика. В 5 ч. / Р. М. Жевняк, А. А. Карпук. – Минск : Выш. шк., 1984. – Ч. 3 – 5.

2. Гуринович, С. Л. Математика. Задачи с экономическим содержанием / С. Л. Гуринович. – Минск : Новое знание, 2008. – 263 с.

3. Индивидуальные задания по высшей математике: Операционное исчисление. Элементы теории устойчивости. Теория вероятностей. Математическая статистика / А. П. Рябушко [и др.]. – Минск : Выш. шк., 2006. – 336 с.: ил.

4. Руководство к решению задач по высшей математике. В 2 ч. / Е. И. Гурский [и др.]. – Минск : Выш. шк., 1989. – Ч. 1 – 2.

5. Чудесенко, В. Ф. Сборник заданий по специальным курсам высшей математики (Типовые расчёты) / В. Ф. Чудесенко. – Москва : Высш. школа, 1983. – 111 с.

6. Данко, П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 2 / П. Е. Данко, А. Г. Попов. – Москва : Высш. школа, 1967. – 350.

7. Кудрявцев, В. А. Краткий курс высшей математики / В. А. Кудрявцев, Б. П. Демидович. – Москва : Наука, 1989. – 655 с.

8. Высшая математика. Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. Дифференциальное исчисление функции одной переменной : методические указания к практическим занятиям для студентов первого курса экономических специальностей / А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2012. – 89 с.

9. Высшая математика. Функции нескольких переменных. Интегральное исчисление функции одной переменной. Дифференциальные уравнения : методические указания к практическим занятиям для студентов первого курса экономических специальностей / А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2014. – 99 с.

10. Высшая математика. Числовые и функциональные ряды. Случайные события в теории вероятностей : методические указания к практическим занятиям для студентов второго курса экономических специальностей / А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2014. – 101 с.

11. Высшая математика. Случайные величины в теории вероятностей : методические указания к практическим занятиям для студентов второго курса экономических специальностей / А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2015. – 116 с.

12. Теория вероятностей и математическая статистика : задания для выполнения типовых расчётов для студентов второго курса механико-технологических специальностей / А. В. Коваленко [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2012. – 77 с.

13. Высшая математика : методические указания и контрольные задания для студентов заочной формы обучения. В 4 ч. / В. С. Денисов [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2006. – Ч. 3 – 4.

14. Карасёв, А. И. Курс высшей математики для экономических вузов. В 2 ч. Ч. 2 / А. И. Карасёв, З. М. Аксютина, Т. И. Савельева. – Москва : Высш. школа, 1990. – 272 с.

15. Ефимов, А. В. Сборник задач по математике для ВТУЗов. Специальные курсы / А. В. Ефимов [и др]. – Москва : Наука, 1984. – 606 с.

16. Гурский, Е. И. Сборник задач по теории вероятностей и математической статистике / Е. И. Гурский. – Минск : Выш.шк, 1984 . – 223 с.

17. Герасимович, А. И. Математическая статистика / А. И. Герасимович. – Минск : Выш. шк, 1983. – 280 с.

18. Руководство к решению задач по высшей математике. В 2 ч. Ч. 2 / Е. И. Гурский [и др.]. – Минск : Выш. шк., 1989. – 400 с.

19. Кузнецов, А. В. Руководство к решению задач по математическому программированию / А. В. Кузнецов, Н. И. Холод, Л. С. Костевич. – Минск : Выш. школа, 1978. – 256 с.

20. Индивидуальные задания по теории вероятностей и математической статистике: типовые расчёты / Ю. В. Муранов [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2000. – 66 с.

21. Высшая математика. Теория вероятностей. Методические указания к практическим занятиям для студентов дневной и заочной форм обучения / Д. Е. Дунина [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2009. – 102 с.

22. Высшая математика. Теория вероятностей и математическая статистика: методические указания к практическим занятиям для студентов дневной и заочной форм обучения / Д. Е. Дунина [и др.]. – Витебск : УО «ВГТУ», 2012. – 128 с.

23. Чистяков, В. П. Курс теории вероятностей / В. П. Чистяков. – Москва : Наука, 1982. – 243 с.

24. Прохоров, Ю. В. Теория вероятностей / Ю. В. Прохоров, Ю. А. Розанов. – Москва : Наука, 1973. – 496 с.

25. Карасёв, А. И. Теория вероятностей и математическая статистика / А. И. Карасёв. – Москва : Статистика, 1979. – 279 с.

26. Колемаев, В. А. Теория вероятностей и математическая статистика / В. А. Колемаев [и др.] – Москва : Высш. школа, 1991. – 400 с.

27. Гринберг, А.С. Теория вероятностей и математическая статистика : курс лекций / А. С. Гринберг, О. Б. Плющ, Б. В. Новыш. – Академия управления при президенте Республики Беларусь, 2005. – 186 с.

28. Гусак, А. А. Теория вероятностей. Справочное пособие к решению задач / А. А. Гусак, Е. А. Бричикова. – Минск: ТетраСистемс, 2007. – 288 с.

29. Белько, И. В. Теория вероятностей и математическая статистика / И. В. Белько, Г. П. Свирид. – Минск: ООО «Новое знание», 2004.– 251 с.

30. Кузнецов, Ю. Н. Математическое программирование / Ю. Н. Кузнецов, В. И. Кузубов, А. Б. Волощенко. – Москва : Высш. школа, 1980. – 300 с.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Таблица П.1 – Значения функции распределения Пуассона

$$P\left(X=m\right)=\frac{\mu^{m}}{m!}\cdot e^{-\mu}$$

При μ, равном 0,1; 0,2; …; 1,0

m \ μ	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
0	0,90484	0,81873	0,74082	0,67032	0,60653	0,54881	0,49659	0,44933	0,40657	0,36788
1	0,09048	0,16375	0,22225	0,26813	0,30327	0,32929	0,34761	0,35946	0,36591	0,36788
2	0,00452	0,01637	0,03334	0,05363	0,07582	0,09879	0,12166	0,14379	0,16466	0,18394
3	0,00015	0,00109	0,00333	0,00715	0,01264	0,01976	0,02839	0,03834	0,04940	0,06131
4	0,00000	0,00005	0,00025	0,00072	0,00158	0,00296	0,00497	0,00767	0,01111	0,01533
5		0,00000	0,00002	0,00006	0,00016	0,00036	0,00070	0,00123	0,00200	0,00307
6			0,00000	0,00000	0,00001	0,00004	0,00008	0,00016	0,00030	0,00051
7					0,00000	0,00000	0,00001	0,00002	0,00004	0,00007
8							0,00000	0,00000	0,00000	0,00001
9										0,00000

При μ, равном 2; 3; 4; …; 11

m \ μ	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0,13534	0,04979	0,01832	0,00674	0,00248	0,00091	0,00034	0,00012	0,00005	0,00002
1	0,27067	0,14936	0,07326	0,03369	0,01487	0,00638	0,00268	0,00111	0,00045	0,00018
2	0,27067	0,22404	0,14653	0,08422	0,04462	0,02234	0,01073	0,00500	0,00227	0,00101
3	0,18045	0,22404	0,19537	0,14037	0,08924	0,05213	0,02863	0,01499	0,00757	0,00370
4	0,09022	0,16803	0,19537	0,17547	0,13385	0,09123	0,05725	0,03374	0,01892	0,01019
5	0,03609	0,10082	0,15629	0,17547	0,16062	0,12772	0,09160	0,06073	0,03783	0,02242
6	0,01203	0,05041	0,10420	0,14622	0,16062	0,14900	0,12214	0,09109	0,06306	0,04109
7	0,00344	0,02160	0,05954	0,10444	0,13768	0,14900	0,13959	0,11712	0,09008	0,06458
8	0,00086	0,00810	0,02977	0,06528	0,10326	0,13038	0,13959	0,13176	0,11260	0,08879
9	0,00019	0,00270	0,01323	0,03627	0,06884	0,10140	0,12408	0,13176	0,12511	0,10853
10	0,00004	0,00081	0,00529	0,01813	0,04130	0,07098	0,09926	0,11858	0,12511	0,11938
11	0,00001	0,00022	0,00192	0,00824	0,02253	0,04517	0,07219	0,09702	0,11374	0,11938
12	0,00000	0,00006	0,00064	0,00343	0,01126	0,02635	0,04813	0,07277	0,09478	0,10943
13		0,00001	0,00020	0,00132	0,00520	0,01419	0,02962	0,05038	0,07291	0,09259
14		0,00000	0,00006	0,00047	0,00223	0,00709	0,01692	0,03238	0,05208	0,07275
15			0,00002	0,00016	0,00089	0,00331	0,00903	0,01943	0,03472	0,05335
16			0,00000	0,00005	0,00033	0,00145	0,00451	0,01093	0,02170	0,03668
17				0,00001	0,00012	0,00060	0,00212	0,00579	0,01276	0,02373

Окончание таблицы П.1

m \ μ	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
18				0,00000	0,00004	0,00023	0,00094	0,00289	0,00709	0,01450
19					0,00001	0,00009	0,00040	0,00137	0,00373	0,00840
20					0,00000	0,00003	0,00016	0,00062	0,00187	0,00462
21						0,00001	0,00006	0,00026	0,00089	0,00242
22						0,00000	0,00002	0,00011	0,00040	0,00121
23							0,00001	0,00004	0,00018	0,00058
24							0,00000	0,00002	0,00007	0,00027
25								0,00001	0,00003	0,00012
26								0,00000	0,00001	0,00005
27									0,00000	0,00002

Таблица П.2 – Значения функции

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,39894	0,39892	0,39886	0,39876	0,39862	0,39844	0,39822	0,39797	0,39767	0,39733
0,1	0,39695	0,39654	0,39608	0,39559	0,39505	0,39448	0,39387	0,39322	0,39253	0,39181
0,2	0,39104	0,39024	0,38940	0,38853	0,38762	0,38667	0,38568	0,38466	0,38361	0,38251
0,3	0,38139	0,38023	0,37903	0,37780	0,37654	0,37524	0,37391	0,37255	0,37115	0,36973
0,4	0,36827	0,36678	0,36526	0,36371	0,36213	0,36053	0,35889	0,35723	0,35553	0,35381
0,5	0,35207	0,35029	0,34849	0,34667	0,34482	0,34294	0,34105	0,33912	0,33718	0,33521
0,6	0,33322	0,33121	0,32918	0,32713	0,32506	0,32297	0,32086	0,31874	0,31659	0,31443
0,7	0,31225	0,31006	0,30785	0,30563	0,30339	0,30114	0,29887	0,29659	0,29431	0,29200
0,8	0,28969	0,28737	0,28504	0,28269	0,28034	0,27798	0,27562	0,27324	0,27086	0,26848
0,9	0,26609	0,26369	0,26129	0,25888	0,25647	0,25406	0,25164	0,24923	0,24681	0,24439
1,0	0,24197	0,23955	0,23713	0,23471	0,23230	0,22988	0,22747	0,22506	0,22265	0,22025
1,1	0,21785	0,21546	0,21307	0,21069	0,20831	0,20594	0,20357	0,20121	0,19886	0,19652
1,2	0,19419	0,19186	0,18954	0,18724	0,18494	0,18265	0,18037	0,17810	0,17585	0,17360
1,3	0,17137	0,16915	0,16694	0,16474	0,16256	0,16038	0,15822	0,15608	0,15395	0,15183
1,4	0,14973	0,14764	0,14556	0,14350	0,14146	0,13943	0,13742	0,13542	0,13344	0,13147
1,5	0,12952	0,12758	0,12566	0,12376	0,12188	0,12001	0,11816	0,11632	0,11450	0,11270
1,6	0,11092	0,10915	0,10741	0,10567	0,10396	0,10226	0,10059	0,09893	0,09728	0,09566
1,7	0,09405	0,09246	0,09089	0,08933	0,08780	0,08628	0,08478	0,08329	0,08183	0,08038
1,8	0,07895	0,07754	0,07614	0,07477	0,07341	0,07206	0,07074	0,06943	0,06814	0,06687
1,9	0,06562	0,06438	0,06316	0,06195	0,06077	0,05959	0,05844	0,05730	0,05618	0,05508

Окончание таблицы П.2

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2,0	0,05399	0,05292	0,05186	0,05082	0,04980	0,04879	0,04780	0,04682	0,04586	0,04491
2,1	0,04398	0,04307	0,04217	0,04128	0,04041	0,03955	0,03871	0,03788	0,03706	0,03626
2,2	0,03547	0,03470	0,03394	0,03319	0,03246	0,03174	0,03103	0,03034	0,02965	0,02898
2,3	0,02833	0,02768	0,02705	0,02643	0,02582	0,02522	0,02463	0,02406	0,02349	0,02294
2,4	0,02239	0,02186	0,02134	0,02083	0,02033	0,01984	0,01936	0,01888	0,01842	0,01797
2,5	0,01753	0,01709	0,01667	0,01625	0,01585	0,01545	0,01506	0,01468	0,01431	0,01394
2,6	0,01358	0,01323	0,01289	0,01256	0,01223	0,01191	0,01160	0,01130	0,01100	0,01071
2,7	0,01042	0,01014	0,00987	0,00961	0,00935	0,00909	0,00885	0,00861	0,00837	0,00814
2,8	0,00792	0,00770	0,00748	0,00727	0,00707	0,00687	0,00668	0,00649	0,00631	0,00613
2,9	0,00595	0,00578	0,00562	0,00545	0,00530	0,00514	0,00499	0,00485	0,00470	0,00457
3,0	0,00443	0,00430	0,00417	0,00405	0,00393	0,00381	0,00370	0,00358	0,00348	0,00337
3,1	0,00327	0,00317	0,00307	0,00298	0,00288	0,00279	0,00271	0,00262	0,00254	0,00246
3,2	0,00238	0,00231	0,00224	0,00216	0,00210	0,00203	0,00196	0,00190	0,00184	0,00178
3,3	0,00172	0,00167	0,00161	0,00156	0,00151	0,00146	0,00141	0,00136	0,00132	0,00127
3,4	0,00123	0,00119	0,00115	0,00111	0,00107	0,00104	0,00100	0,00097	0,00094	0,00090
3,5	0,00087	0,00084	0,00081	0,00079	0,00076	0,00073	0,00071	0,00068	0,00066	0,00063
3,6	0,00061	0,00059	0,00057	0,00055	0,00053	0,00051	0,00049	0,00047	0,00046	0,00044
3,7	0,00042	0,00041	0,00039	0,00038	0,00037	0,00035	0,00034	0,00033	0,00031	0,00030
3,8	0,00029	0,00028	0,00027	0,00026	0,00025	0,00024	0,00023	0,00022	0,00021	0,00021
3,9	0,00020	0,00019	0,00018	0,00018	0,00017	0,00016	0,00016	0,00015	0,00014	0,00014
4,0	0,00013	0,00013	0,00012	0,00012	0,00011	0,00011	0,00011	0,00010	0,00010	0,00009
4,1	0,00009	0,00009	0,00008	0,00008	0,00008	0,00007	0,00007	0,00007	0,00006	0,00006
4,2	0,00006	0,00006	0,00005	0,00005	0,00005	0,00005	0,00005	0,00004	0,00004	0,00004
4,3	0,00004	0,00004	0,00004	0,00003	0,00003	0,00003	0,00003	0,00003	0,00003	0,00003
4,4	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002	0,00002
4,5	0,00002	0,00002	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001
4,6	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001
4,7	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00001	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000

Таблица П.3 – Значения функции Лапласа

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,00000	0,37	0,14431	0,73	0,26730	1,10	0,36433
0,01	0,00399	0,38	0,14803	0,74	0,27035	1,11	0,36650
0,02	0,00798	0,39	0,15173	0,75	0,27337	1,12	0,36864
0,03	0,01197	0,40	0,15542	0,76	0,27637	1,13	0,37076
0,04	0,01595	0,41	0,15910	0,77	0,27935	1,14	0,37286
0,05	0,01994	0,42	0,16276	0,78	0,28230	1,15	0,37493
0,06	0,02392	0,43	0,16640	0,79	0,28524	1,16	0,37698
0,07	0,02790	0,44	0,17003	0,80	0,28814	1,17	0,37900
0,08	0,03188	0,45	0,17364	0,81	0,29103	1,18	0,38100
0,09	0,03586	0,46	0,17724	0,82	0,29389	1,19	0,38298
0,10	0,03983	0,47	0,18082	0,83	0,29673	1,20	0,38493
0,11	0,04380	0,48	0,18439	0,84	0,29955	1,21	0,38686
0,12	0,04776	0,49	0,18793	0,85	0,30234	1,22	0,38877
0,13	0,05172	0,50	0,19146	0,86	0,30511	1,23	0,39065
0,14	0,05567	0,51	0,19497	0,87	0,30785	1,24	0,39251
0,15	0,05962	0,52	0,19847	0,88	0,31057	1,25	0,39435
0,16	0,06356	0,53	0,20194	0,89	0,31327	1,26	0,39617
0,17	0,06749	0,54	0,20540	0,90	0,31594	1,27	0,39796
0,18	0,07142	0,55	0,20884	0,91	0,31859	1,28	0,39973
0,19	0,07535	0,56	0,21226	0,92	0,32121	1,29	0,40147
0,20	0,07926	0,57	0,21566	0,93	0,32381	1,30	0,40320
0,21	0,08317	0,58	0,21904	0,94	0,32639	1,31	0,40490
0,22	0,08706	0,59	0,22240	0,95	0,32894	1,32	0,40658
0,23	0,09095	0,60	0,22575	0,96	0,33147	1,33	0,40824
0,24	0,09483	0,61	0,22907	0,97	0,33398	1,34	0,40988
0,25	0,09871	0,62	0,23237	0,98	0,33646	1,35	0,41149
0,26	0,10257	0,63	0,23565	0,99	0,33891	1,36	0,41308
0,27	0,10642	0,64	0,23891	1,00	0,34134	1,37	0,41466
0,28	0,11026	0,65	0,24215	1,01	0,34375	1,38	0,41621
0,29	0,11409	0,66	0,24537	1,02	0,34614	1,39	0,41774
0,30	0,11791	0,67	0,24857	1,03	0,34849	1,40	0,41924
0,31	0,12172	0,675	0,25016	1,04	0,35083	1,41	0,42073
0,32	0,12552	0,68	0,25175	1,05	0,35314	1,42	0,42220
0,33	0,12930	0,69	0,25490	1,06	0,35543	1,43	0,42364
0,34	0,13307	0,70	0,25804	1,07	0,35769	1,44	0,42507
0,35	0,13683	0,71	0,26115	1,08	0,35993	1,45	0,42647
0,36	0,14058	0,72	0,26424	1,09	0,36214	1,46	0,42785

Продолжение таблицы П.3

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1,47	0,42922	1,87	0,46926	2,27	0,48840	2,67	0,49621
1,48	0,43056	1,88	0,46995	2,28	0,48870	2,68	0,49632
1,49	0,43189	1,89	0,47062	2,29	0,48899	2,69	0,49643
1,50	0,43319	1,90	0,47128	2,30	0,48928	2,70	0,49653
1,51	0,43448	1,91	0,47193	2,31	0,48956	2,71	0,49664
1,52	0,43574	1,92	0,47257	2,32	0,48983	2,72	0,49674
1,53	0,43699	1,93	0,47320	2,33	0,49010	2,73	0,49683
1,54	0,43822	1,94	0,47381	2,34	0,49036	2,74	0,49693
1,55	0,43943	1,95	0,47441	2,35	0,49061	2,75	0,49702
1,56	0,44062	1,96	0,47500	2,36	0,49086	2,76	0,49711
1,57	0,44179	1,97	0,47558	2,37	0,49111	2,77	0,49720
1,58	0,44295	1,98	0,47615	2,38	0,49134	2,78	0,49728
1,59	0,44408	1,99	0,47670	2,39	0,49158	2,79	0,49736
1,60	0,44520	2,00	0,47725	2,40	0,49180	2,80	0,49744
1,61	0,44630	2,01	0,47778	2,41	0,49202	2,81	0,49752
1,62	0,44738	2,02	0,47831	2,42	0,49224	2,82	0,49760
1,63	0,44845	2,03	0,47882	2,43	0,49245	2,83	0,49767
1,64	0,44950	2,04	0,47932	2,44	0,49266	2,84	0,49774
1,65	0,45053	2,05	0,47982	2,45	0,49286	2,85	0,49781
1,66	0,45154	2,06	0,48030	2,46	0,49305	2,86	0,49788
1,67	0,45254	2,07	0,48077	2,47	0,49324	2,87	0,49795
1,68	0,45352	2,08	0,48124	2,48	0,49343	2,88	0,49801
1,69	0,45449	2,09	0,48169	2,49	0,49361	2,89	0,49807
1,70	0,45543	2,10	0,48214	2,50	0,49379	2,90	0,49813
1,71	0,45637	2,11	0,48257	2,51	0,49396	2,91	0,49819
1,72	0,45728	2,12	0,48300	2,52	0,49413	2,92	0,49825
1,73	0,45818	2,13	0,48341	2,53	0,49430	2,93	0,49831
1,74	0,45907	2,14	0,48382	2,54	0,49446	2,94	0,49836
1,75	0,45994	2,15	0,48422	2,55	0,49461	2,95	0,49841
1,76	0,46080	2,16	0,48461	2,56	0,49477	2,96	0,49846
1,77	0,46164	2,17	0,48500	2,57	0,49492	2,97	0,49851
1,78	0,46246	2,18	0,48537	2,58	0,49506	2,98	0,49856
1,79	0,46327	2,19	0,48574	2,59	0,49520	2,99	0,49891
1,80	0,46407	2,20	0,48610	2,60	0,49534	3,00	0,49865
1,81	0,46485	2,21	0,48645	2,61	0,49547	3,01	0,49869
1,82	0,46562	2,22	0,48679	2,62	0,49560	3,02	0,49874
1,83	0,46638	2,23	0,48713	2,63	0,49573	3,03	0,49878
1,84	0,46712	2,24	0,48745	2,64	0,49585	3,04	0,49882
1,85	0,46784	2,25	0,48778	2,65	0,49598	3,05	0,49886
1,86	0,46856	2,26	0,48809	2,66	0,49609	3,06	0,49889

Окончание таблицы П.3

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
3,07	0,49893	3,13	0,49913	3,19	0,49929	3,70	0,49989
3,08	0,49896	3,14	0,49916	3,20	0,49931	3,80	0,49993
3,09	0,49900	3,15	0,49918	3,30	0,49952	3,90	0,49995
3,10	0,49903	3,16	0,49921	3,40	0,49966	4,00	0,499968
3,11	0,49906	3,17	0,49924	3,50	0,49977	4,50	0,499997
3,12	0,49910	3,18	0,49926	3,60	0,49984	5,00	0,499999

Таблица П.4 – Значение χ^2 распределения

В таблице представлены значения $\chi^2_{\alpha,\nu}$ в зависимости от числа степеней свободы ν и уровня значимости α

α / ν	0,2	0,1	0,05	0,02	0,01	0,001
1	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635	10,827
2	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210	13,815
3	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345	16,266
4	5,989	7,779	9,488	11,668	13,277	18,467
5	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086	20,515
6	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812	22,457
7	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475	24,322
8	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090	26,125
9	12,242	14,684	16,919	19,669	21,666	27,877
10	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209	29,588
11	14,631	17,275	19,675	22,618	24,725	31,264
12	15,812	18,549	21,026	24,054	26,217	32,909
13	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688	34,528
14	18,151	21,064	23,685	26,783	29,141	36,123
15	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578	37,697
16	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000	39,252
17	21,615	24,769	27,587	30,995	33,409	40,790
18	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805	42,312
19	23,900	27,204	30,144	33,687	36,191	43,820
20	25,038	28,412	31,410	35,020	37,556	45,315
21	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932	46,797
22	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289	48,268
23	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638	49,728
24	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980	51,179
25	30,675	34,382	37,652	41,556	44,314	52,620
26	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642	54,052
27	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963	55,476
28	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278	56,893
29	35,139	38,087	42,557	46,693	49,588	58,302
30	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892	59,703

Таблица П.5 – Распределение Стьюдента

Значения $t_{\alpha,\nu}$ удовлетворяют условию $P\left(t \ge t_{\alpha,\nu}\right) = \int\limits_{t_{\alpha,\nu}}^{\infty} S\left(t,\nu\right) dt = \alpha$.

В таблице представлены значения квантилей $t_{\alpha,\nu}$ в зависимости от числа степеней свободы ν и вероятности α.

ν \ α	0,40	0,30	0,20	0,10	0,050	0,025	0,010	0,005	0,001	0,0005
1	0,325	0,727	1,376	3,078	6,314	12,71	31,82	63,66	381,3	636,6
2	0,289	0,617	1,061	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	22,33	31,60
3	0,277	0,584	0,978	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	10,22	12,94
4	0,271	0,569	0,941	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	7,173	8,610
5	0,267	0,559	0,920	1,476	2,015	2,571	3,365	5,032	5,893	6,859
6	0,265	0,553	0,906	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	5,208	5,959
7	0,263	0,549	0,896	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,765	5,405
8	0,262	0,546	0,889	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	4,501	6,041
9	0,261	0,543	0,883	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	4,297	4,781
10	0,260	0,542	0,879	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	4,144	4,587
11	0,260	0,540	0,876	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	4,025	4,437
12	0,259	0,539	0,873	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,930	4,318
13	0,259	0,538	0,870	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,852	4,221
14	0,258	0,537	0,868	1,345	1,761	2,145	2,624	3,977	3,787	4,140
15	0,258	0,536	0,866	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,733	4,073
16	0,258	0,535	0,865	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,686	4,015
17	0,257	0,534	0,863	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,646	3,965
18	0,257	0,534	0,862	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,611	3,922
19	0,257	0,533	0,861	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,579	3,883
20	0,257	0,533	0,860	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,562	3,850
21	0,257	0,532	0,859	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,527	3,819
22	0,256	0,532	0,858	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,505	3,792
23	0,256	0,532	0,858	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,485	3,767
24	0,256	0,531	0,857	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,467	3,745
25	0,256	0,531	0,856	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,450	3,725
26	0,256	0,531	0,856	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,435	3,707
27	0,256	0,531	0,855	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,421	3,690
28	0,256	0,530	0,855	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,408	3,674
29	0,256	0,530	0,854	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,396	3,659
30	0,256	0,530	0,854	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,385	3,646
40	0,255	0,529	0,851	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	3,307	3,551
50	0,255	0,528	0,849	1,298	1,676	2,009	2,403	2,678	3,262	3,495
60	0,254	0,527	0,848	1,293	1,671	2,000	2,390	2,660	3,232	3,460
80	0,254	0,527	0,846	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	3,195	3,415
100	0,254	0,526	0,845	1,290	1,660	1,984	2,365	2,626	3,174	3,389
200	0,254	0,525	0,843	1,286	1,653	1,972	2,345	2,601	3,131	3,339
500	0,253	0,525	0,842	1,283	1,648	1,965	2,334	2,586	3,106	3,310
∞	0,253	0,524	0,842	1,282	1,645	1,960	2,326	2,576	3,090	3,291

Таблица П.6 – Распределение Фишера

В таблице приведены критические значения (квантили) F_{α,ν_1,ν_2} в зависимости от числа степеней свободы ν_1 и ν_2 для значения $\alpha = 0{,}05$:

$$P\left(F \ge F_{\alpha,\nu_1,\nu_2}\right) = 0{,}05 .$$

ν_2 \ ν_1	1	2	3	4	5	6	8	12	24	∞
1	161,45	199,50	215,72	224,57	230,17	233,97	238,89	243,91	249,04	254,32
2	18,512	18,999	19,163	19,248	19,298	19,329	19,371	19,414	19,453	19,496
3	10,129	9,552	9,276	9,118	9,014	8,941	8,844	8,774	8,638	8,527
4	7,710	6,945	6,591	6,388	6,257	6,164	6,041	5,912	5,774	5,628
5	6,607	5,785	5,410	5,192	5,050	4,950	4,818	4,678	4,527	4,365
6	5,987	5,143	4,756	4,534	4,388	4,284	4,147	4,000	3,841	3,669
7	5,591	4,737	4,347	4,121	3,972	3,866	3,725	3,574	3,410	3,230
8	5,317	4,459	4,067	3,838	3,688	3,580	3,438	3,284	3,116	2,928
9	5,117	4,256	3,863	3,633	3,482	3,374	3,230	3,073	2,900	2,707
10	4,965	4,103	3,708	3,478	3,326	3,217	3,072	2,913	2,737	2,538
11	4,844	3,982	3,587	3,357	3,204	3,094	2,948	2,788	2,609	2,405
12	4,747	3,885	3,490	3,259	3,106	2,999	2,848	2,686	2,505	2,296
13	4,667	3,805	3,410	3,179	3,025	2,915	2,767	2,604	2,420	2,207
14	4,600	3,739	3,344	3,112	2,958	2,848	2,699	2,534	2,349	2,131
15	4,543	3,683	3,287	3,056	2,901	2,790	2,641	2,475	2,288	2,066
16	4,494	3,634	3,239	3,007	2,853	2,741	2,591	2,424	2,235	2,010
17	4,451	3,592	3,197	2,965	2,810	2,699	2,548	2,381	2,190	1,961
18	4,414	3,555	3,160	2,928	2,773	2,661	2,510	2,342	2,150	1,917
19	4,381	3,522	3,127	2,895	2,740	2,629	2,477	2,308	2,114	1,878
20	4,351	3,493	3,098	2,866	2,711	2,599	2,447	2,278	2,083	1,843
21	4,325	3,467	3,072	2,840	2,685	2,573	2,421	2,250	2,064	1,812
22	4,301	3,443	3,049	2,817	2,661	2,549	2,397	2,226	2,028	1,783
23	4,279	3,422	3,028	2,795	2,640	2,528	2,375	2,203	2,005	1,757
24	4,260	3,403	3,009	2,777	2,621	2,508	2,355	2,183	1,984	1,733
25	4,242	3,385	2,991	2,759	2,603	2,490	2,337	2,165	1,965	1,711
26	4,225	3,369	2,975	2,743	2,587	2,474	2,321	2,148	1,947	1,691
27	4,210	3,354	2,961	2,728	2,572	2,459	2,305	2,132	1,930	1,672
28	4,196	3,340	2,947	2,714	2,558	2,445	2,992	2,118	1,915	1,654
29	4,183	3,328	2,934	2,702	2,545	2,432	2,278	2,104	1,901	1,638
30	4,171	3,316	2,922	2,690	2,534	2,421	2,266	2,092	1,887	1,622
40	4,085	3,232	2,839	2,605	2,449	2,336	2,180	2,004	1,793	1,509
60	4,001	3,151	2,758	2,525	2,368	2,254	2,097	1,918	1,700	1,389
120	3,920	3,072	2,680	2,447	2,290	2,175	2,106	1,834	1,608	1,254
∞	3,841	2,996	2,605	2,372	2,214	2,098	1,938	1,752	1,517	1,000

Таблица П.7 – Доверительные интервалы для σ

P / ν	0,99		0,98		0,95		0,90	
	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2	γ_1	γ_2
1	0,356	15,9	0,388	9,98	0,446	9,31	0,510	5,19
2	0,434	14,1	0,466	9,97	0,521	6,28	0,578	4,40
3	0,483	6,47	0,514	5,11	0,566	3,73	0,620	2,32
4	0,519	4,39	0,549	3,67	0,599	2,87	0,649	2,37
5	0,546	3,48	0,576	3,00	0,624	2,45	0,672	2,09
6	0,569	2,98	0,587	2,62	0,644	2,202	0,690	1,916
7	0,588	2,66	0,616	2,377	0,661	2,035	0,705	1,797
8	0,604	2,44	0,631	2,205	0,675	1,916	0,718	1,711
9	0,618	2,277	0,644	2,076	0,688	1,826	0,729	1,645
10	0,630	2,154	0,656	1,977	0,699	1,755	0,739	1,593
11	0,641	2,056	0,667	1,898	0,708	1,698	0,748	1,550
12	0,651	1,976	0,677	1,833	0,717	1,651	0,755	1,515
13	0,660	1,910	0,685	1,779	0,725	1,611	0,762	1,485
14	0,669	1,854	0,693	1,733	0,732	1,577	0,769	1,460
15	0,676	1,806	0,700	1,694	0,739	1,548	0,775	1,437
16	0,683	1,764	0,707	1,659	0,745	1,522	0,780	1,418
17	0,690	1,727	0,713	1,629	0,750	1,499	0,785	1,400
18	0,696	1,695	0,719	1,602	0,756	1,479	0,790	1,385
19	0,702	1,666	0,725	1,578	0,760	1,460	0,794	1,370
20	0,707	1,640	0,730	1,556	0,765	1,444	0,798	1,358
21	0,712	1,617	0,734	1,536	0,769	1,429	0,802	1,346
22	0,717	1,595	0,739	1,519	0,773	1,416	0,805	1,335
23	0,722	1,576	0,743	1,502	0,777	1,402	0,809	1,326
24	0,726	1,558	0,747	1,487	0,781	1,391	0,812	1,316
25	0,730	1,541	0,751	1,473	0,784	1,380	0,815	1,308
26	0,734	1,526	0,755	1,460	0,788	1,371	0,818	1,300
27	0,737	1,512	0,758	1,448	0,791	1,361	0,820	1,293
28	0,741	1,499	0,762	1,436	0,794	1,352	0,823	1,286
29	0,744	1,487	0,765	1,426	0,796	1,344	0,825	1,279
30	0,748	1,475	0,768	1,417	0,799	1,337	0,828	1,274
40	0,774	1,390	0,792	1,344	0,821	1,279	0,847	1,228
50	0,793	1,336	0,810	1,297	0,837	1,243	0,861	1,199
60	0,808	1,299	0,824	1,265	0,849	1,217	0,871	1,179
70	0,820	1,272	0,835	1,241	0,858	1,198	0,879	1,163
80	0,829	1,250	0,844	1,222	0,866	1,183	0,886	1,151
90	0,838	1,233	0,852	1,207	0,873	1,171	0,892	1,141
100	0,845	1,219	0,858	1,195	0,878	1,161	0,897	1,133
200	0,877	1,15	0,897	1,13	0,912	1,11	0,925	1,09

СОДЕРЖАНИЕ