

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования  
«Витебский государственный технологический университет»

**ЭЛЕКТРОТЕХНИКА, ЭЛЕКТРИЧЕСКИЕ МАШИНЫ И АППАРАТЫ:  
РАСЧЕТ ЦЕПИ ОДНОФАЗНОГО СИНУСОИДАЛЬНОГО ТОКА**

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

к выполнению расчетно-графических работ для студентов специальностей  
1-36 01 01 «Технология машиностроения», 1-36 01 03 «Технологическое  
оборудование машиностроительного производства», 1-36 01 04 «Оборудование и  
технологии высокоэффективных процессов обработки материалов»

Витебск  
2016

УДК 621.3(07)

Электротехника, электрические машины и аппараты: расчет цепи однофазного синусоидального тока, методические указания к выполнению расчетно-графических работ для студентов специальности 1-36 01 01 «Технология машиностроения», 1-36 01 03 «Технологическое оборудование машиностроительного производства», 1-36 01 04 «Оборудование и технологии высокоэффективных процессов обработки материалов».

Витебск: Министерство образования Республики Беларусь, УО «ВГТУ», 2016

Составители: к.т.н., доц. Новиков Ю.В.,  
доц. Ильющенко А.В.

В методических указаниях приведен теоретический материал, необходимый для изучения однофазного синусоидального тока, а также указания к выполнению расчетно-графических работ с заданиями и примерами выполнения. Предложенные для изучения материалы соответствуют всем разделам дисциплины. Методические указания составлены в соответствии с предъявляемыми требованиями.

Одобрено кафедрой «Автоматизация технологических процессов и производств» УО «ВГТУ» 11.10.2015 г., протокол № 4.

Рецензент: к.т.н., доц. Надежная Н.Л.  
Редактор: ст.преп. Куксевич В.Ф.

Рекомендовано к опубликованию редакционно-издательским советом УО "ВГТУ" 30.11.2015, протокол № 9

Ответственный за выпуск: Букин Ю.А.

Учреждение образования «Витебский государственный технологический университет»

---

Подписано к печати 30.06.16. Формат 60x90 1/16. Уч.-изд. лист. 1.9.  
Печать ризографическая. Тираж 70 экз. Заказ № 208.

Отпечатано на ризографе учреждения образования «Витебский государственный технологический университет».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий N 1 / 172 от 12 февраля 2014 г.

210035, г. Витебск, Московский пр-т, 72.

## Содержание

Введение.....	4
1 Однофазный переменный ток .....	4
1.1 Получение переменного тока.....	4
1.2 Явление резонанса.....	4
1.3 Расчет эквивалентного сопротивления электрической цепи	8
2 Задание к расчетно-графической работе № 2 «Расчет цепи синусоидального тока».....	17
3 Значения параметров пассивных элементов и э.д.с. источника.....	17
4 Методические указания к выполнению расчетно-графической работы № 2.....	23
5 Пример расчета цепи синусоидального тока.....	26
Литература .....	30

## ВВЕДЕНИЕ

*В результате изучения темы «Электрические цепи однофазного синусоидального тока» студенты должны:*

— знать содержание терминов: резистор, резистивный элемент, активное сопротивление, индуктивная катушка, индуктивный элемент, индуктивность, индуктивное сопротивление, конденсатор, емкостной элемент, емкость, емкостное сопротивление; фаза, начальная фаза, угол сдвига по фазе, период, частота, круговая частота, мгновенное, амплитудное, действующее и среднее значения синусоидальных величин; полное, активное, реактивное, комплексные сопротивления и проводимости, мгновенная, полная, активная, реактивная, комплексная мощности; параметры элементов схем замещения цепей однофазного тока; условия и способы получения резонансов напряжений и токов;

— понять особенности электромагнитных процессов и энергетические состояния в простейших цепях синусоидального тока, экономическое значение коэффициента мощности;

— уметь составлять дифференциальные и комплексные уравнения электрического состояния линейных цепей; представлять синусоидально изменяющиеся величины тригонометрическими функциями, графиками, вращающимися векторами и комплексными числами; строить векторные диаграммы простейших цепей; используя символический метод, рассчитывать простые и сложные цепи синусоидального тока.

Расчет цепей синусоидального тока при использовании символического метода (метода комплексных чисел) производится аналогично расчету цепей постоянного тока. Отличие состоит в том, что э.д.с., напряжения, токи, сопротивления и мощности выражаются в комплексной форме. Зная комплексные значения величин, легко определить действующие значения, начальные фазы и все необходимые мощности. Пример расчета такой цепи рассмотрен в разделе 3 (контрольные работы).

## 1 Однофазный переменный ток

### 1.1 Получение переменного тока

До конца XIX в. использовались только источники постоянного тока — химические элементы и генераторы. Это ограничивало возможности передачи электрической энергии на большие расстояния. Для уменьшения потерь в линиях электропередачи необходимо использовать очень высокое напряжение. Однако получить достаточно высокое напряжение от генератора постоянного тока практически невозможно. Проблема передачи электрической энергии на большие расстояния была решена только при использовании переменного тока и трансформаторов.

Переменный ток имеет ряд преимуществ по сравнению с постоянным: генератор переменного тока значительно проще и дешевле генератора постоянного тока; переменный ток можно трансформировать; переменный ток легко преобразуется в постоянный; двигатели переменного тока значительно проще и дешевле, чем двигатели постоянного тока.

Переменным током можно назвать ток, который с течением времени изменяет свою величину, но в технике переменным током называют такой ток, который периодически изменяет и величину, и направление. Причем среднее значение силы такого тока за период  $T$  равно нулю. Периодическим переменный ток называется потому, что через промежутки времени, кратные  $T$ , характеризующие его физические величины принимают одинаковые значения.

В электротехнике наибольшее распространение получил синусоидальный переменный ток, величина которого изменяется по закону синуса (или косинуса), обладающий рядом достоинств по сравнению с другими периодическими токами.

Переменный ток промышленной частоты получают на электростанциях с помощью генераторов переменного тока (трехфазных синхронных генераторов).

Для получения переменного тока в однородном магнитном поле равномерно вращается с угловой скоростью рамка площадью  $S$  (рис. 1.1). Магнитный поток через рамку

$$\Phi = BS \cos \alpha, \quad (1.1)$$

где  $\alpha$  — угол между нормалью к рамке  $n$  и вектором магнитной индукции  $B$ .

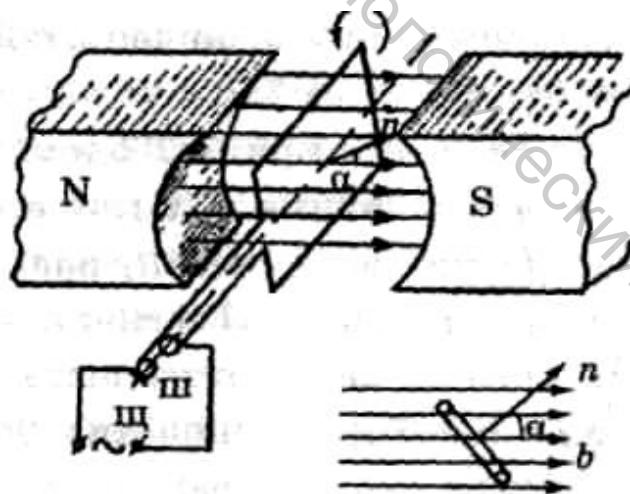


Рисунок 1.1 — Генератор переменного тока

Поскольку при равномерном вращении рамки угловая скорость

$$\omega = \frac{\alpha}{t},$$

то угол  $\alpha$  будет изменяться по закону  $\alpha = \omega \cdot t$ , формула (1.1) примет вид

$$\Phi = BS \cos \omega \cdot t. \quad (1.2)$$

Величину  $\omega$  называют круговой частотой. Поскольку при вращении рамки пересекающий ее магнитный поток все время меняется, то по закону электромагнитной индукции в ней будет наводиться ЭДС индукции

$$E = -\frac{d\hat{\Phi}}{dt} = BS\omega \cdot \sin \omega t, \quad (1.3)$$

где  $E_0 = BS\omega$  — амплитуда синусоидальной ЭДС. Таким образом, в рамке возникнет синусоидальная ЭДС, а если замкнуть рамку на нагрузку, то в цепи потечет синусоидальный ток.

Значение переменной ЭДС (а также тока и напряжения) в данный момент времени называется мгновенным значением.

Величину стоящую под знаком синуса или косинуса, называют фазой колебаний, описываемых этими функциями. Фаза определяет значение ЭДС в любой момент времени  $t$ . Фаза измеряется в градусах или в радианах. Величина  $f$  называется частотой колебаний.

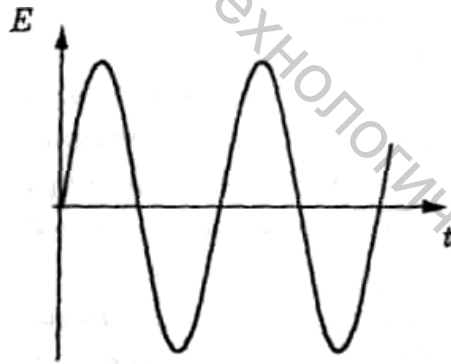


Рисунок 1.2 — Временная диаграмма

Время  $T$  одного полного изменения ЭДС (это время одного оборота рамки) называют периодом ЭДС. Изменение ЭДС со временем может быть изображено на временной диаграмме (рис. 1.2).

Частота колебаний измеряется в секундах, частота в герцах (Гц). В большинстве стран, включая Россию, промышленная частота переменного тока составляет 50 Гц (в США и Японии — 60 Гц).

Величина промышленной частоты переменного тока обусловлена технико-экономическими соображениями. Если она слишком низка, то увеличиваются габариты электрических машин, расход материалов на их изготовление; заметным становится мигание света в электрических лампочках. При слишком высоких частотах увеличиваются потери энергии в сердечниках электрических машин и трансформаторах. Поэтому наиболее оптимальными оказались частоты 50—60 Гц. Однако в некоторых случаях используются переменные токи с более высокой, и с более низкой частотой. Например, в самолетах применяется частота 400 Гц. На этой частоте можно значительно уменьшить габариты и вес трансформаторов и электромоторов, что для авиации более существенно, чем увеличение потерь в сердечниках. На железных дорогах используют переменный ток с частотой 25 Гц и даже 16,66 Гц.

Для описания характеристик переменного тока необходимо избрать определенные физические величины. Мгновенные и амплитудные значения для этих целей неудобны, а средние значения за период равны нулю. Поэтому вводят понятие действующих значений тока и напряжения. Они основаны на тепловом действии тока, не зависящем от его направления.

Действующими значениями тока и напряжения называют соответствующие параметры такого постоянного тока, при котором в данном проводнике за данный промежуток времени выделяется столько же теплоты, что и при переменном токе.

При изменении тока по синусоиде его действующее значение меньше его амплитудного значения в  $\sqrt{2}$  раз, т. е.

$$I = \frac{I_0}{\sqrt{2}} \approx 0,7077 \cdot I_0 \quad I = i \gg 0,7077 i_0. \quad (1.4)$$

Такое же соотношение справедливо для ЭДС и напряжения:

$$U = \frac{U_0}{\sqrt{2}}, \quad E = \frac{E_0}{\sqrt{2}}. \quad (1.5)$$

Действующие значения обозначаются прописными латинскими буквами без индексов.

Электроизмерительные приборы переменного тока проградуированы в действующих значениях измеряемых величин. В некоторых книгах действующие значения называют эффективными значениями.

Метод векторных диаграмм, т. е. изображение величин, характеризующих переменный ток векторами, а не тригонометрическими функциями, чрезвычайно удобен.

Переменный ток в отличие от постоянного характеризуется двумя скалярными величинами — амплитудой и фазой. Поэтому для математического описания переменного тока необходим математический объект, также характеризуемый двумя скалярными величинами. Существуют два таких математических объекта — это вектор на плоскости и комплексное число. В теории электрических цепей и те и другие используются для описания переменных токов.

## 1.2 Явление резонанса

**Явление резонанса** относится к наиболее важным с практической точки зрения свойствам электрических цепей. Оно заключается в том, что **электрическая цепь, имеющая реактивные элементы обладает чисто резистивным сопротивлением [8,9].**

Резонансом называется такой режим работы цепи, включающей в себя индуктивные и емкостные элементы, при котором ее входное сопротивление (входная проводимость) вещественно. Следствием этого является совпадение по фазе тока на входе цепи с входным напряжением.

Общее условие резонанса для любого двухполюсника можно сформулировать в виде  $\text{Im}[\underline{Z}]=0$  или  $\text{Im}[\underline{Y}]=0$ , где  $\underline{Z}$  и  $\underline{Y}$  комплексное сопротивление и проводимость двухполюсника. Следовательно, режим резонанса полностью определяется параметрами электрической цепи и не зависит от внешнего воздействия на нее со стороны источников электрической энергии.

Последовательный резонансный контур представлен на рисунке 1.3 а). Комплексное сопротивление цепи равно

$$\underline{Z} = R + j \left[ \omega L - \frac{1}{\omega C} \right] \quad (1.6)$$

Условие резонанса из выражения (1.6) будет

$$\text{Im}[\underline{Z}] = 0 \Rightarrow \omega L - \frac{1}{\omega C} = 0 \Leftrightarrow x_L = x_C \quad (1.7)$$

Таким образом, резонанс в цепи наступает независимо от значения резистивного сопротивления  $R$ , когда индуктивное сопротивление  $x_L = \omega L$  равно емкостному  $x_C = 1/(\omega C)$ . Как следует из выражения (1.7), это состояние может быть получено вариацией любого их трех параметров -  $L$ ,  $C$  и  $\omega$ , а также любой их комбинацией. При вариации одного из параметров условие резонанса можно представить в виде



$$L_0 = \frac{1}{\omega^2 C}; \quad C_0 = \frac{1}{\omega^2 L}; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (1.8)$$

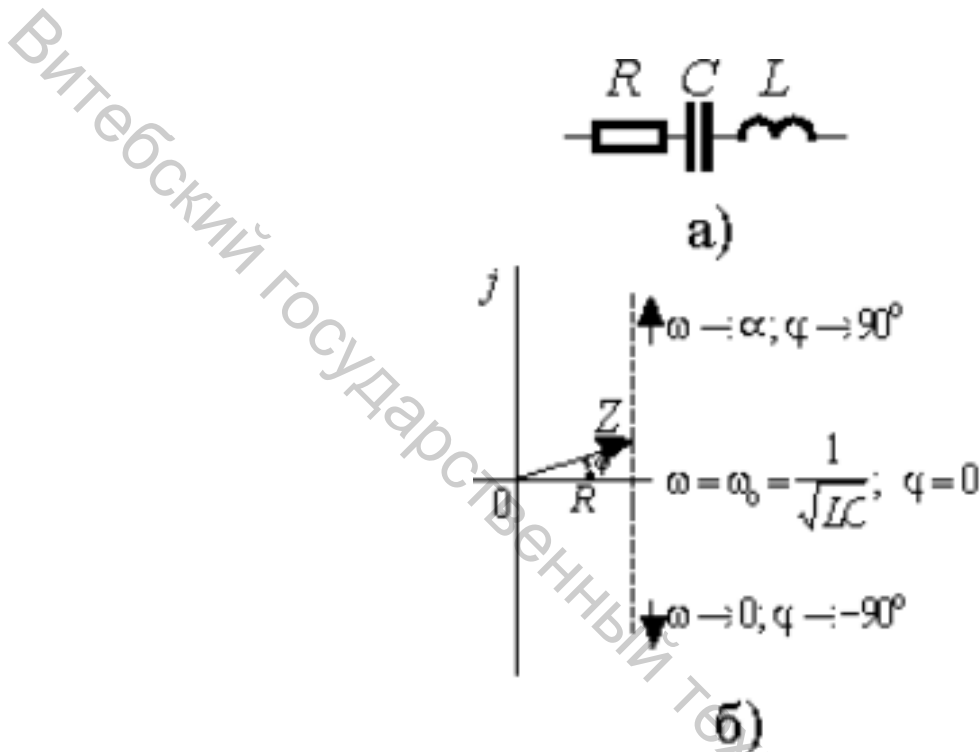


Рисунок 1.3 – Электрическая схема (а), векторная диаграмма (б)

Таким образом, резонанс в цепи наступает независимо от значения резистивного сопротивления  $R$ , когда индуктивное сопротивление  $x_L = \omega L$  равно емкостному  $x_C = 1/(\omega C)$ . Как следует из выражения (1.7), это состояние может быть получено вариацией любого их трех параметров -  $L$ ,  $C$  и  $\omega$ , а также любой их комбинацией. При вариации одного из параметров условие резонанса можно представить в виде

$$L_0 = \frac{1}{\omega^2 C}; \quad C_0 = \frac{1}{\omega^2 L}; \quad \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (1.9)$$

Все величины, входящие в выражение (1.9), положительны, поэтому эти условия выполнимы всегда, т. е. резонанс в последовательном контуре можно создать:

- изменением индуктивности  $L$  при постоянных значениях  $C$  и  $\omega$ ;
- изменением емкости  $C$  при постоянных значениях  $L$  и  $\omega$ ;

- изменением частоты  $\omega$  при постоянных значениях  $L$  и  $C$ .

Наибольший интерес для практики представляет вариация частоты. При изменении частоты резистивная составляющая комплексного сопротивления цепи  $\underline{Z}$  остается постоянной, а реактивная изменяется. Поэтому конец вектора  $\underline{Z}$  на комплексной плоскости перемещается по прямой параллельной мнимой оси и проходящей через точку  $R$  вещественной оси (рис. 3.9 б). В режиме резонанса мнимая составляющая  $\underline{Z}$  равна нулю и  $\underline{Z} = Z = Z_{\min} = R$ ,  $\varphi = 0$ , т. е. полное сопротивление при резонансе соответствует минимальному значению.

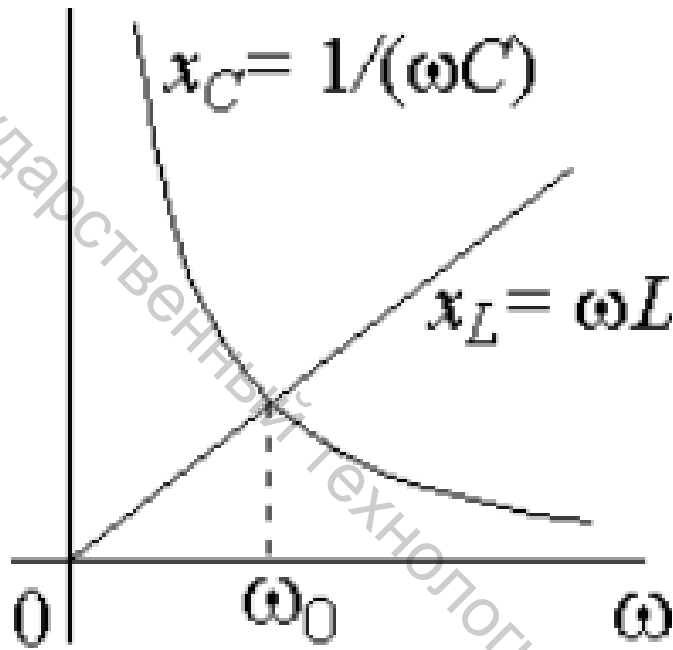


Рисунок 1.4 – Изменение индуктивного и емкостного сопротивления от частоты

Индуктивное и емкостное сопротивления изменяются в зависимости от частоты так, как показано на рисунке 1.4. Равенство сопротивлений  $x_L$  и  $x_C$  наступает в режиме резонанса при частоте  $\omega_0$ .

Переходя от амплитудных значений к действующим, получим напряжения на отдельных элементах контура

$$U_R = RI; \quad U_L = \omega LI; \quad U_C = \frac{I}{\omega C}, \quad (1.10)$$

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

где  $\rho$  - величина, имеющая размерность сопротивления и называемая волновым или характеристическим сопротивлением контура.

Следовательно, при резонансе:

- напряжение на резисторе равно напряжению на входе контура;
- напряжения на реактивных элементах одинаковы и пропорциональны волновому сопротивлению контура.

Сопоставляя частотные характеристики последовательного резонансного контура от источника тока с характеристиками при питании его от источника ЭДС, можно сделать следующие выводы:

- частотные характеристики напряжений и тока контура принципиально отличаются друг от друга, так как при питании от источника ЭДС сумма напряжений остается постоянной и происходит только их перераспределение между элементами, а при питании от источника тока падения напряжения на каждом элементе формируются независимо;

- режимы резонанса для обоих случаев полностью идентичны;
- фазовые частотные характеристики для обоих случаев также идентичны.

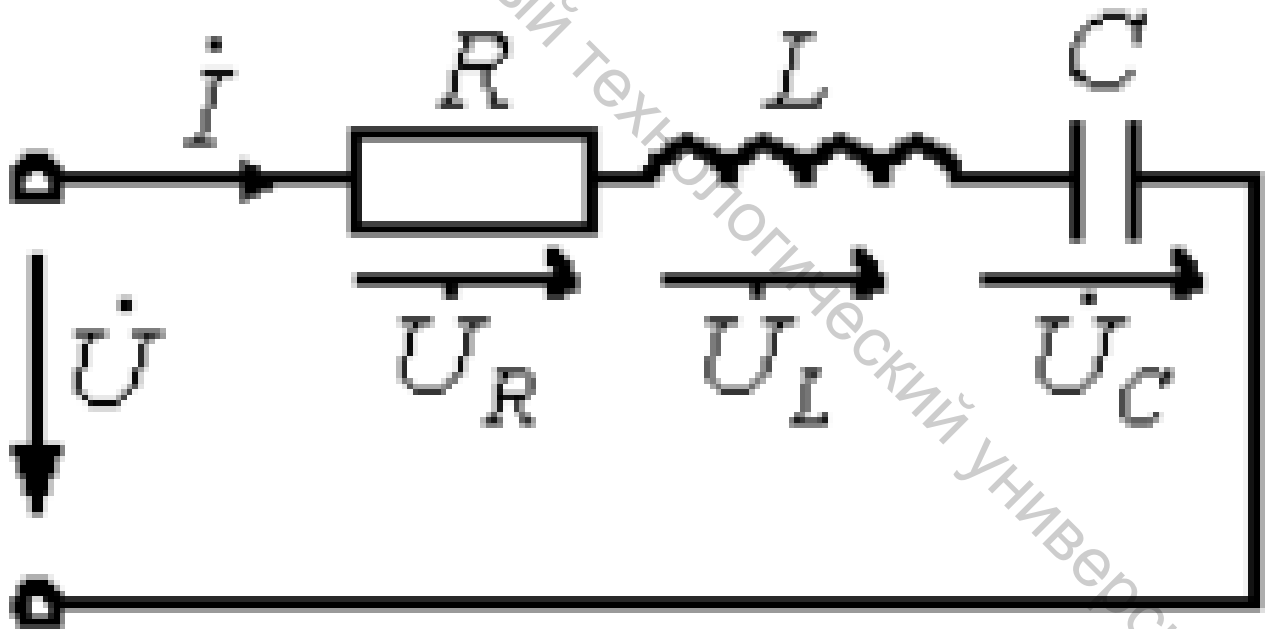


Рисунок 1.5 – Схема электрической цепи

Для цепи на рисунке 1.5 имеет место

$$\dot{U} = \dot{U}_R + \dot{U}_L + \dot{U}_C = \dot{i} \left[ R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \right] = \dot{i} \underline{Z}; \quad (1.11)$$

где

$$\underline{Z} = \sqrt{R^2 + \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right)^2} e^{j\varphi}; \quad (1.12)$$

$$\varphi = \arctg \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}. \quad (1.13)$$

В зависимости от соотношения величин  $\omega L$  и  $1/(\omega C)$  возможны три различных случая [4].

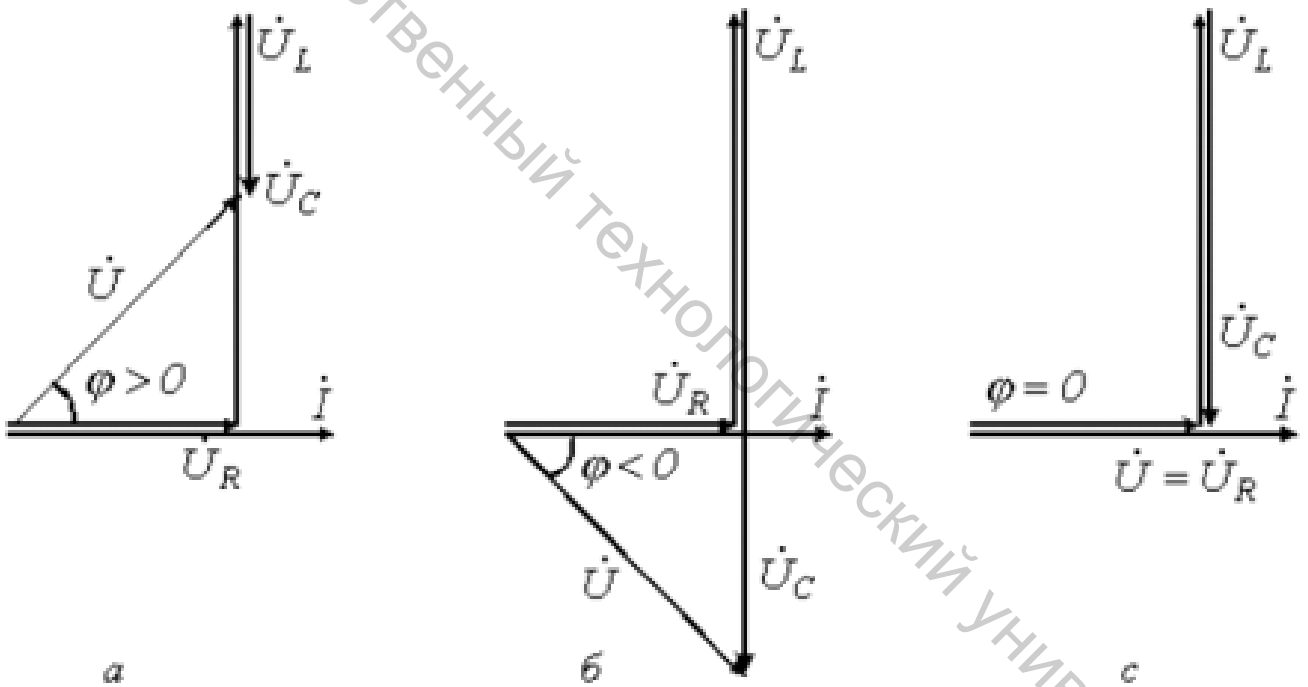


Рисунок 1.6 – Векторные диаграммы

1 В цепи преобладает индуктивность, т. е.

$$\omega L > 1/(\omega C),$$

а следовательно,

$$\dot{U}_L > \dot{U}_C.$$

Этому режиму соответствует векторная диаграмма на рисунке 1.6,а.  
2 В цепи преобладает емкость, т. е.

$$\omega L < 1/(\omega C),$$

а значит,

$$\dot{U}_L < \dot{U}_C.$$

Этот случай отражает векторная диаграмма на рисунке 1.6 б.

3  $\dot{U}_L = \dot{U}_C$  - случай резонанса напряжений (рис. 1.6 в).

Условие резонанса напряжений

$$\omega L = \frac{1}{\omega C}. \quad (1.14)$$

Как показывает анализ, режима резонанса можно добиться путем изменения параметров L и C, а также частоты.

$$f_p = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}. \quad (1.15)$$

Другим параметром резонансного контура является характеристическое сопротивление, связанное с добротностью соотношением

$$\rho = \omega_p L = \frac{1}{\omega_p C} = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (1.16)$$

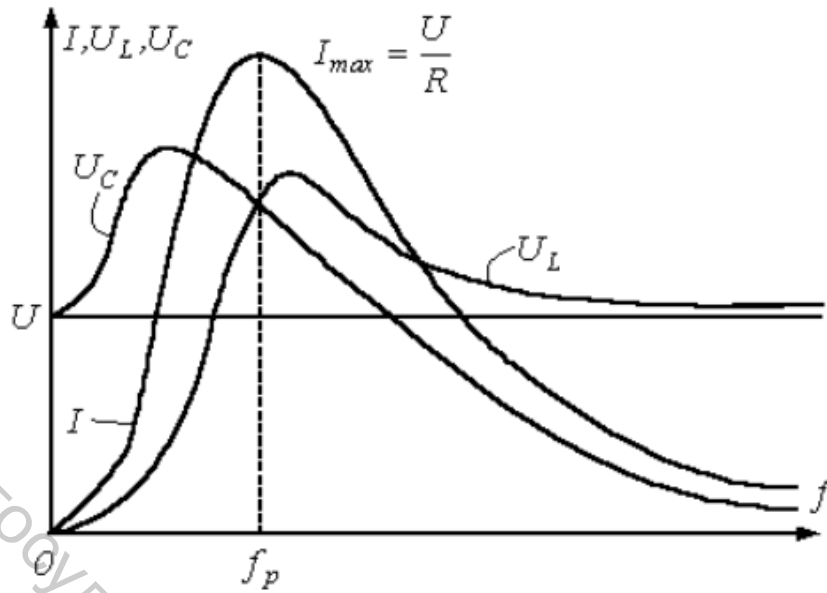


Рисунок 1.7 – Графики зависимости параметров элементов от частоты

**Резонанс в цепи с параллельно соединенными элементами  
(резонанс токов)**

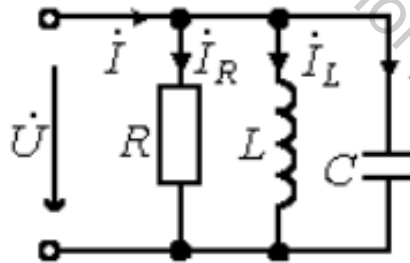


Рисунок 1.8 – Схема электрической цепи

Для цепи рисунок 1.8 имеем

$$\dot{I} = \dot{I}_R + \dot{I}_L + \dot{I}_C = \dot{U} \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{j\omega L} + j\omega C \right) = \dot{U} [g + j(b_C - b_L)] = \dot{U} \underline{Y}$$

где

$$\underline{Y} = \sqrt{g^2 + (b_C - b_L)^2} e^{-j\varphi}; \quad (1.17)$$

$$\varphi = \arctg \frac{b_L - b_C}{g}. \quad (1.18)$$

В зависимости от соотношения величин  $b_L$  и  $b_C$ , как и в рассмотренном выше случае последовательного соединения элементов, возможны три различных случая [1,9].

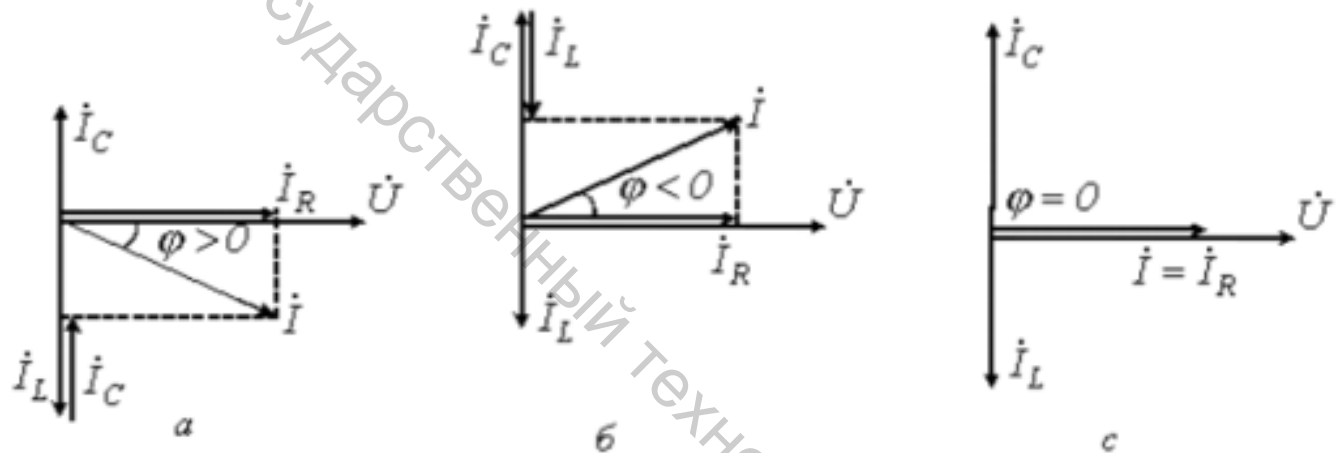


Рисунок 1.9 – Векторные диаграммы

В цепи преобладает индуктивность, т. е.

$$b_L > b_C,$$

а следовательно,

$$I_L > I_C.$$

Этому режиму соответствует векторная диаграмма на рис. 1.9 а.

В цепи преобладает емкость, т. е.

$$b_L < b_C,$$

значит,

$$I_L < I_C.$$

Этот случай иллюстрирует векторная диаграмма на рис. 1.9,б.

$I_L = I_C$  - случай резонанса токов (рис. 1.9,в).

Условие резонанса токов

$$b_L = b_C,$$

или

$$\frac{1}{\omega L} = \omega C \quad (1.19)$$

Таким образом, при резонансе токов входная проводимость цепи минимальна, а входное сопротивление, наоборот, максимально. В частности при отсутствии в цепи на рис. 1.8 резистора  $R$  ее входное сопротивление в режиме резонанса стремится к бесконечности, т. е. при резонансе токов ток на входе цепи минимален.

Резонансная частота определяется соотношением (1.15). Однако не следует использовать выражение (1.15) для любой резонансной цепи. Оно справедливо только для простейших схем с последовательным или параллельным соединением индуктивного и емкостного элементов.

### 1.1 Расчет эквивалентного сопротивления электрической цепи

Сопротивления в электрических цепях могут быть соединены последовательно, параллельно, по смешанной схеме. Расчет сложной схемы упрощается, если сопротивления в этой схеме заменяются одним эквивалентным сопротивлением  $R_{экв}$ , и вся схема представляется в виде схемы, где  $R = R_{экв}$ , а расчет токов и напряжений производится с помощью законов Ома и Кирхгофа [1,2]. Преобразование эквивалентной схемы в цепях переменного однофазного тока осуществляется аналогично преобразованиям в цепях постоянного тока.



## 2 Задание к расчетно-графической работе № 2 «Расчет цепи синусоидального тока»

**Задание.** Для электрической цепи, схема которой изображена на рисунках 1.1 - 1.50, по заданным в таблице 2.1 параметрам пассивных элементов и э.д.с. источника определить действующие значения и начальные фазы токов во всех ветвях цепи и напряжений на отдельных участках. Рассчитать активные, реактивные и полные мощности отдельных участков и всей цепи. Составить уравнения баланса активных и реактивных мощностей. Указать показания приборов, изображенных на рисунке.

### 3 Значения параметров пассивных элементов и э.д.с. источника

Согласно заданному преподавателем варианту студент из таблицы 1.1 для указанной схемы выписывает значения параметров пассивных элементов цепи, действующее значение э.д.с. и частоту источника. Изображения схем приведены на рисунках в разделе 4.

Таблица 3.1 – Значения параметров элементов цепи и э.д.с. источника

Номера		E, В	f, Гц	C <sub>1</sub> , мкФ	C <sub>2</sub> , мкФ	C <sub>3</sub> , мкФ	L <sub>1</sub> , мГн	L <sub>2</sub> , мГн	L <sub>3</sub> , мГн	R <sub>1</sub> , Ом	R <sub>2</sub> , Ом	R <sub>3</sub> , Ом
Варианта	Рисунков											
1	3. 1	150	50	637	300	---	---	---	15,9	2	3	4
2	3. 2	100	50	---	---	100	15,9	9	15,9	8	3	4
3	3. 3	120	50	637	---	---	---	15,9	15,9	8	3	4
4	3. 4	200	50	---	300	---	15,9	---	15,9	8	3	4
5	3. 5	220	50	637	---	100	---	47,7	---	8	-	4
6	3. 6	100	50	100	300	---	15,9	---	115	10	-	100
7	3. 7	120	50	---	---	100	15,9	---	115	---	4	100
8	3. 8	200	50	---	159	---	---	---	115	10	4	100
9	3. 9	220	50	---	318	---	15,9	---	---	10	4	100
10	3. 10	50	50	---	637	---	15,9	6,37	115	5	---	8
11	3. 11	100	50	637	---	100	---	---	115	---	10	8
12	3. 12	120	50	---	300	100	31,8	---	---	5	---	8
13	3. 13	200	50	---	---	100	31,8	---	---	5	10	8
14	3. 14	220	50	637	---	200	---	15,9	---	5	10	8

Окончание таблицы 3.1

15	3. 15	150	50	100	---	200	---	15,9	---	10	2	10
16	3. 16	100	50	---	1600	200	31,8	---	---	---	8	10
17	3. 17	120	50	100	---	200	---	15,9	---	10	8	10
18	3. 18	200	50	637	---	200	---	31,8	---	---	8	10
19	3. 19	220	50	---	1600	---	31,8	---	95	10	8	-
20	3. 20	50	50	---	159	---	31,8	---	95	15	10	10
21	3. 21	100	50	---	159	200	15,9	---	---	15	---	10
22	3. 22	120	50	---	159	200	15,9	---	---	---	10	20
23	3. 23	200	50	637	159	200	---	31,8	95	15	10	20
24	3. 24	220	50	637	159	---	---	---	95	---	10	20
25	3. 25	150	50	---	159	---	25	---	95	6	10	20
26	3. 26	100	50	637	159	637	---	---	95	6	---	20
27	3. 27	100	50	---	159	---	25	---	95	6	4	---
28	3. 28	200	50	---	159	637	25	---	95	6	---	20
29	3. 29	220	50	637	---	637	---	9	---	6	---	20
30	3. 10	50	50	318	637	---	---	---	31,8	---	10	40
31	3. 31	100	50	318	---	300	---	---	31,8	---	10	10
32	3. 32	120	50	---	---	300	19,1	15,9	31,8	40	---	10
33	3. 33	200	50	318	---	300	---	15,9	31,8	10	10	40
34	3. 34	220	50	318	---	300	---	15,9	31,8	---	---	10
35	3. 35	50	50	---	318	---	19,5	---	31,8	8	10	4
36	3. 36	100	50	637	---	200	---	31,8	95	8	---	4
37	3. 37	150	50	637	---	200	---	31,8	---	8	10	4
38	3. 38	200	50	---	318	200	15,9	---	95	8	---	4
39	3. 39	220	50	---	---	200	15,9	31,8	95	8	---	4
40	3. 40	50	50	637	---	200	---	31,8	95	4	40	40
41	3. 41	100	50	---	318	200	9,55	---	---	4	40	4
42	3. 42	120	50	500	---	---	---	15,9	95	4	---	4
43	3. 43	200	50	500	---	159	---	15,9	---	40	10	40
44	3. 44	220	50	---	318	159	9,55	---	95	---	10	40
45	3. 45	50	50	500	159	159	---	---	31,8	35	20	40
46	3. 46	100	50	500	---	---	---	15,9	31,8	35	---	40
47	3. 47	120	50	---	159	---	15,9	---	31,8	35	20	80
48	3. 48	200	50	318	318	159	---	---	31,8	35	20	80
49	3. 49	220	50	318	---	159	---	31,8	31,8	35	20	80
50	3. 50	50	50	---	318	---	15,9	---	31,8	5	10	80

Схемы электрических цепей однофазного синусоидального тока

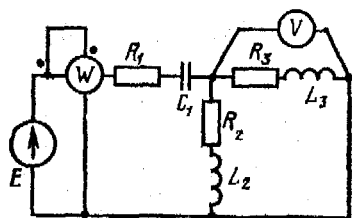


Рисунок 3.1

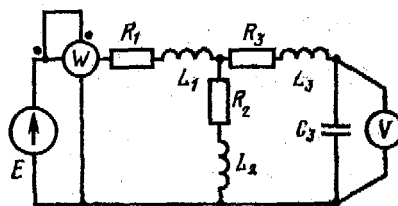


Рисунок 3.2

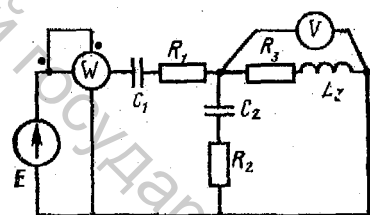


Рисунок 3.3

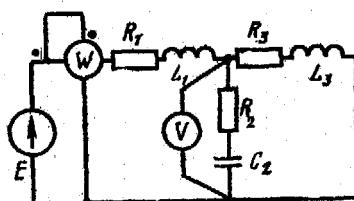


Рисунок 3.4

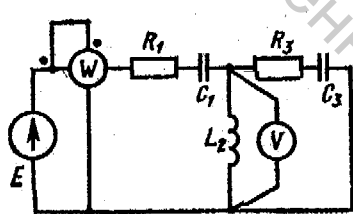


Рисунок 3.5

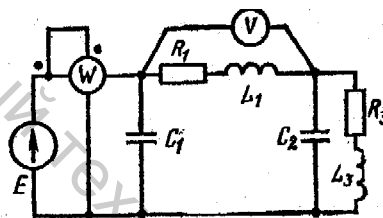


Рисунок 3.6

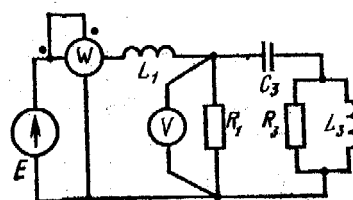


Рисунок 3.7

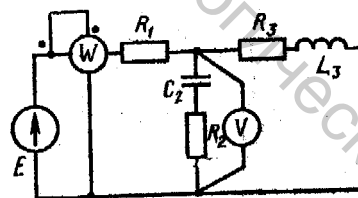


Рисунок 3.8

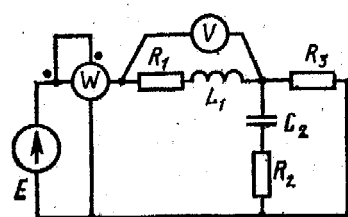


Рисунок 3.9

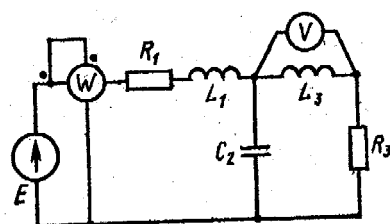


Рисунок 3.10

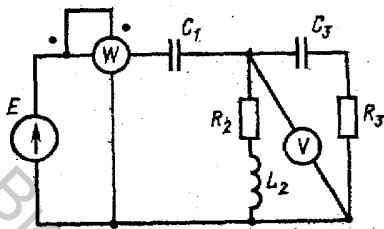


Рисунок 3.11

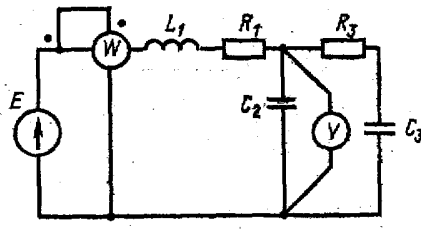


Рисунок 3.12

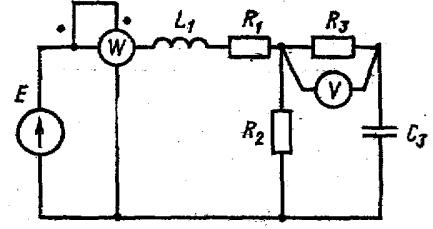


Рисунок 3.13

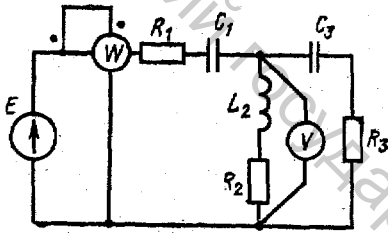


Рисунок 3.14

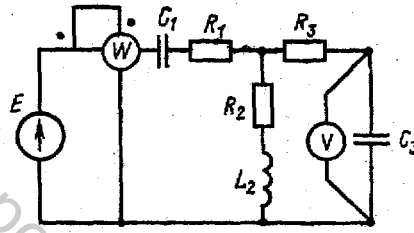


Рисунок 3.15

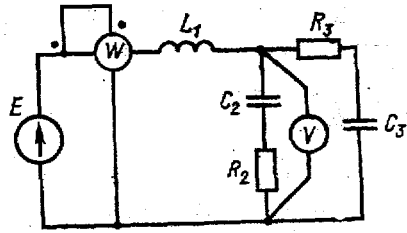


Рисунок 3.16

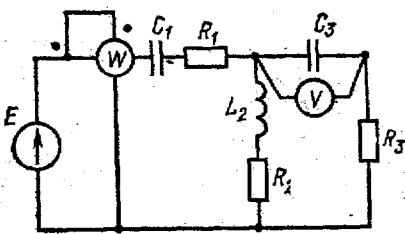


Рисунок 3.17

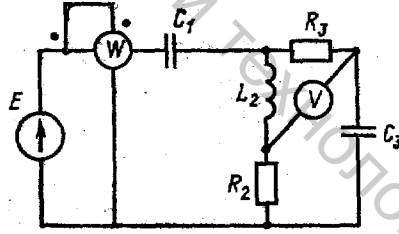


Рисунок 3.18

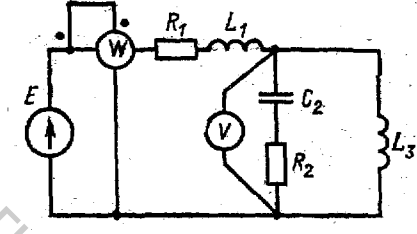


Рисунок 3.19

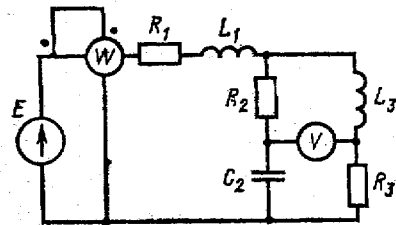


Рисунок 3.20

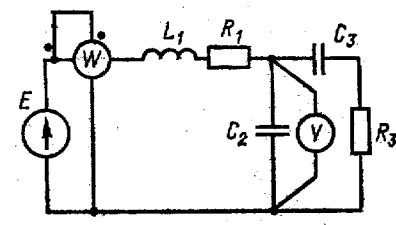


Рисунок 3.21

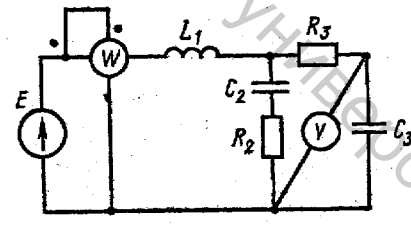


Рисунок 3.22

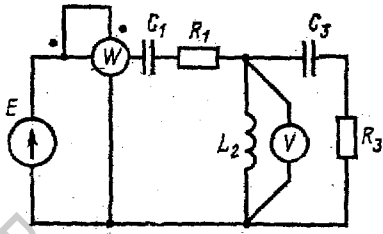


Рисунок 3.23

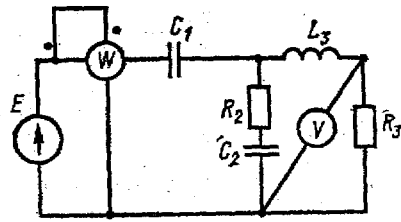


Рисунок 3.24

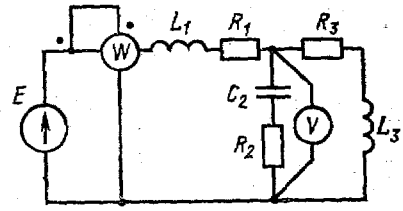


Рисунок 3.25

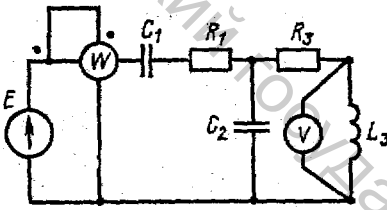


Рисунок 3.26

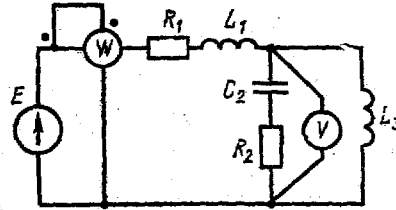


Рисунок 3.27

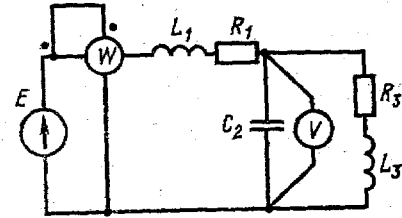


Рисунок 3.28

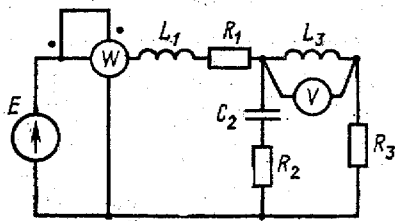


Рисунок 3.29

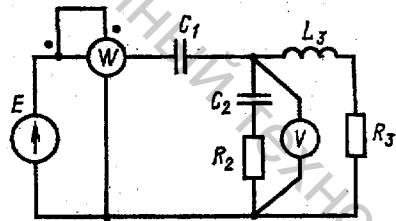


Рисунок 3.30

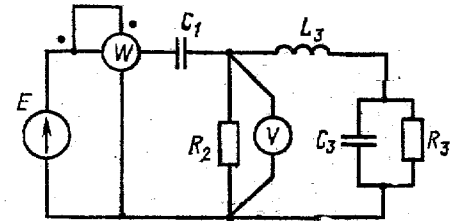


Рисунок 3.31

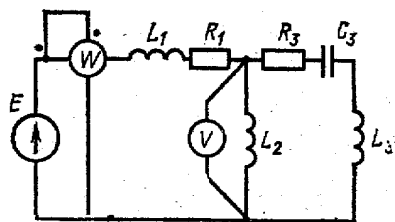


Рисунок 3.32

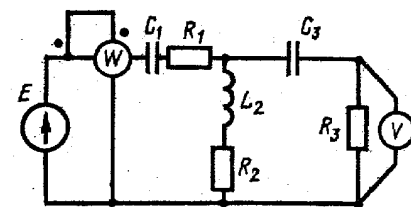


Рисунок 3.33

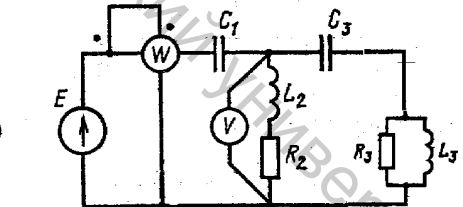


Рисунок 3.34

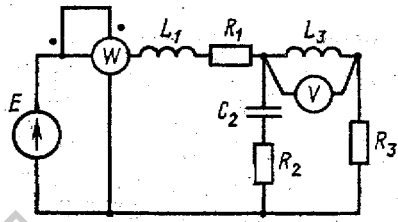


Рисунок 3.35

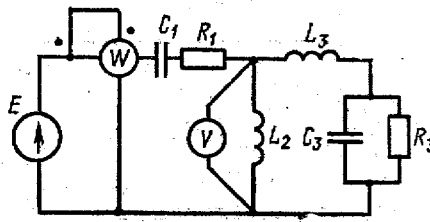


Рисунок 3.36

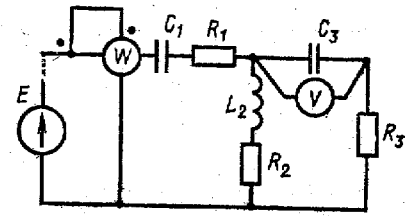


Рисунок 3.37

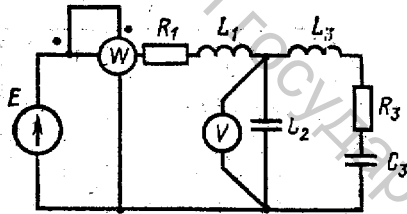


Рисунок 3.38

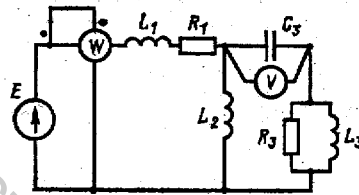


Рисунок 3.39

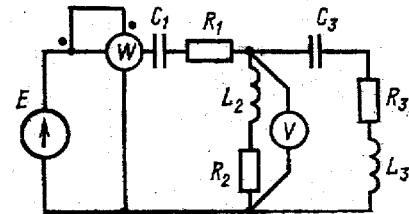


Рисунок 3.40

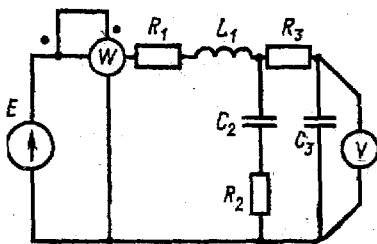


Рисунок 3.41

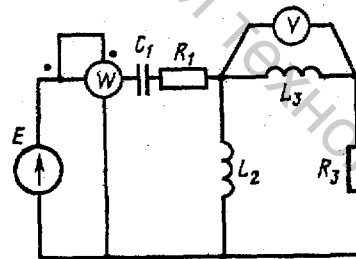


Рисунок 3.42

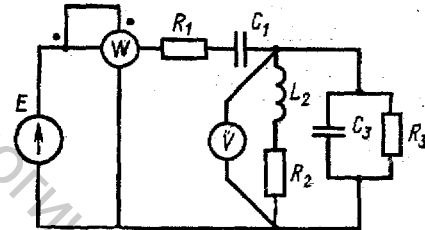


Рисунок 3.43

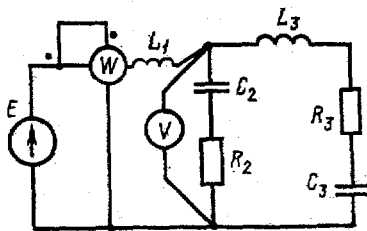


Рисунок 3.44

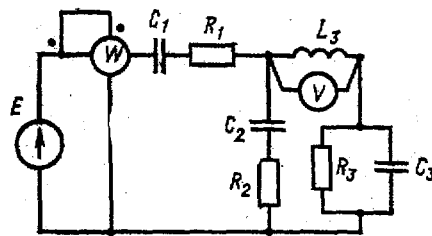


Рисунок 3.45

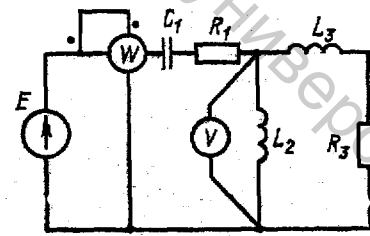


Рисунок 3.46

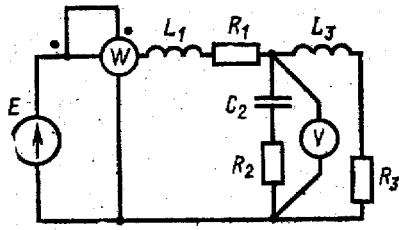


Рисунок 3.47

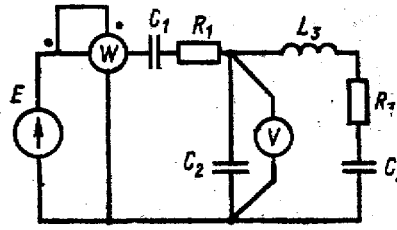


Рисунок 3.48

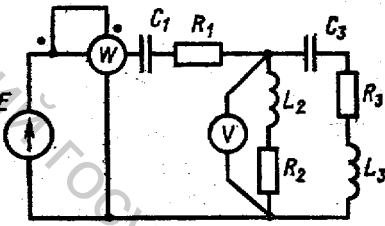


Рисунок 3.49

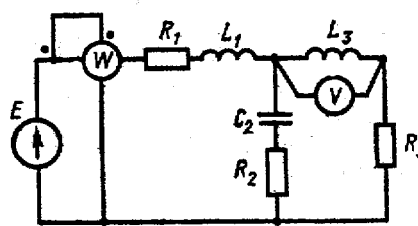


Рисунок 3.50

#### 4 Методические указания к выполнению расчетно-графической работы № 2

При выполнении данной расчетно-графической работы необходимо произвести расчет простой цепи синусоидального тока. Расчет таких цепей значительно сложнее расчета простых цепей постоянного тока, так как токи и напряжения изменяются во времени синусоидально. Поэтому при вычислениях приходится учитывать не только действующие значения, но и сдвиги по фазе между синусоидальными величинами.

Расчет цепи можно упростить и сделать его аналогичным расчету цепи постоянного тока, если воспользоваться символическим методом. Этот метод базируется на использовании комплексных чисел. Для этого вводятся понятия комплексных действующих значений тока, напряжения и э.д.с.:

$$I = Ie^{j\alpha_I}, U = Ue^{j\alpha_U}, E = Ee^{j\alpha_E},$$

где  $I, U, E$  – комплексные действующие значения или просто комплексы тока, напряжения и э.д.с.;

$I, U, E$  – действующие значения тока, напряжения и э.д.с.;

$\alpha_I, \alpha_U, \alpha_E$  – начальные фазы тока, напряжения и э.д.с.;

$j = \sqrt{-1}$  – называется в теории комплексных чисел мнимой единицей.

Если, например, ток в цепи меняется по закону

$$i = 14,2 \sin(314t + 60^\circ),$$

то комплекс этого тока будет равен

$$I = 10e^{j60^\circ} \text{ A},$$

так как

$$I = \frac{\text{Im}}{\sqrt{2}} = \frac{14,2}{\sqrt{2}} = 10 \text{ A}.$$

В комплексной форме можно выразить сопротивления и проводимости. При этом комплексное сопротивление цепи обозначается  $\underline{Z}$ , а комплексная проводимость –  $\underline{Y}$ . При обозначении комплексных величин принято ставить точки только над теми комплексами, которые изображают синусоидально изменяющиеся величины. Поэтому для комплексов сопротивления и проводимости вместо точки над буквой ставят черту снизу.

Комплексное сопротивление определяют по выражениям

$$\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U}{I} e^{j\varphi} = Ze^{j\varphi} = Z \cos\varphi + jZ \sin\varphi = R + jX,$$

где  $Z$  – полное сопротивление, равное  $Z = \sqrt{R^2 + X^2} = \frac{U}{I}$ ;

$R$  – активное сопротивление;

$X$  – реактивное сопротивление;

$\varphi = \alpha_U - \alpha_I$  – угол сдвига по фазе между напряжением и током.

В качестве примера выразим сопротивление цепи, изображенной на рисунке 4.1, в комплексной форме

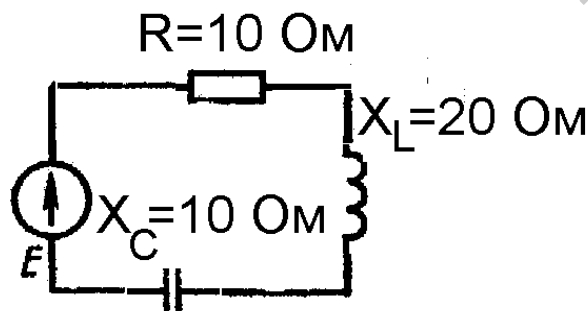


Рисунок 4.1 – Схема цепи

$$\underline{Z} = R + j \cdot x = R + j \cdot (X_L - X_C) = 10 + j \cdot 10 \text{ Ом},$$



$$\underline{Z} = Ze^{j\varphi} = \sqrt{R^2 + X^2} e^{j \arctg \frac{X}{R}} = 10 \cdot \sqrt{2} \cdot e^{j45^\circ} \text{ Ом.}$$

Выражение  $\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}}$  называют законом Ома в комплексной форме. В

комплексной форме можно выразить и законы Кирхгофа. Первый закон Кирхгофа записывают в виде:  $\sum I = 0$ , т. е. алгебраическая сумма комплексных токов, сходящихся в узле электрической цепи, равна нулю. Второй закон Кирхгофа в применении к контуру цепи в комплексной форме записывается в виде:  $\sum E = \sum I Z$ , т.е. алгебраическая сумма действующих в контуре комплексных э.д.с. равна алгебраической сумме комплексных падений напряжений на пассивных элементах.

Так как выражения законов Ома и Кирхгофа в комплексной форме для цепи синусоидального тока полностью совпадают с выражениями этих законов для цепи постоянного тока, то все формулы и соотношения, которые использовались в цепях постоянного тока, можно применить для цепей синусоидального тока при расчете их в комплексной форме.

Комплексное значение мощности определяется по формуле

$$\underline{S} = \underline{U} \underline{I}^*$$

где  $\underline{I}^*$  – комплекс тока, отмеченный звездочкой, является сопряженным комплексу тока  $\underline{I}$ , т. е. если  $\underline{I} = I e^{j\alpha_i}$ , то  $\underline{I}^* = I e^{-j\alpha_i}$ .

Тогда

$$\underline{S} = U e^{j\alpha_u} \cdot I e^{-j\alpha_i} = UI e^{j\varphi} = S e^{j\varphi},$$

где  $\underline{S}$  – полная мощность цепи,  $B \cdot A$ .

Переходя к алгебраической форме записи комплексного числа, получаем

$$\underline{S} = S \cos\varphi + jS \sin\varphi = P + jQ,$$

где  $P$  – активная мощность, Вт;

$Q$  – реактивная мощность, вар.

Рассчитав комплексную мощность, мы определяем и значения полной, активной и реактивной мощностей.

Пример. Комплекс тока в цепи  $\dot{I} = 10e^{j30^\circ}$ , комплекс напряжения  $\dot{U} = 120e^{j60^\circ}$ . Определить комплексное значение мощности.

По формуле  $\underline{S} = \underline{U} \dot{I}^*$  находим

$$S = 120e^{j60^\circ} \cdot 10^{-j30^\circ} = 1200e^{j30^\circ} = 1200\cos 30^\circ + j \cdot 1200\sin 30^\circ = 1032 + j \cdot 600 \text{ В} \cdot \text{А}.$$

Отсюда следует, что  $S = 1200 \text{ В} \cdot \text{А}$ ,  $P = 1032 \text{ Вт}$ ,  $Q = 600 \text{ вар}$ .

Таким образом, используя символический метод, расчет простой цепи синусоидального тока можно выполнить аналогично расчету цепи постоянного тока, т. е. методом свертывания. Отличие состоит лишь в том, что расчет осуществляется в комплексной форме. Рассчитав комплексные значения, легко определить действующие значения, а при необходимости, и начальные фазы токов, напряжений, а также все необходимые мощности.

### 5 Пример расчета цепи синусоидального тока

Для электрической цепи, схема которой изображена на рисунке 5.2, по заданным параметрам пассивных элементов, э.д.с. и частоте источника определить действующие значения и начальные фазы токов во всех ветвях цепи и напряжений на отдельных участках.

Рассчитать активные, реактивные и полные мощности отдельных участков и всей цепи. Составить уравнение баланса активных и реактивных мощностей. Указать показания приборов, изображенных на рисунке.

**Дано:**  $E = 100 \text{ В}$ ,  $f = 50 \text{ Гц}$ ,  $C_2 = 318 \text{ мкф}$ ,  $L_3 = 15,9 \text{ мГн}$ ,  $R_1 = 2 \text{ Ом}$ ,  $R_2 = 10 \text{ Ом}$ ,  $R_3 = 4 \text{ Ом}$ .

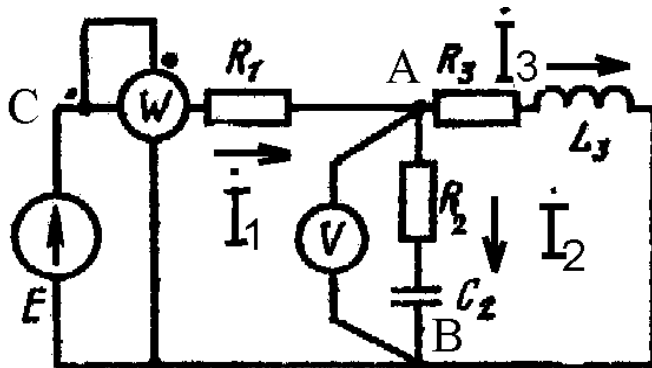


Рисунок 5.2 – Схема цепи синусоидального тока

### Решение:

1. Указать направления токов в ветвях.
2. Определить сопротивления реактивных элементов.

$$X_{L3} = \omega \cdot L_3 = 2 \cdot \pi \cdot f \cdot L_3 = 2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 15,9 \cdot 10^{-3} = 5 \text{ Ом},$$

$$X_{C2} = \frac{1}{\omega \cdot C_2} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot C_2} = \frac{1}{2 \cdot 3,14 \cdot 50 \cdot 318 \cdot 10^{-6}} = 10 \text{ Ом}.$$

3. Выражают ЭДС источника и сопротивления ветвей в комплексной форме.

$$\dot{E} = E \cdot e^{j\alpha e} = 100 \cdot e^{j0^\circ} = 100 \text{ В},$$

$$Z_1 = R_1 + j \cdot 0 = 2 = 2 \cdot e^{j0^\circ} \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_2 = R_2 - j \cdot x_{C_2} = 10 - j \cdot 10 = \sqrt{10^2 + 10^2} \cdot e^{-j45^\circ} = 10\sqrt{2} \cdot e^{-j45^\circ} = 14 \cdot e^{-j45^\circ} \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_3 = R_3 + j \cdot x_{L_3} = 4 + j \cdot 5 = \sqrt{4^2 + 5^2} \cdot e^{j51^\circ} = \sqrt{41} \cdot e^{j51^\circ} \text{ Ом},$$

4. Рассчитывают эквивалентное комплексное сопротивление цепи:

$$\underline{Z}_{23} = \frac{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3}{\underline{Z}_2 + \underline{Z}_3} = \frac{10\sqrt{2} \cdot e^{-j45^\circ} \cdot \sqrt{41} \cdot e^{j51^\circ}}{10 - j \cdot 10 + 4 + j5} = \frac{10\sqrt{82} \cdot e^{j51^\circ - j45^\circ}}{14 - j5} = \frac{10\sqrt{82} \cdot e^{j6^\circ}}{\sqrt{14^2 + 5^2} \cdot e^{-j20^\circ}} = \frac{10\sqrt{82} \cdot e^{j6^\circ}}{\sqrt{221} \cdot e^{-j20^\circ}} =$$

$$10\sqrt{\frac{82}{221}} \cdot e^{j26^\circ} = 6,09 \cdot \cos 26^\circ + j6,09 \cdot \sin 26^\circ = 5,48 + j \cdot 2,6814 \text{ Ом},$$

$$\underline{Z}_{ЭКВ} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_{23} = 2 + 5,48 + j \cdot 2,68 = 7,48 + j \cdot 2,68 = \sqrt{7,48^2 + 2,68^2} \cdot e^{j19,7^\circ} = 7,95 \cdot e^{j19,7^\circ} \text{ Ом},$$

5. Определяют комплекс тока в ветви, содержащей источник, а затем комплексы напряжений и токов других ветвей:

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{E}}{\underline{Z}_{ЭКВ}} = \frac{100}{7,95 \cdot e^{j19,7^\circ}} = 12,6 \cdot e^{-j19,7^\circ} \text{ А},$$

$$\dot{U}_{AB} = \dot{I}_1 \cdot \underline{Z}_{23} = 12,6 \cdot e^{-j19,7^\circ} \cdot 6,09 \cdot e^{j26^\circ} = 76,9 \cdot e^{j6,3^\circ} \text{ В},$$

$$\dot{I}_2 = \frac{\dot{U}_{AB}}{\underline{Z}_2} = \frac{76,9 \cdot e^{j6,3^\circ}}{14 \cdot e^{-j45^\circ}} = 5,5 \cdot e^{j51,3^\circ} \text{ А},$$

$$\dot{I}_3 = \frac{\dot{U}_{AB}}{\underline{Z}_3} = \frac{76,9 \cdot e^{j6,3^\circ}}{6,4 \cdot e^{j51^\circ}} = 12 \cdot e^{-j44,7^\circ} \text{ А},$$

$$\dot{U}_{CA} = \dot{I}_1 \cdot \underline{Z}_1 = 12,6 \cdot e^{-j19,7^\circ} \cdot 2 \cdot e^{j0^\circ} = 25,2 \cdot e^{-j19,7^\circ} \text{ В},$$

6. Зная комплексные значения токов и напряжений, определяют их действующие значения и начальные фазы:

$$I_1 = 12,6 \text{ А}, \alpha_{I_1} = 19,7^\circ,$$

$$I_2 = 5,5 \text{ А}, \alpha_{I_2} = 51,3^\circ,$$

$$I_3 = 12 \text{ А}, \alpha_{I_3} = -44,7^\circ,$$

$$U_{AB} = 76,9 \text{ В}, \alpha_{U_{AB}} = 6,3^\circ,$$

$$U_{CA} = 25,2 \text{ В}, \alpha_{U_{CA}} = -19,7^\circ,$$

7. Рассчитывают мощности отдельных участков и всей цепи:

$$\underline{S}_1 = \dot{U}_{CA} \cdot \dot{I}_1^* = 25,2 \cdot e^{-j19,7^\circ} \cdot 12,6 \cdot e^{j19,7^\circ} = 318 \cdot e^{j0^\circ} = 318 \text{ В} \cdot \text{А},$$

$$\underline{P}_1 = 318 \text{ Вт}, Q_1 = 0, S_1 = 318 \text{ В} \cdot \text{А},$$

$$\underline{S}_2 = \dot{U}_{AB} \cdot \dot{I}_2^* = 76,9 \cdot e^{j6,3^\circ} \cdot 5,5 \cdot e^{-j51,3^\circ} = 423 \cdot e^{-j45^\circ} = 423 \cdot \cos 45^\circ - j \cdot 423 \cdot \sin 45^\circ = 299 - j \cdot 299 \text{ В} \cdot \text{А},$$

$$\underline{P}_2 = 299 \text{ Вт}, Q_2 = -299 \text{ вар}, S_2 = 423 \text{ В} \cdot \text{А},$$

$$\underline{S}_3 = \dot{U}_{AB} \cdot \dot{I}_3^* = 76,9 \cdot e^{j6,3^\circ} \cdot 12,6 \cdot e^{j44,7^\circ} = 923 \cdot e^{j51^\circ} = 923 \cdot \cos 51^\circ + j \cdot 923 \cdot \sin 51^\circ = 581 + j \cdot 717 \text{ В} \cdot \text{А},$$

$$\underline{P}_3 = 581 \text{ Вт}, Q_3 = 717 \text{ вар}, S_3 = 923 \text{ В} \cdot \text{А},$$

$$\underline{S} = \dot{E} \cdot \dot{I}_1^* = 100 \cdot 12,6 \cdot e^{j19,7^\circ} = 1260 \cdot e^{j19,7^\circ} = 1260 \cdot \cos 19,7^\circ + j \cdot 1260 \cdot \sin 19,7^\circ = 1198 + j \cdot 418 \text{ В} \cdot \text{А},$$

$$P = 1198 \text{ Вт}, Q = 418 \text{ вар}, S = 1260 \text{ В} \cdot \text{А}$$

8. Составляют уравнения баланса активных и реактивных мощностей цепи. Из закона сохранения энергии следует, что должны выполняться равенства:

$$P = P_1 + P_2 + P_3 ,$$

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 ,$$

$$1198 = 318 + 299 + 581 = 1198 \text{ Вт},$$

$$418 = 0 - 299 + 717 = 418 \text{ вар}.$$

Баланс активных мощностей и баланс реактивных мощностей соблюдается. Включенный ваттметр измеряет активную мощность всей цепи. Его показание равно 1198 Вт. Вольтметр измеряет действующее значение напряжения на участке АВ.  $U_{AB} = 76,9 \text{ В}$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Касаткин, А. С. Электротехника / А. С. Касаткин, М. В. Немцов. – Москва : Высшая школа, 2003. – 542 с.
2. Электротехника / В. Г. Герасимов [и др.] ; под ред. В. Г. Герасимова. – Москва : Высшая школа, 1985. – 768 с.
3. Борисов, Ю. М. Электротехника / Ю. М. Борисов [и др.]. – Москва : Энергоиздат, 1985. – 559 с.
4. Бутырин, П. А. Электротехника / П. А. Бутырин. – Москва : Академия, 2007. – 272 с.