МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Учреждение образования
«Витебский государственный технологический университет»

ТЕОРИЯ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению расчетно-графических работ для студентов специальности 1-53 01 01-05 «Автоматизация технологических процессов и производств (легкая промышленность)»

Витебск
2016

УДК 681.5

Теория автоматического управления: методические указания к выполнению расчетно-графической работы для студентов 1-53 01 01-05 «Автоматизация технологических процессов и производств (легкая промышленность)».

Витебск: Министерство образования Республики Беларусь, УО «ВГТУ», 2015.

Составитель: к.т.н., доц. Надёжная Н.Л.,
д.т.н., проф. Кузнецов А.А.,
асс. Соколова А.С.

Методические указания составлены в соответствии с программой курса «Теория автоматического управления», предусматривающей 4 расчетно-графические работы в третьем и четвертом семестрах.

Предназначены для студентов дневной формы обучения специальности 1-53 01 01-05 «Автоматизация технологических процессов и производств (легкая промышленность)».

Одобрено кафедрой «Автоматизация технологических процессов и производств» УО «ВГТУ» «11» ноября 2015 г., протокол № 4.

Рецензент: к.т.н., доц. Казаков В.Е.
Редактор: ст. преп. Клименкова С.А.

Рекомендовано к опубликованию редакционно-издательским советом УО «ВГТУ» «30» ноября 2015 г., протокол № 9.

Ответственный за выпуск: Букин Ю.А.

Учреждение образования «Витебский государственный технологический университет»

Подписано к печати 13.05.16. Формат 60х90 1/16. Уч.-изд. л. 3.7.
Печать ризографическая. Тираж 60 экз. Заказ № 164.

Отпечатано на ризографе учреждения образования «Витебский государственный технологический университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий №1/172 от 12.02.2014.
210035, г. Витебск, Московский пр-т, 72.

СОДЕРЖАНИЕ

1 РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1 4
- 1.1 Правила преобразования структурных схем 4
- 1.2 Запись передаточных функций и дифференциального уравнения динамики по структурной схеме системы 6
- 1.3 Частотные характеристики 7

Задание к расчетно-графической работе № 1 8

Пример выполнения расчетно-графической работы № 1 12

2 РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2 19
- 2.1 Алгебраические критерии устойчивости 19
- 2.2 Частотные критерии устойчивости 20

Задание к расчетно-графической работе № 2 24

Пример выполнения расчетно-графической работы № 2 26

3 РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3 35
- 3.1 Метод фазовой плоскости 35
- 3.2 Построение фазовых траекторий релейных систем методом сшивания решений 36

Задание к расчетно-графической работе № 3 40

Пример выполнения расчетно-графической работы № 3 41

4 РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4 47
- 4.1 Гармоническая линеаризация нелинейных элементов 47
- 4.2 Определение амплитуды и частоты режима автоколебаний 49
- 4.3 Метод И.С. Гольфарба 49

Задание к расчетно-графической работе № 4 51

Пример выполнения расчетно-графической работы № 4 52

ЛИТЕРАТУРА 57

1 РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА № 1

1.1 Правила преобразования структурных схем

Элементы САУ, математические модели которых описываются в виде передаточных функций, могут быть соединены последовательно, параллельно и с обратной связью. Рассмотрим записи эквивалентных передаточных функций при указанных типах соединений.

1. При параллельном соединении элементов на вход элементов $W_1(p)$ и $W_2(p)$ подается один и тот же сигнал x. Эквивалентная передаточная функция параллельного соединения элементов $W_1(p)$ и $W_2(p)$ $W_{экв}(p)$ будет равна сумме передаточных функций $W_1(p)$ и $W_2(p)$.

Рисунок 1.1 – Параллельное соединение

2. При последовательном соединении элементов $W_1(p)$ и $W_2(p)$ выходной сигнал первого элемента будет равен входному сигналу второго элемента, а эквивалентная передаточная функция будет равна произведению передаточных функций $W_1(p)$ и $W_2(p)$.

Рисунок 1.2 – Последовательное соединение

3. При соединении элементов с отрицательной обратной связью:

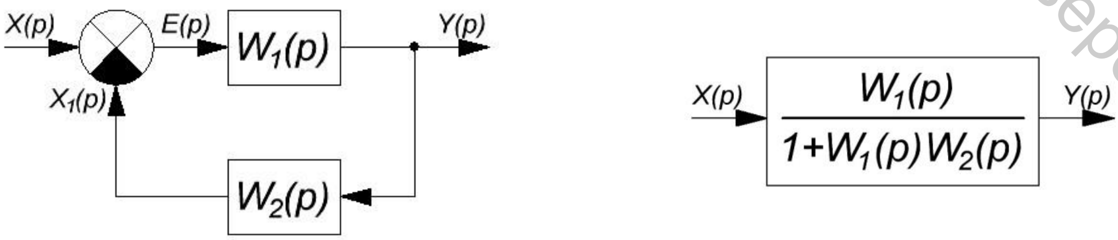


Рисунок 1.3 – Соединение элементов с отрицательной обратной

4. При соединении с положительной обратной связью:

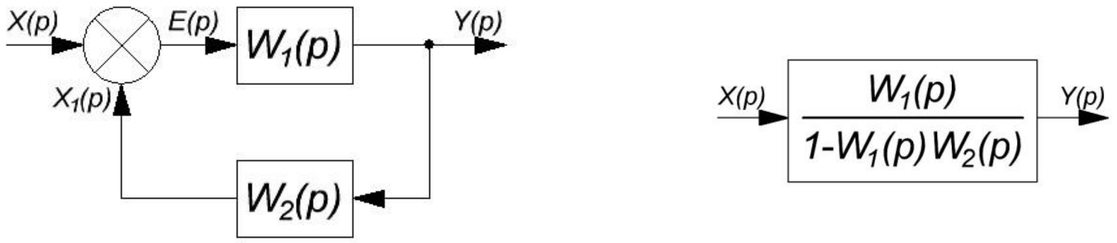


Рисунок 1.4 – Соединение элементов с положительной обратной

5. Звено можно переносить через сумматор как вперед, так и назад. Чтобы при этом передаточные функции не изменились, перед сумматором нужно поставить дополнительное звено (рисунок 1.5).

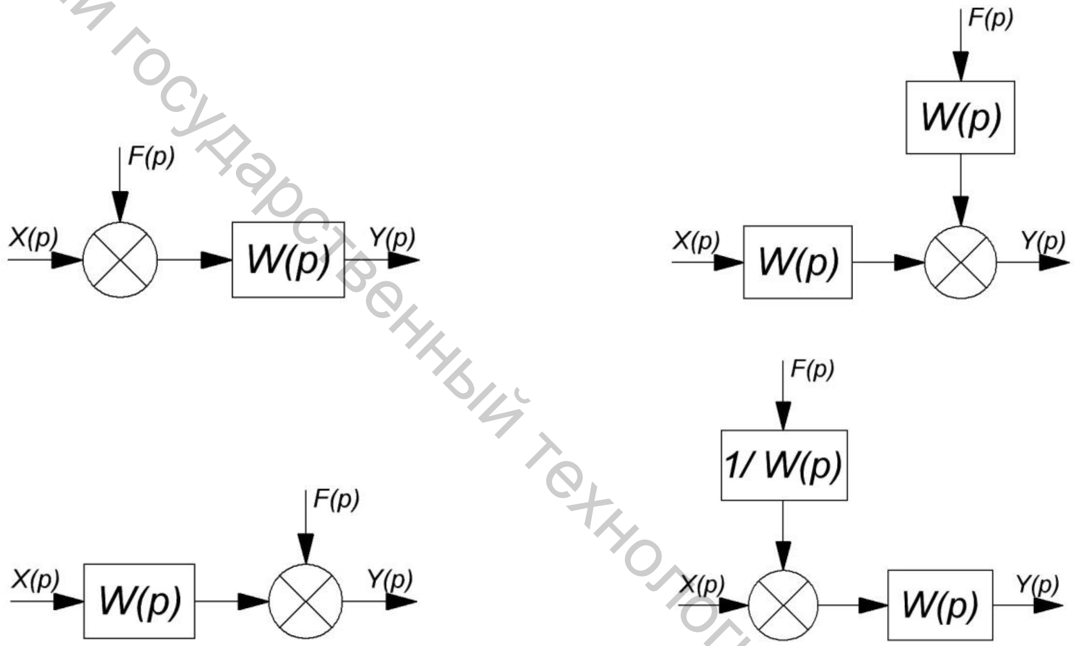


Рисунок 1.5 – Перенос звена через сумматор

6. Звено можно переносить также через точку разветвления, сохраняя все передаточные функции (рисунок 1.6).

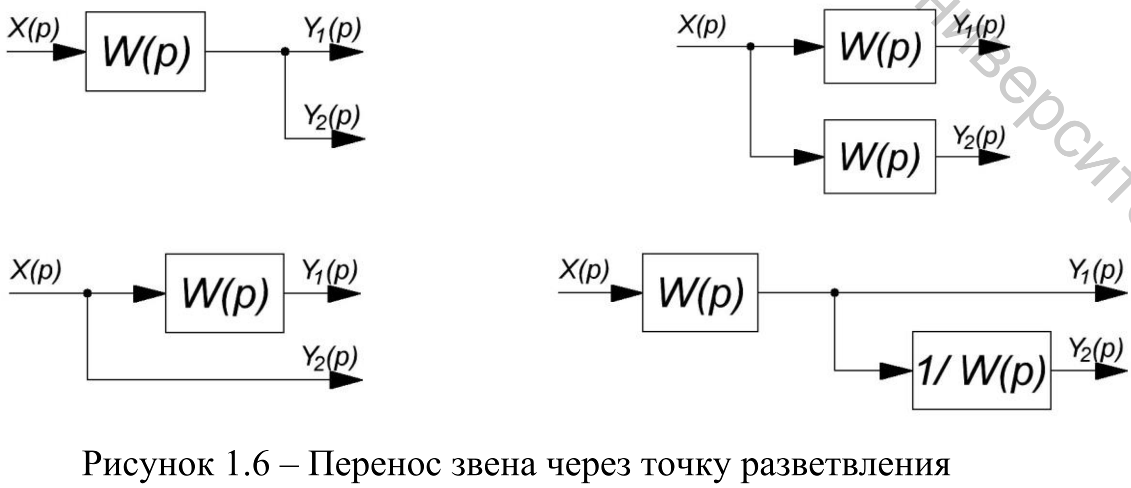


Рисунок 1.6 – Перенос звена через точку разветвления

1.2 Запись передаточных функций и дифференциального уравнения динамики по структурной схеме системы

Если задана структурная схема системы, можно записать передаточные функции, воспользовавшись правилами преобразования структурных схем. Каждая передаточная функция – это отношение изображений Лапласа некоторых сигналов.

Пример структурной схемы:

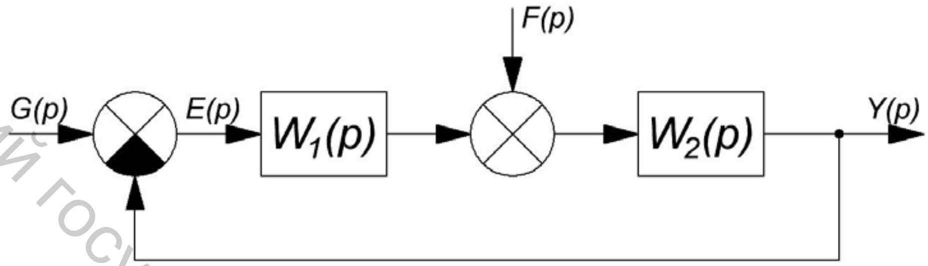


Рисунок 1.7 – Пример структурной схемы

$W_{раз}(p)=\dfrac{Y(p)}{E(p)}$ – передаточная функция системы в разомкнутом состоянии представляет собой отношение изображения выходного сигнала к изображению ошибки.

$W_{зам}(p)=\dfrac{Y(p)}{G(p)}$ – передаточная функция системы в замкнутом состоянии (эквивалентная) – отношение изображения выходного сигнала к изображению входного.

$W_{\varepsilon g}(p)=\dfrac{E(p)}{G(p)}$ – передаточная функция ошибки относительно входного воздействия – отношение изображения ошибки к изображению входного сигнала.

$W_{fy}(p)=\dfrac{Y(p)}{F(p)}$ – передаточная функция системы относительно возмущения – отношение изображения выходного сигнала к изображению возмущения.

Для рассматриваемого примера:

$$W_{раз}(p)=\frac{Y(p)}{E(p)}=W_1(p)\cdot W_2(p);$$

$$W_{зам}(p)=\frac{Y(p)}{G(p)}=\frac{W_1(p)\cdot W_2(p)}{1+W_1(p)\cdot W_2(p)};$$

$$W_{\varepsilon g}(p)=\frac{E(p)}{G(p)}=\frac{1}{1+W_1(p)\cdot W_2(p)};$$

$$W_{fy}(p)=\frac{Y(p)}{F(p)}=\frac{W_2(p)}{1+W_1(p)\cdot W_2(p)}.$$

Уравнение динамики связывает выходной сигнал системы со входными.

В данной системе выходной сигнал $y(t)$, входные сигналы – $g(t)$ и $f(t)$.

Уравнение динамики в изображениях будет иметь вид:

$$Y(p) = G(p)W_{зам}(p) + F(p)W_{fy}(p) \tag{1.1}$$

Дифференциальное уравнение записывается по уравнению в изображениях заменой оператора p на $\frac{d}{dt}$.

1.3 Частотные характеристики

Важную роль при описании линейных систем играют частотные характеристики, отражающие реакцию объекта на гармонический сигнал.

Частотные характеристики могут быть легко получены, если задана передаточная функция элемента системы в форме Лапласа. Для этого в передаточной функции элемента системы нужно заменить оператор Лапласа на оператор Фурье $p \to j\omega$, где $j = \sqrt{-1}$ – мнимая единица.

$$W(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}. \tag{1.2}$$

Выражение $W(j\omega)$ называется *комплексным коэффициентом передачи.*

$A(\omega) = \dfrac{A_{вых}(\omega)}{A_{вх}(\omega)}$ показывает отношение амплитуд сигналов на выходе и входе элемента в зависимости от частоты.

$\varphi(\omega) = \varphi_{вых}(\omega) - \varphi_{вх}(\omega)$ показывает разность фаз сигналов на выходе и входе элемента в зависимости от частоты.

$W(j\omega)$ можно записать в алгебраической форме:

$$W(j\omega) = \mathrm{Re}(\omega) + j\,\mathrm{Im}(\omega) \tag{1.3}$$

Модуль $A(\omega)$ в показательной форме записи называется *амплитудно-частотной характеристикой (АЧХ)*, а фаза или аргумент $\varphi(\omega)$ называется *фазочастотной характеристикой (ФЧХ)*.

Действительная часть амплитудно-фазовой характеристики $\mathrm{Re}(\omega)$ называется *вещественной частотной характеристикой (ВЧХ)*.

Мнимая часть амплитудно-фазовой характеристики $\mathrm{Im}(\omega)$ называется *мнимой частотной характеристикой (МЧХ)*.

При изменении частоты входного сигнала от 0 до ∞ можно исследовать спектр входного и выходного сигналов, т. е. получить *амплитудно-фазовую частотную характеристику (АФЧХ)* – траекторию движения конца вектора комплексного коэффициента передачи *W(jω)*, при изменении частоты от 0 до ∞. АФЧХ отражает соотношение амплитуд и фаз сигналов на выходе и входе элемента системы.

Вместо АЧХ чаще строят *логарифмическую амплитудно-частотную характеристику (ЛАЧХ)*, представляющую собой зависимость

$20\lg|W(j\omega)| = 20\lg(A(\omega))$ от $\lg(\omega)$. Для одноконтурной системы такие характеристики можно легко построить при помощи асимптотических ЛАЧХ и ФЧХ типовых звеньев, входящих в систему. В этом случае ЛАЧХ системы определяется как сумма типовых ЛАЧХ:

$$ЛАЧХ_{сист} \to 20 \cdot \lg\left|W_{раз}(j\omega)\right| = \sum 20 \cdot \lg\left|W_i(j\omega)\right|, \quad (1.4)$$

где $W_i(j\omega)$ – комплексные коэффициенты передачи типовых звеньев.

Величину фазового сдвига определяют по формуле:

$$\varphi(\omega) = \sum \varphi_i(\omega), \quad (1.5)$$

где $\varphi_i(\omega)$ – фазовые сдвиги типовых звеньев.

В общем случае, если система не содержит в своем составе неминимально-фазовых звеньев, при построении ЛАЧХ и ФЧХ можно руководствоваться следующими правилами:

1) определяется общий (эквивалентный) коэффициент усиления системы;

2) определяются частоты сопряжения звеньев $\omega_i = \dfrac{1}{T_i}$;

3) определяется начальный наклон ЛАЧХ системы: если в передаточной функции нет сомножителя p, то начальный наклон составляет 0 *дБ/дек*, а начальный фазовый сдвиг $\varphi_0 = 0$; если сомножитель p присутствует в числителе, то начальный наклон составит +20 *дБ/дек*, а фаза $\varphi_0 = +90^0$; если сомножитель p присутствует в знаменателе, то начальный наклон составит -20 *дБ/дек*, а фаза $\varphi_0 = -90^0$;

4) через точку $20 \cdot \lg(K_{сист})$ на частоте $\omega = 1$ или $\lg(\omega = 1) = 0$ проводится линия с начальным наклоном от $\omega = 0$ ($\lg(\omega = 0) = -\infty$) до пересечения с первой сопрягающей частотой;

5) далее, при достижении каждой сопрягающей частоты наклон будет изменяться на +20 дБ/дек – если сомножитель $(T_i p + 1)$ в числителе и на -20 *дБ/дек* – если сомножитель $(T_i p + 1)$ в знаменателе; фазовые сдвиги для этих звеньев определяются аналогичным образом, т. е. $\varphi_i = +arctg(T_i \cdot \omega)$ – для числителя и $\varphi_i = -arctg(T_i \cdot \omega)$ – для знаменателя. При этом необходимо также учитывать степень, с которой сомножитель $(T_i p + 1)$ входит в передаточную функцию, показатель степени будет являться множителем при определении наклона и фазы.

Задание к расчетно-графической работе № 1

Задача №1

1. Для системы, структурная схема которой представлена на рисунке 1.8, записать передаточные функции:

- разомкнутой САУ по главной обратной связи;
- передаточную функцию ошибки относительно задающего воздействия;
- передаточную функцию системы в замкнутом состоянии (эквивалентную передаточную функцию);
- передаточную функцию системы относительно возмущения.

2. Записать дифференциальное уравнение системы (уравнение динамики).

Передаточные функции звеньев заданы в таблице 1.1.

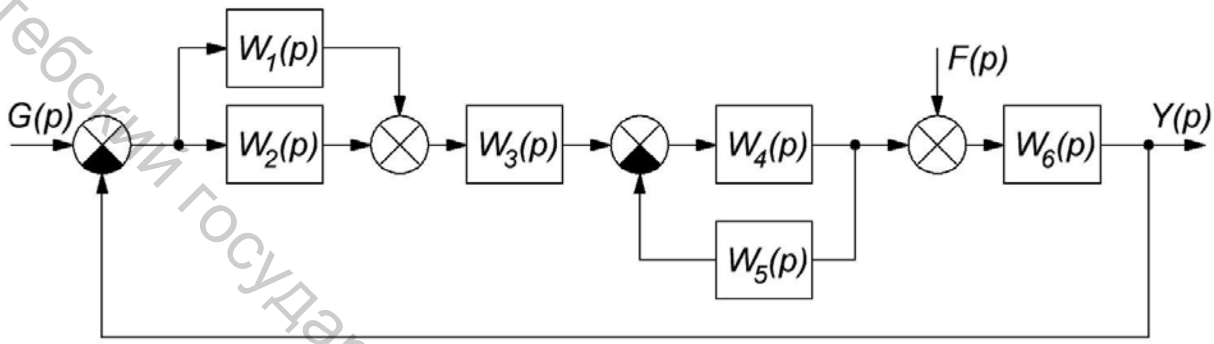


Рисунок 1.8 – Структурная схема САУ

Таблица 1.1 – Варианты заданий

№ варианта	$W_1(p)$	$W_2(p)$	$W_3(p)$	$W_4(p)$	$W_5(p)$	$W_6(p)$
1	2	3	4	5	6	7
1	K_1	$\frac{K_2}{p}$	K_3	$\frac{K_4}{p}$	K_5	$\frac{K_6}{T_6 p+1}$
2	$K_1 p$	K_2	$\frac{K_3}{p}$	$\frac{K_4}{T_4 p+1}$	1	$\frac{K_6}{T_6 p+1}$
3	K_1	$\frac{K_2}{T_2 p+1}$	K_3	$\frac{K_4}{T_4 p+1}$	K_5	$\frac{K_6}{p}$
4	$\frac{K_1}{T_1 p+1}$	K_2	$\frac{K_3}{T_3 p+1}$	K_4	$\frac{K_5}{T_5 p+1}$	$\frac{K_6}{p}$
5	K_1	$\frac{K_2}{T_2 p+1}$	K_3	$\frac{K_4}{p}$	1	$\frac{K_6}{T_6 p+1}$
6	K_1	$\frac{K_2}{p}$	$\frac{K_3}{T_3 p+1}$	$\frac{K_4}{p}$	K_5	$\frac{K_6}{T_6 p+1}$
7	$\frac{K_1}{T_1 p+1}$	K_2	$\frac{K_3}{T_3 p+1}$	$\frac{K_4}{p}$	1	$\frac{K_6}{T_6 p+1}$
8	$\frac{K_1}{T_1 p+1}$	$\frac{K_2}{p}$	K_3	$\frac{K_4}{T_4 p+1}$	K_5	K_6
9	K_1	$K_2 p$	K_3	$\frac{K_4}{T_4 p+1}$	1	$\frac{K_6}{p(T_6 p+1)}$

Продолжение таблицы 1.1

1	2	3	4	5	6	7
10	K_1	$\frac{K_2}{p}$	$\frac{K_3}{T_3p+1}$	$\frac{K_4}{p}$	1	$\frac{K_6}{T_6p+1}$
11	$\frac{K_1}{p}$	K_2	$\frac{K_3}{T_3p+1}$	K_4	$\frac{K_5}{p}$	$\frac{K_6}{T_6p+1}$
12	K_1	$\frac{K_2}{T_2p+1}$	K_3	$\frac{K_4}{p}$	K_5	$\frac{K_6}{p}$
13	$\frac{K_1}{T_1p+1}$	K_2	K_3	$\frac{K_4}{T_4p+1}$	1	$\frac{K_6}{T_6p+1}$
14	K_1	$\frac{K_2}{T_2p+1}$	$\frac{K_3}{T_3p+1}$	$\frac{K_4}{p}$	K_5	K_6
15	$\frac{K_1}{p}$	K_2	K_3	$\frac{K_4}{T_4p+1}$	1	$\frac{K_6}{T_6p+1}$
16	K_1p	1	K_3	$\frac{K_4}{p}$	K_5	$\frac{K_6}{T_6p+1}$
17	K_1p	K_2	$\frac{K_3}{T_3p+1}$	$\frac{K_4}{p}$	1	$\frac{K_6}{T_6p+1}$
18	$\frac{K_1}{T_1p+1}$	K_2	$\frac{K_3}{p}$	$\frac{K_4}{T_4p+1}$	K_5	K_6
19	K_1	$\frac{K_2}{T_2p+1}$	K_3	$\frac{K_4}{T_4p+1}$	1	$\frac{K_6}{T_6p+1}$
20	$\frac{K_1}{p}$	K_2	$\frac{K_3}{T_3p+1}$	$\frac{K_4}{p}$	K_5	$\frac{K_6}{T_6p+1}$
21	$\frac{K_1}{T_1p+1}$	K_2	$\frac{K_3}{p}$	$\frac{K_4}{T_4p+1}$	K_5	$K_6(T_6p+1)$
22	K_1	$\frac{K_2}{T_2p+1}$	K_3	$\frac{K_4}{p}$	K_5	$\frac{K_6}{p}$
23	K_1p	K_2	$\frac{K_3}{p}$	K_4	$\frac{K_5}{T_5p+1}$	K_6
24	$\frac{K_1}{p}$	K_2	$\frac{K_3}{T_3p+1}$	$\frac{K_4}{T_4p+1}$	K_5	K_6
25	$\frac{K_1}{T_1p+1}$	K_2	K_3	$\frac{K_4}{T_4p+1}$	1	$\frac{K_6}{T_6p+1}$
26	$\frac{K_1}{p}$	$\frac{K_2}{T_2p+1}$	K_3	$\frac{K_4}{p}$	K_5	K_6
27	$\frac{K_1}{T_1p+1}$	K_2	$\frac{K_3}{p}$	1	$\frac{K_5}{T_5p+1}$	$\frac{K_6}{T_6p+1}$

Окончание таблицы 1.1

1	2	3	4	5	6	7
28	K_1	$\dfrac{K_2}{T_2 p+1}$	$\dfrac{K_3}{T_3 p+1}$	$\dfrac{K_4}{T_4 p+1}$	1	$\dfrac{K_6}{p}$
29	$\dfrac{K_1}{T_1 p+1}$	1	$\dfrac{K_3}{p}$	$\dfrac{K_4}{T_4 p+1}$	K_5	$\dfrac{K_6}{T_6 p+1}$
30	K_1	$\dfrac{K_2}{T_2 p+1}$	K_3	$\dfrac{K_4}{p}$	K_5	$\dfrac{K_6}{T_6 p+1}$

Задача № 2

Рассчитать и построить все виды частотных характеристик (АЧХ, ВЧХ, МЧХ, АФЧХ, ЛАЧХ и ФЧХ) для элемента системы, передаточная функция которого задана в таблице 1.2.

Таблица 1.2 – Варианты заданий

№ варианта	Передаточная функция $W(p)$	Параметры			
		K	T_1	T_2	T_3
1	2	3	4	5	6
1	$W(p)=\dfrac{K(T_2 p+1)}{(T_1 p+1)^2}$	12	1	20	
2		20	2	0,5	
3		10	1,5	0,2	
4	$W(p)=\dfrac{K(T_2 p+1)}{p(T_1 p+1)}$	20	2	0,5	
5		5	1	10	
6		10	2	0,1	
7	$W(p)=\dfrac{Kp}{(T_1 p+1)(T_2 p+1)}$	15	10	0,5	
8		50	0,1	2	
9		10	5	20	
10	$W(p)=\dfrac{K}{p(T_1 p+1)(T_2 p+1)}$	20	2	0,5	
11		50	0,5	0,02	
12		12	2	10	
13	$W(p)=\dfrac{K}{p(T_1 p+1)^2}$	100	5		
14		50	10		
15		20	2		
16	$W(p)=\dfrac{K(T_1 p+1)}{(T_2 p+1)}$	20	20	5	
17		10	0,2	5	
18		5	2	10	
19	$W(p)=\dfrac{Kp}{(T_1 p+1)^2}$	15	0,1		
20		50	2		
21		10	10		
22	$W(p)=\dfrac{K(T_1 p+1)^2}{p(T_2 p+1)}$	50	0,5	2	
23		20	5	0,2	
24		10	0,2	5	
25	$W(p)=\dfrac{K(T_1 p+1)}{p(T_2 p+1)^2}$	10	5	1	
26		24	5	20	
27		8	0,5	2	

Окончание таблицы 1.2

1	2	3	4	5	6
28	$W(p)=\dfrac{K\left(T_1 p+1\right)\left(T_2 p+1\right)}{p\left(T_3 p+1\right)}$	15	10	2	0,1
29		10	0,1	0,5	2
30		25	1	10	2

Пример выполнения расчетно-графической работы № 1

Задача № 1

Задана структурная схема системы (рисунок 1.9).

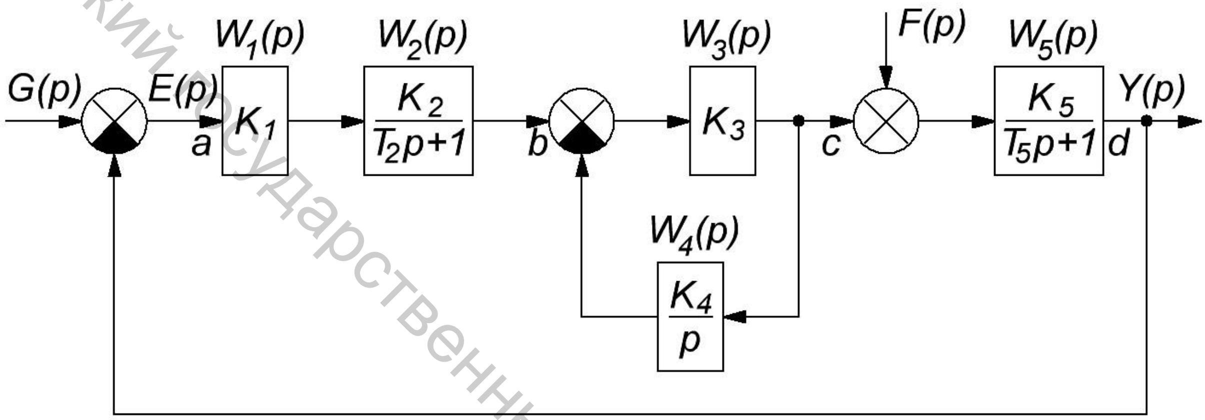


Рисунок 1.9 – Структурная схема САУ

1. Записать передаточные функции:

- разомкнутой САУ по главной обратной связи;
- передаточную функцию ошибки относительно задающего воздействия;
- передаточную функцию системы в замкнутом состоянии (эквивалентную передаточную функцию);
- передаточную функцию системы относительно возмущения.

2. Записать дифференциальное уравнение системы (уравнение динамики).

Решение

1. Используя правила преобразования структурных схем, определим эквивалентную передаточную функцию между точками «b» и «c»:

$$W_{bc}(p)=\frac{W_3(p)}{1+W_3(p)W_4(p)}=\frac{K_3}{1+\dfrac{K_3K_4}{p}}=\frac{K_3 p}{p+K_3K_4}=$$

$$=\frac{K_3 p}{\left(\dfrac{1}{K_3K_4}p+1\right)K_3K_4}=\frac{p}{\left(\dfrac{1}{K_3K_4}p+1\right)K_4}=\frac{p}{\left(T_1 p+1\right)K_4},$$

где $T_1=\frac{1}{K_3K_4}$.

2. Передаточная функция системы, разомкнутой на главной обратной связи:

$$W_{раз}(p)=W_1(p)W_2(p)W_{bc}(p)W_5(p)=\frac{Y(p)}{E(p)}=$$

$$=K_1\cdot\frac{K_2}{(T_2p+1)}\cdot\frac{p}{(T_1p+1)K_4}\cdot\frac{K_5}{(T_5p+1)}=\frac{K_1K_2K_5p}{K_4(T_1p+1)(T_2p+1)(T_5p+1)}.$$

3. Эквивалентная функция системы в замкнутом состоянии:

$$W_{зам}(p)=\frac{Y(p)}{G(p)}=\frac{W_{раз}(p)}{1+W_{раз}(p)}=$$

$$=\frac{\dfrac{K_1K_2K_5p}{K_4(T_1p+1)(T_2p+1)(T_5p+1)}}{1+\dfrac{K_1K_2K_5p}{K_4(T_1p+1)(T_2p+1)(T_5p+1)}}=\frac{K_1K_2K_5p}{K_4(T_1p+1)(T_2p+1)(T_5p+1)+K_1K_2K_5p}=$$

$$=\frac{K_1K_2K_5p}{K_4T_1T_2T_5p^3+K_4(T_1T_2+T_1T_5+T_2T_5)p^2+K_4(T_1+T_2+T_5+K_1K_2K_5)p+K_4}$$

4. Передаточная функция ошибки относительно задающего воздействия:

$$W_{\varepsilon g}(p)=\frac{E(p)}{G(p)}=1-W_{зам}(p)=\frac{1}{1+W_{раз}(p)}=\frac{1}{1+\dfrac{K_1K_2K_5p}{K_4(T_1p+1)(T_2p+1)(T_5p+1)}}=$$

$$=\frac{K_4(T_1p+1)(T_2p+1)(T_5p+1)}{K_4(T_1p+1)(T_2p+1)(T_5p+1)+K_1K_2K_5p}$$

5. Передаточная функция системы относительно возмущения *f(t)* (точка приложения возмущения – вход):

$$W_{fy}(p)=\frac{Y(p)}{F(p)}=\frac{W_5(p)}{1+W_{раз}(p)}=\frac{\dfrac{K_5}{(T_5p+1)}}{1+\dfrac{K_1K_2K_5p}{K_4(T_1p+1)(T_2p+1)(T_5p+1)}}=$$

$$=\frac{K_4K_5(T_1p+1)(T_2p+1)}{K_4(T_1p+1)(T_2p+1)(T_5p+1)+K_1K_2K_5p}=$$

$$=\frac{K_4K_5T_1T_2p^2+K_4K_5(T_1+T_2)p+K_4K_5}{K_4T_1T_2T_5p^3+K_4(T_1T_2+T_1T_5+T_2T_5)p^2+K_4(T_1+T_2+T_5+K_1K_2K_5)p+K_4}$$

6. Изображение выходного сигнала: $Y(p)=G(p)W_{зам}(p)+F(p)W_{fy}(p)$.

7. Уравнение системы в изображениях:

$$Y(p)\cdot(a_3p^3+a_2p^2+a_1p+a_0)=G(p)b_1p+F(p)(b_2'p^2+b_1'p+b_0')$$

где $a_3 = K_4 T_1 T_2 T_5$, $a_2 = K_4 (T_1 T_2 + T_1 T_5 + T_2 T_5)$, $a_1 = K_4 T_1 + K_4 T_2 + K_4 T_5 + K_1 K_2 K_5$, $a_0 = K_4$, $b_1 = K_1 K_2 K_5$, $b_2' = K_4 K_5 T_1 T_2$, $b_1' = K_4 K_5 (T_1 + T_2)$, $b_0' = K_4 K_5$.

8. Уравнение движения системы в дифференциальной форме:

$$a_3 \frac{d^3 y(t)}{d t^3} + a_2 \frac{d^2 y(t)}{d t^2} + a_1 \frac{d\, y(t)}{d t} + a_0 y(t) = b_1 \frac{d\, g(t)}{d t} + b'_2 \frac{d^2 f(t)}{d t^2} + b'_1 \frac{d f(t)}{d t} + b'_0 f(t).$$

Задача № 2

Рассчитать и построить все виды частотных характеристик для элемента системы, передаточная функция которого $W(p) = \frac{K(T_2 p + 1)}{p(T_1 p + 1)}$, где $K = 12{,}5$, $T_1 = 1$, $T_2 = 0{,}5$.

Решение

Для построения частотных характеристик от передаточной функции $W(p)$ переходим к выражению комплексного коэффициента передачи $W(j\omega)$, заменяя преобразование Лапласа преобразованием Фурье ($p \to j\omega$).

$$W(j\omega) = \frac{K(T_2 j\omega + 1)}{j\omega(T_1 j\omega + 1)} = \frac{-Kj(T_2 j\omega + 1)(-T_1 j\omega + 1)}{\omega(T_1^2 \omega^2 + 1)} = \frac{K(-jT_1 T_2 \omega^2 + (T_2 - T_1)\omega - j)}{\omega(T_1^2 \omega^2 + 1)} =$$
$$= \frac{K(T_2 - T_1)}{T_1^2 \omega^2 + 1} - j \frac{K(T_1 T_2 \omega^2 + 1)}{\omega(T_1^2 \omega^2 + 1)}. \quad (1.6)$$

Выделим в последнем выражении вещественную и мнимую часть.

Выражение для построения вещественной частотной характеристики (ВЧХ):

$$\operatorname{Re}(\omega) = \frac{K(T_2 - T_1)}{T_1^2 \omega^2 + 1} = -\frac{6{,}25}{\omega^2 + 1}. \quad (1.7)$$

Выражение для построения мнимой частотной характеристики (МЧХ):

$$\operatorname{Im}(\omega) = -\frac{K(T_1 T_2 \omega^2 + 1)}{\omega(T_1^2 \omega^2 + 1)} = -\frac{12{,}5(0{,}5\omega^2 + 1)}{\omega(\omega^2 + 1)}. \quad (1.8)$$

Выражение для построения амплитудно-частотной характеристики (АЧХ):

$$|W(j\omega)| = \sqrt{(\operatorname{Re}(\omega))^2 + (\operatorname{Im}(\omega))^2} = \sqrt{\left(\frac{K(T_2 - T_1)}{T_1^2 \omega^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{K(T_1 T_2 \omega^2 + 1)}{\omega(T_1^2 \omega^2 + 1)}\right)^2} =$$
$$= \frac{K}{\omega} \sqrt{\frac{(T_2^2 \omega^2 + 1)}{(T_1^2 \omega^2 + 1)}} = \frac{12{,}5}{\omega} \sqrt{\frac{(0{,}25\omega^2 + 1)}{(\omega^2 + 1)}}. \quad (1.9)$$

Запишем выражение для построения фазочастотной характеристики (ФЧХ), которое представляет собой сумму фазовых сдвигов, создаваемых каждым из типовых звеньев, входящих в состав элемента:

$$\varphi(\omega) = -90° - arctg(\omega T_1) + arctg(\omega T_2) = -90° - arctg(\omega) + arctg(0,5\omega) \qquad (1.10)$$

Подставим значения частоты ω в выражения (1.7) – (1.10), и сведем результаты вычислений в таблицу 1.3.

Таблица 1.3 – Данные для построения частотных характеристик

ω	0	0,010	0,1	0,2	0,5	0,8	1	2
$\mathrm{Re}(\omega)$	-6,25	-6,2	-6,2	-6,0	-5,0	-3,8	-3,1	-1,25
$\mathrm{Im}(\omega)$	-∞	-1249,9	-124,4	-61,3	-22,5	-12,6	-9,4	-3,75
$\lvert W(j\omega)\rvert$	∞	1250,0	124,5	61,6	23,0	13,1	9,9	3,95
$\varphi(\omega)$	-90	-90,2	-92,8	-95,6	-102,5	-106,8	-108,4	-108,4
ω	5	8	10	20	50	100	1000	∞
$\mathrm{Re}(\omega)$	-0,24	-0,10	-0,06	-0,02	-0,002	-0,001	0	0
$\mathrm{Im}(\omega)$	-1,30	-0,79	-0,63	-0,31	-0,125	-0,063	-0,006	0
$\lvert W(j\omega)\rvert$	1,32	0,80	0,63	0,31	0,125	0,063	0,006	0
$\varphi(\omega)$	-100,4	-96,9	-95,6	-92,8	-91,1	-90,5	-90	-90

По данным таблицы 1.3 строим частотные характеристики.

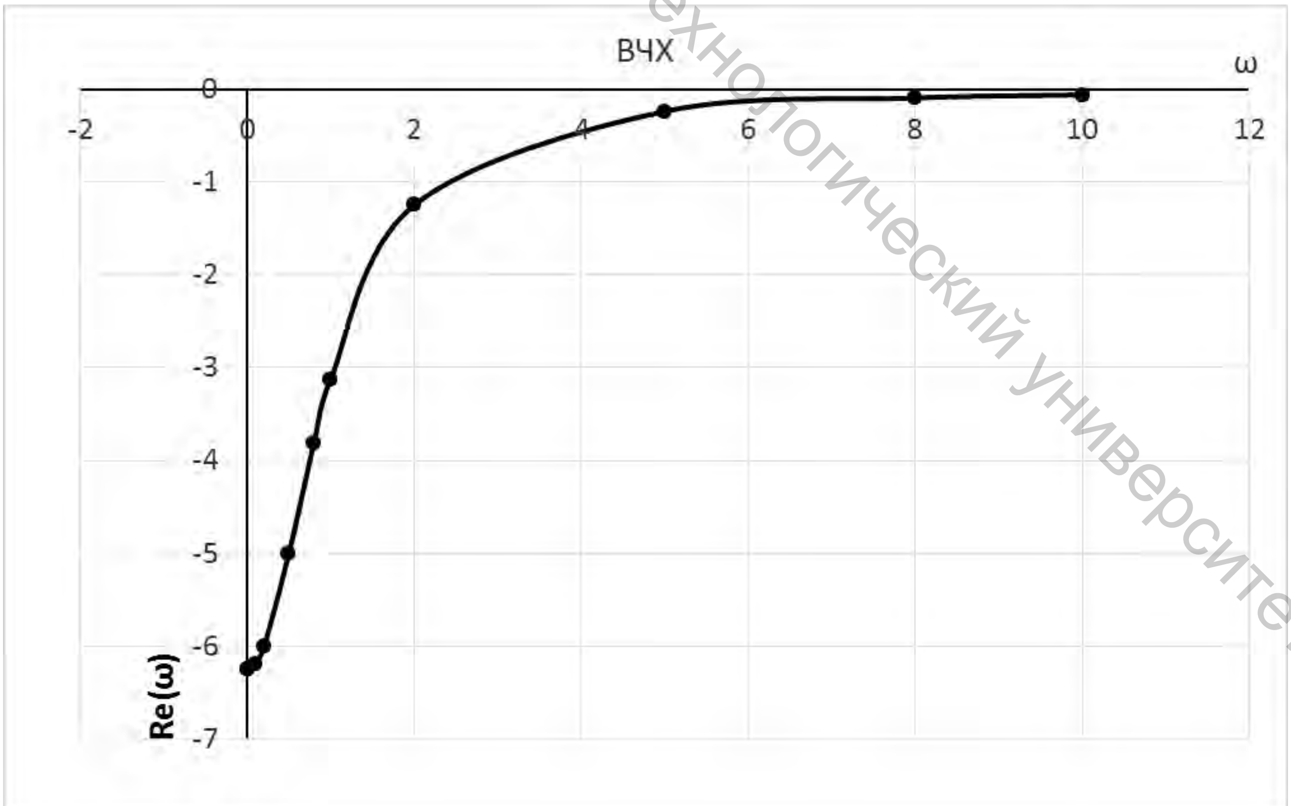


Рисунок 1.10 – ВЧХ

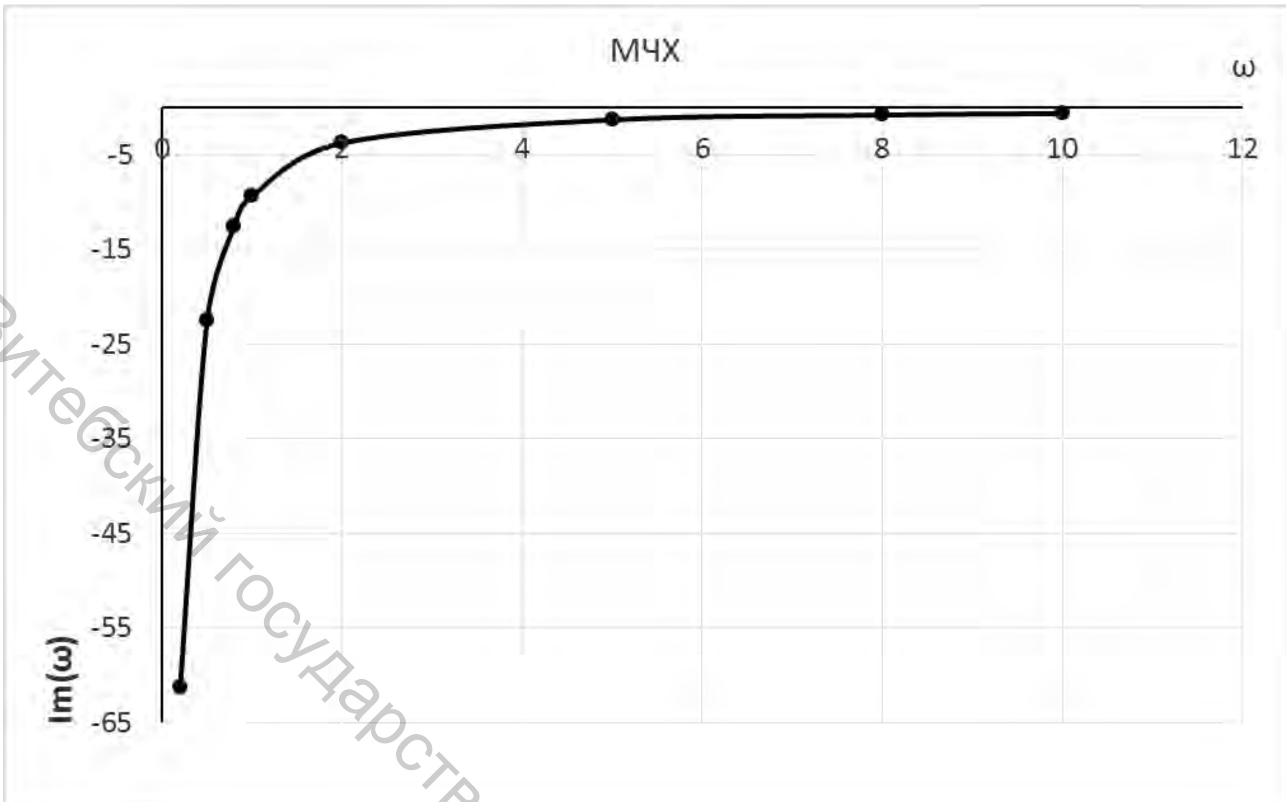


Рисунок 1.11 – МЧХ

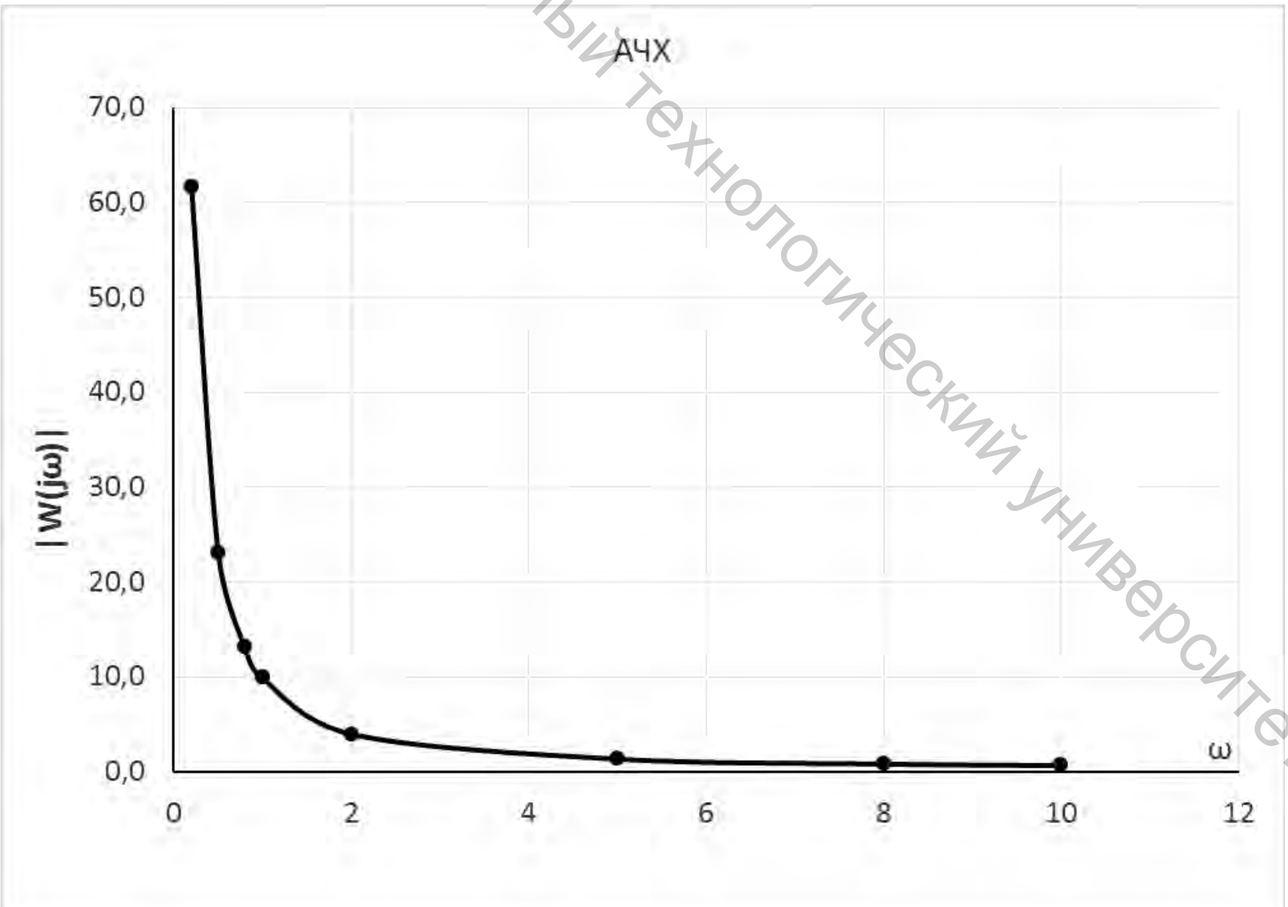


Рисунок 1.12 – АЧХ

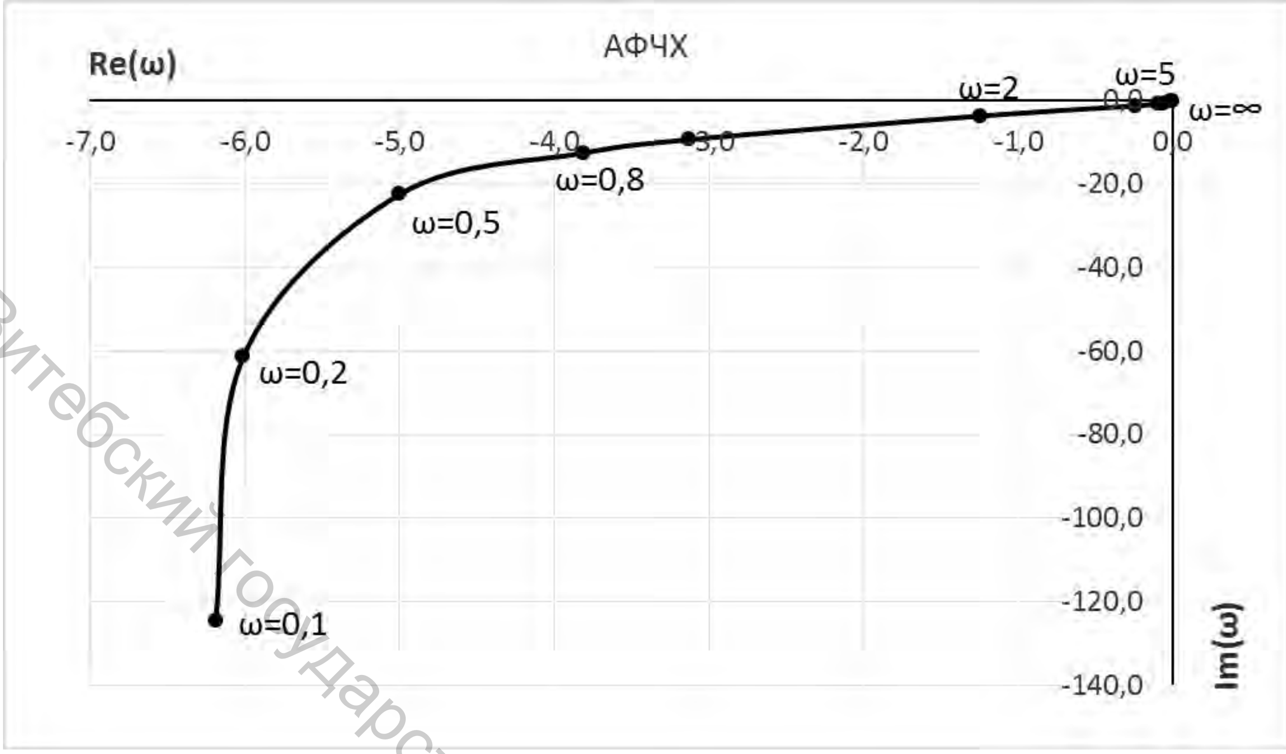


Рисунок 1.13 – АФЧХ

Фазочастотную характеристику (ФЧХ) и логарифмическую амплитудно-частотную характеристику (ЛАЧХ) построим на одной координатной сетке в логарифмическом масштабе. Для каждого значения частоты ω из таблицы 3 найдем $\lg(\omega)$.

Таблица 1.4 – Данные для построения ФЧХ

ω	0	0,010	0,1	0,2	0,5	0,8	1	2
$\lg(\omega)$	-∞	-2	-1	-0,7	-0,3	-0,10	0	0,3
$\varphi(\omega)$	-90	-90,2	-92,8	-95,6	-102,5	-106,8	-108,4	-108,4
ω	5	8	10	20	50	100	1000	∞
$\lg(\omega)$	0,7	0,9	1	1,3	1,7	2	3	0
$\varphi(\omega)$	-100,4	-96,9	-95,6	-92,8	-91,1	-90,5	-90	-90

Для построения ЛАЧХ рассчитаем:

$$20\lg K = 20\lg 12{,}5 = 21{,}9;$$

$$\omega_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{1} = 1;\ \lg\omega_1 = \lg 1 = 0;$$

$$\omega_2 = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{0{,}5} = 2;\ \lg\omega_2 = \lg 2 = 0{,}3.$$

Нанесем линии, соответствующие частотам излома ЛАЧХ (рисунок 1.14). Линия $\omega_1 = \frac{1}{T_1} = 1$ совпадает с осью ординат, линия $\omega_2 = \frac{1}{T_2} = 2$ обозначена пунктиром.

Через точку $20\lg K = 20\lg 12{,}5 = 21{,}9$, отложенную на оси ординат (на частоте $\omega = 1$ $[\lg\omega = 0]$), проводим линию с начальным наклоном ЛАЧХ -20*дБ/дек*, поскольку в передаточной функции сомножитель p находится в знаменателе. После частоты $\omega_1 = \frac{1}{T_1} = 1$ наклон ЛАЧХ изменится на -20*дБ/дек* и станет равным -40*дБ/дек*, поскольку сомножитель $(T_1 p + 1)$ находится в знаменателе передаточной функции. После частоты $\omega_2 = \frac{1}{T_2} = 2$ наклон ЛАЧХ изменится на +20*дБ/дек* и станет равным -20*дБ/дек*, поскольку сомножитель $(T_2 p + 1)$ находится в числителе передаточной функции.

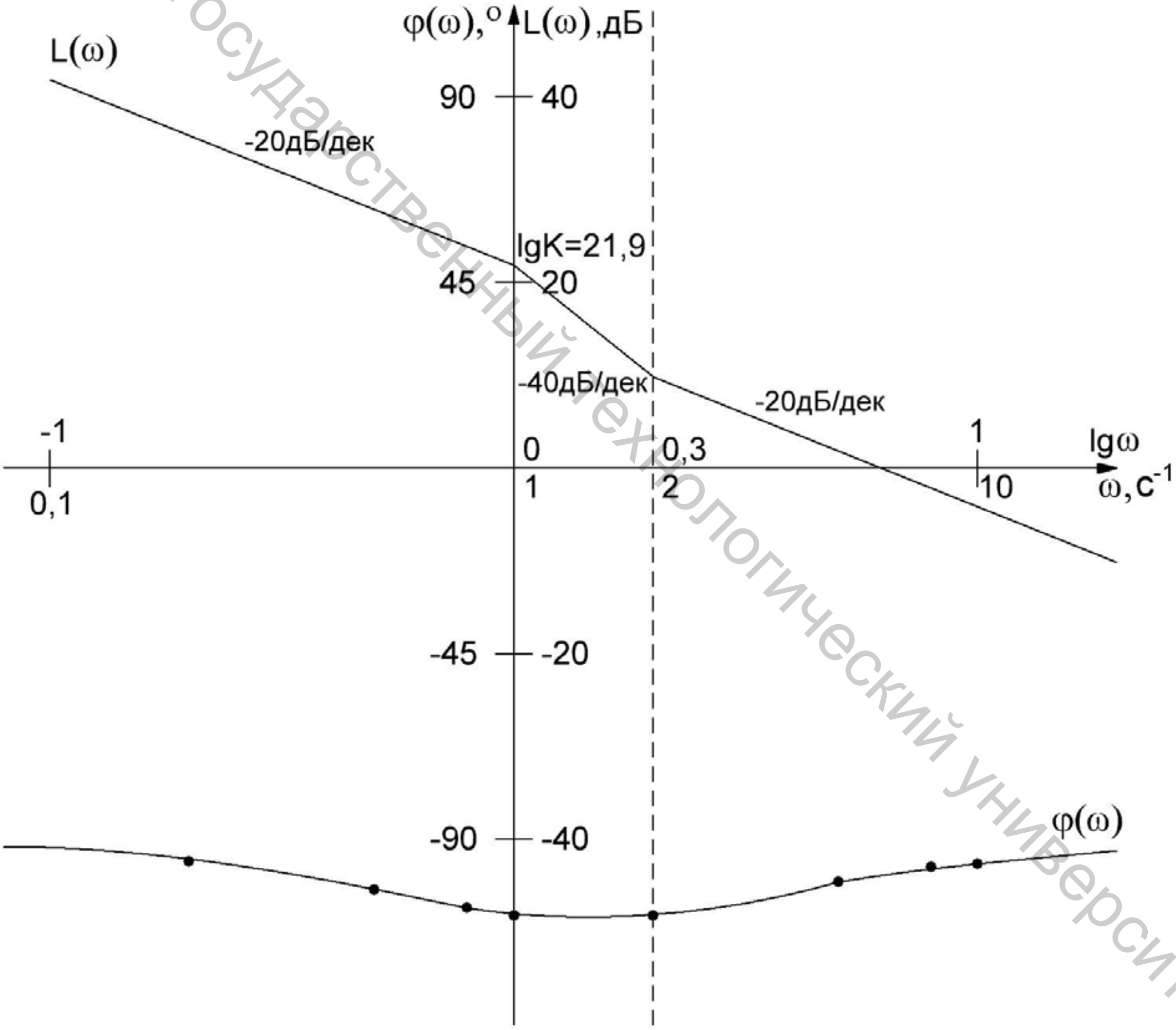


Рисунок 1.14 – ЛАЧХ и ФЧХ

2 РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА № 2

2.1 Алгебраические критерии устойчивости

Расчет устойчивости системы с использованием алгебраических критериев требует получения характеристического уравнения.

Для того, чтобы получить характеристическое уравнение для свободного движения, необходимо записать передаточную функцию системы в замкнутом состоянии и приравнять ее знаменатель к нулю:

$$W_{зам}(p) = \frac{W_{раз}(p)}{1+W_{раз}(p)} = \frac{Y(p)}{G(p)} \rightarrow Y(p)\cdot\left[1+W_{раз}(p)\right] = G(p)W_{раз}(p)$$

При $g(t) = 0 \rightarrow G(p) = 0$ получаем:

$Y(p)\cdot\left[1+W_{раз}(p)\right] = 0$.

Так как $Y(p) \neq 0$ получаем характеристическое уравнение:

$$D(p) = 1+W_{раз}(p) = 0. \qquad (2.1)$$

Уравнение (2.1) можно представить в виде:

$$D(p) = a_n p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0 = 0. \qquad (2.2)$$

Критерий устойчивости Рауса и Гурвица позволяет по коэффициентам характеристического уравнения без вычисления его корней сделать суждение об устойчивости системы.

Критерий устойчивости Гурвица

Гурвиц разработал алгебраический критерий устойчивости в форме определителей, составляемый из коэффициентов характеристического уравнения системы.

Сам критерий формулируется следующим образом.

Для того, чтобы система автоматического управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы все определители Гурвица имели знаки, одинаковые со знаком первого коэффициента характеристического уравнения a_0, т.е. при $a_0 > 0$:

$$\Delta_1 > 0; \Delta_2 > 0; \Delta_3 > 0; \ldots; \Delta_n > 0.$$

Если $a_n = 0$ или $\Delta_{n-1} = 0$ при $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, ..., то система находится на границе устойчивости, причем при $a_n = 0$ − граница апериодической устойчивости (один из корней равен нулю); при $a_{n-1} = 0$ − граница колебательной устойчивости (имеются два комплексно-сопряженных корня).

Главный определитель Гурвица строят из коэффициентов характеристического уравнения по следующему правилу: по главной диагонали определителя слева направо выписывают все коэффициенты характеристического уравнения от a_{n-1} до a_1 в порядке возрастания индексов. Столбцы вверх от главной диагонали дополняют коэффициентами характеристического уравнения с последовательно убывающими индексами, а столбцы вниз – коэффициентами с последовательно возрастающими индексами. На место коэффициентов с индексами больше n и меньше нуля проставляют нули.

$$\begin{array}{ccccccccc}
a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \cdots & a_{n-(k+1)} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \cdots & a_{n-2k} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
0 & a_{n-1} & a_{n-3} & \cdots & a_{n-(k-1)} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\
\vdots & \vdots & \cdots & \ddots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & & & & a_{n-k} & & & & 0 \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{2k-2} & \cdots & a_2 & a_0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{2k-1} & \cdots & a_3 & a_1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & \cdots & a_{2k} & \cdots & a_4 & a_2 & a_0
\end{array}$$

, где k=1, 2, 3, …, n.

Отчеркивая в главном определителе Гурвица диагональные миноры, получим определители Гурвица низшего порядка.

Номер определителя определяется номером коэффициента по диагонали.

По этому критерию можно определить критическое значение параметра, при котором система находится на границе устойчивости. Для этого необходимо определитель, содержащий данный параметр, приравнять к 0 и решить полученное уравнение.

2.2 Частотные критерии устойчивости

Частотные критерии устойчивости позволяют судить об устойчивости систем автоматического управления по виду их частотных характеристик. Эти критерии позволяют исследовать устойчивость систем высокого порядка и имеют простую геометрическую интерпретацию.

Критерий Михайлова

Рассматривается характеристический полином:

$$D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + ... + a_1 p + a_0 . \tag{2.3}$$

Замена p на $j\omega$, приводит к комплексному полиному, называемому функцией Михайлова или характеристическим вектором:

$$D(j\omega) = a_n (j\omega)^n + a_{n-1} (j\omega)^{n-1} + ... + a_1 (j\omega) + a_0 = \mathrm{Re}(\omega) + j\,\mathrm{Im}(\omega) \tag{2.4}$$

где $\operatorname{Re}(\omega) = a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 - \ldots$;

$\operatorname{Im}(\omega) = \omega\left(a_{n-1} - a_{n-3}\omega^2 + a_{n-5}\omega^4 - \ldots\right)$

При изменении частоты конец вектора $D(j\omega)$ будет описывать некоторую кривую в комплексной плоскости, которая называется годографом Михайлова или годографом характеристического вектора.

Согласно критерию Михайлова, для того, чтобы система автоматического управления была устойчива, необходимо и достаточно, чтобы годограф характеристического вектора при изменении частоты от 0 до ∞, начинаясь при ω = 0 на вещественной положительной полуоси, обходил только против часовой стрелки последовательно n квадрантов координатной плоскости, где n – порядок характеристического уравнения, не менял порядка следования и не проходил через 0. Годограф при ω = 0 начинается на положительном отрезке вещественной оси на расстоянии a_0 от начала координат, а при $\omega \to \infty$, уходит в бесконечность в том квадранте, каков порядок характеристического уравнения.

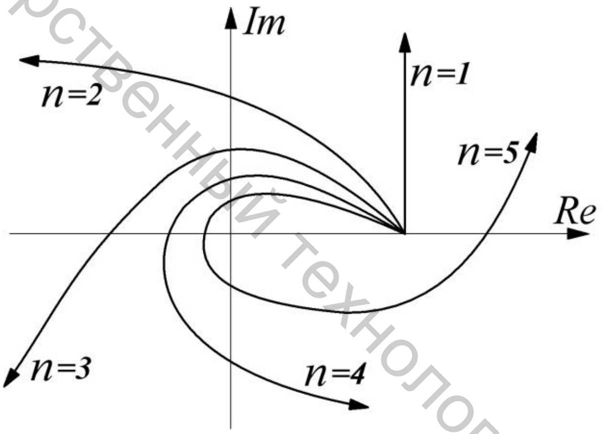


Рисунок 2.1 – Годографы Михайлова для устойчивых систем:

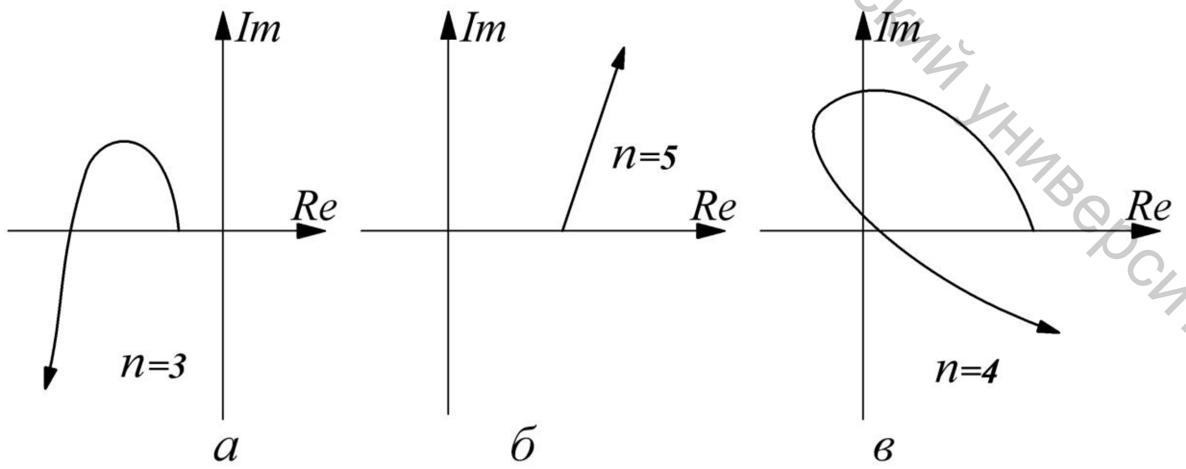


Рисунок 2.2 – Годографы Михайлова для неустойчивых систем:
а – начинается на отрицательной действительной полуоси; *б* – не обходит *n*-квадрантов координатной плоскости; *в* – не охватывает начало координат

Критерий Найквиста

Этот критерий позволяет судить об устойчивости замкнутой системы по виду АФЧ разомкнутой системы.

Для определения устойчивости записывают передаточную функцию системы в разомкнутом состоянии, заменяют оператор p на $j\omega$, и по выражению комплексного коэффициента передачи, изменяя частоту $0 \le \omega \le \infty$, строится траектория движения конца вектора $W_{раз}(j\omega)$, т. е. АФЧХ системы. Вид АФЧХ зависит от того, устойчива ли система в разомкнутом состоянии и от астатизма системы.

Для статических систем, при $\omega = 0$, АФЧХ начинается на положительном отрезке вещественной оси на расстоянии $K_{сист}$ от начала координат, с увеличением частоты, вектор движется по часовой стрелке, и при $\omega \to \infty$ $W_{раз}(j\omega) \to 0$. Если АФЧХ при этом не охватывает точку с координатами $(-1;0j)$, то система в замкнутом состоянии будет устойчива.

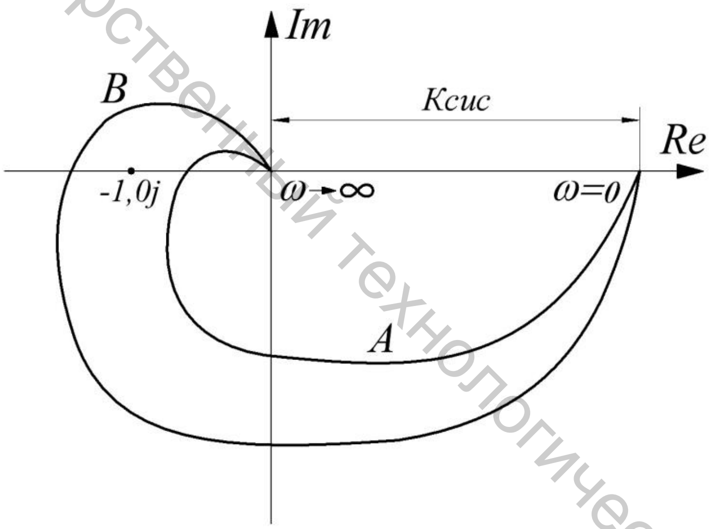


Рисунок 2.3 – АФЧХ статической системы (А – устойчива, В – неустойчива)

Нейтральная (астатическая) система будет устойчива в замкнутом состоянии, если ее АФЧХ в разомкнутом состоянии, при дополнении ее дугой бесконечного радиуса до положительного отрезка вещественной оси, не будет охватывать точку с координатами $(-1;0j)$. В системе с астатизмом первого порядка при частоте $\omega = 0$, значение модуля АФЧХ $|W_{раз}(j\omega)| \to \infty$, а величина фазового сдвига $\varphi(\omega = 0) = -\dfrac{\pi}{2} = -90^0$.

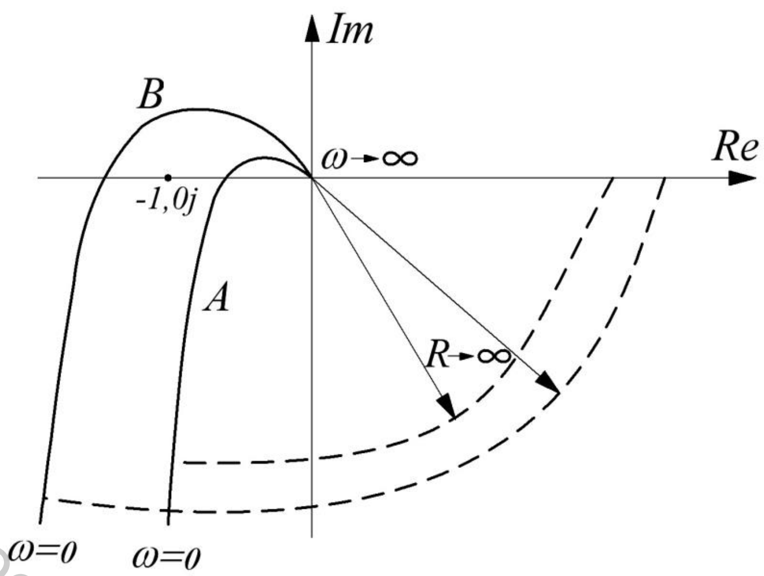


Рисунок 2.4 – АФЧХ астатической системы (А – устойчива, В – неустойчива)

Неустойчивая система в разомкнутом состоянии имеет *m* корней в правой полуплоскости. Такая система будет устойчива в замкнутом состоянии, если её АФЧХ в диапазоне частот $0<\omega<\infty$ охватывает $m/2$ раз точку с координатами (-1;0*j*), или если разность числа переходов АФЧХ сверху вниз и снизу вверх отрезка отрицательной оси от $-\infty$ до -1 равно $m/2$.

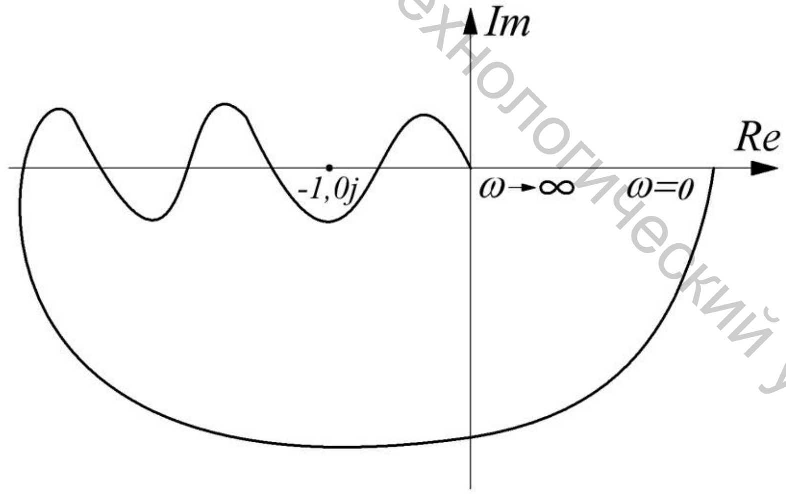


Рисунок 2.5 – АФЧХ неустойчивой в разомкнутом состоянии системы

Анализ устойчивости по логарифмическим амплитудно-частотным характеристикам (ЛАЧХ)

Наиболее удобным и наглядным способом оценки устойчивости является критерий Найквиста, в котором используются логарифмические амплитудно-частотные характеристики (ЛАЧХ) и фазочастотные характеристики (ФЧХ).

Согласно этому критерию, система будет устойчивой в замкнутом состоянии, если ЛАЧХ системы пересекает ось частот раньше, чем ФЧХ пересекает линию $\varphi = -180^0$ или, по-другому, фазовый сдвиг системы на частоте среза (частоте, на которой ЛАЧХ пересекает ось частот) будет больше -180^0.

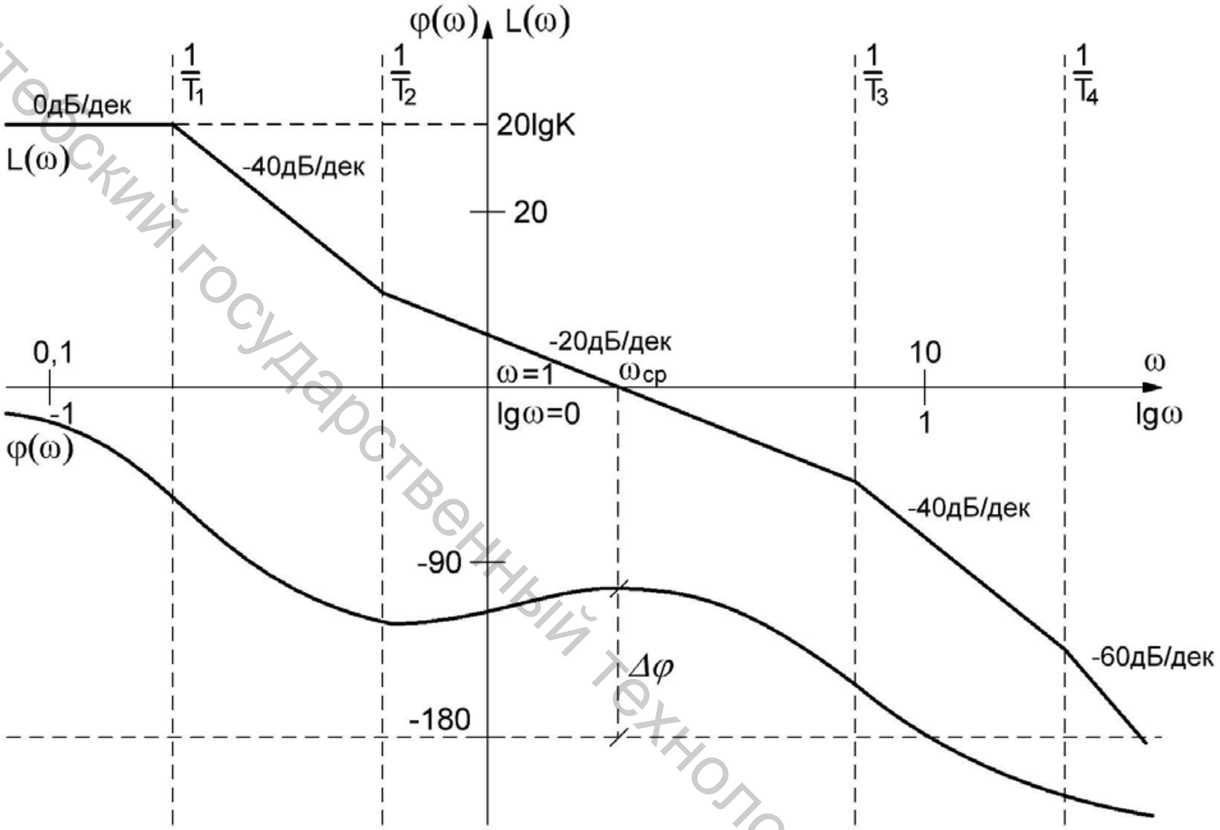


Рисунок 2.6 – ЛАЧХ и ФЧХ устойчивой статической системы

Задание к расчетно-графической работе № 2

Определить устойчивость системы, используя алгебраические и частотные критерии устойчивости. Определить критический коэффициент усиления.

Структурные схемы систем изображены на рисунках 2.7 – 2.11. Параметры систем для различных вариантов представлены в таблице 2.1.

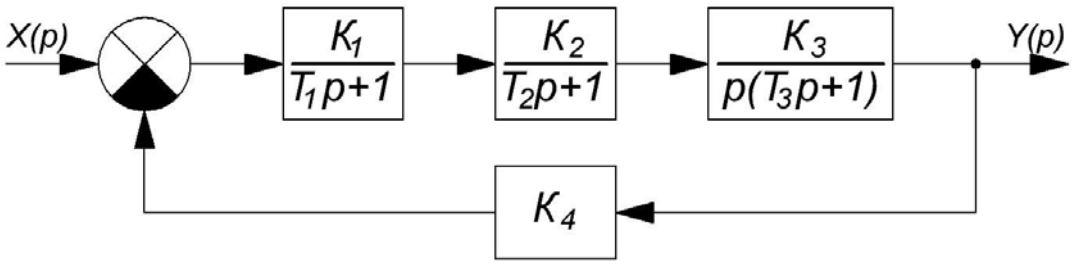


Рисунок 2.7 – Схема № 1

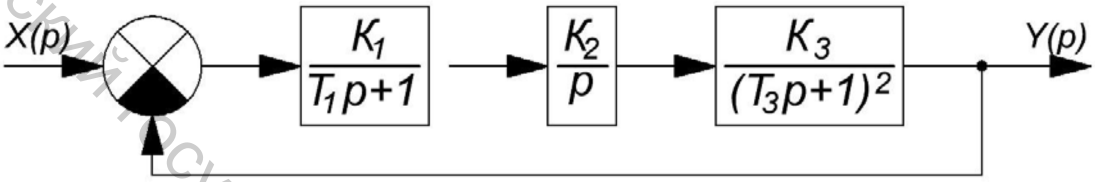


Рисунок 2.8 – Схема № 2

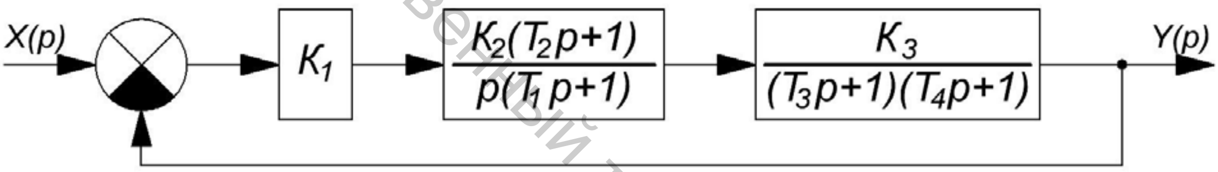


Рисунок 2.9 – Схема № 3

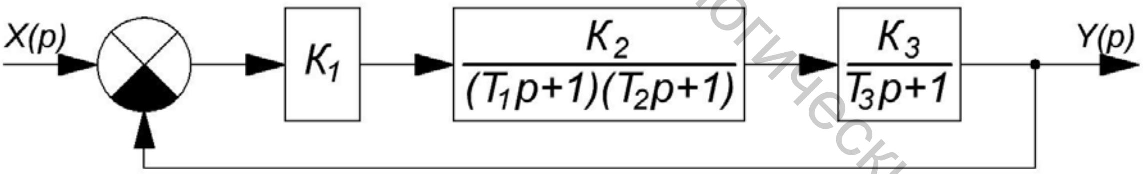


Рисунок 2.10 – Схема № 4

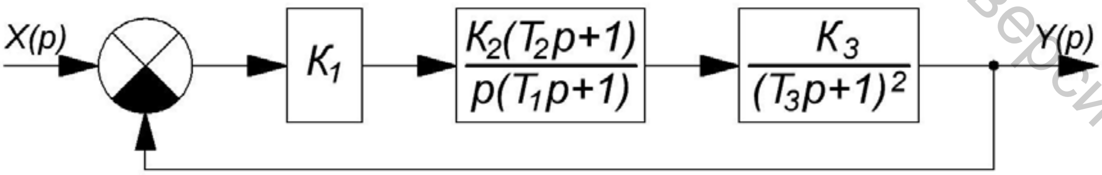


Рисунок 2.11 – Схема № 5

Таблица 2.1 – Варианты заданий

№ варианта	№ схемы	Параметры							
		K_1	K_2	K_3	K_4	T_1	T_2	T_3	T_4
1	1	40	4	0,5	1	0,1	2,5	5	
2	2	12	4	0,5		0,01		1	
3	2	25	5	0,25		0,01		2	
4	3	50	2,5	0,5		0,01	0,05	0,5	1
5	3	32	3	1		0,1	0,05	0,25	2,5
6	4	20	2,5	1		0,01	0,05	1	
7	4	15	4	0,5		0,05	0,1	2	
8	5	36	2,5	1		0,01	0,1	1	
9	5	24	5	0,4		0,5	0,1	2,5	
10	1	15	2	0,8	1,2	0,02	1	4	
11	1	25	1,5	1	5	0,05	1,5	8	
12	1	10	3	1	2,5	1	0,5	2,5	
13	1	12	1,5	2,5	3	0,5	4,5	0,1	
14	1	8	1,5	4,5	2	1	0,5	1	
15	1	14	2	3	1,5	1,5	5	2,5	
16	2	10	2,5	0,5		0,01		0,5	
17	2	12,5	4	1		1		2,5	
18	2	15	1,5	0,8		0,5		2,5	
19	2	8	4,5	1		0,8		0,05	
20	2	40	0,8	1,5		0,1		0,01	
21	2	25	0,8	1		1		0,01	
22	3	14	3	1,5		0,1	0,05	0,02	1
23	3	18	1,5	0,8		1	0,5	0,1	0,05
24	3	20	1,5	0,75		5	1	0,5	0,01
25	3	16	3,5	1		2,5	0,5	0,25	0,05
26	4	25	4	0,8		0,5	0,1	0,01	
27	4	12	3	0,5		1	0,5	0,05	
28	5	15	1,5	2		2,5	0,5	0,1	
29	5	14	2	1		5	0,1	0,5	
30	1	24	2,5	0,2	1,1	0,01	0,5	2	

Пример выполнения расчетно-графической работы № 2

Определить устойчивость системы, заданной следующей структурной схемой (рисунок 2.12).

$$W_1(p)=\frac{K_1}{T_1p+1},\quad W_2(p)=\frac{K_2}{p(T_2p+1)},\quad W_3(p)=\frac{K_3(T_4p+1)}{T_3p+1},\quad W_4(p)=K_4.$$

Параметры звеньев: $K_1=4$, $K_2=11$, $K_3=0{,}3$, $K_4=2$, $T_1=0{,}1c$, $T_2=0{,}05c$, $T_3=40c$, $T_4=2c$.

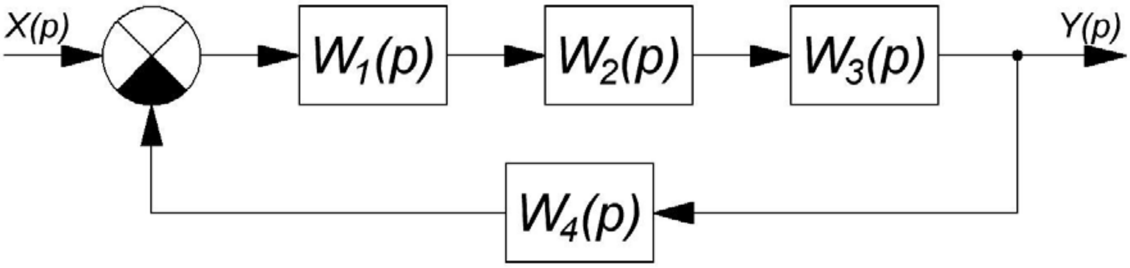


Рисунок 2.12 – Структурная схема САУ

Расчет устойчивости по критерию Гурвица

Запишем передаточную функцию системы в разомкнутом состоянии:

$$W_{раз}(p)=\frac{K_1K_2K_3K_4(T_4p+1)}{p(T_1p+1)(T_2p+1)(T_3p+1)}. \quad (2.5)$$

Эквивалентная передаточная функция системы (в замкнутом состоянии):

$$W_{зам}(p)=\frac{W_{пц}(p)}{1+W_{раз}(p)}=\frac{W_1(p)\cdot W_2(p)\cdot W_3(p)}{1+W_{раз}(p)}=\frac{\dfrac{K_1K_2K_3(T_4p+1)}{p(T_1p+1)(T_2p+1)(T_3p+1)}}{1+\dfrac{K_1K_2K_3K_4(T_4p+1)}{p(T_1p+1)(T_2p+1)(T_3p+1)}}= \quad (2.6)$$

$$=\frac{K_1K_2K_3(T_4p+1)}{p(T_1p+1)(T_2p+1)(T_3p+1)+K_1K_2K_3K_4(T_4p+1)}.$$

Запишем характеристическое уравнение системы, приравняв знаменатель $W_{зам}(p)$ к 0:

$$p(T_1p+1)(T_2p+1)(T_3p+1)+K_1K_2K_3K_4(T_4p+1)=0. \quad 2.7)$$

Раскроем скобки и приведем подобные слагаемые:

$$T_1T_2T_3p^4+(T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3)p^3+(T_1+T_2+T_3)p^2+(K_1K_2K_3K_4T_4+1)p+K_1K_2K_3K_4=0. \quad (2.8)$$

Обозначим:

$a_4=T_1T_2T_3=0{,}2$; $a_3=T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3=6{,}005$; $a_2=T_1+T_2+T_3=40{,}15$;
$a_1=K_1K_2K_3K_4T_4+1=53{,}8$; $a_0=K_1K_2K_3K_4=26{,}4$.

Тогда характеристическое уравнение примет вид:

$$a_4p^4+a_3p^3+a_2p^2+a_1p+a_0=0. \quad (2.9)$$

Так как все коэффициенты характеристического уравнения положительны, то необходимое условие устойчивости по критерию Гурвица выполняется.

Составим матрицу Гурвица:

$$\begin{matrix} a_3 & a_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 & 0 \\ 0 & a_3 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & a_2 & a_0 \end{matrix}.$$

Для того, чтобы система была устойчива, все определители матрицы Гурвица до (n-1)-го порядка включительно должны быть положительны. Так как порядок системы n=4, запишем:

$$\Delta_1 = a_3 = 6{,}005 > 0\,;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_4 & a_2 \end{vmatrix} = a_3 a_2 - a_4 a_1 \approx 230{,}34 > 0\,;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_3 a_2 a_1 - a_3^2 a_0 - a_1^2 a_4 \approx 11440 > 0\,.$$

Вывод: так как все коэффициенты характеристического уравнения положительны и все определители матрицы Гурвица до (n-1)-го порядка включительно положительны, то система устойчива.

Критический коэффициент усиления $K_{кр}$ найдем из условия $\Delta_i > 0$. При этом в выражения для коэффициентов a_i не будем подставлять $K_{сис}$.

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ a_4 & a_2 \end{vmatrix} = a_3 a_2 - a_4 a_1 \approx 6{,}005 \cdot 40{,}15 - 0{,}2 \cdot (K_{сис} + 1) = 240{,}9 - 0{,}4 K_{сис} > 0\,;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_3 & a_1 & 0 \\ a_4 & a_2 & a_0 \\ 0 & a_3 & a_1 \end{vmatrix} = a_3 a_2 a_1 - a_3^2 a_0 - a_1^2 a_4 = 6{,}005 \cdot 40{,}15 \cdot (K_{сис} + 1) - 6{,}005^2 \cdot K_{сис} - (K_{сис} + 1)^2 \cdot 0{,}2 =$$

$$= 240{,}9 + 445{,}34 K_{сис} - 0{,}8 K_{сис}^2 > 0.$$

Решив совместно полученную систему неравенств получим: $0 < K_{сис} < 557{,}21$.

Таким образом, критическое значение коэффициента усиления системы $K_{кр}$=557,21.

Расчет устойчивости по критерию Михайлова

Запишем уравнение характеристического вектора, заменяя в характеристическом уравнении (2.9) p на $j\omega$:

$$D(j\omega) = a_4 (j\omega)^4 + a_3 (j\omega)^3 + a_2 (j\omega)^2 + a_1 (j\omega) + a_0 = a_4\omega^4 - ja_3\omega^3 - a_2\omega^2 + ja_1\omega + a_0\,. \quad (2.10)$$

Выделим в выражении (2.10) вещественную и мнимую части:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}[D(j\omega)] &= a_4\omega^4 - a_2\omega^2 + a_0 \\ \operatorname{Im}[D(j\omega)] &= -a_3\omega^3 + a_1\omega = \omega(a_1 - a_3\omega^2) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Подставим числовые значения

$$\operatorname{Re}\left[D(i\omega)\right]=0{,}2\omega^4-40{,}15\omega^2+26{,}4$$
$$\operatorname{Im}\left[D(i\omega)\right]=\omega\left(53{,}8-6{,}005\omega^2\right)$$

Рассчитаем значения частот, при которых годограф характеристического вектора пересекает оси координат:

$$\operatorname{Re}\left[D(i\omega)\right]=0{,}2\omega^4-40{,}15\omega^2+26{,}4=0;$$

$$\omega_1^2=\frac{40{,}15+\sqrt{(40{,}15)^2-4\cdot 0{,}2\cdot 26{,}4}}{2\cdot 0{,}2}=200{,}09\rightarrow\omega_1=14{,}145c^{-1};$$

$$\omega_2^2=\frac{40{,}15-\sqrt{(40{,}15)^2-4\cdot 0{,}2\cdot 26{,}4}}{2\cdot 0{,}2}=0{,}6597\rightarrow\omega_2=0{,}812c^{-1}.$$

$$\operatorname{Im}\left[D(i\omega)\right]=\omega\left(53{,}8-6{,}005\omega^2\right)=0;$$

$$\omega_3=0c^{-1};\ \omega_4=\sqrt{\frac{53{,}8}{6{,}005}}=2{,}993c^{-1}.$$

Задавая частоту в интервале 0<ω<∞, рассчитываем значения вещественной и мнимой части характеристического вектора (таблица 2.2).

Примечание: заполняя таблицу обязательно рассчитать значения вещественной и мнимой части на частотах, где годограф пересекает оси координат, а также в нескольких точках между этими значениями.

Таблица 2.2 – Данные для построения годографа характеристического вектора

ω	0	0,1	0,5	0,812	1	1,5	2	2,993	4
$\operatorname{Re}\left[D(i\omega)\right]$	26,4	25,999	16,375	0	-13,55	-62,93	-131	-317,2	-564,8
$\operatorname{Im}\left[D(i\omega)\right]$	0	5,374	26,15	40,47	47,80	60,43	59,56	0	-169,1
ω	5	6	8	10	12	14,145	14,3	25	∞
$\operatorname{Re}\left[D(i\omega)\right]$	-852,4	-1160	-1724	-1989	-1608	0	179	53057	ω
$\operatorname{Im}\left[D(i\omega)\right]$	-482	-974	-2644,16	-5467	-9731	-16234	-16790,5	-92483,1	-∞

По полученным данным строим годограф характеристического вектора (рисунок 2.13).

Вывод: так как годограф характеристического вектора при изменении частоты от 0 до ∞, начинаясь при ω = 0 на вещественной положительной полуоси, обходит против часовой стрелки последовательно 4 квадранта координатной плоскости, то система устойчива.

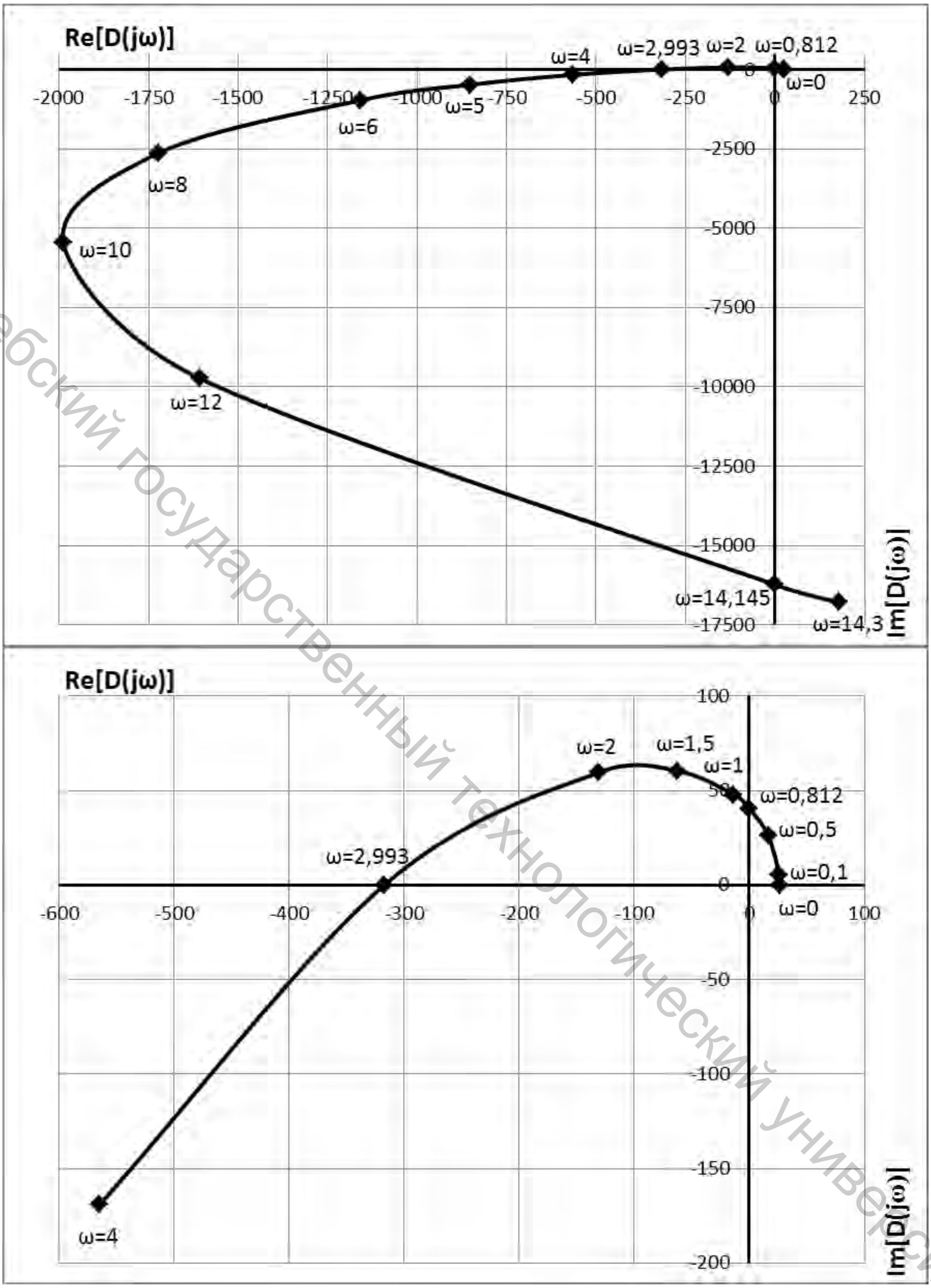


Рисунок 2.13 – Годограф характеристического вектора

Расчет устойчивости по критерию Найквиста

Получим выражение для комплексного коэффициента передачи системы в разомкнутом состоянии:

$$W_{раз}(j\omega)=\frac{K_1K_2K_3K_4(T_4j\omega+1)}{j\omega(T_1j\omega+1)(T_2j\omega+1)(T_3j\omega+1)}=$$

$$=\frac{K_1K_2K_3K_4(T_4j\omega+1)(-j)(-T_1j\omega+1)(-T_2j\omega+1)(-T_3j\omega+1)}{\omega(T_1j\omega+1)(T_2j\omega+1)(T_3j\omega+1)(-T_1j\omega+1)(-T_2j\omega+1)(-T_3j\omega+1)}=$$

$$=\frac{-jK_1K_2K_3K_4\left[-T_1T_2T_3T_4\omega^4-j\omega^3(T_1T_2T_4+T_1T_3T_4+T_2T_3T_4-T_1T_2T_3)\right]}{\omega(T_1^2\omega^2+1)(T_2^2\omega^2+1)(T_3^2\omega^2+1)}+$$

$$+\frac{-jK_1K_2K_3K_4\left[-\omega^2(-T_1T_4-T_2T_4-T_3T_4+T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3)+j\omega(T_4-T_1-T_2-T_3)+1\right]}{\omega(T_1^2\omega^2+1)(T_2^2\omega^2+1)(T_3^2\omega^2+1)}=$$

$$=\frac{K_1K_2K_3K_4\left[jT_1T_2T_3T_4\omega^4-\omega^3(T_1T_2T_4+T_1T_3T_4+T_2T_3T_4-T_1T_2T_3)\right]}{\omega(T_1^2\omega^2+1)(T_2^2\omega^2+1)(T_3^2\omega^2+1)}+ \quad (2.12)$$

$$+\frac{K_1K_2K_3K_4\left[j\omega^2(-T_1T_4-T_2T_4-T_3T_4+T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3)+\omega(T_4-T_1-T_2-T_3)-j\right]}{\omega(T_1^2\omega^2+1)(T_2^2\omega^2+1)(T_3^2\omega^2+1)}$$

$$=\frac{K_1K_2K_3K_4\left[-\omega^3(T_1T_2T_4+T_1T_3T_4+T_2T_3T_4-T_1T_2T_3)+\omega(T_4-T_1-T_2-T_3)\right]}{\omega(T_1^2\omega^2+1)(T_2^2\omega^2+1)(T_3^2\omega^2+1)}+$$

$$+j\frac{K_1K_2K_3K_4\left[T_1T_2T_3T_4\omega^4+\omega^2(-T_1T_4-T_2T_4-T_3T_4+T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3)-1\right]}{\omega(T_1^2\omega^2+1)(T_2^2\omega^2+1)(T_3^2\omega^2+1)}.$$

Выделим вещественную и мнимые части:

$$\mathrm{Re}(\omega)=\frac{K_1K_2K_3K_4\left[-\omega^3(T_1T_2T_4+T_1T_3T_4+T_2T_3T_4-T_1T_2T_3)+\omega(T_4-T_1-T_2-T_3)\right]}{\omega(T_1^2\omega^2+1)(T_2^2\omega^2+1)(T_3^2\omega^2+1)},$$

$$\mathrm{Im}(\omega)=\frac{K_1K_2K_3K_4\left[T_1T_2T_3T_4\omega^4+\omega^2(-T_1T_4-T_2T_4-T_3T_4+T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3)-1\right]}{\omega(T_1^2\omega^2+1)(T_2^2\omega^2+1)(T_3^2\omega^2+1)}. \quad (2.13)$$

Подставим числовые значения:

$$\mathrm{Re}(\omega)=-\frac{26{,}4(11{,}81\omega^2+38{,}15)}{(0{,}01\omega^2+1)(0{,}0025\omega^2+1)(1600\omega^2+1)};$$

$$\mathrm{Im}(\omega)=\frac{26{,}4(0{,}4\omega^4-74{,}295\omega^2-1)}{\omega(0{,}01\omega^2+1)(0{,}0025\omega^2+1)(1600\omega^2+1)}.$$

Рассчитаем значения частот, при которых АФЧХ системы в разомкнутом состоянии пересекает оси координат:

$$\mathrm{Re}(\omega)=-\frac{26{,}4(11{,}81\omega^2+38{,}15)}{(0{,}01\omega^2+1)(0{,}0025\omega^2+1)(1600\omega^2+1)}=0;$$

$$11{,}81\omega^2+38{,}15=0.$$

Уравнение не имеет корней.

$$\mathrm{Im}(\omega)=\frac{26{,}4(0{,}4\omega^4-74{,}295\omega^2-1)}{\omega(0{,}01\omega^2+1)(0{,}0025\omega^2+1)(1600\omega^2+1)}=0;$$

$$0{,}4\omega^4-74{,}295\omega^2-1=0;$$

$$\omega_1^2 = \frac{74,295 + \sqrt{(74,295)^2 + 4 \cdot 0,4}}{2 \cdot 0,4} = 185,75 \rightarrow \omega_1 = 13,63 c^{-1};$$

$$\omega_2^2 = \frac{74,295 - \sqrt{(74,295)^2 + 4 \cdot 0,4}}{2 \cdot 0,4} < 0 .$$

Задавая частоту в интервале 0<ω<∞, рассчитываем значения вещественной и мнимой части АФЧХ системы в разомкнутом состоянии (таблица 2.3).

Примечание: заполняя таблицу, обязательно рассчитать значения вещественной и мнимой части на частотах, где АФЧХ пересекает оси координат, а также в нескольких точках между этими значениями.

По полученным данным строим годограф характеристического вектора (рисунок 2.14).

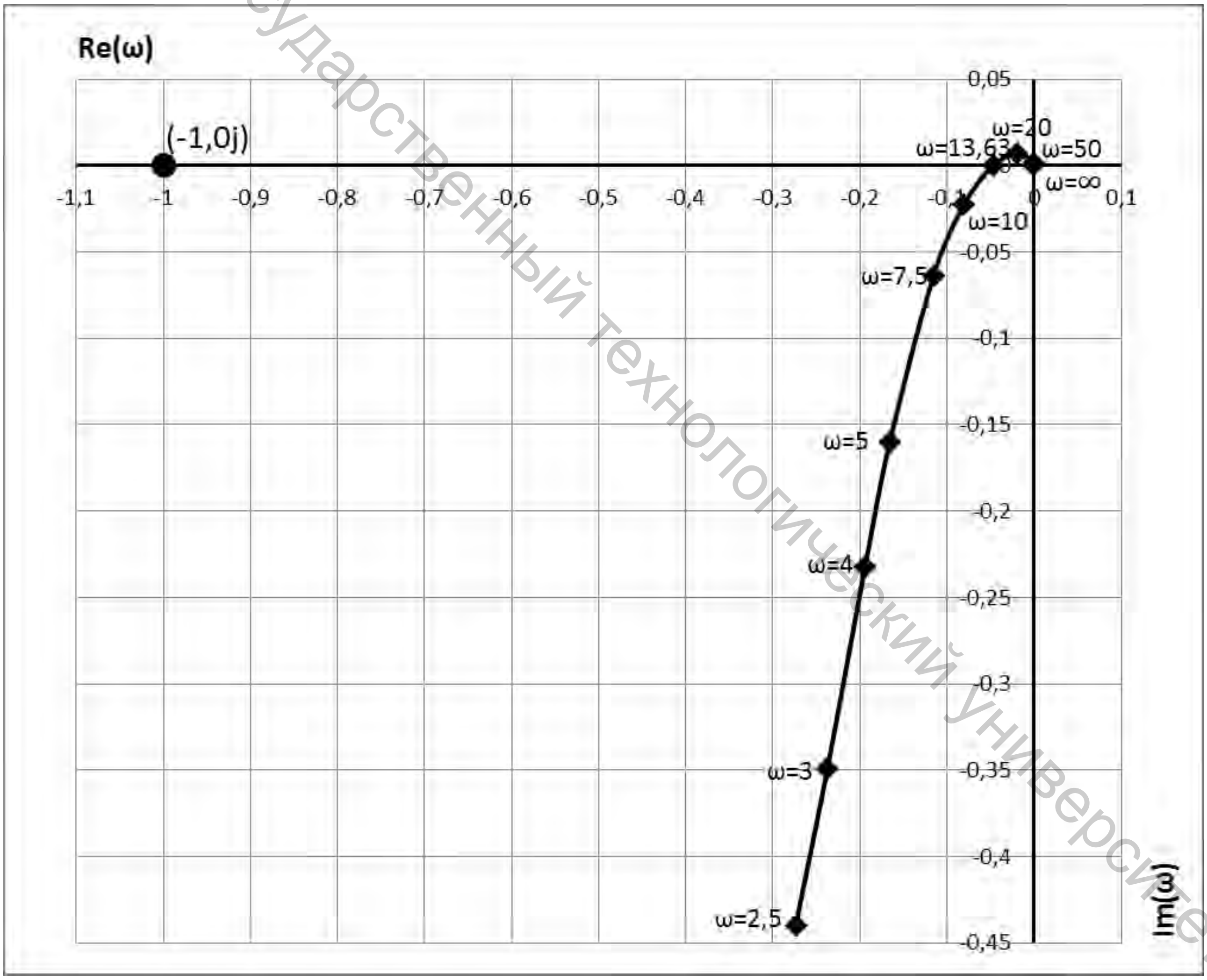


Рисунок 2.14 – АФЧХ системы в разомкнутом состоянии

Таблица 2.3 – Данные для построения АФЧХ системы в разомкнутом состоянии

ω	0	1	2	2,5	3	4	5
$Re(\omega)$	-1007,16	-0,814	-0,335	-0,274	-0,238	-0,194	-0,166
$Im(\omega)$	-∞	-1,220	-0,573	-0,440	-0,349	-0,232	-0,160
ω	7,5	10	13,63	20	50	100	∞
$Re(\omega)$	-0,116	-0,080	-0,047	-0,020	-0,001	-0,000074	0
$Im(\omega)$	-0,064	-0,023	0	0,007	0,0016	0,00025	0

Вывод: система астатическая. Ее АФЧХ в разомкнутом состоянии, при дополнении ее дугой бесконечного радиуса до положительного отрезка вещественной оси, не охватывает точку с координатами $(-1;0j)$. Следовательно, система устойчива.

Расчет устойчивости по ЛАЧХ и ФЧХ

Для построения ЛАЧХ системы рассчитаем 20lg$K_{сис}$ и частоты сопряжения звеньев:

$$20\lg K_{сис} = 20\lg(K_1K_2K_3K_4) = 20\lg(4\cdot 11\cdot 0{,}3\cdot 2) = 28{,}4\,;$$

$$\omega_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{1}{0{,}1} = 10 \rightarrow \lg\omega_1 = \lg 10 = 1\,;$$

$$\omega_2 = \frac{1}{T_2} = \frac{1}{0{,}05} = 20 \rightarrow \lg\omega_2 = \lg 20 = 1{,}3\,;$$

$$\omega_3 = \frac{1}{T_3} = \frac{1}{40} = 0{,}025 \rightarrow \lg\omega_3 = \lg 0{,}025 = -1{,}6\,;$$

$$\omega_4 = \frac{1}{T_4} = \frac{1}{2} = 0{,}5 \rightarrow \lg\omega_4 = \lg 0{,}5 = -0{,}3\,.$$

Запишем уравнение для ФЧХ:

$$\varphi(\omega) = -90^\circ - arctg(\omega T_1) - arctg(\omega T_2) - arctg(\omega T_3) + arctg(\omega T_4) \qquad (2.14)$$

Подставим числовые значения:

$$\varphi(\omega) = -90^\circ - arctg(0{,}1\omega) - arctg(0{,}05\omega) - arctg(40\omega) + arctg(2\omega)$$

Таблица 2.4 – Данные для построения ФЧХ

ω	0	0,01	0,02	0,025	0,05	0,1	0,2	0,5
$\lg(\omega)$	-∞	-2	-1,7	-1,6	-1,3	-1	-0,7	-0,3
$\varphi(\omega)$	-90	-110,74	-126,54	-132,35	-148,15	-155,51	-152,79	-136,43
ω	1	2	5	10	20	50	100	∞
$\lg(\omega)$	0	0,3	0,7	1	1,3	1,7	2	∞
$\varphi(\omega)$	-123,71	-120,34	-136,03	-164,28	-199,79	-237,43	-253,25	-270

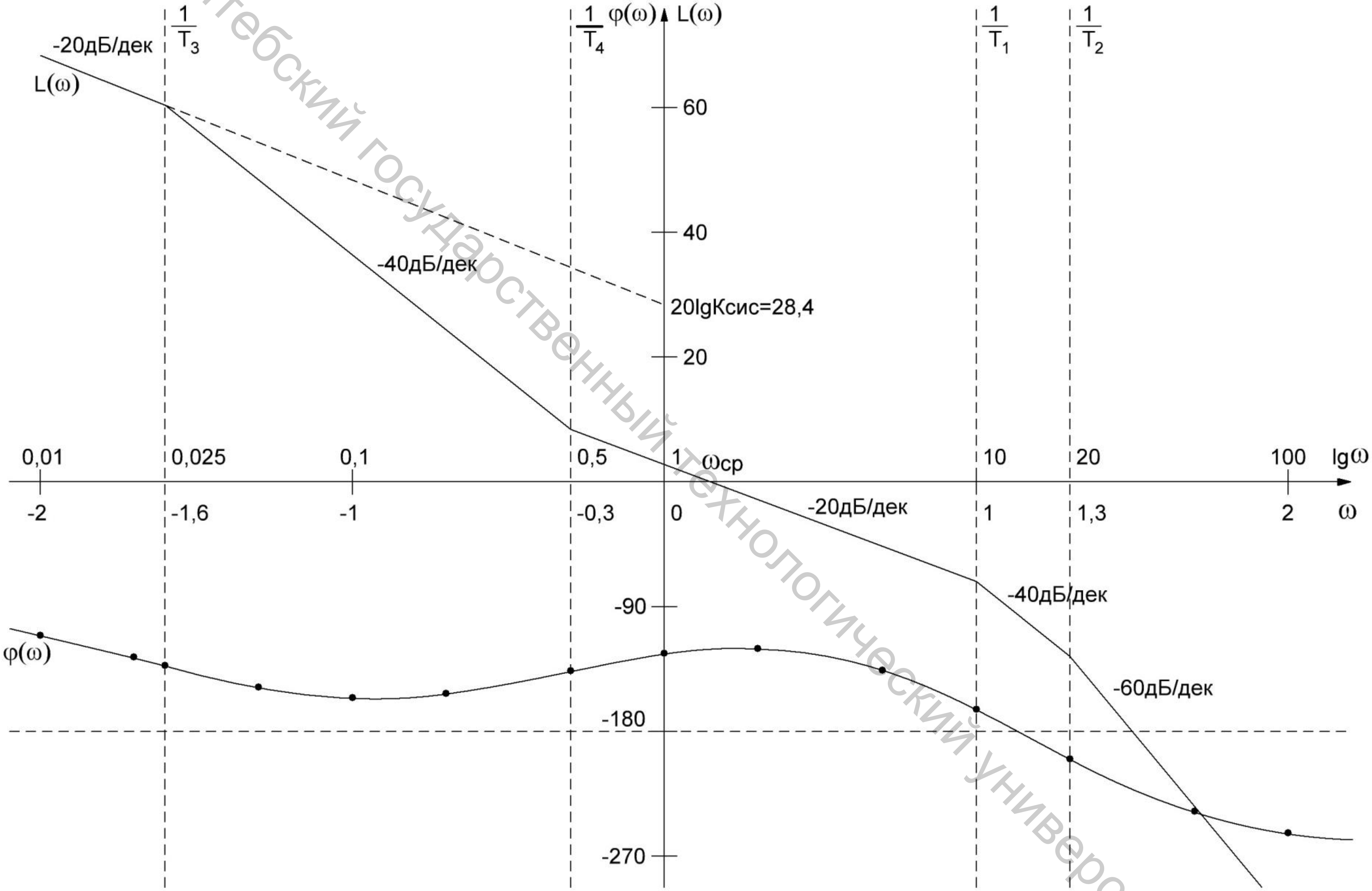


Рисунок 2.15 – ЛАЧХ и ФЧХ системы

Вывод: так как ЛАЧХ пересекает ось частот раньше, чем ФЧХ линию -180°, то система устойчива.

3 РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА № 3

3.1 Метод фазовой плоскости

Метод фазовой плоскости (ФП) используется для исследования динамики и устойчивости систем второго порядка как линейных, так нелинейных с любым типом нелинейного элемента.

Состояние любой системы n-го порядка в конкретный момент времени может быть охарактеризовано значениями ее выходной координаты и $n-1$ ее производных в n-мерном пространстве. Если в конкретный момент времени по n осям координат отложить выходную переменную или ее отклонение и производные, то получится точка в пространстве, которую называют изображающей точкой. Это пространство называется фазовым. Если состояние системы меняется с течением времени, то изображающая точка перемещается в фазовом пространстве и траектория движения изображающей точки называется фазовой траекторией. Фазовые траектории в пространстве не пересекаются. Каждым начальным условиям соответствует своя фазовая траектория. Если система 2-го порядка, то фазовое пространство превращается в фазовую плоскость.

Фазовая траектория (ФТ) – траектория движения изображающей точки на плоскости с координатами: ось X – выходная координата системы, ось $У$ – скорость изменения выходной координаты $\left(\frac{dx}{dt}\right)$. Совокупность ФТ для различных начальных условий и особых точек (точек равновесия) называют *фазовым портретом* системы. Он дает возможность оценить поведение системы и устойчивость «в большом», «в малом» и в целом.

Уравнения ФТ получают из системы уравнений первого порядка, разрешенных относительно первых производных:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx}{dt} = Y = \dot{x} = F_1(x,y)\\ \frac{dy}{dt} = \dot{Y} = \ddot{x} = F_2(x,y)\end{aligned}\right\} \to \frac{\dfrac{dy}{dt} = F_2(x,y)}{\dfrac{dx}{dt} = F_1(x,y)} = \frac{dy}{dx} = \frac{F_2(x,y)}{F_1(x,y)} \tag{3.1}$$

$$dy = \frac{F_2(x,y)}{F_1(x,y)} \cdot dx \tag{3.2}$$

Интегрируя (3.1), получают уравнение ФТ:

$$\int dy = \int \frac{F_2(x,y)}{F_1(x,y)} dx \tag{3.3}$$

Для устойчивой системы ФТ представляют собой закручивающиеся логарифмические спирали; если в системе возникают незатухающие колебания, то ФТ, соответствующая этому режиму, замкнута (предельный цикл); если колебания расходятся, то логарифмическая спираль раскручивается, если колебания затухают – логарифмическая спираль закручивается.

При исследовании свободного движения необходимо задать начальное положение изображающей точки (x_0, y_0), при устойчивой системе ФТ стремится:

а) к началу координат ($x = y = 0$) или зоне нечувствительности (при наличии соответствующего НЭ);

б) предельному циклу – если возникает режим незатухающих автоколебаний.

При исследовании вынужденного движения $(x_{вх}(t) = x_0 \cdot 1(t))$ начальное положение изображающей точки может быть любое, а ФТ заканчивается в точке с координатами $X_K = X_0 \mp \Delta X$, $Y_K = 0$; где ΔX – некоторое отклонение, обусловленное наличием зоны нечувствительности. При наличии незатухающих колебаний – ФТ – предельный цикл, смещенный на координату X_0.

3.2 Построение фазовых траекторий релейных систем методом сшивания решений

Для фазовых портретов релейных систем, содержащих нелинейные элементы с кусочно-линейными статическими характеристики, характерно наличие линий переключения, которыми фазовая плоскость разделяется на ряд областей с различными уравнениями фазовых траекторий. Смена уравнений происходит на линии переключения. При этом начальные значения переменных на каждом участке определяются через их конечные значения на предыдущем участке. Линии переключения характеризуются точками излома нелинейных характеристик.

На рисунках 3.2 – 3.6 представлены фазовые траектории для системы, структурная схема которой изображена на рисунке 3.1. В таблице 3.1 представлены статические характеристики типовых нелинейных элементов

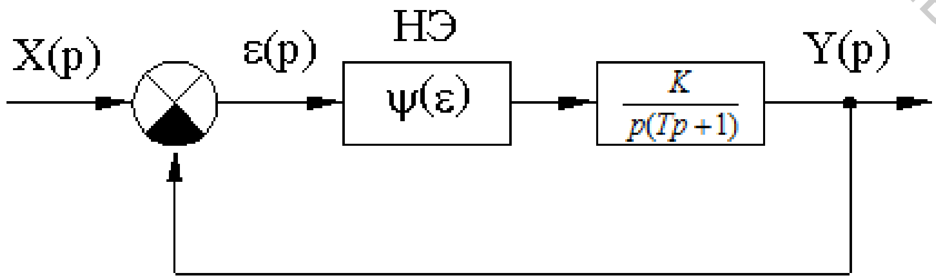
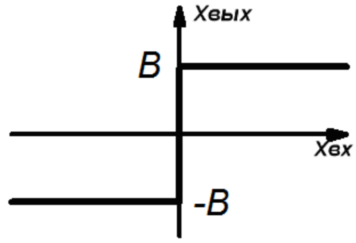
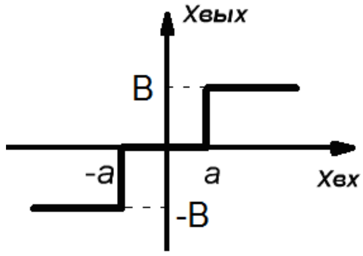
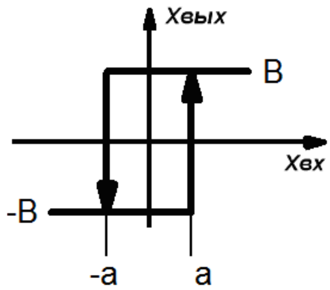
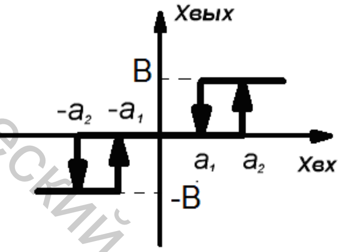
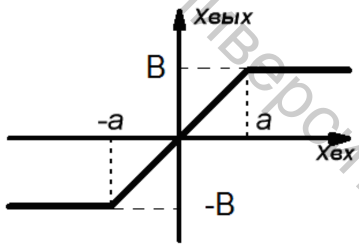


Рисунок 3.1 – Структурная схема рассматриваемой системы

Таблица 3.1 – Статические характеристик типовых нелинейных элементов

<table>
<tr><th>Нелинейный элемент</th><th>Уравнение элемента</th><th>Статическая характеристика</th></tr>
<tr><td>Идеальное двухпозиционное реле</td><td>$$\begin{cases} x_{вых} = +B, если\, x_{вх} > 0 \\ x_{вых} = -B, если\, x_{вх} < 0 \end{cases}$$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Идеальное трехпозиционное реле</td><td>$$\begin{cases} x_{вых} = +B, если\, x_{вх} > a \\ x_{вых} = 0, если -a < x_{вх} < a \\ x_{вых} = -B, если\, x_{вх} < -a \end{cases}$$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Двухпозиционное реле с гистерезисом</td><td>$$\begin{cases} x_{вых} = +B, если\, x_{вх} > a \\ \qquad если -a < x_{вх} < a\ и\ \dot{x}_{вх} < 0 \\ x_{вых} = -B, если\, x_{вх} < 0 \\ \qquad если -a < x_{вх} < a\ и\ \dot{x}_{вх} > 0 \end{cases}$$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Трехпозиционное реле с гистерезисом</td><td>$$\begin{cases} x_{вых} = +B, если\, x_{вх} > a_2 \\ \qquad если\ a_1 < x_{вх} < a_2\ и\ \dot{x}_{вх} < 0 \\ x_{вых} = 0, если -a_1 < x_{вх} < a_1 \\ \qquad если\ a_1 < x_{вх} < a_2\ и\ \dot{x}_{вх} > 0 \\ \qquad если -a_2 < x_{вх} < -a_1\ и\ \dot{x}_{вх} < 0 \\ x_{вых} = -B, если\ x_{вх} < -a_2 \\ \qquad если -a_2 < x_{вх} < -a_1\ и\, \dot{x}_{вх} > 0 \end{cases}$$</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Усилитель с ограничением</td><td>$$\begin{cases} x_{вых} = +B, если\ x_{вх} > a \\ x_{вых} = K_{НЭ} x_{вх}, если\ -a < x_{вх} < a \\ x_{вых} = -B, если\ x_{вх} < -a \end{cases}$$
$K_{НЭ} = \dfrac{B}{a}$ – коэффициент усиления линейного участка.</td><td>
</td></tr>
</table>

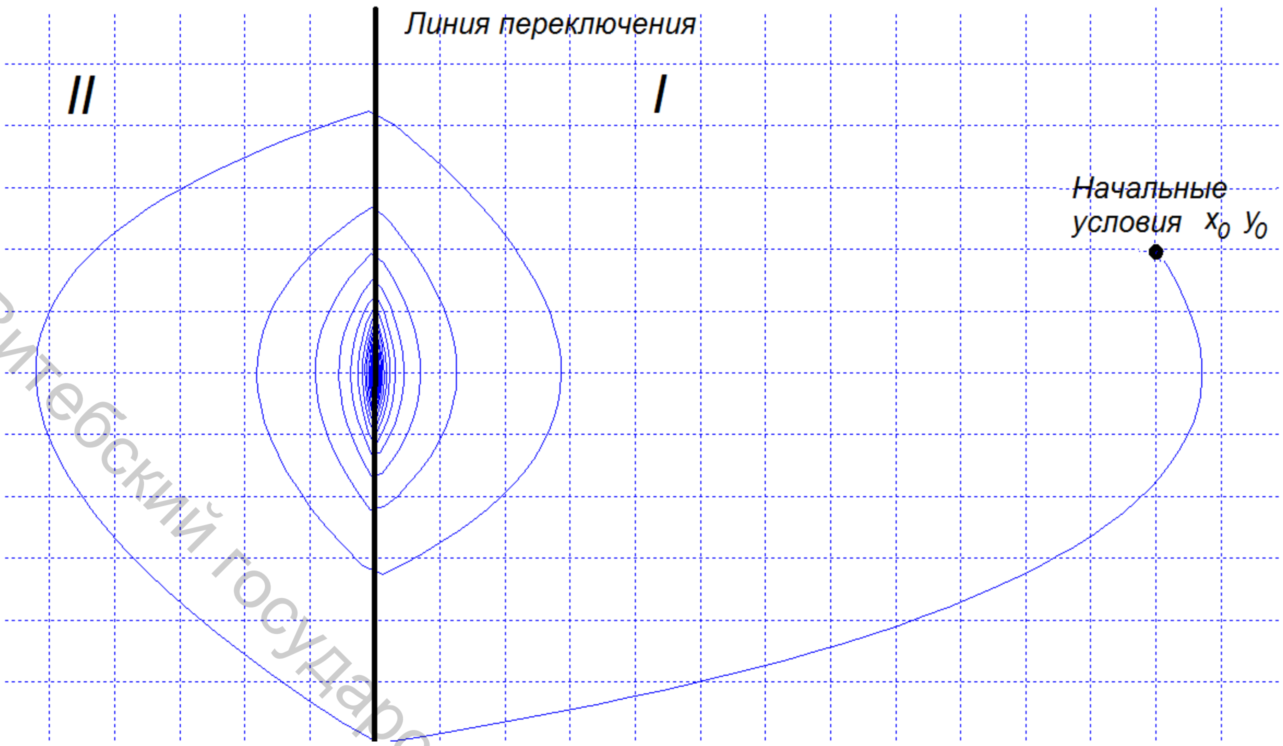


Рисунок 3.2 – Фазовая траектория для идеального двухпозиционного реле

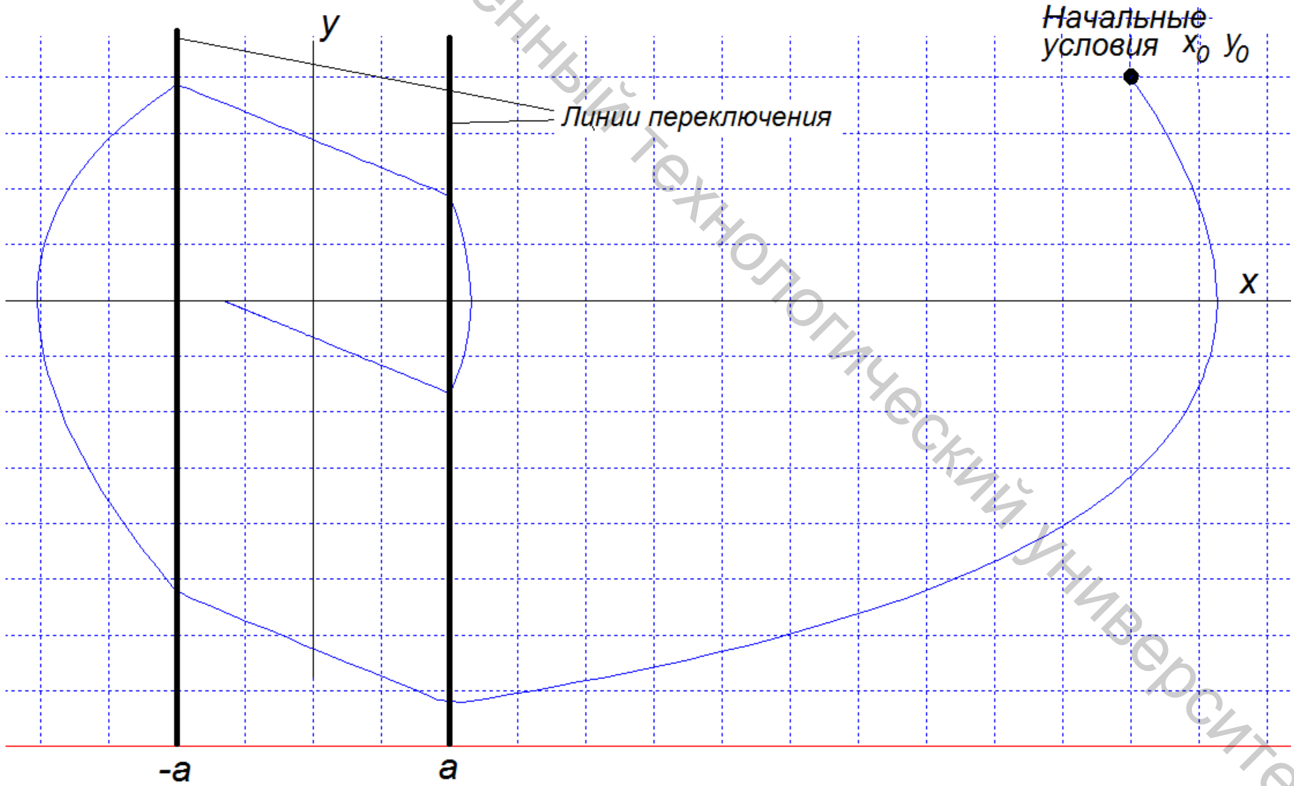


Рисунок 3.3 – Фазовая траектория для идеального трехпозиционного реле.

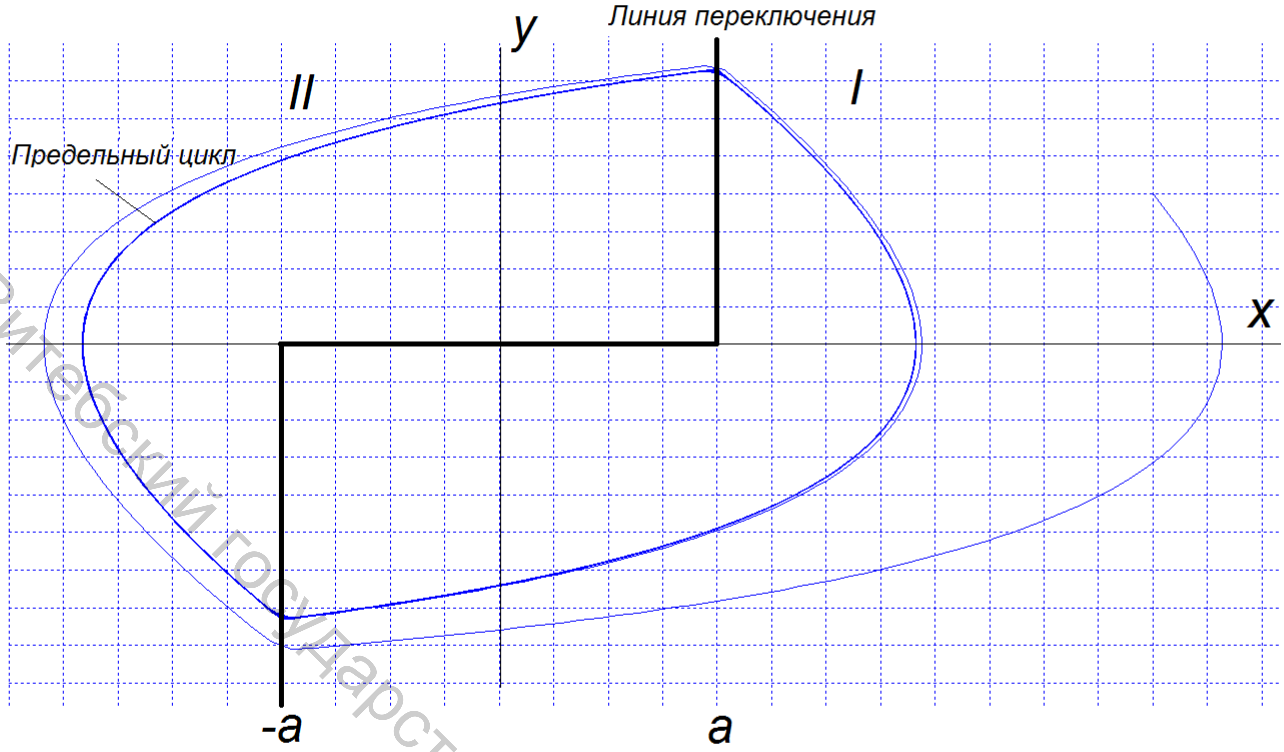


Рисунок 3.4 – Фазовая траектория для двухпозиционное реле с гистерезисом.

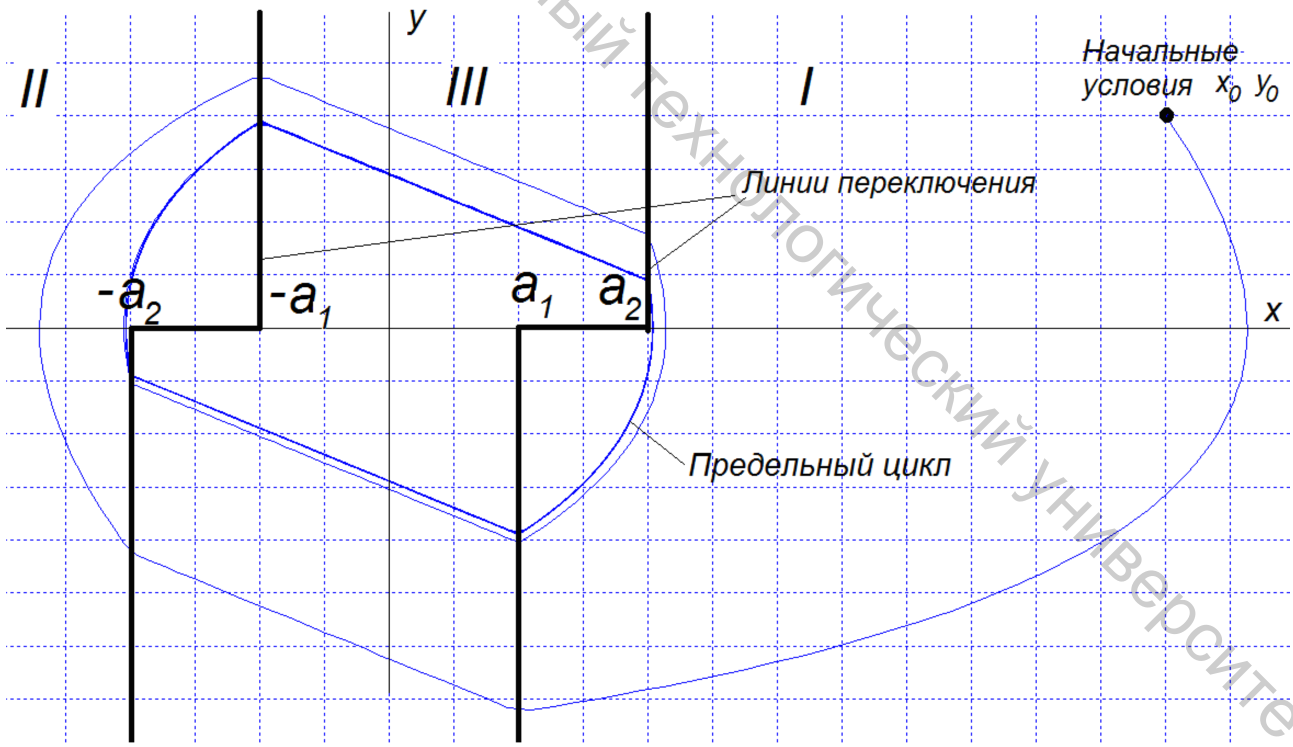


Рисунок 3.5 – Фазовая траектория для трехпозиционного реле с гистерезисом.

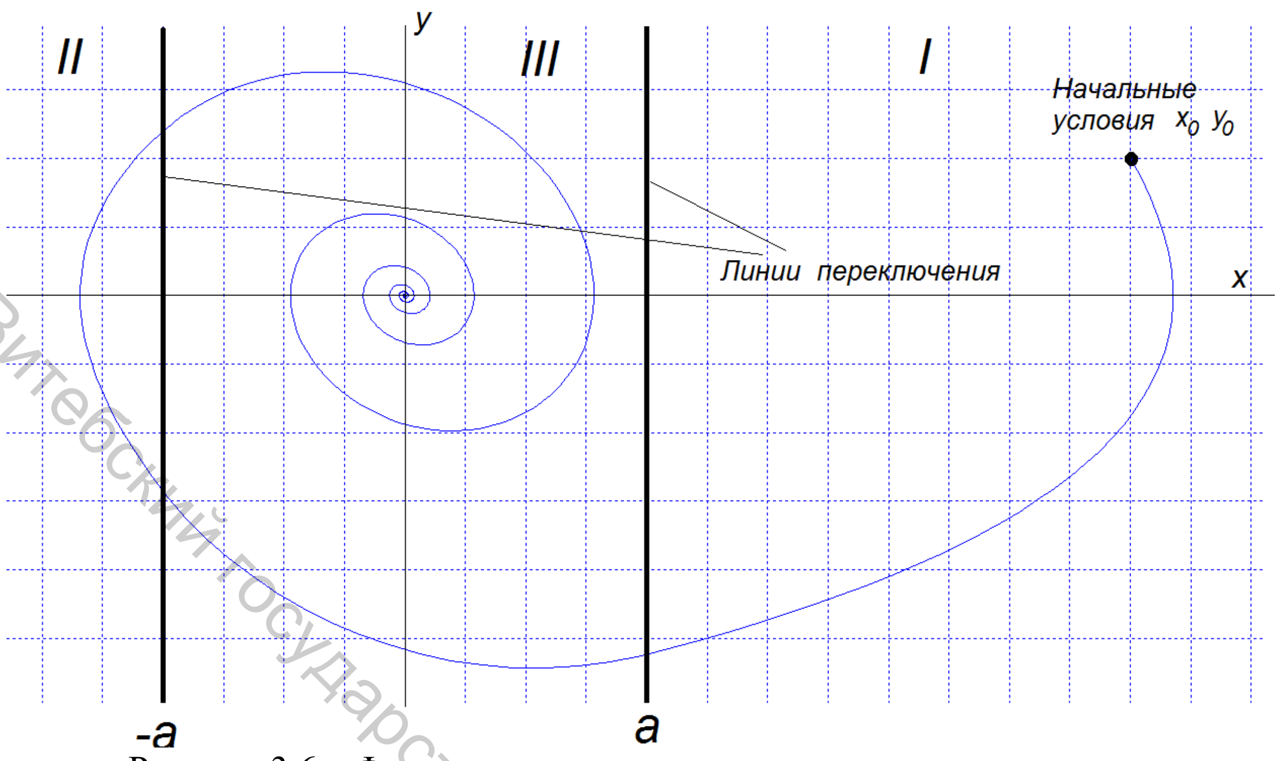


Рисунок 3.6 – Фазовая траектория для усилителя с ограничением

Задание к расчетно-графической работе № 3

Рассчитать и построить фазовый портрет системы с кусочно-линейными нелинейностями. Структурная схема системы представлена на рисунке 3.7.

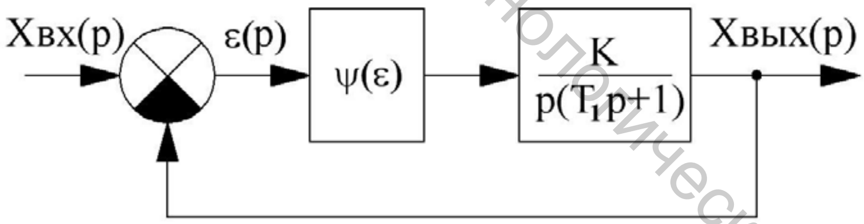
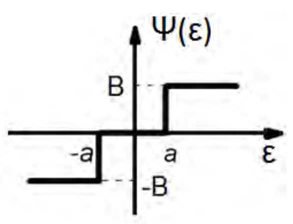
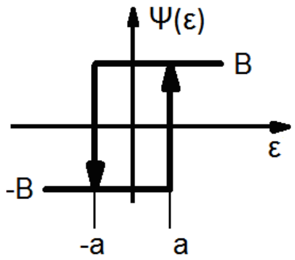
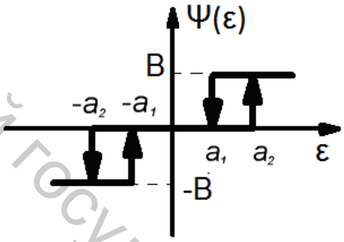
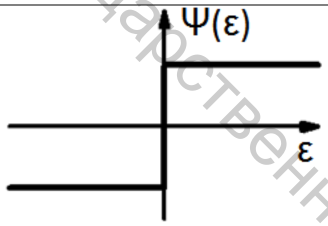


Рисунок 3.7 – Структурная схема САУ

Таблица 3.2 – Варианты заданий

№ варианта	Вид нелинейного элемента $\Psi(\varepsilon)$	B	$a=a_1$	a_2	K	T_1
1	2	3	4	5	6	7
1		1	0,5	-	5	0,1
2		2	1	-	10	1
3		1	1,5	-	5	1
4		2	1	-	12,5	0,5
5		1	0,8	-	18	0,75
6		2	0,5	-	8,5	1,25
7		1	0,75	-	10	2,5
8		2	0,6	-	4,5	0,8

Окончание таблицы 3.2

1	2	3	4	5	6	7
9		1	0,5	-	5	1
10		2	1	-	10	0,5
11		2	0,5	-	8	1
12		1	0,2	-	4,5	0,5
13		1	0,4	-	6	0,25
14		2	0,6	-	2,5	0,75
15		2	0,8	-	5	0,8
16		1	1	-	12,5	1,5
17		1	0,7	1,6	10	0,5
18		1	0,3	0,8	7,5	1,5
19		2	0,5	1	5	2
20		2	0,7	1,4	12	0,8
21		1	0,5	1,5	6	1,25
22		1,5	0,4	1	8	1,5
23		2	0,6	1,5	9	2
24		1	0,8	1,6	7	0,5
25		1	-	-	10	0,5
26		1,5	-	-	8,5	1
27		2	-	-	4,5	1,25
28		1	-	-	5	1,5
29		1	-	-	12	2
30		2	-	-	8	0,5

Пример выполнения расчетно-графической работы № 3

Построить фазовый портрет системы, представленной следующей структурной схемой (рисунок 3.8).

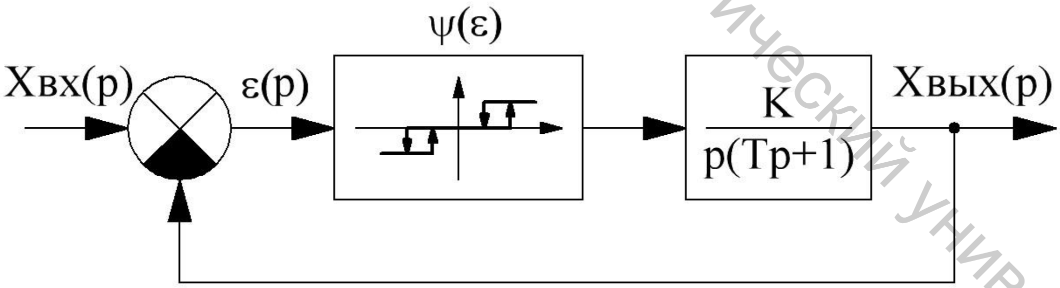


Рисунок 3.8 – Структурная схема САУ

Параметры элементов: B=2, a_1=1, a_2=2, K=10, T=0,75.

Запишем уравнение свободного движения для ошибки:

$$T\frac{d^2\varepsilon(t)}{dt^2}+\frac{d\varepsilon(t)}{dt}+K\cdot\psi(\varepsilon)=0\,. \tag{3.4}$$

Уравнение нелинейного элемента (НЭ):

$$
\begin{cases}
x_{вых} = +B, если\ x_{вх} > a_2 \\
\qquad\qquad если\ \ a_1 < x_{вх} < a_2\ и\ \dot{x}_{вх} < 0 \\
x_{вых} = 0, если - a_1 < x_{вх} < a_1 \\
\qquad\quad если\ \ a_1 < x_{вх} < a_2\ и\ \dot{x}_{вх} > 0 \\
\qquad\quad если - a_2 < x_{вх} < -a_1\ и\ \dot{x}_{вх} < 0 \\
x_{вых} = -B, если\ \ x_{вх} < -a_2 \\
\qquad\qquad если - a_2 < x_{вх} < -a_1\ и\ \dot{x}_{вх} > 0
\end{cases}
\tag{3.5}
$$

Для данного типа НЭ фазовая плоскость разбивается на три области, линии переключения – 2 ломаные.

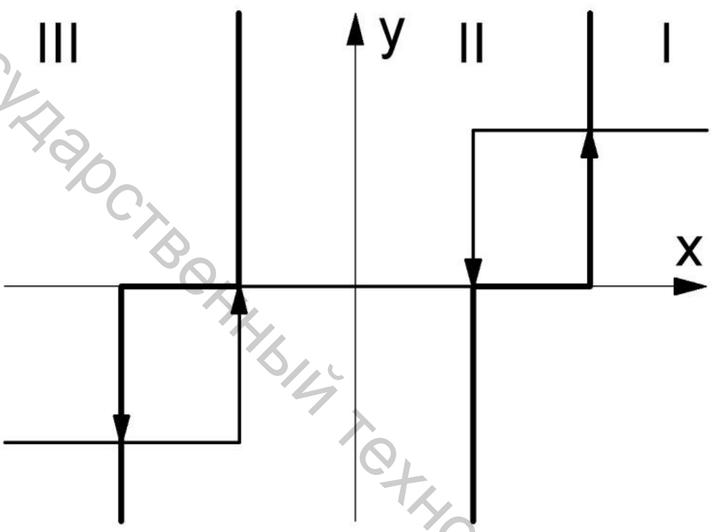


Рисунок 3.9 – Фазовая плоскость для трехпозиционного реле с гистерезисом

Запишем уравнение (3.4) с учетом (3.5) для каждой области:

$$
\begin{gathered}
I:\ T\frac{d^2\varepsilon(t)}{dt^2} + \frac{d\varepsilon(t)}{dt} + K\cdot B = 0\,; \\
II:\ T\frac{d^2\varepsilon(t)}{dt^2} + \frac{d\varepsilon(t)}{dt} = 0\,; \\
III:\ T\frac{d^2\varepsilon(t)}{dt^2} + \frac{d\varepsilon(t)}{dt} - K\cdot B = 0\,.
\end{gathered}
\tag{3.6}
$$

Запишем уравнения (3.6) в форме Коши, введя координаты состояния $x = \varepsilon$, $y = \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{d\varepsilon}{dt}$:

$$
I:\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{-y - KB}{T} \end{cases};\quad
II:\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{-y}{T} \end{cases};\quad
III:\ \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{-y + KB}{T} \end{cases}.
\tag{3.7}
$$

В каждой системе (3.7) исключим время, поделив второе уравнение на первое:

$$\begin{aligned} I: &\ \frac{dy}{dx} = \frac{-y - KB}{Ty}; \\ II: &\ \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{T}; \\ III: &\ \frac{dy}{dx} = \frac{-y + KB}{Ty}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Разделим переменные:

$$\begin{aligned} I: &\ dx = \frac{-Ty}{y + KB} dy; \\ II: &\ dx = -Tdy; \\ III: &\ dx = \frac{Ty}{KB - y} dy. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Проинтегрировав (3.9), получим уравнения для фазовых траекторий для каждой из областей:

$$\begin{aligned} I: &\ x = TKB \ln|y + KB| - Ty + c_1; \\ II: &\ x = -Ty + c_2; \\ III: &\ x = -TKB \ln|KB - y| - Ty + c_3, \end{aligned} \tag{3.10}$$

где c – произвольная постоянная интегрирования, которая определяется начальным положением изображающей точки.

Подставим в эти уравнения численные значения:

$$\begin{aligned} I: &\ x = 15\ln|y + 20| - 0{,}75y + c_1; \\ II: &\ x = -0{,}75y + c_2; \\ III: &\ x = -15\ln|20 - y| - 0{,}75y + c_3. \end{aligned} \tag{3.11}$$

Зададимся начальными условиями x_0=3, y_0=5. Точка с данными координатами лежит в первой области I. Вычислим значение постоянной интегрирования c_1:

$$c_1 = x_0 - 15\ln|y_0 + 20| + 0{,}75y_0 = 3 - 15\ln|5 + 20| + 0{,}75 \cdot 5 = -41{,}53.$$

Тогда уравнение первого отрезка фазовой траектории будет иметь вид:

$$x = 15\ln|y + 20| - 0{,}75y - 41{,}53.$$

Рассчитаем значения координат точек данного отрезка фазовой траектории и занесем их в таблицу 3.3.

В точке с координатами x_1=1, y_1= -9,29 произойдет смена уравнения для фазовой траектории. Данные координаты будут являться начальными условиями для следующего отрезка фазовой траектории. Вычислим значение постоянной интегрирования c_2 на нем:

$$c_2 = x_1 + 0,75 y_1 = 1 + 0,75 \cdot (-9,29) = -5,97 .$$

Уравнение второго отрезка фазовой траектории будет иметь вид:

$$x = -0,75 y - 5,97 .$$

Рассчитаем значения координат точек отрезка фазовой траектории и занесем их в таблицу 3.3.

Следующая смена уравнения для фазовой траектории произойдет в точке с координатами x_2=-2, y_1=-5,29. Вычислим значение постоянной интегрирования c_3:

$$c_3 = x_2 + 15\ln|20 - y_2| + 0,75 y_2 = -2 + \ln|20 + 5,29| + 0,75 \cdot (-5,29) = 42,49 .$$

Уравнение третьего отрезка фазовой траектории будет иметь вид:

$$x = -15\ln|20 - y| - 0,75 y + 42,49 .$$

Рассчитаем значения координат точек отрезка фазовой траектории и занесем их в таблицу 3.3.

Аналогичного проводим дальнейшие вычисления пока фазовая траектория не сойдется к предельному циклу.

Таблица 3.3 – Данные для построения фазовой траектории для начальных условий x_0=3, y_0=5

c_i	Координаты точек фазовой траектории								
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c_1=-41,53	x	3,00	3,14	3,25	3,33	3,38	3,40	3,38	3,32
	y	5,00	4,00	3,00	2,00	1,00	0,00	-1,00	-2,00
	x	3,22	3,06	2,84	2,55	2,19	1,74	1,19	1,00
	y	-3,00	-4,00	-5,00	-6,00	-7,00	-8,00	-9,00	-9,29
c_2=-5,97	x	1,00	-2,00						
	y	-9,29	-5,29						
c_3=42,49	x	-2,00	-2,04	-2,18	-2,29	-2,38	-2,43	-2,45	-2,43
	y	-5,29	-5,00	-4,00	-3,00	-2,00	-1,00	0,00	1,00
	x	-2,37	-2,26	-2,10	-1,88	-1,60	-1,24	-1,00	
	y	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00	7,55	
c_2=4,66	x	-1,00	2,00						
	y	7,55	3,55						
c_1=-42,72	x	2,00	2,06	2,14	2,19	2,21	2,19	2,13	2,02
	y	3,55	3,00	2,00	1,00	0,00	-1,00	-2,00	-3,00
	x	1,86	1,65	1,36	1,00				
	y	-4,00	-5,00	-6,00	-7,00				

Окончание таблицы 3.3

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c_2=-4,25	x	1,00	-2,00						
	y	-7,00	-3,00						
c_3=42,78	x	-2,00	-2,08	-2,14	-2,15	-2,13	-2,07	-1,97	-1,81
	y	-3,00	-2,00	-1,00	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00
	x	-1,59	-1,30	-1,00					
	y	5,00	6,00	6,85					
c_2=4,14	x	-1,00	2,00						
	y	6,85	2,85						
c_1=-42,80	x	2,00	1,99	2,07	2,12	2,14	2,12	2,06	1,95
	y	2,85	3,00	2,00	1,00	0,00	-1,00	-2,00	-3,00
	x	1,79	1,57	1,29	1,00				
	y	-4,00	-5,00	-6,00	-6,82				
c_2=-4,11	x	1,00	-2,00						
	y	-6,82	-2,82						
c_3=42,80	x	-2,00	-2,07	-2,12	-2,14	-2,12	-2,06	-1,95	-1,79
	y	-2,82	-2,00	-1,00	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00
	x	-1,57	-1,29	-1,00					
	y	5,00	6,00	6,81					
c_2=4,11	x	-1,00	2,00						
	y	6,81	2,81						
c_1=-42,80	x	2,00	1,98	2,07	2,12	2,14	2,12	2,05	1,95
	y	2,81	3,00	2,00	1,00	0,00	-1,00	-2,00	-3,00
	x	1,79	1,57	1,29	1,00				
	y	-4,00	-5,00	-6,00	-6,81				

Такие же расчеты проводим для построения фазовой траектории для следующих начальных условий x_0=-2,5, y_0=8 (таблица 3.4).

Таблица 3.4 – Данные для построения фазовой траектории для начальных условий x_0=-2,5, y_0=8

c_i	Координаты точек фазовой траектории								
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c_3=41,48	x	-2,50	-2,70	-2,89	-3,05	-3,19	-3,30	-3,38	-3,43
	y	-8,00	-7,00	-6,00	-5,00	-4,00	-3,00	-2,00	-1,00
	x	-3,45	-3,43	-3,37	-3,27	-3,11	-2,89	-2,60	-2,24
	y	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00	5,00	6,00	7,00
	x	-1,79	-1,24	-1,00					
	y	8,00	9,00	9,37					
c_2=6,03	x	-1,00	2,00						
	y	9,37	5,37						
c_1=-42,48	x	2,00	2,06	2,19	2,31	2,39	2,44	2,46	2,44
	y	5,37	5,00	4,00	3,00	2,00	1,00	0,00	-1,00
	x	2,38	2,27	2,11	1,89	1,61	1,25	1,00	
	y	-2,00	-3,00	-4,00	-5,00	-6,00	-7,00	-7,58	
c_2=-4,68	x	1,00	-2,00						
	y	-7,58	-3,58						

Окончание таблицы 3.4

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
c_3=42,72	*x*	-2,00	-2,06	-2,14	-2,20	-2,21	-2,20	-2,13	-2,03
	y	-3,58	-3,00	-2,00	-1,00	0,00	1,00	2,00	3,00
	x	-1,87	-1,65	-1,36	-1,00	-1,00			
	y	4,00	5,00	6,00	7,00	7,01			
c_2=4,26	*x*	-1,00	2,00						
	y	7,01	3,01						
c_1=-42,78	*x*	2,00	2,00	2,08	2,14	2,15	2,13	2,07	1,97
	y	3,01	3,00	2,00	1,00	0,00	-1,00	-2,00	-3,00
	x	1,81	1,59	1,30	1,00				
	y	-4,00	-5,00	-6,00	-6,86				
c_2=-4,14	*x*	1,00	-2,00						
	y	-6,86	-2,86						
c_3=42,80	*x*	-2,00	-2,07	-2,12	-2,14	-2,12	-2,06	-1,95	-1,79
	y	-2,86	-2,00	-1,00	0,00	1,00	2,00	3,00	4,00
	x	-1,57	-1,29	-1,00					
	y	5,00	6,00	6,82					
c_2=4,11	*x*	-1,00	2,00						
	y	6,82	2,82						
c_1=-42,80	*x*	2,00	2,07	2,12	2,14	2,12	2,06	1,95	1,79
	y	2,82	2,00	1,00	0,00	-1,00	-2,00	-3,00	-4,00
	x	1,57	1,29	1,00					
	y	-5,00	-6,00	-6,81					

По фазовому портрету (рисунок 3.10) видно, что все фазовые траектории сходятся к предельному циклу. Это значит, что в системе устанавливается режим автоколебаний.

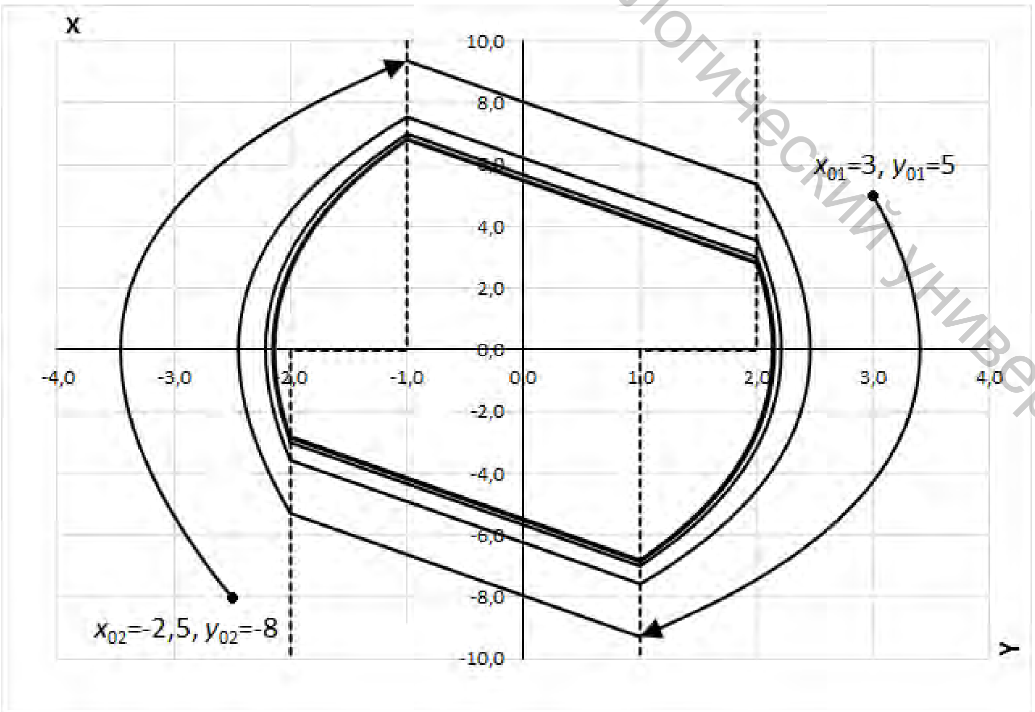


Рисунок 3.10 – Фазовый портрет системы

4 РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКАЯ РАБОТА № 4

4.1 Гармоническая линеаризация нелинейных элементов

Метод гармонической линеаризации нелинейных элементов используется для исследования нелинейных систем с линейной частью выше третьего порядка. В большинстве систем переходной процесс представляет собой затухающие колебания, поэтому на входе нелинейного элемента по главной обратной связи (ГОС) передаётся периодический сигнал с медленно меняющейся амплитудой и при наличии входного сигнала вместе с постоянной составляющей:

$$\varepsilon(t) = x_0 + A\sin(\omega t) \tag{4.1}$$

Будем считать, что на входе нелинейного элемента за некоторый малый начальный промежуток времени амплитуда и частота неизменны или они соответствуют амплитуде и частоте автоколебаний системы. На выходе НЭ получим периодическую функцию, которую можно разложить в ряд Фурье. При исследовании нелинейных систем чаще всего используют только первую гармоническую составляющую, так как в большинстве случаев линейная часть системы является фильтром низких частот.

Изображение выходного сигнала на выходе гармонически линеаризованного НЭ можно представить в виде:

$$X_{выхНЭ}(p) = KX_{вхНЭ}(p) = \left(q(A) + \frac{b(A)}{\omega}p\right)X_{вхНЭ}(p) \tag{4.2}$$

В этом случае при отсутствии постоянной составляющей на входе мы можем вывести следующую передаточную функцию для НЭ:

$$J(A, p) = \frac{X_{выхНЭ}}{X_{вхНЭ}} = q(A) + \frac{b(A)}{\omega}p, \tag{4.3}$$

где q – коэффициент гармонической линеаризации по синусоидальной составляющей, он зависит от амплитуды сигнала на входе НЭ;

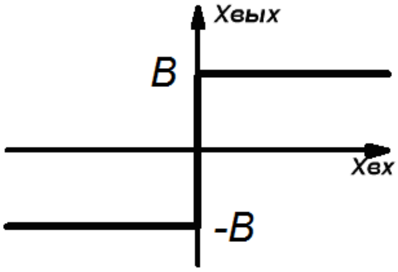
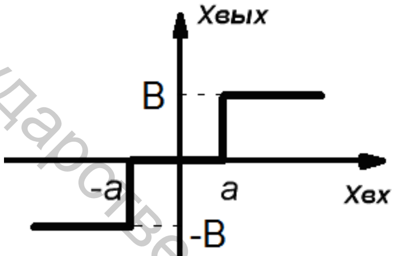
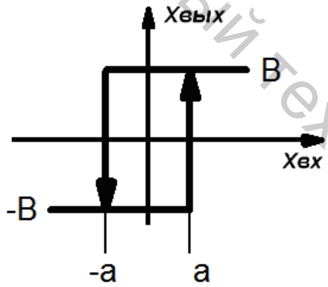
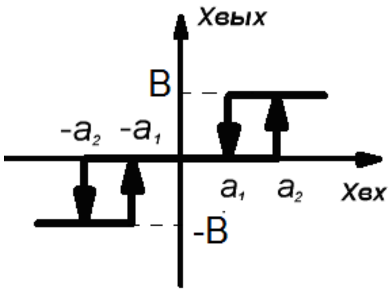
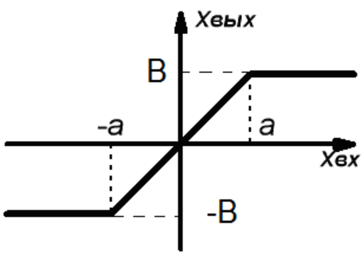
b – коэффициент гармонической линеаризации по косинусоидальной составляющей;

ω – частота автоколебаний.

Комплексный коэффициент передачи:

$$J(A,\omega) = \frac{X_{выхНЭ}}{X_{вхНЭ}} = q(A) + \frac{b(A)}{\omega}j\omega = q(A) + jb(A) \tag{4.4}$$

Таблица 4.1 – Коэффициенты гармонической линеаризации для различных нелинейностей

Вид нелинейности	Статическая характеристика	Коэффициенты гармонической линеаризации
Идеальное двухпозиционное реле		$q(A)=\frac{4B}{\pi A}$; $b(A)=0$.
Идеальное трехпозиционное реле		$q(A)=\frac{4B}{\pi A}\sqrt{1-\frac{a^2}{A^2}}$ при $A \geq a$; $b(A)=0$.
Двухпозиционное реле с гистерезисом		$q(A)=\frac{4B}{\pi A}\sqrt{1-\frac{a^2}{A^2}}$ при $A \geq a$; $b(A)=-\frac{4Ba}{\pi A^2}$.
Трехпозиционное реле с гистерезисом		$q(A)=\frac{2B}{\pi A}\left(\sqrt{1-\frac{a_1^2}{A^2}}+\sqrt{1-\frac{a_2^2}{A^2}}\right)$ при $A \geq a_2$; $b(A)=-\frac{2B(a_2-a_1)}{\pi A^2}$.
Усилитель с ограничением		$q(A)=\frac{4B}{\pi a}\left(\arcsin\left(\frac{a}{A}\right)+\frac{a}{A}\sqrt{1-\frac{a^2}{A^2}}\right)$ при $A \geq a$; $b(A)=0$.

4.2 Определение амплитуды и частоты режима автоколебаний

Определение амплитуды и частоты автоколебаний основано на исследовании частотных характеристик нелинейных систем.

Для исследования системы необходимо записать уравнение характеристического вектора:

$$1+J(A,\omega)W_{ЛЧ}(j\omega)=0, \tag{4.5}$$

где $W_{ЛЧ}(j\omega)$ – комплексный коэффициент передачи линейной части системы, который можно представить в виде:

$$W_{ЛЧ}(j\omega)=\frac{B(j\omega)}{A(j\omega)} \tag{4.6}$$

Подставив (4.6) в (4.5) получим:

$$A(j\omega)+J(A,\omega)B(j\omega)=0. \tag{4.7}$$

Выделим вещественную и мнимую части:

$$X(A,\omega)+jY(A,\omega)=0; \tag{4.8}$$

$$\begin{cases} X(A,\omega)=0 \\ Y(A,\omega)=0 \end{cases}. \tag{4.9}$$

Если решить эту систему с двумя неизвестными (A, ω), то в случае если будет найдено положительное вещественное решение, будет определена амплитуда и частота возможных автоколебаний.

Для того, чтобы выяснить, будет ли режим автоколебаний устойчивым, необходимо взять частные производные для этой системы уравнений и вычислить значение выражения:

$$\left(\frac{\partial X(A,\omega)}{\partial A}\right)^{*}\cdot\left(\frac{\partial Y(A,\omega)}{\partial \omega}\right)^{*}-\left(\frac{\partial X(A,\omega)}{\partial \omega}\right)^{*}\cdot\left(\frac{\partial Y(A,\omega)}{\partial A}\right)^{*}. \tag{4.10}$$

Звёздочка означает, что в выражения для частных производных надо подставить значения амплитуды и частоты, полученные из решения системы уравнений.

Если выражение (4.10) положительно, то колебания устойчивые, т. е. имеется режим автоколебаний.

4.3 Метод И.С. Гольфарба

Данный метод основан на графическом решении уравнения (4.5), которое можно записать в виде:

$$-\frac{1}{J(A,\omega)} = W_{ЛЧ}(j\omega) \qquad (4.11)$$

Для определения режима колебаний необходимо построить АФЧХ линейной части и отрицательную инверсную характеристику НЭ $-\frac{1}{J(A,\omega)}$. Точки пересечения этих графиков определяют параметры колебаний (амплитуду и частоту).

Устойчив или нет режим этих колебаний определяется следующим образом: *если, двигаясь по инверсной отрицательной характеристике НЭ в сторону увеличения амплитуды, мы выходим из области, охваченной АФЧХ линейной части, то режим колебаний – устойчивый (имеется режим автоколебаний)*.

На рисунке 4.1 в точке С режим устойчивых автоколебаний, в точке В нет.

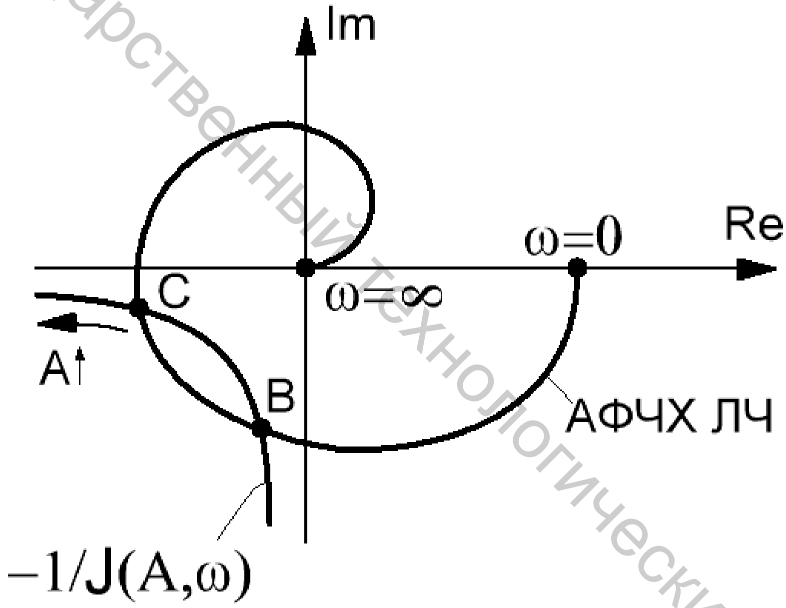


Рисунок 4.1 – Графическое решение характеристического уравнения

Если нет пересечения АФЧХ линейной части и отрицательной инверсной характеристики НЭ, то режима автоколебаний нет.

Для однозначной симметричной нелинейной характеристики инверсная частотная характеристика НЭ совпадает с отрицательным отрезком вещественной оси.

Если нелинейная характеристика содержит зону неоднозначности (гистерезиса), то для, например, двухпозиционной релейной характеристики инверсная частотная характеристика проходит параллельно отрицательного отрезка вещественной оси, и отстаёт от него на некоторую величину.

Задание к расчетно-графической работе № 4

Определить наличие и параметры автоколебаний в нелинейной системе методом гармонической линеаризации. Структурная схема системы представлена на рисунке 4.2. Вид и параметры нелинейных элементов и линейной части системы для различных вариантов приведены в таблице 4.2.

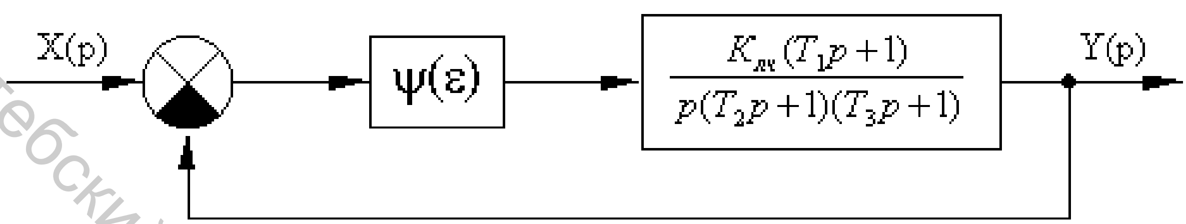
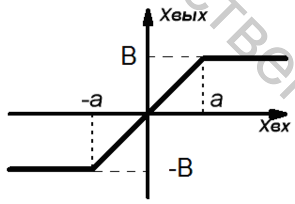
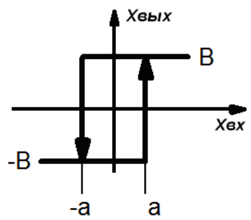
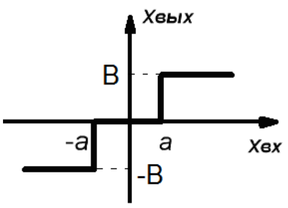
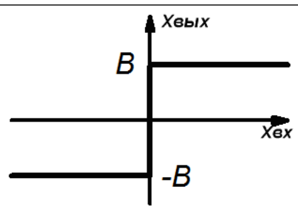


Рисунок 4.2 – Структурная схема САУ

Таблица 4.2 – Варианты заданий

№ варианта	Вид нелинейного элемента $\Psi(\varepsilon)$	B	a	$K_{лч}$	T_1	T_2	T_3
1		1	0,5	25	2	0,5	5
2		1	1	20	1	0,2	2,5
3		1	0,6	32	2,5	0,4	3
4		1	0,25	15	0,5	1,5	2,5
5		1	0,4	20	0,1	0,5	2,5
6		1	0,8	12,5	0,75	1	2,5
7		1	1	16	1	5	7,5
8		1	1,5	18	0,4	1	0,8
9		1	1	10	1	0,5	2,5
10		1	0,5	25	2,5	0,5	10
11		1	0,4	32	0,5	1	0,07
12		1	0,25	12	0,5	4,5	0,8
13		1	0,4	14	1	0,9	1,8
14		1	0,6	16	0,75	2,5	5
15		1	0,8	18	1,5	12,5	5
16		1	0,5	32	2,5	1	5
17		1	0,5	40	0,5	1	5
18		1	1	35	0,05	0,5	1
19		2	1	45	0,08	0,5	0,01
20		2	0,5	25	0,5	1	0,1
21		1	0,4	12,5	0,2	0,8	1,5
22		1,5	0,8	15	0,4	1,5	2,5
23		2	1	8	0,8	5	7,5
24		1	1,2	24	0,5	2,5	0,05
25		2	0,6	18	0,5	0,75	0,05
26		1		15	0,5	0,1	1,5
27		2		7,5	0,25	0,5	2,5
28		1		12	0,75	2,5	12,5
29		2		18	0,05	0,5	0,75
30		1		20	0,01	0,5	1,25с

Пример выполнения расчетно-графической работы № 4

Определить наличие и параметры автоколебаний в нелинейной системе методом гармонической линеаризации. Структурная схема системы представлена на рисунке 4.3.

Параметры линейной части: K=40, T_1=0,2c, T_2=1c, T_3=20c, T_4=2c. Параметры нелинейного элемента: B=2, a=0,8.

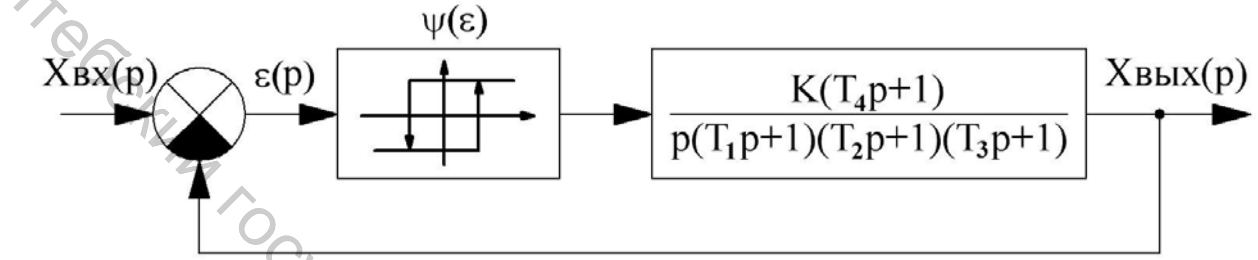


Рисунок 4.3 – Структурная схема САУ

Для определения наличия и параметров автоколебаний запишем уравнение характеристического вектора:

$$1+J(A,\omega)W_{ЛЧ}(j\omega)=0. \qquad (4.12)$$

Передаточная функция гармонически линеаризованного двухпозиционного реле с гистерезисом:

$$J(A,\omega)=\frac{4B}{\pi A}\sqrt{1-\frac{a^2}{A^2}}-j\frac{4Ba}{\pi A^2}. \qquad (4.13)$$

Комплексный коэффициент передачи линейной части:

$$W_{ЛЧ}(\omega)=\frac{K(T_4 j\omega+1)}{j\omega(T_1 j\omega+1)(T_2 j\omega+1)(T_3 j\omega+1)} \qquad (4.14)$$

С учетом (4.13) и (4.14) уравнение (4.12) примет вид:

$$1+\left(\frac{4B}{\pi A}\sqrt{1-\frac{a^2}{A^2}}-j\frac{4Ba}{\pi A^2}\right)\frac{K(T_4 j\omega+1)}{j\omega(T_1 j\omega+1)(T_2 j\omega+1)(T_3 j\omega+1)}=0;$$

$$j\omega(T_1 j\omega+1)(T_2 j\omega+1)(T_3 j\omega+1)+\frac{4B}{\pi A^2}\left(\sqrt{A^2-a^2}-ja\right)K(T_4 j\omega+1)=0;$$

$$T_1T_2T_3\cdot(j\omega)^4+(T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3)(j\omega)^3+(T_1+T_2+T_3)(j\omega)^2+j\omega+$$
$$+j\frac{4B}{\pi A^2}KT_4\omega\sqrt{A^2-a^2}+\frac{4Ba}{\pi A^2}KT_4\omega+\frac{4B}{\pi A^2}K\sqrt{A^2-a^2}-j\frac{4Ba}{\pi A^2}K=0;$$

$$T_1T_2T_3\omega^4-j(T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3)\omega^3-(T_1+T_2+T_3)\omega^2+j\omega+$$
$$+j\frac{4B}{\pi A^2}KT_4\omega\sqrt{A^2-a^2}+\frac{4Ba}{\pi A^2}KT_4\omega+\frac{4B}{\pi A^2}K\sqrt{A^2-a^2}-j\frac{4Ba}{\pi A^2}K=0. \qquad (4.15)$$

Выделим вещественную и мнимую части в уравнении (4.15):

$$T_1T_2T_3\omega^4-(T_1+T_2+T_3)\omega^2+\frac{4Ba}{\pi A^2}KT_4\omega+\frac{4B}{\pi A^2}K\sqrt{A^2-a^2}+$$
$$+j\left(-(T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3)\omega^3+\omega+\frac{4B}{\pi A^2}KT_4\omega\sqrt{A^2-a^2}-\frac{4Ba}{\pi A^2}K\right)=0;$$

$$\begin{cases} X(A,\omega)=T_1T_2T_3\omega^4-(T_1+T_2+T_3)\omega^2+\dfrac{4Ba}{\pi A^2}KT_4\omega+\dfrac{4B}{\pi A^2}K\sqrt{A^2-a^2}=0 \\ Y(A,\omega)=-(T_1T_2+T_1T_3+T_2T_3)\omega^3+\omega+\dfrac{4B}{\pi A^2}KT_4\omega\sqrt{A^2-a^2}-\dfrac{4Ba}{\pi A^2}K=0. \end{cases} \qquad (4.16)$$

Подставим числовые значения в (4.16):

$$\begin{cases} X(A,\omega)=4\omega^4-21{,}2\omega^2+\dfrac{512}{\pi A^2}\omega+\dfrac{320}{\pi A^2}\sqrt{A^2-0{,}64}=0 \\ Y(A,\omega)=-24{,}3\omega^3+\omega+\dfrac{640}{\pi A^2}\omega\sqrt{A^2-0{,}64}-\dfrac{256}{\pi A^2}=0. \end{cases} \qquad (4.17)$$

Решив систему уравнений (4.17), получим единственную положительную вещественную пару корней: A=6,296, ω=1,137.

Проверим на устойчивость режим колебаний с найденными параметрами, подставив полученное решение в выражение (4.10):

$$\left(\frac{\partial X(A,\omega)}{\partial A}\right)^*=-\frac{1024\omega}{\pi A^3}+\frac{320}{\pi A\sqrt{A^2-0{,}64}}-\frac{640}{\pi A^3}\sqrt{A^2-0{,}64}=-3{,}992;$$

$$\left(\frac{\partial Y(A,\omega)}{\partial \omega}\right)^*=-72{,}6\omega^2+1+\frac{640}{\pi A^2}\sqrt{A^2-0{,}64}=-60{,}766;$$

$$\left(\frac{\partial X(A,\omega)}{\partial \omega}\right)^*=16\omega^3-42{,}4\omega+\frac{512}{\pi A^2}=-20{,}578;$$

$$\left(\frac{\partial Y(A,\omega)}{\partial \omega}\right)^*=-\frac{1280}{\pi A^3}\omega\sqrt{A^2-0{,}64}+\frac{640\omega}{\pi A\sqrt{A^2-0{,}64}}+\frac{512}{\pi A^3}=-5{,}048;$$

$$\left(\frac{\partial X(A,\omega)}{\partial A}\right)^*\cdot\left(\frac{\partial Y(A,\omega)}{\partial \omega}\right)^*-\left(\frac{\partial X(A,\omega)}{\partial \omega}\right)^*\cdot\left(\frac{\partial Y(A,\omega)}{\partial A}\right)^*=-3{,}992\cdot(-60{,}766)-$$
$$-(-20{,}578)(-5{,}048)=138{,}7>0.$$

Так как выражение (4.10) положительно, то режим автоколебаний с параметрами A=6,296, ω=1,137 устойчив.

Определим наличие и параметры автоколебаний методом Гольдфарба.

Выражение для построения АФЧХ линейной части имеет вид (2.13). Подставим числовые значения:

$$\operatorname{Re}(\omega)=-\frac{40(4{,}4\omega^2+19{,}2)}{(0{,}04\omega^2+1)(\omega^2+1)(400\omega^2+1)};$$

$$\operatorname{Im}(\omega) = \frac{40(8\omega^4 - 18{,}2\omega^2 - 1)}{\omega(0{,}04\omega^2 + 1)(\omega^2 + 1)(100\omega^2 + 1)}$$

Рассчитаем значения частот, при которых АФЧХ линейной части системы пересекает оси координат:

$$\operatorname{Re}(\omega) = -\frac{40(44{,}4\omega^2 + 19{,}2)}{(0{,}04\omega^2 + 1)(\omega^2 + 1)(100\omega^2 + 1)} = 0;$$

$$44{,}4\omega^2 + 19{,}2 = 0\,.$$

Уравнение не имеет корней.

$$\operatorname{Im}(\omega) = \frac{40(8\omega^4 - 18{,}2\omega^2 - 1)}{\omega(0{,}04\omega^2 + 1)(\omega^2 + 1)(100\omega^2 + 1)} = 0;$$

$$8\omega^4 - 18{,}2\omega^2 - 1 = 0;$$

$$\omega_1^2 = \frac{18{,}2 + \sqrt{(18{,}2)^2 + 4\cdot 8}}{2\cdot 8} = 2{,}329 \rightarrow \omega_1 = 1{,}526c^{-1};$$

$$\omega_2^2 = \frac{18{,}2 - \sqrt{(18{,}2)^2 + 4\cdot 8}}{2\cdot 8} < 0\,.$$

Задавая частоту в интервале 0<ω<∞, рассчитываем значения вещественной и мнимой части АФЧХ линейной части системы (таблица 4.3).

Таблица 4.3 – Данные для построения АФЧХ линейной части системы

ω	0	1	1,137	1,526	2	2,5	3
$\operatorname{Re}(\omega)$	-768	-3,057	-2,452	-1,445	8	-0,523	-0,342
$\operatorname{Im}(\omega)$	-∞	-0,537	-0,314	0	0,117	0,140	0,132
ω	4	5	7,5	10	25	∞	
$\operatorname{Re}(\omega)$	-0,164	-0,087	-0,024	-0,009	-0,0003	0	
$\operatorname{Im}(\omega)$	0,098	0,0700	0,031	0,015	0,0012	0	

Отрицательная инверсная характеристика НЭ:

$$-\frac{1}{J(A,\omega)} = \frac{-1}{\frac{4B}{\pi A}\sqrt{1 - \frac{a^2}{A^2}} - j\frac{4Ba}{\pi A^2}} = \frac{-\pi A^2}{4B\left(\sqrt{A^2 - a^2} - ja\right)} = \frac{-\pi A^2\left(\sqrt{A^2 - a^2} + ja\right)}{4B\left(\sqrt{A^2 - a^2} - ja\right)\left(\sqrt{A^2 - a^2} + ja\right)};$$

$$-\frac{1}{J(A,\omega)} = \frac{-\pi\left(\sqrt{A^2 - a^2} + ja\right)}{4B}. \qquad (4.18)$$

Подставим числовые значения:

$$-\frac{1}{J(A,\omega)} = -0{,}125\pi\sqrt{A^2 - 0{,}64} - 0{,}1\pi j\,.$$

Задавая амплитуду сигнала на входе НЭ в интервале $a<A<\infty$, рассчитываем значения вещественной и мнимой части инверсной отрицательной характеристики НЭ системы (таблица 4.4).

Таблица 4.4 – Данные для построения АФЧХ линейной части системы

A	0,8	1	2	3	4	5	6,296	7	8	∞
$\mathrm{Re}\left[-\dfrac{1}{J(A,\omega)}\right]$	0	-0,236	-0,720	-1,135	-1,539	-1,938	-2,452	-2,731	-3,126	-∞
$\mathrm{Im}\left[-\dfrac{1}{J(A,\omega)}\right]$	-0,314	-0,314	-0,314	-0,314	-0,314	-0,314	-0,314	-0,314	-0,314	-0,314

Для определения режима колебаний необходимо построим АФЧХ линейной части системы и отрицательную инверсную характеристику НЭ в одной системе координат (рисунок 4.4). Точка пересечения этих графиков определяет параметры колебаний A=6,296, ω=1,137.

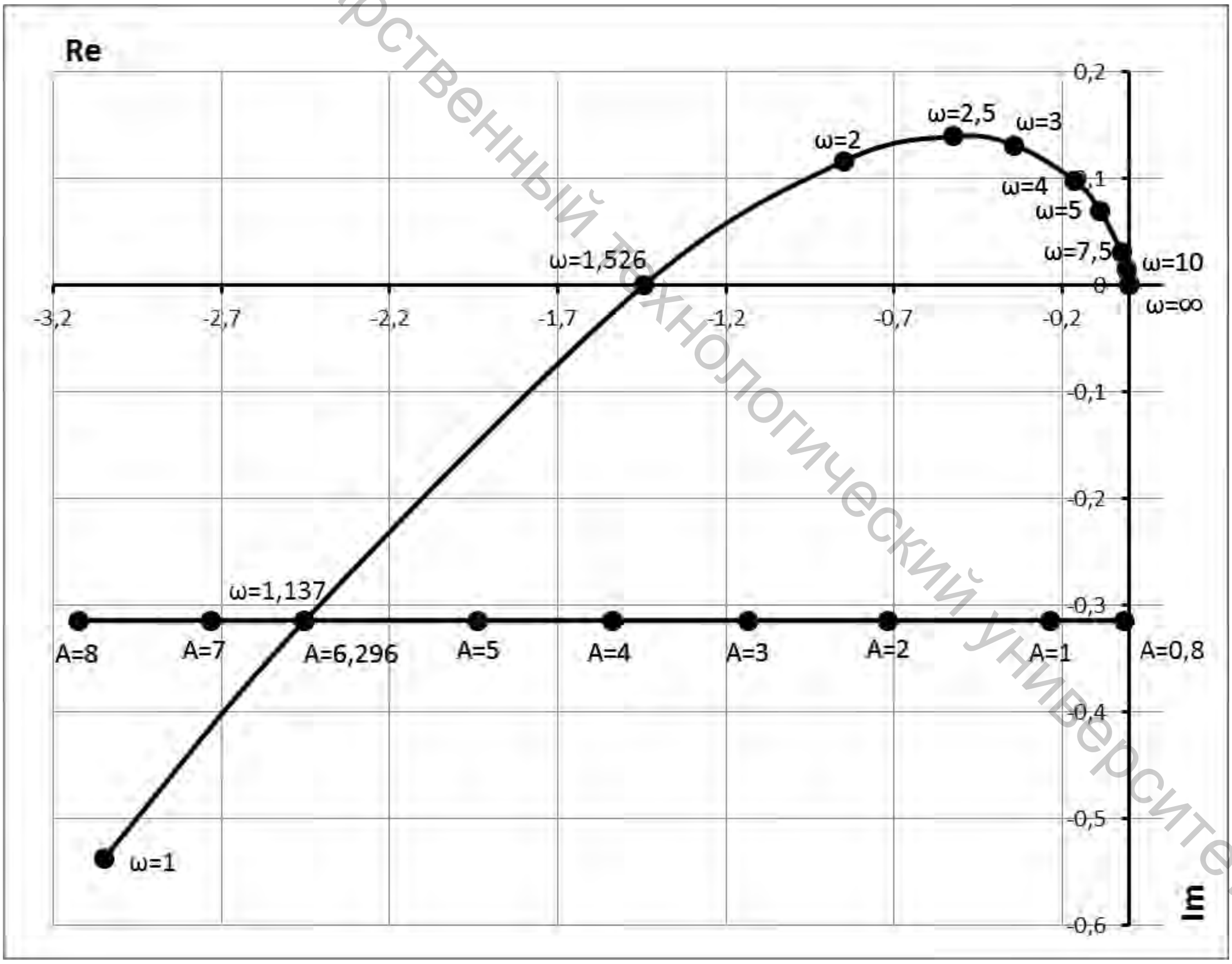


Рисунок 4.4 – АФЧХ линейной части системы и отрицательная инверсная характеристика НЭ

Двигаясь по инверсной отрицательной характеристике НЭ в сторону увеличения амплитуды, мы выходим из области, охваченной АФЧХ линейной части системы. Это говорит о том, что режим автоколебаний в системе – устойчивый.

ЛИТЕРАТУРА

1. Автоматическое регулирование. Теория и элементы систем : учебник для вузов / под ред. Н. Н. Иващенко – 3-е изд. – Москва : Машиностроение, 1973. – 606 с.

2. Анхимюк, В. Л. Теория автоматического управления : учебное пособие для вузов / В. Л. Анхимюк, О. Ф. Опейко, Н. Н. Михеев. – Минск : Дизайн ПРО, 2000. – 352 с.

3. Анхимюк, В. Л. Теория автоматического управления : учеб. пособие для электротехн. спец. вузов / В. Л. Анхимюк, О. Ф. Опейко, Н. Н. Михеев. – 3-е изд., перераб. и доп. – Минск : Высшая школа, 1979. – 352 с.

4. Бесекерский, В. А. Теория систем автоматического управления / В. А. Бесекерский, Е. П. Попов. – Москва : Наука, 1966. – 992 с.

5. Куропаткин, П. В. Теория автоматического управления : учебное пособие для электротехн. спец. вузов / П. В. Куропаткин. – Москва : Высшая школа, 1973. – 528 с.

6. Справочное пособие по теории систем автоматического регулирования и управления / под общ. ред. Е. А. Санковского. – Минск : Выш. шк., 1973. – 583 с.

7. Теория автоматического управления : учебник для вузов / Л. С. Гольдфарб [и др.] ; под ред. А. В. Нетушила. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. шк., 1983. – 432 с.

8. Теория автоматического управления : учебник для вузов : в 2 ч. – 2-е изд., перераб. и доп. – Москва : Высш. шк., 1986. – 2 ч.

9. Топчеев, Ю. И. Атлас для проектирования систем автоматического регулирования : учеб. пособие для вузов / Ю. И. Топчеев. – Москва : Машиностроение, 1989. – 752 с.

10. Кулаков, Г. Т. Инженерные экспресс-методы расчета промышленных систем регулирования : справочное пособие / Г. Т. Кулаков. – Минск : Вышэйшая школа, 1984. – 192 с.

11. Микропроцессорные автоматические системы регулирования. Основы теории и элементы : учеб. пособие / В. В. Солодовников [и др.] ; под ред. В. В. Солодовникова. – Москва : Высш. шк., 1991. – 256 с.

12. Наладка автоматических систем и устройств управления технологическими процессами : справочное пособие / под ред. А. С. Клюева. – Москва : Энергия, 1977. – 400 с.

13. Ротач, В. Я. Теория автоматического управления теплоэнергетическими процессами : учебник для вузов / В. Я. Ротач. – Москва : Энергоиздат, 1985. – 292 с.

14. Руководство по проектированию систем автоматического управления : учеб. пособие для студентов специальности «Автоматика и телемеханика» / под ред. В. А. Бесекерского. – Москва : Высш. шк., 1983. – 296 с.

15. Сборник задач по теории автоматического управления: учебное пособие для вузов / под ред. В. А. Бесекерского. – Москва : Наука, 1972. – 587 с.

16. Солодовников, В. В. Основы теории и элементы систем автоматического регулирования : учеб. пособие для вузов / В. В. Солодовников, В. Н. Плотников, А. В. Яковлев. – Москва : Машиностроение, 1985. – 538 с.

17. Кулаков, Г. Т. Анализ и синтез систем автоматического регулирования : учеб. пособие / Г. Т. Кулаков. – Минск : УП «Технопринт», 2003. – 135 с.

18. Лазарева, Г. Я. Основы теории автоматического управления : учеб. пособие / Г. Я. Лазарева, Ю. Ф. Мартемьянов. – Тамбов : изд-во Тамбовского гос. технол. ун-та, 2003. – 308 с.