МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«Витебский государственный технологический университет»

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ
Линейное программирование.
Транспортная задача.
Матричная игра.
Динамическое программирование

Методические указания для студентов специальностей 1-25 01 09 «Товароведение и экспертиза товаров», 1-27 01 01-16 «Экономика и организация производства (лёгкая промышленность)», 1-52 01 01-04 «Метрология, стандартизация и сертификация (лёгкая промышленность)»

ВИТЕБСК
2016

УДК 519.85 (075.8)

Математическое программирование. Линейное программирование. Транспортная задача. Матричная игра. Динамическое программирование: Методические указания для студентов специальностей 1-25 01 09 «Товароведение и экспертиза товаров», 1-27 01 01-16 «Экономика и организация производства (лёгкая промышленность)», 1-52 01 01-04 «Метрология, стандартизация и сертификация (лёгкая промышленность)»

Витебск: Министерство образования Республики Беларусь, УО «ВГТУ», 2015.

Составитель: ст. преп. Силивончик В. В.

Методические указания предлагают подробное теоретическое изложение основных понятий и вычислительных техник для различных оптимизационных задач. Большая часть работы посвящена оптимизации значения линейной функции при системе линейных ограничений. Эта задача представлена четырьмя разделами: задача линейного программирования, транспортная задача, задача целочисленного линейного программирования, матричная игра. В пятом разделе рассматривается самостоятельная тема – динамическое программирование.

Методические указания могу быть использованы студентами при изучении математического программирования.

Одобрено кафедрой теоретической и прикладной математики УО «ВГТУ»
12 октября 2015 г., протокол № 2.

Рецензент: доц., д. т. н. Джежора А. А.
Редактор: доц. Денисов В. С.

Рекомендовано к опубликованию редакционно-издательским советом
УО «ВГТУ» "30" октября 2015 г., протокол № 8 .

Ответственный за выпуск: Шалапухо Е. А.

Учреждение образования «Витебский государственный технологический университет»

Подписано к печати 26.04.16. Формат 90х60 1/16. Уч.- изд. лист. 4.0.
Печать ризографическая. Тираж 60 экз. Заказ № 137.

Отпечатано на ризографе учреждения образования «Витебский государственный технологический университет».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий 1/172 от 12 февраля 2014 г.
210035, Витебск, Московский проспект, 72.

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Под математическим программированием в широком смысле понимается метод построения математических моделей реальных процессов, требующих оптимизации, и указания схемы проведения указанной оптимизации. При математическом моделировании реальные характеристики рассматриваемого объекта выражаются числовыми константами или переменными, а сама модель представляет собой систему уравнений и неравенств, связывающих точки многомерного пространства. Критерий оптимальности может быть выражен условием экстремальности (максимальности или минимальности) некоторой функции, именуемой целевой функцией или функцией цели. В рамках уже сформулированной математической модели появляется задача построения обоснованного метода, позволяющего найти оптимальное значение указанной функции и соответствующие оптимальные значения переменных параметров, входящих в структуру модели. В работе рассматриваются задача линейного программирования, транспортная задача, задача целочисленного линейного программирования, матричная игра, динамическое программирование. Работа предназначена для студентов, занимающихся изучением вопросов оптимизации экономических процессов.

1. ЗАДАЧА ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Постановка задачи

МАТЕМАТИЧЕСКИМ ПРОГРАММИРОВАНИЕМ называется математическая дисциплина, занимающаяся методами нахождения экстремальных значений функции, определённой на замкнутой многомерной поверхности. Задача математического программирования формально может быть записана следующим образом: найти наибольшее и (или) наименьшее значение (максимум, минимум) функции $f(x_1,...,x_n)$ при условии, что переменные $x_1,...,x_n$ удовлетворяют системе ограничений

$$\begin{cases} f_i(x_1,\dots,x_n) \le b_i \ (i=1,\dots,m_1) \\ f_i(x_1,\dots,x_n) \ge b_i \ (i=m_1+1,\dots,m_2) \\ f_i(x_1,\dots,x_n) = b_i \ (i=m_2+1,\dots,m) \end{cases}.$$

ЛИНЕЙНЫМ ПРОГРАММИРОВАНИЕМ (далее – ЛП) называется раздел математического программирования, рассматривающий линейную функцию на замкнутом многомерном множестве (подмножестве пространства R^n), определяемом системой ограничений в виде линейных равенств или неравенств. Дадим формальное определение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Задачей ЛП (ЗЛП) называется задача отыскания экстремальных значений (максимума, минимума) функции

$$f(x_1,\dots,x_n) = c_1x_1 + ... + c_nx_n \qquad (1.1)$$

на подмножестве пространства R^n, определяемом системой ограничений

$$\begin{cases} a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i \ (i = 1, \ldots, m_1) \\ a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \ge b_i \ (i = m_1 + 1, \ldots, m_2) \\ a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = b_i \ (i = m_2 + 1, \ldots, m) \end{cases}. \qquad (1.2)$$

Функция f называется целевой функцией ЗЛП. Точка $(x_1,...,x_n)$, удовлетворяющая системе (1.2), называется планом ЗЛП. Множество решений системы (1.2) (множество всех планов) – это множество определения ЗЛП. Искомое экстремальное значение целевой функции будем называть оптимальным. План, дающий оптимальное значение целевой функции, будем называть оптимальным планом, а также решением задачи.

Экономический пример

Пусть предприятие, имея m видов ресурсов, выпускает n видов продукции. Пусть $b_1,\ldots,b_m$ – объёмы запасов каждого из m видов ресурсов; $c_1,\ldots,c_n$ – размеры прибыли от реализации единицы каждого из n видов продукции; a_{ij} – объём затрат i-го ресурса на изготовление единицы j-го продукта. Обозначим через $x_1,\ldots,x_n$ воображаемые объёмы выпуска каждого из n продуктов. То есть $(x_1,\ldots,x_n)$ – воображаемый план выпуска продукции. Задача состоит в нахождение плана $(x_1,\ldots,x_n)$, обеспечивающего получение наибольшей прибыли.

Построим математическую модель этой задачи. Предприятие, выпустив продукцию по плану $(x_1,\ldots,x_n)$ и реализовав её, получит прибыль $f(x_1,\ldots,x_n) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$, которую нужно максимизировать. Это целевая функция задачи:

$$f(x_1,\ldots,x_n) = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n \ (\max) \qquad (1.3)$$

Наличные объёмы ресурсов дают систему ограничений. Выпуск продукции по плану $(x_1,\ldots,x_n)$ требует затраты i-того ресурса в объёме $a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n$. Этот объём не может превышать запас ресурса – b_i. Поэтому должны выполняться неравенства

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n \le b_i \ (i = 1, \ldots, m). \qquad (1.4)$$

Кроме того, все $x_1,\ldots,x_n$ – неотрицательны:

$$x_1,\ldots,x_n \ge 0. \qquad (1.5)$$

Получена ЗЛП (1.3), (1.4), (1.5).

Далее, используя знак суммирования, будем писать короче:

$$c_1x_1 + \ldots + c_nx_n = \sum_{j=1}^{n} c_jx_j, \quad a_{i1}x_1 + \ldots + a_{in}x_n = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\ .$$

Формы записи задачи линейного программирования

Общая ЗЛП

ЗЛП (1.1), (1.2) с добавлением условий $x_1, \ldots, x_n \ge 0$ называется общей (ОЗЛП):

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ (\min \ \textit{или} \ \max), \ \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ (i = 1, \ldots, m_1) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \ (i = m_1 + 1, \ldots, m_2) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i = m_2 + 1, \ldots, m) \\ x_j \ge 0 \ (j = 1, \ldots, n) \end{cases}. \qquad (1.6)$$

Задача (1.1), (1.2) легко сводится к (1.6). Для этого достаточно представить x_i в виде $x_i = x_i' - x_i''$ при условии $x_i', x_i'' \ge 0$.

Симметричные ЗЛП

Рассмотрим две ЗЛП:

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ (\max), \ \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \le b_i \ (i = 1, \ldots, m) \\ x_j \ge 0 \ (j = 1, \ldots, n) \end{cases} \qquad (1.7)$$

и

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ (\min), \ \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ge b_i \ (i = 1, \ldots, m) \\ x_j \ge 0 \ (j = 1, \ldots, n) \end{cases}. \qquad (1.8)$$

Эти задачи называются симметричными.

Задачи (1.7) и (1.8) легко преобразуются друг в друга. Для этого достаточно умножить на -1 целевую функцию и систему ограничений. Например, задача (1.7) равносильна задаче

$$g = -f = \sum_{j=1}^{n} -c_j x_j \ (\min), \ \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} -a_{ij} x_j \ge -b_i \ (i = 1, \ldots, m) \\ x_j \ge 0 \ (j = 1, \ldots, n) \end{cases}.$$

Каноническая ЗЛП

ЗЛП вида

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ (\max), \ \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i = 1, \ldots, m) \\ x_j \ge 0 \ (j = 1, \ldots, n) \end{cases} \qquad (1.9)$$

называется канонической.

Любая ЗЛП может быть записана в канонической форме. Покажем, как преобразовать ОЗЛП в каноническую ЗЛП. Рассмотрим неравенство $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \le b_i$ и введём новую переменную $x_{m+i} = b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$. Тогда $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j + x_{m+i} = b_i$ и $x_{m+i} \ge 0$. Аналогично, если имеется неравенство $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \ge b_i$, положим $x_{m+i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i$. Тогда $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - x_{m+i} = b_i$ и $x_{m+i} \ge 0$. Теперь система ограничений будет состоять только из равенств. Если целевая функция исследуется на минимум, умножим её на -1 и получим новую целевую функцию, которую нужно исследовать на максимум: $f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ (\min) \Leftrightarrow g = -f = \sum_{j=1}^{n} -c_j x_j \ (\max)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Позже мы увидим, что любую ЗЛП можно преобразовать в симметричную.

Матричная форма записи канонической ЗЛП

Пусть $C = (c_1, \dots, c_n)$, $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, $O = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ – столбец из n нулей, $A = (a_{ij})$ – матрица размером $m \times n$. Тогда задачу (1.9) можно записать в виде

$$f = CX \ (\max), \begin{cases} AX = B \\ X \ge O \end{cases}. \tag{1.10}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Когда удобнее, будем записывать X строкой: $X = (x_1, \dots, x_n)$.

Методы решения задачи линейного программирования

Метод, позволяющий решить любую ЗЛП, называется УНИВЕРСАЛЬНЫМ. Метод называется СПЕЦИАЛЬНЫМ, если он существенно опирается на особенности задачи. Ниже будет указан универсальный метод решения ЗЛП, записанной в канонической форме, – это симплексный метод.

Геометрическая иллюстрация ЗЛП

Три характерных примера

Рассмотрим ЗЛП с двумя переменными. Условие и решение такой задачи может быть исчерпывающе описано геометрически на координатной плоскости. Покажем это на примерах.

$$1.\ f = 2x_1 + 3x_2 \ (\min\ u\ \max),\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 2 \\ x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 - 2x_2 \le 2 \\ x_1 - x_2 \ge -1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}.$$

Ограничительные условия определяют на плоскости Oxy четырёхугольник $ABCD$ (см. рис. 1). Координаты точек находятся решением систем уравнений:

$$A: \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases}, B: \begin{cases} x_1 + 2x_2 = 2 \\ x_1 - 2x_2 = 2 \end{cases}, C: \begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \\ x_1 - 2x_2 = 2 \end{cases}, D: \begin{cases} x_1 + x_2 = 8 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases}.$$

Получаем: $A(0;1), B(2;0), C(6;2), D(3,5;4,5)$.

Теперь рассмотрим линию уровня целевой функции: $f = c$, $c = const$. Здесь это прямая $2x_1 + 3x_2 = c$. При изменении константы c получаем семейство параллельных прямых. Известно, что направление наискорейшего роста функции f определяется вектором $\operatorname{grad} f = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}; \dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$. Этот вектор перпендикулярен линии уровня. Здесь $\operatorname{grad} f = (2;3)$. Это нормаль к прямой $2x_1 + 3x_2 = c$, где c – некоторая константа. На рисунке 1 изображена прямая $2x_1 + 3x_2 = 6$, то есть $f = 6$. Для увеличения значения функции f нужно двигать прямую в направлении вектора $\overline{n} = \operatorname{grad} f = (2;3)$, то есть вверх; для уменьшения – вниз. Из рисунка видно, максимум достигается в точке D, минимум – в точке A.

$$f_{\min} = f(A) = f(0;1) = 3, \quad f_{\max} = f(D) = f(3,5;4,5) = 20,5.$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Если из-за нечёткости рисунка не видно, под каким углом пересекаются линия уровня и граница области, нужно сравнить угловые коэффициенты прямых. Сравним, например прямую CD и линию уровня $2x_1 + 3x_2 = c$.

$$CD: x_1 + x_2 = 8,\ x_2 = -x_1 + 8,\ k_{CD} = -1;\ 2x_1 + 3x_2 = c,\ x_2 = -\frac{2}{3}x_1 + \frac{c}{3},\ k = -\frac{2}{3};\ |k_{CD}| > |k|.$$

Последнее неравенство означает, что прямая CD проходит круче, чем линия уровня, как и изображено на рисунке. Аналогично можно сравнить угловые коэффициенты прямой AB и линии уровня.

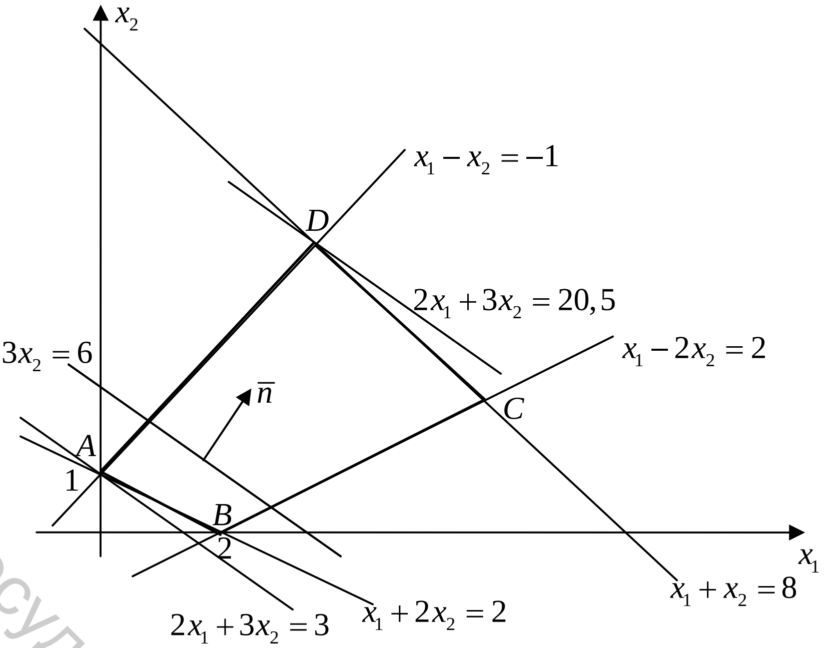


Рисунок 1 – Геометрическое решение ЗЛП

$$2.\ f = 2x_1 + 3x_2 \ (\min\ и\ \max), \quad \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ x_1 - x_2 \geq -1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

Это предыдущая задача без ограничения $x_1 + x_2 \leq 8$, значит, нужно удалить прямую CD (см. рис. 2). Здесь по-прежнему $f_{\min} = f(A) = 3$. Но в сторону роста целевой функции линия уровня $f = c$ может двигаться неограниченно. Поэтому $f_{\max} = +\infty$.

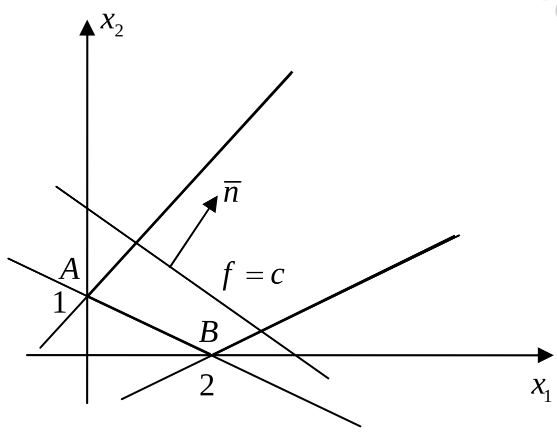


Рисунок 2 – Неограниченность целевой функции

3. $f = 2x_1 + 3x_2$ (min *и* max), $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 2 \\ 2x_1 + 3x_2 \le 12 \\ x_1 - 2x_2 \le 2 \\ x_1 - x_2 \ge -1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$.

Мы заменили в первой задаче условие $x_1 + x_2 \le 8$ на $2x_1 + 3x_2 \le 12$. Теперь мы получаем четырёхугольник $ABC'D'$ (см. рис. 3). Здесь прямые $f = c$ $(2x_1 + 3x_2 = c)$ и $C'D'$ $(2x_1 + 3x_2 = 12)$ параллельны. Значит, максимальное значение функции f достигается сразу на всём отрезке $C'D'$: $f_{\max} = f(C') = f(D')$. Координаты точек легко находятся: $C'\left(\frac{30}{7};\frac{8}{7}\right)$, $D'\left(\frac{9}{5};\frac{14}{5}\right)$; $f_{\max} = 12$. Опять $f_{\min} = f(A) = 3$.

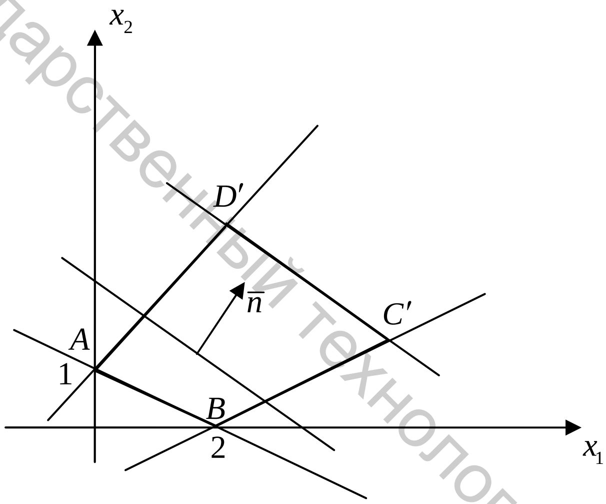


Рисунок 3 – Множественность оптимальных планов

Важные выводы из рассмотренных примеров

1. Множество планов есть ограниченный или неограниченный выпуклый многоугольник.

2. Целевая функция неограниченна или достигает экстремума в некоторой вершине многоугольника.

3. Если экстремум достигается в двух вершинах, то он достигается на всём граничном отрезке между этими вершинами.

Ниже мы обобщим эти выводы на случай произвольной ЗЛП.

Структура области определении ЗЛП

Выпуклость множества планов

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Множество M в пространстве R^n называется выпуклым, если вместе с любыми двумя его точками X_1 и X_2 оно содержит весь отрезок $[X_1; X_2]$, то есть все точки вида $X = \lambda X_1 + (1-\lambda)X_2$, где $\lambda \in [0;1]$.

ТЕОРЕМА 1. Множество планов ЗЛП есть выпуклый многогранник в многомерном пространстве.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Запишем ЗЛП в канонической форме. Система ограничений в матричной записи состоит из двух условий:

$$AX = B, \tag{1.11}$$

$$X \geq O. \tag{1.12}$$

Пусть X_1 и X_2 удовлетворяют обоим условиям. Проверим выполнение условий для $X = \lambda X_1 + (1-\lambda)X_2$ при $\lambda \in [0;1]$.

1. Пусть $AX_1 = B,\ AX_2 = B$, тогда

$$AX = A(\lambda X_1 + (1-\lambda)X_2) = \lambda AX_1 + (1-\lambda)AX_2 = \lambda B + (1-\lambda)B = B.$$

Итак, $AX = B$, причём при любом λ.

2. $X_1 \geq O,\ X_2 \geq O$. Т.к. $\lambda \in [0;1]$, то $\lambda \geq 0$ и $1-\lambda \geq 0$. Поэтому $\lambda X_1 \geq O$ и $(1-\lambda)X_2 \geq O$. Значит, $X = \lambda X_1 + (1-\lambda)X_2 \geq O$.

Мы показали, что множество планов является выпуклым. Так как ограничительные условия являются линейными, то граница множества планов состоит из частей многомерных плоскостей. Теорема доказана.

Опорный план

НАПОМИНАНИЕ из теории систем линейных уравнений. Рассмотрим систему линейных уравнений, имеющую в матричной записи вид (1.11): $AX = B$. Предположим, что эта система имеет решение и ранг матрицы A равен r: $\operatorname{rang} A = r$. Тогда уравнения позволяет выразить r переменных, называемых базисными, через остальные $n-r$ переменных, называемых свободными. Для удобства перенумеруем переменные так, чтобы базисными были первые r: $x_1, \ldots, x_r$. Получаем систему равенств:

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{11}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{1n-r}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = \beta_r + \alpha_{r1}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{rn-r}x_n \end{cases}. \tag{1.13}$$

Полагая $x_{r+1} = \ldots = x_n = 0$, будем иметь $x_1 = \beta_1, \ldots, x_r = \beta_r$. Решение $x_1 = \beta_1, \ldots, x_r = \beta_r,\ x_{r+1} = \ldots = x_n = 0$ называется БАЗИСНЫМ.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Базисное решение уравнения (1.11), удовлетворяющее условию неотрицательности (1.12), то есть $x_1 \geq 0, \ldots, x_n \geq 0$, называется ОПОРНЫМ ПЛАНОМ ЗЛП. Это означает, что $\beta_1, \ldots, \beta_r \geq 0$. Если значения всех базисных переменных опорного плана положительны ($\beta_1, \ldots, \beta_r > 0$), то опорный план называется невырожденным. В противном случае (хотя бы для одного i имеем $\beta_i = 0$) – вырожденным.

ПРИМЕР. Найти базисное решение системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 = 5 \end{cases}.$$

РЕШЕНИЕ. Выразим x_1, x_2 через x_3, x_4:

$$\begin{cases} x_1 = 4 - x_3 - \dfrac{1}{2}x_4 \\ x_2 = 1 - \dfrac{3}{2}x_4 \end{cases}.$$

Получили базисное решение $x_1 = 4, x_2 = 1, x_3 = 0, x_4 = 0$. Оно неотрицательно, значит это опорный план.

Связь геометрического и алгебраического описания

Добавим без доказательства две вполне очевидные теоремы.

ТЕОРЕМА 2. Вершины многогранника планов ЗЛП являются опорными планами.

ТЕОРЕМА 3. Линейная функция, определённая на выпуклом замкнутом многограннике, достигает экстремальных значений в вершинах многогранника или не достигает вовсе (функция неограниченна). Если экстремум достигается сразу в нескольких вершинах, то он определяется сразу на всей грани, определяемой этими вершинами.

Переход к симметричной ЗЛП

Поскольку произвольная ЗЛП может быть преобразована к канонической форме записи, то достаточно указать метод перехода к симметричной задаче от канонической задачи. Рассмотрим задачу (1.9):

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ (\max), \ \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ (i = 1, \ldots, m) \\ x_j \ge 0 \ (j = 1, \ldots, n) \end{cases}.$$

Преобразуем систему ограничений к виду (1.13), выделив базисные переменные:

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{11} x_{r+1} + \ldots + \alpha_{1n-r} x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = \beta_r + \alpha_{r1} x_{r+1} + \ldots + \alpha_{rn-r} x_n \end{cases}.$$

Учитывая условия неотрицательности $x_1, \ldots, x_r \ge 0$, получаем систему неравенств

$$\begin{cases} \beta_1 + \alpha_{11}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{1n-r}x_n \geq 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots , \\ \beta_r + \alpha_{r1}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{rn-r}x_n \geq 0 \end{cases} \tag{1.14}$$

Которая представляет собой симметричную форму записи системы ограничений ЗЛП. Осталось преобразовать целевую функцию. Для этого в равенстве $f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ нужно заменить переменные $x_1,...,x_r$ по формулам (1.13):

$$f = (c_1x_1 + ... + c_rx_r) + (c_{r+1}x_{r+1} + ... + c_nx_n) =$$
$$= c_1(\beta_1 + \alpha_{11}x_{r+1} + ... + \alpha_{1n-r}x_n) + ... + c_r(\beta_r + \alpha_{r1}x_{r+1} + ... + \alpha_{rn-r}x_n) + (c_{r+1}x_{r+1} + ... + c_nx_n) =$$
$$= (c_1\beta_1 + ... + c_r\beta_r) + (c_1\alpha_{11} + ... + c_r\alpha_{r1} + c_{r+1})x_{r+1} + ... + (c_1\alpha_{1n-r} + ... + c_r\alpha_{rn-r} + c_n)x_n.$$

Перейдём к целевой функции $g = -f$ и получим симметричную задачу: найти минимум функции

$$g = -(c_1\beta_1 + ... + c_r\beta_r) - (c_1\alpha_{11} + ... + c_r\alpha_{r1} + c_{r+1})x_{r+1} - ... - (c_1\alpha_{1n-r} + ... + c_r\alpha_{rn-r} + c_n)x_n$$

при системе ограничений (1.14) и $x_1,...,x_r \geq 0$.

Симплекс-метод

Симплекс-метод – это универсальный метод решения ЗЛП, состоящий в последовательном переходе от одного опорного плана к другому с увеличением значения целевой функции. Этот метод называют также методом последовательного улучшения плана.

Этапы симплекс-метода

Применение симплекс-метода состоит в последовательном прохождении следующих четырёх этапов:

1) запись ЗЛП в канонической форме;
2) нахождение некоторого опорного плана, который назовём начальным опорным планом (НОП);
3) проверка выполнения условий завершения работы; если условия не выполняются, нужно перейти к следующему пункту;
4) провести улучшение плана и перейти к п. 3.

Симплекс-таблица

Предположим, мы нашли некоторый опорный план, которому соответствует система равенств (1.13), и пусть $f = c_1x_1 + \ldots + c_nx_n$ – целевая функция. Подставим $x_1,\ldots,x_r$ в виде (1.13) в выражение целевой функции. Тогда f выразится через переменные $x_{r+1},\ldots,x_n$:

$$f = \beta_0 + \alpha_{01}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{0n-r}x_n. \tag{1.15}$$

Равенства (1.13) и (1.15) удобно кратко записать в виде таблицы

$$
\begin{array}{r|c|l|}
 & & \underline{x_{r+1}\ldots\ldots x_n} \\
x_1 = & \beta_1 & \alpha_{11}\ldots\ldots\alpha_{1n-r} \\
\ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x_r = & \beta_r & \alpha_{r1}\ldots\ldots\alpha_{rn-r} \\
f = & \beta_0 & \alpha_{01}\ldots\ldots\alpha_{0n-r}
\end{array}
\tag{1.16}
$$

Таблица (1.16) называется симплекс-таблицей рассматриваемой задачи. Последняя строка называется *f*-строкой. Напомним, что в силу неотрицательности опорного плана обязательно $\beta_1,\ldots,\beta_r \geq 0$, а функция f исследуется на максимум. Проведение симплекс-метода состоит в преобразовании симплекс таблицы.

Перейдём к подробному рассмотрению этапов симплекс-метода. П. 1 нами уже рассмотрен выше. П. 2 – рассмотрим последним. Перейдём к п. 3.

Признак оптимальности опорного плана

Если в *f*-строке элементы $\alpha_{01},\ldots,\alpha_{0n-r}$ неположительны $(\alpha_{0j} \leq 0)$, то данный опорный план оптимален: $X_{\text{opt}} = (\beta_1,\ldots,\beta_r,0,\ldots,0)$ Б, и $f_{\max} = \beta_0$.

Действительно, так как $x_{r+1},\ldots,x_n \geq 0$ и $\alpha_{01},\ldots,\alpha_{0n-r} \leq 0$, то $\alpha_{01}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{0n-r}x_n \leq 0$ и $f = \beta_0 + \alpha_{01}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{0n-r}x_n \leq \beta_0$. Поэтому при $x_{r+1},\ldots,x_n = 0$ достигается максимум, равный β_0: $f_{\max} = \beta_0$.

Признак множественности оптимальных планов

Пусть данный опорный план невырожден $(\beta_1,\ldots,\beta_r > 0)$, оптимален, $(\alpha_{01},\ldots,\alpha_{0n-r} \leq 0)$, причём некоторый из этих элементов α_{0j} равен нулю. Тогда множество оптимальных планов бесконечно.

Действительно, допустим $\alpha_{0j} = 0$. Тогда целевая функция f не зависит от переменной x_{r+j} и не меняется при изменении x_{r+j}. При малом изменении значения свободной переменной x_{r+j} значения базисных переменных также изменятся мало. Поскольку для рассматриваемого опорного плана $x_{r+j} = 0,\ x_1 = \beta_1 > 0,\ldots,x_r = \beta_r > 0$, то при малом положительном изменении переменной x_{r+1} переменные $x_1,\ldots,x_r$ останутся положительными, и мы получим бесконечное множество оптимальных планов. Очевидно, увеличивать значение x_{r+j} можно до тех пор, пока некоторая базисная переменная не станет равной нулю.

Признак неограниченности целевой функции.

Если в *f*-строке имеется положительный элемент α_{0j} и все остальные элементы столбца неотрицательны ($\alpha_{1j},\ldots,\alpha_{rj} \geq 0$), то $f_{\max} = +\infty$.

Действительно, неограниченно увеличивая x_{r+j}, мы неограниченно увеличиваем *f*, при этом $x_1,\ldots,x_r$ могут только расти, то есть останутся неотрицательными.

Описание п. 3 закончено.

Описание шага улучшения опорного плана

Перейдём к п. 4 симплекс-метода. Пусть данный ОП описывается симплекс-таблицей

$$\begin{array}{r|c|c|} & & \underline{x_{r+1}\ldots\ldots x_n} \\ x_1 = & \beta_1 & \alpha_{11}\ldots\ldots\alpha_{1n-r} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r = & \beta_r & \alpha_{r1}\ldots\ldots\alpha_{rn-r} \\ f = & \beta_0 & \alpha_{01}\ldots\ldots\alpha_{0n-r} \end{array} \qquad (1.17)$$

и неоптимален. Последнее означает, что среди элементов $\alpha_{01},...,\alpha_{0n-r}$ имеется положительный. Пусть $\alpha_{0j} > 0$ и столбец $\alpha_{1j},...,\alpha_{rj}$ содержит отрицательный элемент (иначе $f_{\max} = +\infty$). Назовём этот столбец разрешающим. Нашей целью является перевод свободной переменной x_j в число базисных. Для этого рассмотрим все отрицательные элементы в j-том столбце (элементы, для которых $\alpha_{ij} < 0$ при $1 \le i \le r$) и вычислим для них отношения $\frac{\beta_i}{-\alpha_{ij}}$, которые называются симплекс-отношениями. Так как $\alpha_{ij} < 0$, то $\frac{\beta_i}{-\alpha_{ij}} \ge 0$. Строка, для которой симплекс-отношение окажется наименьшим, выбирается в качестве разрешающей. Это означает, что мы будем менять ролями переменные x_i и x_j: первая перейдёт в число свободных, вторая в число базисных. Соответствующий элемент α_{ij} называется разрешающим элементом. Затем симплекс-таблица пересчитывается. Отрицательность разрешающего элемента α_{ij} и минимальность симплекс-отношения $\frac{\beta_i}{-\alpha_{ij}}$ обеспечивают неотрицательность нового базисного решения. При пересчёте к значению целевой функции будет добавлено неотрицательное слагаемое и функция сможет только вырасти. Подробности покажем на примере.

ПРИМЕР

Найти оптимальный план для ЗЛП, данной в виде симплекс-таблицы

$$\begin{array}{r|c|cc|} & & x_3 & x_4 \\ x_1 = & 4 & 1 & \boxed{-2} \\ x_2 = & 12 & -2 & -1 \\ f = & -4 & 2 & 3 \end{array}$$

РЕШЕНИЕ. В *f*-строке элементы 2 и 3 положительны – план неоптимален. Выберем больший элемент и с ним – разрешающий столбец, соответствующий x_4. В нём элементы -1 и -2 отрицательны. Вычисляем симплекс отношения: $\frac{4}{2}, \frac{12}{1}$; $\min\left\{\frac{4}{2}, \frac{12}{1}\right\} = \frac{4}{2}$. Значит, первая строка является разрешающей, а разрешающим элементом – элемент -2. Пересчитаем таблицу, используя технику метода Гаусса. В разрешающем столбце получим -1 в разрешающей строке и нули на остальных местах. Пересчёт описывается в квадратных скобках.

$$\begin{array}{r|c|cc|} & & x_3 & x_4 \\ x_1 = & 4 & 1 & -2^{-1} \\ x_2 = & 12 & -2 & -1^{0} \\ f = & -4 & 2 & 3^{0} \end{array} \to \begin{bmatrix} II = II - I/2 \\ f = f + 3I/2 \\ I = I/2 \end{bmatrix} \to \begin{array}{r|c|cc|} & & x_3 & x_4 \\ x_1/2 = & 2 & 1/2 & -1 \\ x_2 - x_1/2 = & 10 & -5/2 & 0 \\ f + 3x_1/2 = & 2 & 7/2 & 0 \end{array} \to \begin{array}{r|c|cc|} & & x_3 & x_1 \\ x_4 = & 2 & 1/2 & -1/2 \\ x_2 = & 10 & \boxed{-5/2} & 1/2 \\ f = & 2 & 7/2 & -3/2 \end{array}.$$

В *f*-строке остался положительный элемент $7/2$. Над ним только один отрицательный – во второй строке. Итак, разрешающими являются первый столбец и вторая строка. Пересчитываем таблицу:

$$\begin{array}{r|c|cc|} & & x_2 & x_1 \\ x_4 = & 4 & -1/5 & -2/5 \\ x_3 = & 4 & -2/5 & 1/5 \\ f = & 16 & -7/5 & -4/5 \end{array}.$$

В *f*-строке получены отрицательные элементы, значит план оптимален:

$$f_{\text{opt}} = f_{\max} = 16,\ X_{\text{opt}} = (0;0;4;4).$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Пересчёт таблицы следует начинать с *f*-строки. Если она получилась отрицательной, достаточно найти только столбец свободных членов.

Нахождение начального опорного плана

Перейдём к п. 2 симплекс-метода. Запишем ограничительное условие $AX = B$ в развёрнутом виде и преобразуем его, положив $a_i = -b_i$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \to \left[a_i = -b_i\right] \to \begin{cases} 0 = a_1 + a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = a_m + a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n \end{cases}.$$

Мы покажем, как: 1) выделить базисную переменную с неотрицательным свободным членом из первого уравнения; 2) выделив базисные переменные с неотрицательными свободными членами из первых k уравнений, сделать то же с $k+1$-м уравнением.

Начнём с первого уравнения. Если $a_1 < 0$, умножим его на -1. Поэтому можно сразу считать $a_1 \geq 0$.

А. Предположим, что все коэффициенты $a_{11}, \ldots, a_{1n}$ неотрицательны. Если $a_1 > 0$, то первое уравнение не имеет решений и множество планов пусто. Если $a_1 = 0$, то получаем уравнение $a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n = 0$. Так как $x_1, \ldots, x_n \geq 0$, то для всех j с положительными a_{1j} получаем $x_j = 0$. Таким образом часть переменных получают нулевое значение и нужно рассматривать оставшиеся уравнения с меньшим числом переменных.

Б. Пусть теперь среди $a_{11}, \ldots, a_{1n}$ имеется отрицательный элемент, например, $a_{11} < 0$. Тогда из первого уравнения получаем

$$x_1 = -\frac{a_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 - \ldots - \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n; \quad -\frac{a_1}{a_{11}} \geq 0.$$

Мы выделили базисную переменную из первого уравнения. Допустим, нам удалось сделать это с k уравнениями:

$$\begin{cases} x_1 = \beta_1 + \alpha_{11}x_{k+1} + \ldots + \alpha_{1n-k}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_k = \beta_k + \alpha_{k1}x_{k+1} + \ldots + \alpha_{kn-k}x_n \\ 0 = \beta_{k+1} + \alpha_{k+11}x_{k+1} + \ldots + \alpha_{k+1n-k}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0 = \beta_m + \alpha_{m1}x_{k+1} + \ldots + \alpha_{mn-k}x_n \end{cases}.$$

Повторяем для $k+1$-ого уравнения рассуждения, проведённые для первого, включая пункт А. Поэтому можем считать, что $\beta_{k+1} \geq 0$ и среди $a_{k+11}, \ldots, a_{k+1n-k}$ имеется отрицательный элемент. Далее рассматриваем соответствующий столбец как разрешающий и вычисляем симплекс-отношения, учитывая только первые $k+1$-но уравнение. Если минимум симплекс-отношений окажется в $k+1$-й строке, мы получим в этой строке разрешающий элемент и переведём соответствующую переменную в базис. Если минимум симплекс-отношений не достигается в $k+1$-й строке, нужно поменять состав базисных и свободных переменных, проводя преобразование первых k уравнений. Затем возвращаемся к $k+1$-му уравнению и повторяем те же рассуждения. В результате мы либо получим базисную переменную в $k+1$-й строке с неотрицательным свободным членом, либо получим $\beta_{k+1} \geq 0$ и $a_{k+11}, \ldots, a_{k+1n-k} \geq 0$. В первом случае переходим к $k+2$-й строке, во втором – повторяем рассуждения, проведённые для первого уравнения в аналогичном случае.

Всю описанную работу удобно проводить, используя симплекс-таблицу.

ПРИМЕРЫ

Найти НОП и выразить целевую функцию через свободные переменные.

$$1.\ f = 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 6x_4,\ \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 16 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 = 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}.$$

РЕШЕНИЕ. Запишем условие задачи в виде симплекс-таблицы. Будем оставлять справа все столбцы коэффициентов, располагая их в порядке нумерации, что освобождает от необходимости их подписывать. Разрешающий элемент будем заключать в рамку.

$$\begin{array}{r|c|cccc|} 0 = & 16 & \boxed{-1} & -1 & -1 & -3 \\ 0 = & 8 & 1 & -1 & -3 & 1 \\ f = & 0 & 2 & -1 & -2 & 6 \end{array} \to \begin{bmatrix} II = II + I \\ f = f + 2I \end{bmatrix} \to \begin{array}{r|c|cccc|} x_1 = & 16 & 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 = & 24 & 0 & -2 & -4 & -2 \\ f = & 32 & 0 & -3 & -4 & 0 \end{array} \to \left[\min\left\{\frac{16}{1}; \frac{24}{2}\right\} = \frac{24}{2} \right] \to$$

$$\to \begin{array}{r|c|cccc|} x_1 = & 16 & 0 & -1 & -1 & -3 \\ 0 = & 24 & 0 & \boxed{-2} & -4 & -2 \\ f = & 32 & 0 & -3 & -4 & 0 \end{array} \to \begin{bmatrix} I = I - II/2 \\ f = f - 3II/2 \\ II = II/2 \end{bmatrix} \to \begin{array}{r|c|cccc|} x_1 = & 4 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ x_2 = & 12 & 0 & 0 & -2 & -1 \\ f = & -4 & 0 & 0 & 2 & 3 \end{array}.$$

Мы нашли начальную симплекс-таблицу. НОП: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (4;12;0;0)$; $f = -4 + 2x_3 + 3x_4$.

$$2.\ f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4,\ \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 6 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}.$$

РЕШЕНИЕ

$$\begin{array}{r|c|cccc|} 0 = & 6 & -3 & -2 & 1 & \boxed{-1} \\ 0 = & 8 & -4 & 2 & -1 & 2 \\ f = & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \to \begin{bmatrix} II = II + 2I \\ f = f + I \end{bmatrix} \to \begin{array}{r|c|cccc|} x_4 = & 6 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 = & 20 & -10 & -2 & 1 & 0 \\ f = & 6 & -2 & -1 & 2 & 0 \end{array}.$$

Вычислим симплекс-отношения для первого и второго столбца:

$$\min\left\{\frac{6}{3}; \frac{20}{10}\right\} = 2 = \frac{6}{3} = \frac{20}{10},\ \min\left\{\frac{6}{2}; \frac{20}{2}\right\} = \frac{6}{2}.$$

Первый столбец позволяет получить базисную переменную во второй строке, второй этого сделать не позволяет.

$$\begin{array}{r|c|cccc|} x_4 = & 6 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 = & 20 & \boxed{-10} & -2 & 1 & 0 \\ f = & 6 & -2 & -1 & 2 & 0 \end{array} \to \begin{array}{r|c|cccc|} x_4 = & 0 & 0 & -7/5 & 7/10 & 0 \\ x_1 = & 2 & 0 & -1/5 & 1/10 & 0 \\ f = & 2 & 0 & -3/5 & 9/5 & 0 \end{array}.$$

НОП найден: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (2;0;0;0)$; $f = 2 - \dfrac{3}{5}x_2 + \dfrac{9}{5}x_3$. Мы получили вырожденный ОП, так как базисная переменная x_4 равна нулю.

$$3.\ f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4,\ \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}.$$

РЕШЕНИЕ

$$\begin{array}{r} 0 = \\ 0 = \\ f = \end{array}\left|\begin{array}{c|cccc} 5 & -3 & -2 & 1 & \boxed{-1} \\ 8 & -4 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right| \to \left[\begin{array}{c} II = II + 2I \\ f = f + I \end{array}\right] \to \begin{array}{r} x_4 = \\ 0 = \\ f = \end{array}\left|\begin{array}{c|cccc} 5 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 18 & -10 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right|.$$

Вычислим симплекс-отношения для первого и второго столбца:

$$\min\left\{\frac{5}{3};\frac{18}{10}\right\} = \frac{5}{3},\ \min\left\{\frac{5}{2};\frac{18}{2}\right\} = \frac{5}{2}.$$

Оба столбца делают разрешающей первую строку.

$$\begin{array}{r} x_4 = \\ 0 = \\ f = \end{array}\left|\begin{array}{c|cccc} 5 & -3 & \boxed{-2} & 1 & 0 \\ 18 & -10 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right| \to \begin{array}{r} x_2 = \\ 0 = \\ f = \end{array}\left|\begin{array}{c|cccc} 5/2 & -3/2 & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 13 & -7 & 0 & 0 & 1 \\ 5/2 & -1/2 & 0 & 3/2 & 1/2 \end{array}\right| \to \left[\min\left\{\frac{5}{2}:\frac{3}{2};13:7\right\} = \frac{5}{3}\right] \to$$

$$\to \begin{array}{r} x_2 = \\ 0 = \\ f = \end{array}\left|\begin{array}{c|cccc} 5/2 & \boxed{-3/2} & 0 & 1/2 & -1/2 \\ 13 & -7 & 0 & 0 & 1 \\ 5/2 & -1/2 & 0 & 3/2 & 1/2 \end{array}\right| \to \begin{array}{r} x_1 = \\ 0 = \\ f = \end{array}\left|\begin{array}{c|cccc} 5/3 & 0 & -2/3 & 1/3 & -1/3 \\ 4/3 & 0 & 14/3 & \boxed{-7/3} & 10/3 \\ 5/3 & 0 & 1/3 & 4/3 & 2/3 \end{array}\right| \to \begin{array}{r} x_1 = \\ x_3 = \\ f = \end{array}\left|\begin{array}{c|cccc} 13/7 & 0 & 0 & 0 & 1/7 \\ 4/7 & 0 & 2 & 0 & 10/7 \\ 17/7 & 0 & 3 & 0 & 18/7 \end{array}\right|.$$

НОП: $(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\dfrac{13}{7};0;\dfrac{4}{7};0\right)$; $f = \dfrac{17}{7} + 3x_1 + \dfrac{18}{7}x_3$.

$$4.\ f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4,\ \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}.$$

РЕШЕНИЕ. В силу условия $x_1, x_2 \ge 0$ из первого уравнения получаем $x_1 = x_2 = 0$. Получаем задачу

$$f = x_3 + x_4,\ \begin{cases} x_3 - 2x_4 = 8 \\ x_3, x_4 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow f = 8 + 3x_4\ \begin{cases} x_3 = 8 + 2x_4 \\ x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}.$$

$$5.\ f = x_1 + x_2 + x_3 + x_4,\ \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = -1 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 8 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}.$$

РЕШЕНИЕ. Первое уравнение не имеет неотрицательных решений. Множество планов пусто.

Примеры полного решения ЗЛП симплекс-методом

1. Рассмотрим уже известную задачу

$$f = 2x_1 + 3x_2 \ (\max), \ \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ x_1 - x_2 \geq -1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

Выше мы решили эту задачу графически: $f_{\max} = f(D) = 20{,}5$ (см. рис. 1). Теперь решим ее симплекс-методом. Запишем задачу в канонической форме:

$$f = 2x_1 + 3x_2 \quad (\max), \ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 8 \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = 2 \\ x_1 - x_2 - x_6 = -1 \\ x_1, \ldots, x_6 \geq 0 \end{cases}.$$

Запишем данные задачи в симплекс-таблицу.

$$\begin{array}{r|c|ccccccc|} 0 = & 2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 = & 8 & -1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 = & 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 = & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ f = & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \tag{1.18}$$

Перейдем к поиску НОП. Сразу можно перевести в базис x_4, x_5, x_6 из второй, третьей и четвертой строки. Из первой строки можно перевести в базис x_1, так как для первого столбца в первой строке имеется минимальное симплекс-отношение: $\min\left\{\frac{2}{1}, \frac{8}{1}, \frac{2}{1}\right\} = \frac{2}{1}$. Получаем новую симплекс-таблицу

$$\begin{array}{r|c|cccccc|} x_1 = & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_4 = & 6 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ x_5 = & 0 & 0 & 4 & \boxed{-1} & 0 & 0 & 0 \\ x_6 = & 3 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ f = & 4 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array} \tag{1.19}$$

НОП найден: $x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 6, x_5 = 0, x_6 = 3$. На рисунке 1 это точка B. Переходим к улучшению плана. В *f*-строке имеется положительный элемент, это 2. Значит, условие оптимальности не выполняется. В столбце, в котором стоит этот положительный элемент, имеются отрицательные элементы во второй и третьей строке $(-1;1)$; рассматриваем симплекс-отношения:

$\min\left\{\frac{6}{1};\frac{0}{1}\right\}=0$. Разрешающей является третья строка. Переводим x_3 в базисные переменные, а x_5 – в свободные:

$$\begin{array}{r|c|cccccc|} x_1 = & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ x_4 = & 6 & 0 & \boxed{-3} & 0 & 0 & 1 & 0 \\ x_3 = & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ x_6 = & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ f = & 4 & 0 & 7 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \qquad (1.20)$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы остались в той же точке $X=(2;0;0;6;0;3)$. Но состав базисных и свободных переменных изменился. На рисунке 1 мы перешли с левой стороны точки B на правую.

Условие оптимальности в полученной таблице не выполняется. Разрешающими являются столбец коэффициентов при x_2 и вторая строка. Пересчитываем таблицу:

$$\begin{array}{r|c|cccccc|} x_1 = & 6 & 0 & 0 & 0 & -2/3 & -1/3 & 0 \\ x_2 = & 2 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & 1/3 & 0 \\ x_3 = & 8 & 0 & 0 & 0 & -4/3 & 1/3 & 0 \\ x_6 = & 5 & 0 & 0 & 0 & -1/3 & \boxed{-2/3} & 0 \\ f = & 18 & 0 & 0 & 0 & -7/3 & 1/3 & 0 \end{array} \qquad (1.21)$$

На рисунке 1 мы перешли в точку C. Разрешающим является столбец коэффициентов при x_5; $\min\left\{6:\frac{1}{3};5:\frac{2}{3}\right\}=5:\frac{2}{3}$, значит, разрешающей является четвертая строка. Меняем ролями x_5 и x_6:

$$\begin{array}{r|c|cccccc|} x_1 = & 3,5 & 0 & 0 & 0 & -0,5 & 0 & 0,5 \\ x_2 = & 4,5 & 0 & 0 & 0 & -0,5 & 0 & -0,5 \\ x_3 = & 10,5 & 0 & 0 & 0 & -1,5 & 0 & -0,5 \\ x_5 = & 7,5 & 0 & 0 & 0 & -0,5 & 0 & -1,5 \\ f = & 20,5 & 0 & 0 & 0 & -2,5 & 0 & -0,5 \end{array} \qquad (1.22)$$

Условие оптимальности выполняется:

$$f_{\max}=\frac{41}{2}=20,5;\ X_{\text{opt}}=\left(3,5;\,4,5;\,10,5;\,0;\,7,5;\,0\right).$$

На рисунке 1 это точка D.

2. Рассмотрим ту же задачу, заменив второе ограничение на $2x_1+3x_2\le 6$. Будем сопровождать решение обращением к рисунку 3.

$$f = 2x_1 + 3x_2 \left(\max\right), \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ x_1 - x_2 \geq -1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

Геометрически мы получили здесь два оптимальных опорных плана – точки C' и D' на рисунке 3. Решая задачу симплекс-методом, повторим вычисления предыдущего примера, пересчитывая вторую строку. Вместо (1.18) получим таблицу

$$\begin{array}{r|c|cccccc|} 0= & 2 & -1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0= & 12 & -2 & -3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0= & 2 & -1 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0= & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ f= & 0 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Вместо (1.19) получим таблицу

$$\begin{array}{r|c|cccccc|} x_1= & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ x_4= & 8 & 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ x_5= & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ x_6= & 3 & 0 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ f= & 4 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Вместо (1.20) получим таблицу

$$\begin{array}{r|c|cccccc|} x_1= & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ x_4= & 8 & 0 & -7 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ x_3= & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ x_6= & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ f= & 4 & 0 & 7 & 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}$$

Вместо (1.21) получим таблицу

$$\begin{array}{r|c|cccccc|} x_1= & 30/7 & 0 & 0 & 0 & -2/7 & -3/7 & 0 \\ x_2= & 8/7 & 0 & 0 & 0 & -1/7 & 2/7 & 0 \\ x_3= & 32/7 & 0 & 0 & 0 & -4/7 & 1/7 & 0 \\ x_6= & 29/7 & 0 & 0 & 0 & -1/7 & -5/7 & 0 \\ f= & 12 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{array}$$

Условие оптимальности выполняется; $f_{\max} = 12$, $X_{\text{opt}} = \left(\frac{30}{7}; \frac{8}{7}; \frac{32}{7}; 0; 0; \frac{29}{7}\right)$. Но в f-строке при базисной переменной x_5 стоит нулевой коэффициент. Это значит, что x_5 может меняться без изменения *f*. Имеется множественность оптимальных планов. Если (по симплекс-отношениям) x_5 перевести в базисные, а x_6 – в свободные, получим второй оптимальный опорный план:

$$\begin{array}{r|c|cccccc|}
x_1 = & 9/5 & & & & & & \\
x_2 = & 14/5 & & & & & & \\
x_3 = & 27/5 & & & & & & \\
x_5 = & 29/5 & & & & & & \\
f = & 12 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0
\end{array}, \quad X'_{\text{opt}} = \left(\frac{9}{5};\frac{14}{5};\frac{27}{5};0;\frac{29}{5};0\right).$$

На рисунке 3 плану X_{opt} соответствует точка C', а плану X'_{opt} – точка D'.

3. Рассмотрим ту же задачу, удалив второе ограничение.

$$f = 2x_1 + 3x_2 \ (\max), \ \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ x_1 - 2x_2 \leq 2 \\ x_1 - x_2 \geq -1 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}.$$

Теперь таблица (1.20) примет вид

$$\begin{array}{r|c|cccccc|}
x_1 = & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
x_3 = & 0 & 0 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
x_6 = & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
f = & 4 & 0 & 7 & 0 & 0 & -2 & 0
\end{array}$$

Столбец коэффициентов при x_2 дает условие неограниченности целевой функции (все коэффициенты положительны); $f_{\max} = +\infty$.

Двойственные задачи

Формулировка двойственности

Рассмотрим симметричную ЗЛП

$$f = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \ (\max), \ \begin{cases} \sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i \ (i = 1, \ldots, m) \\ x_j \geq 0 \ (j = 1, \ldots, n) \end{cases}. \qquad (1.23)$$

На основании данных этой задачи можно сформулировать другую симметричную задачу:

$$g = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \ (\min), \ \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geq c_j \ (j = 1, \ldots, n) \\ y_i \geq 0 \ (i = 1, \ldots, m) \end{cases}. \qquad (1.24)$$

Задача (1.24) называется двойственной задаче (1.23).

Задача (1.23) равносильна задаче

$$F = \sum_{j=1}^{n} -c_j x_j \ (\min), \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} -a_{ij} x_j \ge -b_i \ (i = 1, \dots, m) \\ x_j \ge 0 \ (j = 1, \dots, n) \end{cases}, \tag{1.25}$$

а задача (1.24) равносильна задаче

$$G = \sum_{i=1}^{m} -b_i y_i \ (\max), \quad \begin{cases} \sum_{i=1}^{m} -a_{ij} y_i \le -c_j \ (j = 1, \dots, n) \\ y_i \ge 0 \ (i = 1, \dots, m) \end{cases}. \tag{1.26}$$

Тогда задача (1.25) двойственна задаче (1.26). Поэтому задачи (1.23) и (1.24) можно назвать взаимно двойственными.

Разрешимость двойственных задач

ТЕОРЕМА 1. Если одна из двойственных задач (1.23) и (1.24) имеет оптимальный план, то и другая имеет оптимальный план, при этом оптимальные значения целевых функций равны. То есть если $(x_1^*, \dots, x_n^*)$ и $(y_1^*, \dots, y_m^*)$ оптимальные планы, то $f(x_1^*, \dots, x_n^*) = g(y_1^*, \dots, y_m^*)$, то есть $f_{\text{opt}} = g_{\text{opt}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО проводится согласованным преобразованием симплекс-таблиц обеих задач.

Связь оптимальных планов двойственных задач

Запишем задачи (1.23) и (1.24) в канонической форме. Это приведёт к появлению дополнительных переменных $x_{n+1}, \dots, x_{n+m}$ и $y_{m+1}, \dots, y_{m+n}$. Значит, в канонической форме двойственные задачи имеют одинаковое число переменных – $m+n$. Установим между этими переменными следующие соответствия:

$$\begin{array}{cccccccc} x_1 & x_2 & \dots & x_n & x_{n+1} & x_{n+2} & \dots & x_{n+m} \\ \updownarrow & \updownarrow & \dots & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \dots & \updownarrow \\ y_{m+1} & y_{m+2} & \dots & y_{m+n} & y_1 & y_2 & \dots & y_m \end{array} \tag{1.27}$$

ТЕОРЕМА 2. Пусть двойственные задачи имеют решение. Тогда в канонической форме они обладают такими оптимальными планами $(x_1^*, \dots, x_{n+m}^*)$ и $(y_1^*, \dots, y_{m+n}^*)$, что соответствия (1.27) связывают базисные переменные одного плана со свободными переменного второго плана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Этот факт устанавливается в процессе доказательства теоремы 1.

Злп с переменными данными и двойственность

Рассмотрим задачу (1.23) с переменными свободными членами $b_1, \dots, b_m$. Тогда оптимальное значение целевой функции f будет зависеть от $b_1, \dots, b_m$. Обозначим эту зависимость выражением $f^*(b_1, \dots, b_m)$. Очевидно оптимальный план $(y_1^*, \dots, y_m^*)$ двойственной задачи так же зависит от $b_1, \dots, b_m$.

ТЕОРЕМА 3. Справедливо равенство

$$\frac{\partial f^*}{\partial b_i} = y_i^* \ (i = 1, \ldots, m). \tag{1.28}$$

БЕЗ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА.

ЗАМЕЧАНИЕ. Равенство (1.28), говорит, что величина y_i^* равна скорости роста оптимального значения f^* при увеличении параметра b_i.

ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ теоремы 3. Пусть параметры имеют смысл ресурсов экономической деятельности, а функция f характеризует эффективность этой деятельности. Допустим $y_i^* = 0$. Тогда из (1.28) следует, что увеличение ресурса b_i не увеличивает оптимальную эффективность f^*. Такой ресурс назовём бездефицитным. Если $y_i^* > 0$, то рост b_i влечёт рост f^*. Такой ресурс назовём дефицитным. Наиболее ценен ресурс с наибольшим значением y_i^*.

ПРИМЕР

Ещё раз рассмотрим задачу

$$f = 2x_1 + 3x_2 \ (\max), \ \begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 2 \\ x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 - 2x_2 \le 2 \\ x_1 - x_2 \ge -1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}. \tag{1.29}$$

Запишем её в канонической форме и перейдём к двойственной задаче:

$$f = 2x_1 + 3x_2 \ (\max), \ \begin{cases} -x_1 - 2x_2 \le -2 \\ x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 - 2x_2 \le 2 \\ -x_1 + x_2 \le 1 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases},$$

$$g = -2y_1 + 8y_2 + 2y_3 + y_4 \ (\min), \ \begin{cases} -y_1 + y_2 + y_3 - y_4 \ge 2 \\ -2y_1 + y_2 - 2y_3 + y_4 \ge 3. \\ y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0 \end{cases}$$

Перейдём к канонической форме:

$$G = -g = 2y_1 - 8y_2 - 2y_3 - y_4 \ (\max), \ \begin{cases} -y_1 + y_2 + y_3 - y_4 - y_5 = 2 \\ -2y_1 + y_2 - 2y_3 + y_4 - y_6 = 3. \\ y_1, y_2, y_3, y_4, y_5, y_6 \ge 0 \end{cases}$$

Запишем симплекс-таблицу и найдём НОП:

$$\begin{array}{r|r|rrrrrr|}
0= & 2 & 1 & \boxed{-1} & -1 & 1 & 1 & 0 \\
0= & 3 & 2 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 \\
G= & 0 & 2 & -8 & -2 & -1 & 0 & 0
\end{array} \rightarrow
\begin{array}{r|r|rrrrrr|}
y_2= & 2 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\
0= & 1 & 1 & 0 & 3 & -2 & \boxed{-1} & 1 \\
G= & -16 & -6 & 0 & 6 & -9 & -8 & 0
\end{array} \rightarrow
\begin{array}{r|r|rrrrrr|}
y_2= & 3 & 2 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\
y_5= & 1 & 1 & 0 & 3 & -2 & 0 & 1 \\
G= & -24 & -14 & 0 & -18 & 7 & 0 & -8
\end{array}.$$

Проведём улучшение плана:

$$\begin{array}{r|r|rrrrrr|}
y_2= & 3 & 2 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \\
y_5= & 1 & 1 & 0 & 3 & \boxed{-2} & 0 & 1 \\
G= & -24 & -14 & 0 & -18 & 7 & 0 & -8
\end{array} \rightarrow
\begin{array}{r|r|rrrrrr|}
y_2= & 2{,}5 & & & & & & \\
y_4= & 0{,}5 & & & & & & \\
G= & -20{,}5 & -10{,}5 & 0 & -7{,}5 & 0 & -3{,}5 & -4{,}5
\end{array}.$$

Условие оптимальности выполняется. Двойственная задача решена: $G_{\text{opt}} = -20{,}5;\ g_{\text{opt}} = 20{,}5;\ (y_1^*; y_2^*; y_3^*; y_4^*; y_5^*; y_6^*) = (0; 2{,}5; 0; 0{,}5; 0; 0)$.

Теперь решим исходную задачу, используя теоремы 1 и 2. По теореме 1 имеем $f_{\text{opt}} = g_{\text{opt}} = 20{,}5$. По теореме 2: так как y_2, y_4 – базисные, то x_4, x_6 – свободные; значит, $x_4 = x_6 = 0$. Тогда система ограничений задачи (1.29) в канонической форме примет вид

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + x_2 = 8 \\ x_1 - 2x_2 + x_5 = 2 \\ x_1 - x_2 = -1 \end{cases}, \quad \begin{cases} x_1 = 3{,}5 \\ x_2 = 4{,}5 \\ x_3 = 10{,}5 \\ x_5 = 7{,}5 \end{cases}.$$

Решая систему, получаем $(x_1^*; x_2^*; x_3^*; x_4^*; x_5^*; x_6^*) = (3{,}5;\ 4{,}5; 10{,}5;\ 0;\ 7{,}5;\ 0)$. Исходная задача решена: $f_{\text{opt}} = 20{,}5;\ X_{\text{opt}} = (3{,}5; 4{,}5)$.

2. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА

Постановка задачи

Основные понятия

Транспортная задача (ТЗ) – это задача нахождения наиболее экономного плана перевозок однородного продукта от нескольких поставщиков к нескольким потребителям.

Пусть имеется m поставщиков, обозначим их $A_1, \ldots, A_m$, которые обладают запасами однородного продукта в объёмах $a_1, \ldots, a_m$ единиц соответственно. И пусть имеется n потребителей данного продукта, обозначим их $B_1, \ldots, B_n$, потребности которых составляют $b_1, \ldots, b_n$ единиц соответственно. Стоимость перевозки единицы продукта от поставщика A_i к потребителю B_j назовём транспортным тарифом, обозначим через c_{ij} и будем считать известной. Все тарифы составляют матрицу тарифов $C = (c_{ij})$. Введём переменную x_{ij}, выражающую воображаемый объём продукта, перевезённого от A_i к B_j, а матрицу $X=(x_{ij})$ назовём матрицей перевозок. Суммарная величина затрат на перевозку по плану $X=(x_{ij})$ выражается функцией $f=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}c_{ij}x_{ij}$. Задача состоит в нахождении такого плана перевозок, при котором величина затрат – минимальна при максимальном удовлетворении спроса потребителей.

Закрытая транспортная задача

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ТЗ называется закрытой, если суммарный объём запасов равен суммарному объёму потребностей, то есть выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j\,. \tag{2.1}$$

В этом случае потребители полностью удовлетворят свои потребности, а поставщики полностью избавятся от запасов. Это выражается равенствами

$$\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j\ (j=1,\ldots,n),\ \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i\ (i=1,\ldots,m)\,.$$

Мы получаем каноническую ЗЛП

$$f=\sum_{i,j}c_{ij}x_{ij}\ (\min),\ \begin{cases}\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j\ (j=1,\ldots,n)\\ \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i\ (i=1,\ldots,m)\\ x_{ij}\ge 0\ (i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n)\end{cases}. \tag{2.2}$$

ТЕОРЕМА. Множество планов задачи (2.2) (то есть закрытой ТЗ) не пусто. Ранг матрицы системы ограничений равен $m+n-1$.

Из теоремы легко следует, что закрытая ТЗ имеет решение.

Открытая транспортная задача

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ТЗ называется открытой, если равенство (2.1) нарушается, т.е.

$$\sum_{i=1}^{m}a_i\ne\sum_{j=1}^{n}b_j\,.$$

Возможны два случая. 1. $\sum_{i=1}^{m}a_i>\sum_{j=1}^{n}b_j$. Запасы превышают потребности. Все потребности будут удовлетворены, и часть запасов останется у поставщиков. Получаем ЗЛП

$$f=\sum_{i,j}c_{ij}x_{ij}\ (\min),\ \begin{cases}\sum_{i=1}^{m}x_{ij}=b_j\ \ (j=1,\dots,n)\\ \sum_{j=1}^{n}x_{ij}\le a_i\ \ (i=1,\dots,m)\\ x_{ij}\ge 0\ (i=1,..,m;\ j=1,\dots,n)\end{cases}. \qquad (2.3)$$

2. $\sum_{i=1}^{m}a_i<\sum_{j=1}^{n}b_j$. Потребности превышают запасы. Все запасы будут израсходованы, но не все потребности будут удовлетворены. Получаем ЗЛП

$$f=\sum_{i,j}c_{ij}x_{ij}\ (\min),\ \begin{cases}\sum_{i=1}^{m}x_{ij}\le b_j\ \ (j=1,\dots,n)\\ \sum_{j=1}^{n}x_{ij}=a_i\ \ (i=1,\dots,m)\\ x_{ij}\ge 0\ (i=1,\dots,m;\ j=1,\dots,n)\end{cases}. \qquad (2.4)$$

Задачи (2.3) и (2.4) не являются каноническими. Приведение их к канонической форме требует введения новых переменных. В задаче (2.3) это можно трактовать как введение фиктивного потребителя B_{n+1} с потребностью $b_{n+1}=\sum_{i=1}^{m}a_i-\sum_{j=1}^{n}b_j$ и нулевыми транспортными тарифами. Аналогично, в задаче (2.4) вводится фиктивный поставщик с запасом $a_{m+1}=\sum_{j=1}^{n}b_j-\sum_{i=1}^{m}a_i$ и нулевыми тарифами. Введение фиктивного поставщика или потребителя превращает открытую ТЗ в закрытую. Поэтому достаточно указать метод решения закрытой ТЗ. Для решения ТЗ, как и любой ЗЛП, можно использовать симплекс-метод. Ниже будет указан специальный метод – метод потенциалов.

Метод потенциалов

Общая структура метода

Метод потенциалов структурно организован, как и симплекс-метод, то есть требует прохождения четырёх этапов:

1) записать ТЗ в канонической форме;

2) найти начальный опорный план (НОП);

3) проверить выполнение условий завершения работы; если условия не выполняются, – перейти к следующему пункту;

4) провести улучшение плана и перейти к п. 3.

Мы видели, что закрытая ТЗ является канонической ЗЛП. Если задача – открытая, то её нужно свести к закрытой (добавив фиктивного поставщика или потребителя).

Для проведения метода потенциалов удобно использовать специальную прямоугольную таблицу, имеющую m строк и n столбцов, которая называется распределительной таблицей транспортной задачи. Паре $(A_i; B_j)$ сопоставим клетку в *i*-той строке и *j*-том столбце. В углу этой клетки запишем тариф c_{ij}. Пусть матрица перевозок $X = (x_{ij})$ даёт опорный план. Напомним, что число базисных переменных равно $m+n-1$. Для каждого базисного x_{ij} запишем его значение в центре соответствующей клетки таблицы и назовём эту клетку загруженной. Клетки, соответствующие свободным переменным, оставим пустыми и назовём свободными.

Нахождение начального опорного плана

Для получения опорного плана нужно получить $m+n-1$-ну загруженную клетку в распределительной таблице. Это легко делается последовательным образом за $m+n-1$ шаг, начиная с произвольной клетки. На каждом шаге загружается максимальным образом одна клетка, после чего из таблицы мысленно удаляется (вычёркивается) одна строка или один столбец. На последнем шаге одновременно удаляются последняя строка и последний столбец. Начнём загрузку с клетки $(i; j)$. Если $a_i < b_j$, положим $x_{ij} = a_i$ и удалим *i*-тую строку; если $a_i > b_j$, положим $x_{ij} = b_j$ и удалим *j*-тый столбец; если $a_i = b_j$, положим $x_{ij} = a_i = b_j$ и удалим либо *i*-тую строку, либо *j*-тый столбец, но делаем ровно одно удаление. После удаления получаем меньшую таблицу, с которой поступаем так же. За $m+n-1$ шаг мы удалим m строк и n столбцов (на последнем шаге – два удаления) и полностью исчерпаем таблицу.

ТЕОРЕМА 1. План, полученный описанным выше образом, является опорным.

Для того, чтобы НОП был возможно ближе к оптимальному, следует на каждом шаге максимально загружать клетки с минимальным тарифом. Такой метод получения НОП называется методом НАИМЕНЬШЕГО ЭЛЕМЕНТА.

ПРИМЕР 1

Найти НОП, если

$$\begin{matrix} a_1 = 5,\ a_2 = 10,\ a_3 = 15; \\ b_1 = 8,\ b_2 = 16,\ b_3 = 6; \end{matrix} \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

РЕШЕНИЕ. Проверим закрытость задачи: $a_1 + a_2 + a_3 = 30, b_1 + b_2 + b_3 = 30$; $\sum a_i = \sum b_j$ – задача закрытая. По методу наименьшего элемента последовательно загружаем клетки $(2;3)$, $(3;2)$, $(2;2)$, $(2;1)$, $(1;1)$, что даёт следующие удаления: B_3, A_3, B_2, A_2, A_1 и B_1. Для наглядности номера удалений указаны в таблице

	$B_1(5)$	$B_2(3)$	$B_3(1)$	
$A_1(5)$	5 ^{6}	^{5}	^{3}	5
$A_2(4)$	3 ^{4}	1 ^{2}	6 ^{1}	10
$A_3(2)$	^{3}	15 ^{2}	^{4}	15
	8	16	6	$\Sigma = 30$

ВЫРОЖДЕННЫЙ ОП

Выше мы определили вырожденный ОП как ОП с нулевым значением некоторых базисных переменных. Для ТЗ такое может случиться, если на каком-то шаге загрузки возможно удаление и строки, и столбца.

ПРИМЕР 2

	$B_1(7)$	$B_2(3)$	$B_3(6)$	$B_4(1)$	$B_5(2)$	
$A_1(5)$	0 ^{2}	10 ^{1}	^{3}	^{4}	^{5}	10
$A_2(4)$	^{4}	^{3}	0 ^{2}	25 ^{1}	^{6}	25
$A_3(7)$	6 ^{5}	^{4}	12 ^{3}	^{2}	17 ^{1}	35
	6	10	12	25	17	$\Sigma = 70$

Последовательно загружаем клетки $(2;4)$, $(3;5)$, $(1;2)$, $(2;3)$, $(1;1)$, $(3;3)$, $(3;1)$. Получены два базисных нуля $x_{23} = 0$ и $x_{11} = 0$ на четвёртом и пятом шаге. Это произошло потому, что на первом шаге можно было удалить A_2 вместо B_4, а на третьем – A_1 вместо B_2. Нужно отличать базисные нули, которые заносятся в таблицу, от нулевых значений свободных переменных, которые в таблицу не заносятся.

Условие оптимальности опорного плана

Поставим каждой строке и каждому столбцу распределительной таблицы в соответствие характеризующий их параметр, который назовём потенциалом. Потенциал *i*-той строки обозначим u_i, *j*-того столбца – v_j. Для каждой загруженной клетки потребуем выполнения равенства

$$u_i + v_j = c_{ij}. \tag{2.5}$$

Эти равенства образуют систему из $m+n-1$-го уравнения с $m+n$ неизвестными. Произвольно зафиксируем значение одного из потенциалов (например, $u_1 = 0$). Тогда значения остальных легко найдутся из уравнений (2.5). Затем для каждой свободной клетки вычислим так называемые косвенные тарифы c'_{ij} и оценки s_{ij} по формулам

$$c'_{ij} = u_i + v_j, \ s_{ij} = c_{ij} - c'_{ij}. \tag{2.6}$$

ТЕОРЕМА 2. Если все оценки свободных клеток неотрицательны, то текущий ОП оптимален. Если имеется хотя бы одна отрицательная оценка – план не оптимален.

Улучшение неоптимального опорного плана

Назовём свободную клетку с отрицательной оценкой перспективной. Мы покажем, что её загрузка может привести к улучшению ОП (напомним, что загрузка клетки означает перевод соответствующего x_{ij} в число базисных). Для описания процедуры перезагрузки введём понятие цикла. Циклом называется замкнутая ломаная с вершинами в клетках распределительной таблицы, имеющая только горизонтальные и вертикальные звенья и меняющая направление в каждой вершине. Очевидно, цикл имеет чётное число вершин.

Предположим, что построен цикл, среди вершин которого ровно одна свободная клетка. Присвоим этой вершине знак «+», а остальным вершинам – знаки «+» или «–», чередуя их вдоль цикла (соседние вершины имеют противоположные знаки). Пусть m – минимальная загрузка отрицательных клеток, и она достигается в клетке $(p;q)$. Прибавим величину m к содержимому положительных клеток и отнимем от содержимого отрицательных. Тогда клетка $(p;q)$ разгрузится, свободная клетка загрузится, а суммарная загрузка вдоль каждой строки и каждого столбца не изменится. Это означает, что переменная свободной клетки перейдёт в базисные, а переменная x_{pq} – в свободные, и мы получим новый опорный план.

ЗАМЕЧАНИЕ. Может оказаться, что величина m достигается в нескольких отрицательных клетках. Тогда одну нужно перевести в свободные, а остальные загрузить базисными нулями.

ТЕОРЕМА 3. Описанный выше цикл существует для каждой свободной клетки. Если цикл построен для клетки с отрицательной оценкой s_{ij}, то описанная перезагрузка улучшает ОП.

СЛЕДСТВИЕ. Чтобы получить оптимальный ОП, нужно провести конечное число описанных выше перезагрузок.

ЗАМЕЧАНИЕ. Можно показать, что величина s_{ij} равна разности сумм тарифов по положительным отрицательным клеткам цикла.

ПРИМЕР 3

Рассмотрим распределительную таблицу примера 1 и найдём потенциалы всех строк и столбцов:

6 5	5	3
4 (–) 3	2 (+) 1	1 6
3 (+)	2 (–) 15	4

$$u_1 + v_1 = 6,\ u_2 + v_1 = 4,\ u_2 + v_2 = 2,\ u_2 + v_3 = 1,\ u_3 + v_2 = 2;$$

$$u_1 = 0,\ v_1 = 6,\ u_2 = -2,\ v_2 = 4,\ v_3 = 3,\ u_3 = -2.$$

Вычислим косвенные тарифы свободных клеток и их оценки:

$$c'_{12} = 4,\ c'_{13} = 3,\ c'_{31} = 4,\ c'_{33} = 1;\ s_{12} = 1,\ s_{13} = 0,\ s_{31} = -1,\ s_{33} = 3.$$

Так как $s_{31} < 0$, то план неоптимален и клетка $(3;1)$ – перспективна. Организуем цикл по клеткам $(3;1)$, $(3;2)$, $(2;2)$, $(2;1)$. Знаки вершин цикла укажем в таблице. Ищем минимальную загрузку отрицательных клеток: $m = \min\{3;15\} = 3$. Перезагрузим величину $m = 3$ вдоль цикла, с учётом знаков и получим новую таблицу. Повторим предыдущие действия.

6 (–) 5	5	3 (+)
4	2 (+) 4	1 (–) 6
3 (+) 3	2 (–) 12	4

$$u_1 + v_1 = 6,\ u_2 + v_2 = 2,\ u_2 + v_3 = 1,\ u_3 + v_1 = 3,\ u_3 + v_2 = 2;$$

$$u_1 = 0,\ v_1 = 6,\ u_3 = -3,\ v_2 = 5,\ u_2 = -3,\ v_3 = 4.$$

$$c'_{12} = 5,\ c'_{13} = 4,\ c'_{21} = 3,\ c'_{33} = 1;\ s_{12} = 0,\ s_{13} = -1 < 0,\ s_{21} = 1,\ s_{33} = 3.$$

Клетка $(1;3)$ перспективна. Сформируем цикл (он обозначен знаками в таблице) и проведём перезагрузку: $m = \min\{6;12;5\} = 5$. Вычислив новые потенциалы и оценки, убедимся, что план оптимален:

6	5	3 5
4	2 9	1 1
3 8	2 7	4

$X_{\text{opt}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 9 & 1 \\ 8 & 7 & 0 \end{pmatrix}$. Найдём оптимальное значение целевой функции: $f_{\text{opt}} = 5 \cdot 3 + 9 \cdot 2 + 1 \cdot 1 + 8 \cdot 3 + 7 \cdot 2 = 72$, $f_{\text{opt}} = 72$. Задача решена.

Множественность оптимальных планов

ТЕОРЕМА. Предположим, что оптимальный план обладает свободной клеткой с нулевой оценкой. Построим перезагрузочный цикл, опираясь на эту клетку. Если в отрицательных клетках цикла нет базисных нулей, то перезагрузка даст новый оптимальный ОП. Если в отрицательных клетках есть ноль, то перезагрузка осуществит переход базисного нуля в другую клетку без изменения ОП.

ТЕОРЕМА. Предположим, что оптимальный план обладает свободной клеткой с нулевой оценкой. Построим описанный выше цикл, опираясь на эту клетку. Если в отрицательных клетках цикла нет базисных нулей, то перезагрузка вдоль цикла дает новый оптимальный опорный план. Если в отрицательных клетках есть базисный ноль, то перезагрузка будет означать перевод базисного нуля в другую клетку без изменения опорного плана.

ПРИМЕР. Рассмотрим сразу распределительную таблицу, полученную методом наименьшего элемента.

3 25	2 25	4	6	50
2 (–) 5	3	1 35	2 (+)	40
3 (+) 0	2	6	4 (–) 20	20
30	25	35	20	$\sum = 110$

$$\left| u_1 + v_1 = 3,\ u_1 + v_2 = 2,\ u_2 + v_1 = 2,\ u_2 + v_3 = 1,\ u_3 + v_1 = 3,\ u_3 + v_4 = 4; \right.$$
$$u_1 = 0,\ v_1 = 3,\ v_2 = 2,\ u_2 = -1,\ v_3 = 2,\ u_3 = 0,\ v_4 = 4;$$
$$c'_{13} = 2,\ c'_{14} = 4,\ c'_{22} = 1,\ c'_{24} = 3,\ c'_{32} = 2,\ c'_{33} = 2;$$
$$s_{13} = 2,\ s_{14} = 2,\ s_{21} = 2,\ s_{24} = -1,\ s_{32} = 0,\ s_{33} = 4.$$

Построим цикл для клетки (2;4). Он пройдет по клеткам (2;4), (3;4), (3;1), (2;1) при $m = 5$. После перезагрузки получим таблицу, для которой $s_{13} = 1, s_{14} = 2, s_{22} = 7, s_{32} = 0, s_{33} = 3$.

3 (+) 25	2 (–) 25	4	6
	3	1 35	2 5
3 (–) 5	2 (+)	6	4 15

План оптимален. Заметим, что оценка клетки (3;2) равна нулю, и рассмотрим для этой клетки цикл: (3;2), (3;1), (1;1), (1;2). Отрицательные клетки имеют ненулевую загрузку: $m = 5$, и мы получаем новую таблицу с оптимальным планом.

3 30	2 20	4	6
2	3	1 35	2 5
3	2 5	6	4 15

В этой таблице, очевидно, $S_{31} = 0$. Мы получили два оптимальных опорных плана $X_1 = \begin{pmatrix} 25 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 35 & 5 \\ 5 & 0 & 0 & 15 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} 30 & 20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 35 & 5 \\ 0 & 5 & 0 & 15 \end{pmatrix}$. Все планы, лежащие на отрезке $\left[X_1; X_2 \right]$ являются оптимальными. Вычисляя, получаем $f_{\text{opt}} = 215$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Причиной множественности оптимальных планов является равенство $c_{11} + c_{32} = c_{12} + c_{31} = 5$. Из него следует $s_{32} = \left(s_{11} + s_{32} \right) - \left(s_{12} + s_{31} \right) = 0$ и $s_{31} = \left(c_{12} + c_{31} \right) - \left(c_{21} + c_{32} \right) = 0$.

Транспортная задача и симплекс-метод

Выше мы рассматривали закрытую ТЗ со следующими данными:

$$a_1 = 5,\ a_2 = 10,\ a_3 = 15; \quad b_1 = 8,\ b_2 = 16,\ b_3 = 6; \quad C = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Запишем эту задачу в форме канонической ЗЛП. Для этого введем новые переменные

$$y_1 = x_{11},\ y_2 = x_{12},\ y_3 = x_{13},\ y_4 = x_{21},\ y_5 = x_{22},\ y_6 = x_{23},\ y_7 = x_{31},\ y_8 = x_{32},\ y_9 = x_{33}$$

и будем исследовать функцию

$$g = -f = -6y_1 - 5y_2 - 3y_3 - 4y_4 - 2y_5 - y_6 - 3y_7 - 2y_8 - 4y_9$$

на максимум. Система ограничений состоит из следующих уравнений:

$$y_1 + y_2 + y_3 = 5,\ \ y_4 + y_5 + y_6 = 10,\ \ y_7 + y_8 + y_9 = 15;$$

$$y_1 + y_4 + y_7 = 8,\ \ y_2 + y_5 + y_7 = 16,\ \ y_3 + y_6 + y_9 = 6.$$

Запишем симплекс-таблицу и перейдем к нахождению НОП.

$$\begin{array}{r|c|ccccccccc|}
0 = & 5 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 = & 10 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 = & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\
0 = & 8 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 = & 16 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 = & 6 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \\
g = & 0 & -6 & -5 & -3 & -4 & -2 & -1 & -3 & -2 & -4
\end{array}$$

Из I строки можно перевести в базисные переменные y_1, из II – y_5, из III – y_9. При этом вместе с I строкой пересчитывается VI строка, вместе со II – V, вместе с III – VI; g-строка пересчитывается всегда.

Пересчитаем I, IV и g-строку:

$$\begin{array}{r|r|ccccccccc|}
\mathrm{I}:\ y_1 = & 5 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\mathrm{IV}:\ 0 = & 3 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
g = & -30 & 0 & 1 & 3 & -4 & -2 & -1 & -3 & -2 & -4
\end{array}$$

Пересчитаем II, V и g-строку:

$$\begin{array}{r|r|ccccccccc|}
\mathrm{II}:\ y_5 = & 10 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
\mathrm{V}\quad 0 = & 6 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
g = & -50 & 0 & 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & -3 & -2 & -4
\end{array}$$

Пересчитаем III, VI и g-строку:

$$\begin{array}{r|r|ccccccccc|}
\mathrm{III}:\ y_9 = & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\
\mathrm{VI}\quad 0 = & -9 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\
g = & -110 & 0 & 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0
\end{array}$$

Запишем новую симплекс-таблицу, сменив знак в VI строке:

$$
\begin{array}{r|r|rrrrrrrrr|}
y_1 = & 5 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
y_5 = & 10 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
y_9 = & 15 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\
0 = & 3 & 0 & 1 & 1 & \boxed{-1} & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 = & 6 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
0 = & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\
g = & -110 & 0 & 1 & 3 & -2 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0
\end{array}
$$

Симплекс-отношения $\left(\min\{10:1;3:1\} = 3:1\right)$ позволяют перевести переменную y_4 в базисные в IV строке. Нужно пересчитать II, IV, V и g-строку:

$$
\begin{array}{rr|r|rrrrrrrrr|}
\text{II}: & y_5 = & 7 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
\text{IV}: & y_4 = & 3 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
\text{V}: & 0 = & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & \boxed{-1} & 0 \\
 & g = & -116 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 0
\end{array}
$$

В симплекс-таблице получились две одинаковые строки: – V и VI; удалим VI строку. Из V строки переведём в базисные y_8 (симплекс-отношения позволяют это сделать: $\min\{15:1;9:1\} = 9:1$). Для этого пересчитаем III, V и g-строку:

$$
\begin{array}{rr|r|rrrrrrrrr|}
\text{III}: & y_9 = & 6 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
\text{V}: & y_8 = & 9 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
 & g = & -98 & 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 & 0
\end{array}
$$

Запишем новую симплекс-таблицу, удалив базисные неизвестные из правой части:

$$
\begin{array}{r|r|rrrr|}
 & & y_2 & y_3 & y_6 & y_7 \\
y_1 = & 5 & -1 & \boxed{-1} & 0 & 0 \\
y_5 = & 7 & -1 & -1 & -1 & 1 \\
y_9 = & 6 & 0 & -1 & -1 & 0 \\
y_4 = & 3 & 1 & 1 & 0 & -1 \\
y_8 = & 9 & 0 & 1 & 1 & -1 \\
g = & -98 & -1 & 3 & 3 & 1
\end{array}
$$

План неоптимален. Выберем разрешающим столбец при y_3. Тогда разрешающей будет первая строка: $\min\{5:1;7:1;6:1\} = 5:1$. Пересчитаем таблицу:

$$
\begin{array}{r|r|rrrr|}
\multicolumn{2}{c}{} & \underline{y_2} & \underline{y_1} & \underline{y_6} & \underline{y_7} \\
y_3 = & 5 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
y_5 = & 2 & 0 & 1 & -1 & 1 \\
y_9 = & 1 & 1 & 1 & \boxed{-1} & 0 \\
y_4 = & 8 & 0 & -1 & 0 & -1 \\
y_8 = & 14 & -1 & -1 & 1 & -1 \\
g = & -83 & -4 & -3 & 3 & 1
\end{array}
$$

План неоптимален. Выберем разрешающим столбец при y_6. Тогда разрешающей будет третья строка: $\min\{2:1;1:1\} = 1:1$. Пересчитаем таблицу:

$$
\begin{array}{r|r|rrrr|}
\multicolumn{2}{c}{} & \underline{y_2} & \underline{y_1} & \underline{y_9} & \underline{y_7} \\
y_3 = & 5 & -1 & -1 & 0 & 0 \\
y_5 = & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \\
y_6 = & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\
y_4 = & 8 & 0 & -1 & 0 & -1 \\
y_8 = & 15 & 0 & 0 & -1 & -1 \\
g = & -80 & -1 & 0 & -3 & 1
\end{array}
$$

План неоптимален. Разрешающими являются столбец при y_7 и будет четвёртая строка: $\min\{8:1;15:1\} = 8:1$. Пересчитываем таблицу:

$$
\begin{array}{r|r|rrrr|}
\multicolumn{2}{c}{} & \underline{y_2} & \underline{y_1} & \underline{y_9} & \underline{y_4} \\
y_3 = & 5 & & & & \\
y_5 = & 9 & & & & \\
y_6 = & 1 & & & & \\
y_7 = & 8 & & & & \\
y_8 = & 7 & & & & \\
g = & -72 & -1 & -1 & -3 & -1
\end{array}
$$

Получен оптимальный план

$$y_1 = 0,\ y_2 = 0,\ y_3 = 5,\ y_4 = 0,\ y_5 = 9,\ y_6 = 1,\ y_7 = 8,\ y_8 = 7,\ y_9 = 0,$$

который в переменных x_{ij} соответствует плану $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 9 & 1 \\ 8 & 7 & 0 \end{pmatrix}$. При этом

$f_{\text{opt}} = -g_{\max} = 72$. Получено то же решение, что и методом потенциалов.

ЗАМЕЧАНИЕ. В процессе нахождения НОП мы получили две одинаковые строки. Поэтому число базисных неизвестных оказалось на единицу меньше, чем число уравнений в системе ограничений, то есть $m + n - 1$.

3. ЗАДАЧА ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Постановка задачи

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. ЗЛП с дополнительным условием, что все переменные принимают целые значения, называется задачей целочисленного линейного программирования (ЗЦЛП).

Если записать ЗЛП в канонической форме, то соответствующая ЗЦЛП имеет вид

$$f=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \text{ (max)}; \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i \ \ (i=1,\ldots,m) \\ x_j \geq 0 \ \ (j=1,\ldots,n) \end{cases}, \ x_j \geq 0 \ \ (j=1,\ldots,n) - \textit{целые.}$$

Заметим, что нельзя рассматривать решение ЗЦЛП как целочисленное приближение решения соответствующей ЗЛП. Такое целочисленное приближение может не удовлетворять системе ограничений.

Классические примеры

Задача о контейнерных перевозках

Пусть транспортировке подлежат n видов продукции, каждый из которых имеет штучную природу. Для транспортировки продукция должна быть размещена в контейнере, имеющем вместимость b. Пусть c_j – числовой параметр, выражающий полезность единицы *j*-того продукта, а a_j – объем, занимаемый единицей *j*-того продукта в контейнере. Нужно найти план $(x_1,\ldots,x_n)$, максимизирующий полезность рейса, где x_j – число единиц перевозимого *j*-того продукта. Математическая модель этой задачи имеет вид: Найти max целевой функции $f=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j$ при системе ограничений $\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leq b$, $x_j \geq 0$ и x_j – целые. Получена ЗЦЛП.

Задача о назначениях

Имеется n исполнителей, которые могут выполнять n видов работ. Параметр c_{ij} характеризует полезность выполнения *i*-тым исполнителем *j*-того вида работ. Нужно так назначить исполнителей на работы, чтобы добиться наибольшей полезности. Построим математическую модель. Положим

$$x_{ij}=\begin{cases} 1, \textit{если } i \textit{ - тый работник назначен на } j \textit{ - тую работу} \\ 0, \textit{в противном случае} \end{cases}.$$

Получаем следующую ЗЦЛП: Найти max функции $f=\sum c_{ij} x_{ij}$ при наличии системы ограничений

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij}=1, \sum_{i=1}^{n} x_{ij}=1, 0 \leq x_{ij} \leq 1, x_{ij} \ (i, j=1,\ldots,n) - \textit{целые.}$$

Геометрический пример

Решить ЗЦЛП

$$f = 2x_1 + 3x_2 \ (\max) \begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 2 \\ x_1 + x_2 \le 8 \\ x_1 - 2x_2 \le 2 \\ x_1 - x_2 \ge -1 \end{cases}. \qquad (3.1)$$

Выше уже решалась ЗЛП без условия целочисленности. Максимальное значение было получено в точке $D(3,5;\,4,5)$ (см. рис. 4): $f(D) = f(3,5;4,5) = 20,5$. Целочисленными приближениями этого решения являются точки $E(3;4)$, $F(3;5)$, $G(4;5)$, $H(3;5)$. Точки G и H не входят в область определения задачи. Оптимальной целочисленной точкой является точка F: $X_{\text{opt}} = (4;4)$, $f_{\max} = f(4;4) = 20$; $f(E) = f(3;4) = 18 < f_{\max}$.

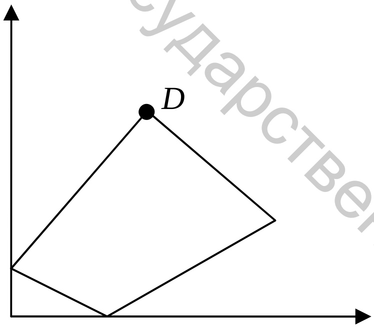


Рисунок 4 – Решение нецелочисленной ЗЛП

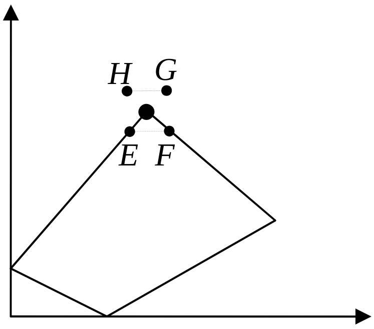


Рисунок 5 – Целочисленные приближения

Методы решения ЗЦЛП

При ограниченности области определения ЗЛП множество целочисленных точек этой области конечно. Создаётся впечатление, что можно решить ЗЦЛП простым перебором этих точек. Это мнение ошибочно, поскольку подобный перебор требует очень большого объёма вычислений. Значит, требуется разработка более экономных методов. Ниже рассматриваются два метода решения ЗЦЛП: метод отсечения и метод ветвей и границ. Они используют решение нецелочисленной задачи с дальнейшим сужением области определения, исходя из требования целочисленности. Оба метода являются очень трудоёмкими, но этого требует природа задачи.

Метод отсечения

Методом отсечения называется последовательность следующих действий: 1) решается ЗЛП без условия целочисленности, если оптимальный план целочислен, то решена ЗЦЛП; если он не целочислен, то 2): вводится новое ограничение в виде линейного неравенства, удаляющее часть области определения, содержащую нецелочисленный оптимальный план, но не содержащую ни одного целочисленного плана; 3) делается переход к пункту 1 с новой областью определения задачи. Действие по пункту 2 называется отсечением (или правильным отсечением).

Ниже расматривается простой способ построения правильного отсечения, который называется алгоритмом Гомори.

Алгоритм Гомори

Сначала сформулируем некоторые нужные понятия и свойства.

ЦЕЛОЙ ЧАСТЬЮ числа a (обозначается $[a]$) называется наибольшее целое число, меньшее или равное a. Для целого a имеем $[a]=a$. Если a и b целые, то $[a+b]=a+b=[a]+[b]$. Если $a\le b$, то $[a]\le[b]$.

ДРОБНАЯ ЧАСТЬ числа a (обозначается $\{a\}$) определяется равенством $\{a\}=a-[a]$. Очевидны неравенства

$$a-1<[a]\le a,\ 0\le\{a\}<1,\ 0\le\{a\}+\{-a\}<2.$$

Поскольку

$$\{a\}+\{-a\}=(a-[a])+(-a-[-a])=-[a]-[-a],$$

то сумма $\{a\}+\{-a\}$ является целой. Для целых a имеем $\{a\},\{-a\}=0$, $\{a\}+\{-a\}=0$. Если число a не является целым, то $0<\{a\},\{-a\}<1$ и $0<\{a\}+\{-a\}<2$. Поскольку сумма $\{a\}+\{-a\}$ принимает целое значение, то $\{a\}+\{-a\}=1$.

ЛЕММА. Для любых чисел a и b справедливо неравенство $\{a+b\}\le\{a\}+\{b\}$. Если m – целое, неотрицательное число, то $\{ma\}\le m\{a\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку $a\ge[a], b\ge[b]$, то $a+b\ge[a]+[b]$. Тогда $[a+b]\ge[[a]+[b]]=[a]+[b]$, значит, $[a+b]\ge[a]+[b]$. Далее

$$a+b=[a]+\{a\}+[b]+\{b\} \quad и \quad a+b=[a+b]+\{a+b\}.$$

Вычтем из первого равенства второе:

$$0=([a]+[b]-[a+b])+(\{a\}+\{b\}-\{a+b\})),\quad \{a+b\}-\{a\}-\{b\}=[a]+[b]-[a+b].$$

В силу $[a+b]\ge[a]+[b]$ имеем $[a]+[b]-[a+b]\le 0$, значит, $\{a+b\}-\{a\}-\{b\}\le 0$ и $\{a+b\}\le\{a\}+\{b\}$. Первое неравенство доказано, второе сразу следует из него: $\{ma\}=\{a+\ldots+a\}\le\{a\}+\ldots+\{a\}=m\{a\}$. Лемма доказана.

Перейдём к описанию правильного отсечения. Пусть решена задача без условия целочисленности. Занумеруем базисные переменные оптимального ОП числами $1,\ldots,r$, а свободные – $r+1,\ldots,n-r$. Запишем систему ограничений в виде

$$\begin{cases} x_1=\beta_1+\alpha_{11}x_{r+1}+\ldots+\alpha_{1n-r}x_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r=\beta_r+\alpha_{r1}x_{r+1}+\ldots+\alpha_{rn-r}x_n \end{cases}. \tag{3.2}$$

Мы имеем оптимальны опорный план $X=(\beta_1,\ldots,\beta_r,0,\ldots,0)$. Если все числа $\beta_1,\ldots,\beta_r$ целые, то получено решение ЗЦЛП. Предположим, что среди этих чисел есть нецелые.

ТЕОРЕМА. Пусть в системе уравнений (3.2) имеется нецелый свободный член β_k ,то есть $\{\beta_k\} \neq 0$, тогда каждое из неравенств

$$\{-\alpha_{k1}\}x_{r+1} + \ldots + \{-\alpha_{kn-r}\}x_n \geq \{\beta_k\} \tag{3.3}$$

и

$$\{\alpha_{k1}\}x_{r+1} + \ldots + \{\alpha_{kn-r}\}x_n \geq \{-\beta_k\}, \tag{3.4}$$

добавленное к системе ограничений (3.2) задаёт правильное отсечение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что условия (3.3) и (3.4) отсекают точку $X = (\beta_1, \ldots, \beta_r, 0, \ldots, 0)$. Подставим $x_{r+1} = \ldots = x_n = 0$ в неравенства (3.3) и (3.4). Получим неверные неравенства $0 \geq \{-\beta_k\}$, $0 \geq \{\beta_k\}$, поскольку по предположению имеем $\{-\beta_k\}, \{\beta_k\} > 0$. Значит, точка $X = (\beta_1, \ldots, \beta_r, 0, \ldots, 0)$ не удовлетворяет условиям (3.3) и (3.4). Теперь покажем, что эти условия не отсекают ни одного целочисленного плана. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ – целы и неотрицательны. Выпишем *k*-тое уравнение системы (3.2):

$$x_k = \beta_k + \alpha_{k1}x_{r+1} + \ldots + \alpha_{kn-r}x_n \tag{3.5}$$

и преобразуем его к виду

$$\beta_k = x_k + (-\alpha_{k1})x_{r+1} \ldots + (-\alpha_{kn-r})x_n .$$

Применим лемму:

$$\{\beta_k\} = \{x_k + (-\alpha_{k1})x_{r+1} \ldots + (-\alpha_{kn-r})x_n\} \leq \{x_k\} + \{-\alpha_{k1}\}x_{r+1} \ldots + \{-\alpha_{kn-r}\}x_n .$$

Поскольку $\{x_k\} = 0$, получаем $\{\beta_k\} \leq \{-\alpha_{k1}\}x_{r+1} \ldots + \{-\alpha_{kn-r}\}x_n$, то есть неравенство (3.3). Значит, целочисленный план, удовлетворяющий системе (3.2), удовлетворяет и дополнительному условию (3.3). При рассмотрении второго условия отсечения запишем равенство (3.5) в виде

$$-\beta_k = -x_k + \alpha_{k1}x_{r+1} \ldots + \alpha_{kn-r}x_n .$$

Тогда по лемме имеем

$$\{-\beta_k\} = \{-x_k + \alpha_{k1}x_{r+1} \ldots + \alpha_{kn-r}x_n\} \leq \{-x_k\} + \{\alpha_{k1}\}x_{r+1} \ldots + \{\alpha_{kn-r}\}x_n .$$

Поскольку $\{-x_k\} = 0$, получаем справедливость неравенства (3.4). Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. На практике из двух возможностей нужно выбрать ту, которая даёт отсечение большего объёма. Это имеет место тогда, когда правые части побольше, а коэффициенты в левой части поменьше.

ПРИМЕР. Решить ЗЦЛП (3.1).

РЕШЕНИЕ. Без условия целочисленности ЗЛП уже была решена. Конечная симплекс-таблица имеет вид (1.22):

$$\begin{array}{r|c|cc|}
 & & x_4 & x_6 \\
x_1 = & 3{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 \\
x_2 = & 4{,}5 & -0{,}5 & -0{,}5 \\
x_3 = & 10{,}5 & -1{,}5 & -0{,}5 \\
x_5 = & 7{,}5 & -0{,}5 & -1{,}5 \\
f = & 20{,}5 & -2{,}5 & -0{,}5
\end{array}$$

Запишем условия отсечения (3.3) и (3.4) по первой строке:

$$\left[\begin{array}{l} \{0{,}5\}x_4 + \{-0{,}5\}x_6 \ge \{3{,}5\} \\ \{-0{,}5\}x_4 + \{0{,}5\}x_6 \ge \{-3{,}5\} \end{array}\right. .$$

Оба условия дают одно и то же неравенство $0{,}5x_4 + 0{,}5x_6 \ge 0{,}5$ или $x_4 + x_6 \ge 1$. Запишем условие в канонической форме: $x_4 + x_6 - x_7 = 1$ или $0 = 1 - x_4 - x_6 + x_7$ и получим новую симплекс-таблицу:

$$\begin{array}{r|c|ccc|}
 & & x_4 & x_6 & x_7 \\
x_1 = & 3{,}5 & -0{,}5 & 0{,}5 & 0 \\
x_2 = & 4{,}5 & -0{,}5 & -0{,}5 & 0 \\
x_3 = & 10{,}5 & -1{,}5 & -0{,}5 & 0 \\
x_5 = & 7{,}5 & -0{,}5 & -1{,}5 & 0 \\
0 = & 1 & -1 & -1 & 1 \\
f = & 20{,}5 & -2{,}5 & -0{,}5 & 0
\end{array}$$

Симплекс-отношения позволяют перевести x_4 число базисных переменных в пятой строке:

$$\begin{array}{r|c|cc|}
 & & x_6 & x_7 \\
x_1 = & 3 & 1 & -0{,}5 \\
x_2 = & 4 & 0 & -0{,}5 \\
x_3 = & 9 & 1 & -1{,}5 \\
x_5 = & 7 & -1 & -0{,}5 \\
x_4 = & 1 & \boxed{-1} & 1 \\
f = & 18 & 2 & -2{,}5
\end{array} \qquad (3.6)$$

План целочисленный, но не оптимальный. Разрешающими являются столбец при x_6 и пятая строка. Новая таблица даёт решение ЗЦЛП:

$$
\begin{array}{r|c|rr|}
 & & x_4 & x_7 \\
x_1 = & 4 & 1 & -0,5 \\
x_2 = & 4 & 0 & -0,5 \\
x_3 = & 10 & 1 & -1,5 \\
x_5 = & 6 & -1 & -0,5 \\
x_6 = & 1 & -1 & 1 \\
f = & 20 & -2 & -0,5
\end{array}
\qquad (3.7)
$$

$$f_{\max} = 20, \quad x_1 = 4, \ x_2 = 4.$$

В ответе оставлены только исходные переменные x_1 и x_2.

Геометрическая картина отсечения

Мы получили решение после одного отсечения. Рассмотрим это отсечение геометрически. Условие отсечения имеет вид $x_4 + x_6 \geq 1$. Переменные x_4, x_6 связаны с x_1, x_2 равенствами $x_1 + x_2 + x_4 = 8$, $-x_1 + x_2 + x_6 = 1$ (см. решение ЗЛП). Тогда $x_4 = 8 - x_1 - x_2$, $x_6 = 1 + x_1 - x_2$; $x_4 + x_6 = 9 - 2x_2$. Условие отсечения принимает вид $9 - 2x_2 \geq 1$ или $x_2 \leq 4$. Прямая $x_2 = 4$ даёт новую сторону многоугольника планов. Картина отсечения дана на рисунке 6. Таблица (3.6) соответствует точке E, а таблица (3.7) – точке F.

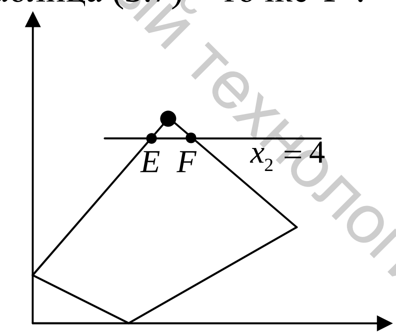


Рисунок 6 – Геометрическая картина отсечения

ЗАМЕЧАНИЕ. Мы получили условие отсечения $0,5x_4 + 0,5x_6 \geq 0,5$ из уравнения $x_1 = 3,5 - 0,5x_4 + 0,5x_6$. Преобразуем уравнение: $0,5x_4 + 0,5x_6 - 0,5 = 3 - x_1 + x_6$. Если x_1, x_6 – целые, то $0,5x_4 + 0,5x_6 - 0,5$ – цело. Значит можно ввести новую переменную равенством $x_7 = -0,5 + 0,5x_4 + 0,5x_6$, причём новая переменная x_7 будет принимать целые значения при целости предыдущих переменных. Кроме того из условия $0,5x_4 + 0,5x_6 \geq 0,5$ имеем $x_7 \geq 0$. Условие отсечения удобно преобразовать к виду $x_4 + x_6 - 2x_7 = 1$. Этот вид более удобен, чем использовавшийся в решении вид $x_4 + x_6 - x_7 = 1$, поскольку даёт больший объём отсечения на единицу изменения переменной x_7. Приведённые рассуждения носят общий характер и могут применяться в других задачах.

Примеры

1. Решить ЗЦЛП

$$f = x_1 + x_2 \text{ (max)}, \begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 0 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 12 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}.$$

РЕШЕНИЕ. Решим ЗЛП. В канонической форме записи ограничения принимают вид

$$2x_1 - x_2 - x_3 = 0,\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 12. \tag{3.8}$$

Выразив x_1 и x_2, получим

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{12}{7} + \dfrac{2}{7}x_3 - \dfrac{1}{7}x_4 \\ x_2 = \dfrac{24}{7} - \dfrac{3}{7}x_3 - \dfrac{2}{7}x_4 \end{cases},\quad f = \frac{36}{7} - \frac{1}{7}x_3 - \frac{3}{7}x_4.$$

Получено решение нецелочисленной задачи. Запишем оба условия отсечения по первому уравнению (напомним, что $\{a\} + \{-a\} = 1$).

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{2}{7}x_3 + \dfrac{6}{7}x_4 \ge \dfrac{2}{7} \\ \dfrac{5}{7}x_3 + \dfrac{1}{7}x_4 \ge \dfrac{5}{7} \end{array}\right.,\ \left[\begin{array}{l} x_3 + 3x_4 \ge 1 \\ 5x_3 + x_4 \ge 5 \end{array}\right..$$

Больший объём отсечения даёт второе неравенство. Запишем неравенство в канонической форме $5x_3 + x_4 - 7x_5 \ge 5$ (см. замечание после предыдущего примера) и проведём преобразование симплекс-таблиц.

$$\begin{array}{r|c|ccc|} & & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_1 = & 12/7 & 2/7 & -1/7 & 0 \\ x_2 = & 24/7 & -3/7 & -2/7 & 0 \\ 0 = & 5 & -5 & \boxed{-1} & 7 \\ f = & 36/7 & -1/7 & -3/7 & 0 \end{array} \to \begin{array}{r|c|cc|} & & x_3 & x_5 \\ x_1 = & 1 & 1 & -1 \\ x_2 = & 2 & 1 & -2 \\ x_4 = & 5 & \boxed{-5} & 7 \\ f = & 3 & 2 & -3 \end{array} \to \left[\begin{array}{l} \textit{план целочислен,} \\ \textit{но не оптимален} \end{array}\right] \to \begin{array}{r|c|cc|} & & x_4 & x_5 \\ x_1 = & 2 & & \\ x_2 = & 3 & & \\ x_3 = & 1 & & \\ f = & 5 & -2/5 & -1/5 \end{array}$$

ЗЦЛП решена: $X_{\text{opt}} = (2;3)$, $f_{\text{opt}} = f_{\max} = 5$.

Рассмотрим геометрию отсечения. Выразим переменные x_3, x_4 из уравнений (3.8) и подставим в условие отсечения:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 12 \\ 5x_3 + x_4 \ge 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 2x_1 - x_2 \\ x_4 = 12 - 3x_1 - 2x_2 \\ 5x_3 + x_4 \ge 5 \end{cases} \Rightarrow 12 + 7x_1 - 7x_2 \ge 5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 7x_1 - 7x_2 \ge -7 \Rightarrow x_1 - x_2 \ge -1.$$

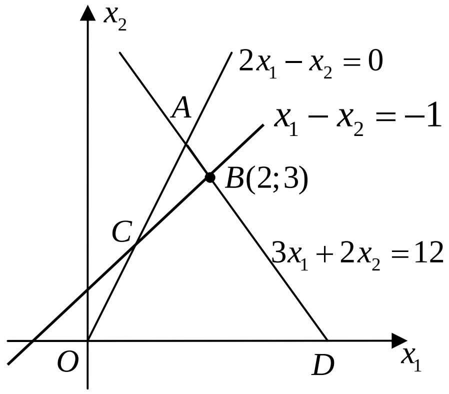


Рисунок 7 – Одно отсечение

Отсечение определяется неравенством $x_1 - x_2 \geq -1$, и решение целочисленной задачи может быть показано графически (см. рис. 7). Область определения исходной задачи – это треугольник OAD. Оптимальное значение целевой функции достигается в точке $A\left(\frac{12}{7};\frac{24}{7}\right)$, которая нецелочисленна. Отрезок BC осуществляет отсечение. Получаем новую область определения – четырёхугольник $OCBD$. Сначала была получена вершина $C(1;2)$, но эта точка неоптимальна. После шага улучшения плана была получена точка $B(2;3)$ – это оптимальный целочисленный план.

ЗАМЕЧАНИЕ. Очевидно, простота решения предыдущих задач обусловлена тем, что искомая оптимальная точка лежала на границе области определения.

2. Решить ЗЦЛП

$$f = x_1 + x_2 \text{ (max)}, \begin{cases} 2x_1 - x_2 \geq 0 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 13. \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Решим ЗЛП. В канонической форме записи ограничения принимают вид

$$2x_1 - x_2 - x_3 = 0,\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 13. \tag{3.9}$$

Отсюда

$$x_1 = \frac{13}{7} + \frac{2}{7}x_3 - \frac{1}{7}x_4,\ x_2 = \frac{26}{7} - \frac{3}{7}x_3 - \frac{2}{7}x_4;\ \ f = \frac{39}{7} - \frac{1}{7}x_3 - \frac{3}{7}x_4.$$

Нецелочисленная задача решена. Запишем оба условия отсечения по первому уравнению.

$$\left[\begin{array}{l} \frac{2}{7}x_3 + \frac{6}{7}x_4 \geq \frac{1}{7} \\ \frac{5}{7}x_3 + \frac{1}{7}x_4 \geq \frac{6}{7} \end{array}\right.,\quad \left[\begin{array}{l} 2x_3 + 6x_4 \geq 1 \\ 5x_3 + x_4 \geq 6 \end{array}\right..$$

Выбираем более сильное второе неравенство и запишем его в канонической форме $5x_3 + x_4 - 7x_5 = 6$. Затем работаем с симплекс-таблицами.

$$\begin{array}{r|c|ccc|} & & x_3 & x_4 & x_5 \\ x_1 = & 13/7 & 2/7 & -1/7 & 0 \\ x_2 = & 26/7 & -3/7 & -2/7 & 0 \\ 0 = & 6 & -5 & \boxed{-1} & 7 \\ f = & 39/7 & -1/7 & -3/7 & 0 \end{array} \to \begin{array}{r|c|cc|} & & x_3 & x_5 \\ x_1 = & 1 & 1 & -1 \\ x_2 = & 2 & 1 & -2 \\ x_4 = & 6 & \boxed{-5} & 7 \\ f = & 3 & 2 & -3 \end{array} \to \left[\begin{array}{l} \textit{план} \\ \textit{целочислен, но} \\ \textit{не оптимален} \end{array}\right] \to \begin{array}{r|c|cc|} & & x_4 & x_5 \\ x_1 = & 2{,}2 & -0{,}2 & 0{,}4 \\ x_2 = & 3{,}2 & -0{,}2 & -0{,}6 \\ x_3 = & 1{,}2 & -0{,}2 & 1{,}4 \\ f = & 5{,}4 & -0{,}4 & -0{,}2 \end{array}$$

Запишем условия отсечения по первой строке:

$$\left[\begin{array}{l} 0{,}2x_4 + 0{,}6x_5 \ge 0{,}2 \\ 0{,}8x_4 + 0{,}4x_5 \ge 0{,}8 \end{array}\right. \Rightarrow 0{,}8x_4 + 0{,}4x_5 \ge 0{,}8 \Rightarrow 2x_4 + x_5 \ge 2 \Rightarrow 2x_4 + x_5 - 5x_6 = 2.$$

Переходим к новой таблице и преобразуем её:

$$\begin{array}{r|c|ccc|} & & x_4 & x_5 & x_6 \\ x_1 = & 2{,}2 & -0{,}2 & 0{,}4 & 0 \\ x_2 = & 3{,}2 & -0{,}2 & -0{,}6 & 0 \\ x_3 = & 1{,}2 & -0{,}2 & 1{,}4 & 0 \\ 0 = & 2 & -2 & \boxed{-1} & 5 \\ f = & 5{,}4 & -0{,}4 & -0{,}2 & 0 \end{array} \to \begin{array}{r|c|cc|} & & x_4 & x_6 \\ x_1 = & 3 & -1 & 2 \\ x_2 = & 2 & 1 & -3 \\ x_3 = & 4 & -3 & 7 \\ x_5 = & 2 & -2 & 5 \\ f = & 5 & 0 & -1 \end{array}$$

Задача решена: $X_{\text{opt}} = (3;2),\ f_{\text{opt}} = f_{\max} = 5$.

ЗАМЕЧАНИЕ. В f-строке имеется ноль, говорящий о множественности оптимальных (нецелочисленных) планов. Имеются ли другие целочисленные оптимальные планы непосредственно не видно. Смысл этого нуля будет уяснен позже.

Задача решена двумя отсечениями. Рассмотрим геометрию этих отсечений. Используя (3.9), имеем следующую картину.

Первое отсечение:

$$\begin{cases} 5x_3 + x_4 \ge 6 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 13 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x_3 + x_4 \ge 6 \\ x_3 = 2x_1 - x_2 \\ x_4 = 13 - 3x_1 - 2x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5x_3 + x_4 \ge 6 \\ 5x_3 + x_4 = 13 + 7x_1 - 7x_2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 13 + 7x_1 - 7x_2 \ge 6 \Rightarrow x_1 - x_2 \ge -1.$$

Второе отсечение:

$$\begin{cases} 2x_4 + x_5 \ge 2 \\ 5x_3 + x_4 - 7x_5 = 6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 14x_4 + 7x_5 \ge 14 \\ 7x_5 = 5x_3 + x_4 - 6 \end{cases} \Rightarrow 5x_3 + 15x_4 - 6 \ge 14 \Rightarrow x_3 + 3x_4 \ge 4.$$

Далее

$$\begin{cases} x_3 + 3x_4 \ge 4 \\ x_3 = 2x_1 - x_2 \\ x_4 = 13 - 3x_1 - 2x_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_3 + 3x_4 \ge 4 \\ x_3 + 3x_4 = 39 - 7x_1 - 7x_2 \end{cases} \Rightarrow 39 - 7x_1 - 7x_2 \ge 4 \Rightarrow x_1 + x_2 \le 5.$$

Рассмотрим подробнее последнее условие. На прямой $x_1 + x_2 = 5$ целевая функция $f = x_1 + x_2$ принимает постоянное значение, равное 5. Весь отрезок этой прямой, входящий в область определения, является множеством оптимальных планов нецелочисленной задачи. Посмотрим, имеются ли другие целочисленные оптимальные планы кроме $X = (3;2)$. Для этого найдем второй конец стороны $x_1 + x_2 = 5$, пересчитав симплекс-таблицу. Переведя x_4 в базис, получим

$$
\begin{array}{r|c|ccc|}
 & & x_4 & x_5 & x_6 \\
x_1 = & 2,2 & -0,2 & 0,4 & 0 \\
x_2 = & 3,2 & -0,2 & -0,6 & 0 \\
x_3 = & 1,2 & -0,2 & 1,4 & 0 \\
0 = & 2 & -2 & \boxed{-1} & 5 \\
f = & 5,4 & -0,4 & -0,2 & 0
\end{array}
\rightarrow
\begin{array}{r|c|cc|}
 & & x_5 & x_6 \\
x_1 = & 2 & & \\
x_2 = & 3 & & \\
x_3 = & 7 & & \\
x_4 = & 1 & & \\
f = & 5 & 0 & -1
\end{array}
$$

Получен новый оптимальный целочисленный план $X = (2;3)$. Очевидно, между точками $(3;2)$ и $(2;3)$ других целочисленных точек нет. Значит, имеется два решения $X_1 = (3;2)$ и $X_2 = (2;3)$. На рисунке 8 – это точки C и B.

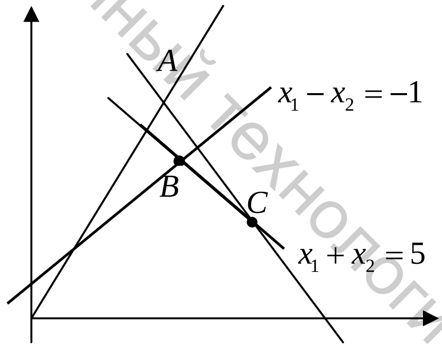


Рисунок 8 – Два отсечения

Метод ветвей и границ

Описание метода

Пусть дана функция $f(x_1,...,x_n)$, определённая на множестве G. Рассмотрим задачу нахождения максимального значения этой функции на подмножестве целочисленных точек множества G. Задача может быть решена следующей последовательностью действий, которая называется методом ветвей и границ.

1. Решим задачу без учёта условия целочисленности. Если решение целочисленно, то решена целочисленная задача. Предположим, что найденное решение нецелочисленно.

2. Разобьём множество G на непересекающиеся подмножества $G_1,...,G_k$, удаляя некоторые подмножества, не содержащие целочисленных точек.

3. Решаем задачу на множествах $G_1,...,G_k$. Пусть $m_i = \max\limits_{G_i} f$, а $M_1 = \max\{m_1,...,m_k\}$. Если значение M_1 достигается в целочисленной точке, то решена целочисленная задача. Предположим, что это не так.

4. Рассмотрим то подмножество G_i, на котором достигается значение M_1. Пусть, для определённости, это G_1. Разобьём G_1 на подмножества $G_{11},...,G_{1k_1}$, как описано в пункте 2. Решим задачу на этих множествах и положим $m_{1i} = \max\limits_{G_{1i}} f$, $M_2 = \max\{m_{11},...,m_{1k_1}, m_2,...,m_k\}$. Повторяем рассуждения П3, считая, что G разбито на $G_{11},...,G_{1k_1}, G_2,...,G_k$, и беря M_2 вместо M_1. Процесс продолжается до получения целочисленного решения.

Примеры

1. Решить ЗЦЛП $f = x_1 + x_2$ (max), $\begin{cases} 2x_1 - x_2 \ge 0 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 13 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$.

РЕШЕНИЕ. Будем применять метод ветвей и границ с помощью геометрической иллюстрации.

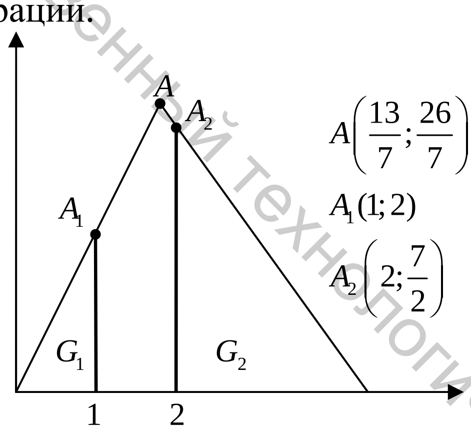


Рисунок 9 – Области G_1 и G_2

Решим задачу без условия целочисленности. Максимум достигается в точке $A\left(\frac{13}{7};\frac{26}{7}\right)$, которая лежит в полосе $1 < x_1 < 2$. Удалим эту полосу и получим в остатке два треугольника G_1 и G_2 (см. рис. 9).

$$G_1 : \begin{cases} x_1 \le 1 \\ 2x_1 - x_2 \ge 0 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 13 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}; \quad G_2 : \begin{cases} x_1 \ge 2 \\ 2x_1 - x_2 \ge 0 \\ 3x_1 + 2x_2 \le 13 \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}.$$

Решаем задачу на G_1 и G_2: $m_1 = \max\limits_{G_1} f = f(A_1)$, $m_2 = \max\limits_{G_2} f = f(A_2)$. Найдём точки A_1 и A_2:

$$A_1:\begin{cases}x_1=1\\2x_1-x_2=0\end{cases},\ \begin{cases}x_1=1\\x_2=2\end{cases};\ A_2:\begin{cases}x_1=2\\3x_1+2x_2=13\end{cases},\ \begin{cases}x_1=1\\x_2=7/2\end{cases}.$$

Тогда $m_1=3,\ m_2=\dfrac{11}{2};\ M_1=\max\{m_1;m_2\}=\dfrac{11}{2}=f(A_2)$. Так как $A_2\in G_2$, то далее проводим разбиение этой области. Точка A_2 лежит в полосе $3<x_2<4$. Удалим эту полосу и определим G_{21} условием $x_2\le 3$, G_{22} – условием $x_2\ge 4$. Множество G_{22} пусто и нужно рассматривать только G_{21}.

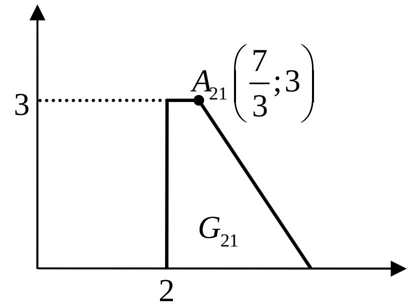


Рисунок 10 – Область G_{21}

Максимум функции f достигается в точке A_{21}:

$$\begin{cases}3x_1+2x_2=13\\x_2=3\end{cases},\begin{cases}x_1=7/3\\x_2=3\end{cases};\ m_{21}=\max_{G_{21}} f=f(A_{21})=\frac{16}{3}.$$

Сейчас G можно рассматривать разбитым на G_1 и G_{21}. $M_2=\max\{m_1;m_{21}\}=\dfrac{16}{3}=f(A_{21}),\ A_{21}\in G_{21}$. Разбиваем G_{21}, удаляя полосу $2<x_1<3$. Получаем два новых множества: G_{211} и G_{212}.

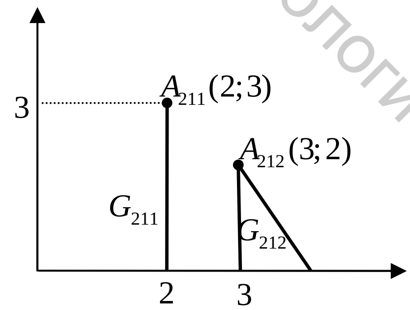


Рисунок 11 – Области G_{211} и G_{212}

$G_{211}: x_1\le 2;\ G_{212}: x_1\ge 3$. $m_{211}=\max\limits_{G_{211}} f=f(A_{211}),\ m_{212}=\max\limits_{G_{212}} f=f(A_{212})$.

$$A_{211}:\begin{cases}x_1=2\\x_2=3\end{cases},\begin{cases}x_1=1\\x_2=2\end{cases};\ A_{212}:\begin{cases}x_1=3\\3x_1+2x_2=13\end{cases},\begin{cases}x_1=3\\x_2=2\end{cases}.\ m_{211}=5,\ m_{212}=5.$$

Сейчас G можно рассматривать разбитым на G_1, G_{211} и G_{212}. $M_3=\max\{m_1;m_{211};m_{212}\}=5=f(A_{211})=f(A_{212})$. Точки A_{211} и A_{212} – целочисленны, поэтому целочисленная задача решена. Имеется два оптимальных плана $X_1=(2;3)$ и $X_2=(3;2)$; $f_{\text{opt}}=5$.

2. Решить ЗЦЛП $f = x_1 + x_2$ (max), $\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 2x_1 + x_2 \le 9 \\ x_1,\, x_2 \ge 0 \end{cases}$.

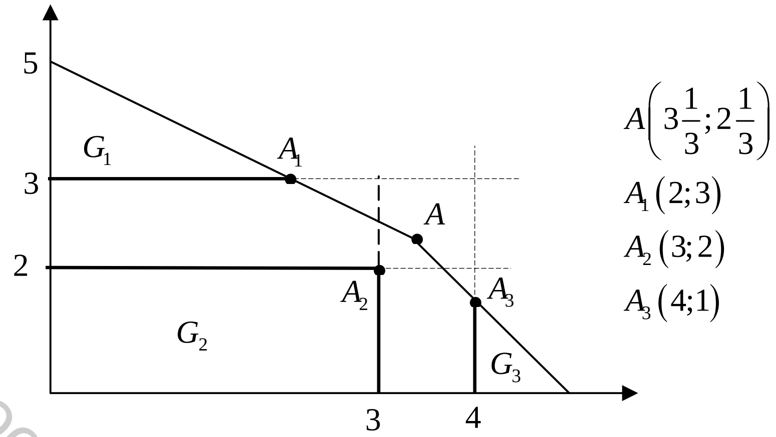


Рисунок 12 – Области G_1, G_2 и G_3

Максимальное значение функции f достигается в точке A.

$$A:\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 8 \\ 2x_1 + x_2 = 9, \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{10}{3} = 3\dfrac{1}{3} \\ x_2 = \dfrac{7}{3} = 2\dfrac{2}{3} \end{cases}.$$

Удалим две полосы: $3 < x_1 < 4$ и $2 < x_2 < 3$. Получим четыре подобласти G_1, G_2, G_3, G_4, причём $G_4 = \varnothing$, поскольку условия $x_1 \ge 4,\, x_2 \ge 3$ дают пустое множество (см. рис. 12).

$$G_1:\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 2x_1 + x_2 \le 9 \\ x_1 \le 3 \\ x_2 \ge 3 \\ x_1,\, x_2 \ge 0 \end{cases}; \quad G_2:\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 2x_1 + x_2 \le 9 \\ x_1 \le 3 \\ x_2 \le 2 \\ x_1,\, x_2 \ge 0 \end{cases}; \quad G_3:\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 2x_1 + x_2 \le 9 \\ x_1 \ge 4 \\ x_2 \le 2 \\ x_1,\, x_2 \ge 0 \end{cases}; \quad G_4:\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 8 \\ 2x_1 + x_2 \le 9 \\ x_1 \ge 4 \\ x_2 \le 3 \\ x_1,\, x_2 \ge 0 \end{cases}.$$

Найдём m_i: $m_1 = \max\limits_{G_1} f = f(A_1) = f(2;3) = 5$; $m_2 = \max\limits_{G_2} f = f(A_2) = f(3;2) = 5$; $m_3 = \max\limits_{G_3} f = f(A_3) = f(4;1) = 5$. Получены три оптимальных целочисленных плана: $X_1 = (2;3)$, $X_2 = (3;2)$, $X_3 = (4;1)$; $f_{\max} = 5$.

4. МАТРИЧНАЯ ИГРА

Постановка задачи

Теория игр занимается построением математических моделей конфликтных ситуаций и разработкой рекомендаций по принятию решений. Теория разрабатывается для множества повторяющихся ситуаций. Для единичных случаев она смысла не имеет.

Под термином ИГРА понимается совокупность строго определённых правил, в соответствии с которыми принимают решения участники игры – ИГРОКИ. Разрешённое правилами игры действие игрока называется СТРАТЕГИЕЙ. Выбор каждым игроком некоторой стратегии влечёт определённый правилами результат, который для каждого игрока называется ВЫИГРЫШЕМ или получением платежа. Выигрыши выражаются числовыми значениями. Если общая сумма выигрышей равна нулю, то игра называется игрой с НУЛЕВОЙ СУММОЙ. Это значит, что успех одного игрока возможен только за счёт других (другого).

Мы рассмотрим матричные игры двух игроков при конечном множестве стратегий и с нулевой суммой. Предполагается, что игроки сознательно стремятся к получению наибольшего выигрыша и считают партнёра разумным соперником.

Пример

Игра в три пальца. Игроки G_1 и G_2 одновременно и независимо друг от друга выбирают по одному целому числу от 1 до 3. Размер выигрыша равен сумме чисел. Если сумма чётная, то выигрывает первый игрок G_1, если нечётная – G_2. Такую игру можно описать матрицей

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 3 & -5 & 6 \end{pmatrix}. \qquad (4.1)$$

Здесь, если i – число, выбранное первым игроком, j – вторым игроком, то $a_{ij}=(-1)^{i+j}(i+j)$. Число a_{ij} – это выигрыш первого игрока и проигрыш второго при выборе чисел i и j. Если a_{ij} отрицательно, то фактически выигрывает второй игрок.

Формальное определение и простейшие выводы

Определение матричной игры

Пусть игрок G_1 может выбрать одну из стратегий $A_1,\ldots,A_m$, а игрок G_2 – одну из стратегий $B_1,\ldots,B_n$. Пусть выбор пары стратегий $(A_i;B_j)$ влечёт за собой выигрыш первого игрока за счёт второго в размере a_{ij} (если $a_{ij}<0$, то реально выигрывает второй игрок). Описанная игра называется матричной игрой, определяемой матрицей

$$A=\begin{pmatrix} a_{11}\ldots a_{1n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\ldots a_{mn} \end{pmatrix}. \qquad (4.2)$$

Матрица A называется ПЛАТЁЖНОЙ МАТРИЦЕЙ матричной игры. Смысл игры состоит в выборе игроком наиболее выигрышной для него стратегии.

Проведём простейший анализ сформулированной игры. Пусть

$$a_i=\min_{1\le j\le n} a_{ij},\ b_j=\max_{1\le i\le m} a_{ij};\ \alpha=\max_{1\le i\le m} a_i,\ \beta=\min_{1\le j\le n} b_j .$$

То есть

$$\alpha=\max_{1\le i\le m}\min_{1\le j\le n} a_{ij},\ \beta=\min_{1\le j\le n}\max_{1\le i\le m} a_{ij} .$$

Число α называется нижней ценой игры, β – верхней ценой игры.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Справедливо неравенство $\alpha\le\beta$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу предыдущих определений имеем $a_i\le a_{ij}\ (1\le j\le n)$, $b_j\ge a_{ij}\ (1\le i\le m)$. Значит, $a_i\le b_j$ при любых значениях i и j. Тогда $\alpha=\max\limits_{1\le i\le m} a_i\le b_j$ при любых j, и $\alpha\le\min\limits_{1\le j\le n} b_j=\beta$.

Пусть $\alpha=a_{pq}$ и $\beta=a_{rs}$. Тогда, выбрав стратегию A_q, игрок G_1 гарантирует себе выигрыш не меньше, чем α; а игрок G_2, выбрав стратегию B_s, гарантирует себе проигрыш не больше чем β. Поэтому реально выигрыш первого игрока лежит в промежутке $[\alpha;\beta]$. Если $\alpha=\beta$, то игра теряет содержание, и первый игрок получит выигрыш равный $\alpha=\beta$ (второй столько же проиграет).

ПРИМЕР. Для матрицы (4.1) имеем

$$a_1=-3,\ a_2=-5,\ a_3=-6,\ \alpha=-3;\ b_1=3,\ b_2=4,\ b_3=6,\ \beta=3 .$$

Реальный выигрыш первого игрока лежит в промежутке $[-3;3]$.

Седловая точка

Предположим, что выполняется равенство $\alpha=\beta$. Тогда матричная игра называется игрой с седловой точкой. Пусть $(A_i;B_j)$ – пара стратегий, для которой $\alpha_{ij}=\alpha=\beta$. Эта пара называется седловой точкой матричной игры, а элемент α_{ij} – седловым элементом. Легко проверяется, что седловой элемент является наименьшим в своей строке и наибольшим в своём столбце: $a_{lj}\le a_{ij}\le a_{ik}$. Число $v=\alpha=\beta$ называется ценой игры. Выше уже указано, что игра с седловой точкой не имеет содержания.

ПРИМЕР. $A=\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 4\,3\,4 \\ 3\,1\,2 \end{pmatrix}$. $\alpha=\beta=3=a_{22}$.

Чистые и смешанные стратегии

Будем говорить, что игрок G_1 придерживается чистой стратегии A_i, если при многократном выборе стратегии он постоянно выбирает A_i. Можно сказать, что он выбирает её с вероятностью $p=1$. Смешанной стратегией игрока G_1 называется случайный, независимый от поведения второго игрока, выбор стратегий с определенной вероятностью для каждой стратегии. Смешанную стратегию игрока можно описать строкой $\overline{p}=(p_1,...,p_m)$, где p_i – вероятность выбора стратегии $A_i: p_i = p(A_i)$. Очевидно, $p_i \geq 0$ и $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1$. Аналогично определяются чистая и смешанная стратегии игрока G_2. Смешанная стратегия игрока описывается строкой $\overline{q}=(q_1,...,q_m): q_j = p(B_j),\ q_j \geq 0,\ \sum_{j=1}^{n} q_j = 1$. Далее сами строки $\overline{p}=(p_1,...,p_m)$ и $\overline{q}=(q_1,...,q_m)$ будем называть смешанными стратегиями игроков.

Матричная игра без седловой точки

Рассмотрим игру, не имеющую седловой точки. Поставим задачу нахожденя оптимального поведения игроков. Условием оптимальности будем считать невогодность отказа игрока от данной стратегии. Решать задачу будем в рамках смешанных стратегий. Нам нужно дать строгое определение принципа оптимальности и указать алгоритм нахождения оптимальных стратегий.

ПЛАТЁЖНАЯ ФУНКЦИЯ

Пусть игроки придерживаются смешанных стратегий $\overline{p}=(p_1,...,p_m)$ и $\overline{q}=(q_1,...,q_m)$. Это значит, что игроки случайно выбирают пару $(A_i;B_j)$, и получаемый выигрыш является случайной величиной. Обозначим случайную величину выигрыша буквой X и найдём её математическое ожидание (среднее значение). Случайная величина X принимает значения a_{ij} с вероятностью выбора пары стратегий $(A_i;B_j)$, поэтому

$$M(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, p(A_i;B_j).$$

Поскольку выбор игроков делается независимо, то вероятность выбора пары $(A_i;B_j)$ равна произведению вероятностей: $p(A_i;B_j)=p(A_i)\,p(B_j)=p_i q_j$. Теперь

$$M(X)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, p_i q_j .$$

Это математическое ожидание зависит от выбора смешанных стратегий $\overline{p}=(p_1,...,p_m)$ и $\overline{q}=(q_1,...,q_m)$. Обозначим эту зависимость буквой $f: M(X)=f(\overline{p};\overline{q})$, где

$$f(\overline{p};\overline{q}) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i q_j .$$

Функция $f(\overline{p};\overline{q})$ называется платёжной функцией матричной игры.

Принцип оптимальности

Выше мы назвали оптимальными стратегии, от которых невыгодно отказываться. Дадим строгое определение. Пара смешанных стратегий $(\overline{p}^*;\overline{q}^*)$ называется оптимальной, если для любых смешанных стратегий $\overline{p}$ и $\overline{q}$ справедливы неравенства

$$f(\overline{p};\overline{q}^*) \le f(\overline{p}^*;\overline{q}^*) \le f(\overline{p}^*;\overline{q}) \qquad (4.3)$$

Пара оптимальных стратегий $(\overline{p}^*;\overline{q}^*)$ называется решением матричной игры. Значение платёжной функции на этих стратегиях: $v = f(\overline{p}^*;\overline{q}^*)$ – ценой игры.

Заметим, что условие (4.3) является аналогом условия, определяющего седловую точку: $a_{lj} \le a_{ij} \le a_{ik}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Каждая матричная игра имеет решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО будет приведено ниже.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Смешанные стратегии $\overline{p}^* = (p_1^*,..., p_m^*)$ и $\overline{q}^* = (q_1^*,...,q_n^*)$ являются оптимальными тогда и только тогда, когда существует число v, для которого выполняются условия

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* \ge v \ (j = 1,...,n); \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^* \le v \ (i = 1,...,m). \qquad (4.4)$$

При этом v определяется однозначно и равно цене игры.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Сначала покажем, что из (4.3) следует (4.4). Пусть $\overline{p}^*$ и $\overline{q}^*$ – оптимальные стратегии и v – цена игры: $v = f\left(\overline{p}^*;\overline{q}^*\right) = \sum a_{ij} p_i^* q_j^*$, $\overline{q} = \left(q_1,\ldots,q_n\right)$ некоторая произвольная стратегии. Тогда в силу (4.3) имеем $v = \sum a_{ij} p_i^* q_j^* \le \sum a_{ij} p_i^* q_j$. Возьмем в качестве $\overline{q}$ стратегию $\overline{q}_k = \left(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0\right)$ (на k-том месте стоит 1) и получим $v \le \sum_i a_{ik} p_i^*$. Первое из неравенств (4.4) доказано. Аналогично доказывается второе неравенство.

Наоборот, покажем, что из (4.4) следует (4.3). В силу (4.4) при любом $\overline{q}$ имеем $\sum_k \left(\sum_i a_{ik} p_i^* \right) q_k \ge \sum_k v\, q_k = v \sum q_k = v$. Аналогично, при любом $\overline{p}$ имеем $\sum_l \left(\sum_j a_{lj} q_j^* \right) p_l \le \sum_l v\, p_l = v \sum p_l = v$. Получили: $\sum a_{ij} p_i^* q_j \ge v$, $\sum a_{ij} p_i q_j^* \le v$. Возьмем в качестве $\overline{p}$ и $\overline{q}$ стратегии $\overline{p}^*$ и $\overline{q}^*$: $v \le \sum a_{ij} p_i^* q_j^* \le v$. Значит, $\sum a_{ij} p_i^* q_j^* = v$ и справедливы неравенства $\sum a_{ij} p_i q_j^* \le \sum a_{ij} p_i^* q_j^* \le \sum a_{ij} p_i^* q_j$. А это и есть условие оптимальности (1). При этом $v=\sum a_{ij}p_i^* q_j^*$, то есть v – цена игры.

Активные стратегии

Пусть $\overline{p}^*=(p_1^*,...,p_m^*)$ и $\overline{q}^*=(q_1^*,...,q_n^*)$ – оптимальные смешанные стратегии. Стратегии A_i и B_j, называются активными стратегиями игроков G_1 и G_2 если $p_i^*\neq 0$ и $q_j^*\neq 0$. Пусть M – множество номеров активных стратегий игрока G_1, а N – игрока G_2, тогда: $i\in M \Leftrightarrow p_i^*\neq 0;\ j\in N \Leftrightarrow q_j^*\neq 0$. Очевидны равенства $\sum\limits_{i\in M} p_i^*=1,\ \sum\limits_{j\in N} q_j^*=1$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Пусть $\overline{p}=(p_1,...,p_m)$ и $\overline{q}=(q_1,...,q_n)$ – смешанные стратегии, не выходящие за пределы активных стратегий. Тогда справедливы равенства

$$f\left(\overline{p}^*;\overline{q}\right)=\sum_{j\in N}\left(\sum_{i\in M}a_{ij}p_i^*\right)q_j=v,\quad f\left(\overline{p};\overline{q}^*\right)=\sum_{i\in M}\left(\sum_{j\in N}a_{ij}q_j^*\right)p_i=v \tag{4.5}$$

ЗАМЕЧАНИЕ. Предложение 3 утверждает, что если один из игроков придерживается оптимальной смешанной стратегии, а второй ведёт себя произвольно, но в рамках активных стратегий, то средний размер выигрыша первого игрока равен цене игры, то есть остаётся оптимальным.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В силу равенства $v=f\left(\overline{p}^*;\overline{q}^*\right)=\sum a_{ij}p_i^*q_j^*$ имеем $v=\sum\limits_{j\in N}\left(\sum\limits_{i\in M}a_{ij}p_i^*\right)q_j^*$. В силу (4.4) имеем $\sum\limits_{i\in M}a_{ij}p_i^*\geq v$. Допустим, что при некотором $j\in N$, справедливо строгое неравенство $\sum\limits_{i\in M}a_{ij}p_i^*>v$. Получаем противоречие: $v=\sum\limits_{j\in N}\left(\sum\limits_{i\in M}a_{ij}p_i^*\right)q_j^*>\sum\limits_{j\in N}vq_j^*=v\sum\limits_{j\in N}q_j^*=v$, то есть $v>v$. Значит, допущение $\sum\limits_{i\in M}a_{ij}p_i^*>v$ ошибочно, и справедливо равенство $\sum\limits_{i\in M}a_{ij}p_i^*=v$ при $j\in N$. Пусть теперь $\overline{q}=(q_1,...,q_n)$ – смешанная стратегия, использующая только активные стратегии: $q_j=0$ при $j\notin N$ и $\sum\limits_{j\in N}q_j=1$. Тогда получаем первое из равенств (4.5): $f(\overline{p}^*;\overline{q})=\sum\limits_{j\in N}\left(\sum\limits_{i\in M}a_{ij}p_i^*\right)q_j=\sum\limits_{j\in N}vq_j=v\sum\limits_{j\in N}q_j=v$. Аналогично доказывается второе равенство (4.5).

Преобразование матричной игры

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть игра с матрицей $A=(a_{ij})$ имеет решение $(\overline{p}^*;\overline{q}^*)$ с ценой v. Тогда игра с матрицей $A'=(a'_{ij})$, где $a'_{ij}=ba_{ij}+c$, при $b>0$ имеет то же решение с ценой $v'=ba_{ij}+c$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть условия оптимальности (4.4) выполняются для первой игры, и покажем их справедливость для второй. Пусть $a'_{ij}=ba_{ij}+c$, $v'=ba_{ij}+c$ и $b>0$. Так как $b>0,\ \sum_{i=1}^{m}a_{ij}p_i^*\ge v,\ \sum_{i=1}^{m}p_i^*=1$, то

$$\sum_{i=1}^{m}a'_{ij}p_i^*=\sum_{i=1}^{m}(ba_{ij}+c)p_i^*=b\sum_{i=1}^{m}a_{ij}p_i^*+c\sum_{i=1}^{m}p_i^*\ge bv+c=v';\quad \sum_{i=1}^{m}a'_{ij}p_i^*\ge v'.$$

Аналогично для второго условия.

СЛЕДСТВИЕ. Игру с матрицей A можно свести к игре с положительной ценой игры и теми же оптимальными стратегиями $(\overline{p}^*;\overline{q}^*)$. Достаточно взять $a'_{ij}=a_{ij}+c$ с большим положительным c.

Алгоритм нахождения решения матричной игры

ЗАМЕЧАНИЕ. Построенный ниже алгоритм доказывает предложение 1.

Допустим, что рассматриваемая игра имеет решение. Поскольку любая игра может быть сведена к игре с положительной ценой с тем же решением, будем предполагать цену игры положительной. Пусть, как и раньше $A=(a_{ij})$ – платёжная матрица, $v>0$ – цена игры, $\overline{p}=(p_1,\dots,p_m)$ и $\overline{q}=(q_1,\dots,q_m)$ – смешанные стратегии игроков. Запишем условия оптимальности в виде двух систем:

$$\begin{cases}\sum_{i=1}^{m}a_{ij}p_i\ge v\ (j=1,\dots,n)\\ \sum_{i=1}^{m}p_i=1\\ p_i\ge 0\ \ (i=1,\dots,m)\end{cases}\qquad(4.6)\qquad\qquad \begin{cases}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}q_j\le v\ (i=1,\dots,m)\\ \sum_{j=1}^{n}q_j=1\\ q_j\ge 0\ \ (j=1,\dots,n)\end{cases}\qquad(4.7)$$

Запишем первые неравенства в виде $\sum_{i=1}^{m}a_{ij}p_i\ge u$ и $\sum_{j=1}^{n}a_{ij}q_j\le w$. В силу однозначности определения v очевидно, что v – наибольшее из возможных u и наименьшее из возможных w. Поэтому условия оптимальности (4.6) и (4.7) можно записать в виде

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \geq u \\ \sum_{i=1}^{m} p_i = 1 \\ u > 0 \text{ и } \textit{максимально} \\ p_i \geq 0 \end{cases} \qquad (4.8) \qquad\qquad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \leq w \\ \sum_{j=1}^{n} q_j = 1 \\ w > 0 \text{ и } \textit{минимально} \\ q_j \geq 0 \end{cases} \qquad (4.9)$$

Разделив условия (4.8) на u, а условия (4.9) на w, получим

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \frac{p_i}{u} \geq 1 \\ \sum_{i=1}^{m} \frac{p_i}{u} = \frac{1}{u} \\ \frac{p_i}{u} \geq 0 \\ u - \max \Leftrightarrow \frac{1}{u} - \min \end{cases} \qquad (4.10) \qquad\qquad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \frac{q_j}{w} \leq 1 \\ \sum_{j=1}^{n} \frac{q_j}{w} = \frac{1}{w} \\ \frac{q_j}{w} \geq 0 \\ w - \min \Leftrightarrow \frac{1}{w} - \max \end{cases} \qquad (4.11)$$

Введём обозначения: $x_i = \frac{p_i}{u}$, $y_j = \frac{q_j}{u}$, $f = \frac{1}{u}$, $g = \frac{1}{w}$. Тогда (4.10) и (4.11) примут вид

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} x_i = f \ (\min) \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \geq 1 \\ x_i \geq 0 \end{cases} \qquad (4.12) \qquad\qquad \begin{cases} g = \sum_{j=1}^{n} y_j \ (\max) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \leq 1 \\ y_j \geq 0 \end{cases} \qquad (4.13)$$

Получены две двойственные задачи линейного программирования. Пусть $X^* = (x_1^*, ..., x_m^*)$, $Y^* = (y_1^*, ..., y_n^*)$ их оптимальные планы. В силу двойственности $f_{\min} = g_{\max}$, значит, $u_{\max} = w_{\min}$. Положим $v = u_{\max} = w_{\min}$, $p_i^* = v \cdot x_i^*$, $q_j^* = v \cdot y_j^*$. Тогда при $p_i = p_i^*$, $q_j = q_j^*$ выполняются условия оптимальности (4.6) и (4.7). Значит, решение матричной игры найдено.

Пример

Найти решение матричной игры с платёжной матрицей $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -3 & 4 & -5 \\ 4 & -5 & 6 \end{pmatrix}$.

РЕШЕНИЕ. Перейдём к новой игре с матрицей A', полученной по формуле $\alpha'_{ij} = \alpha_{ij} + c$, где $c \ge 5$. При $c = 5$ имеем $A' = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 9 \\ 2 & 9 & 0 \\ 9 & 0 & 11 \end{pmatrix}$. Запишем задачи (4.12) и (4.13):

$$f = x_1 + x_2 + x_3 \ (\min) \qquad\qquad g = y_1 + y_2 + y_3 \ (\max)$$

$$\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 9x_3 \ge 1 \\ 2x_1 + 9x_2 \ge 1 \\ 9x_1 + 11x_3 \ge 1 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases} \quad (4.14) \qquad \begin{cases} 7y_1 + 2y_2 + 9y_3 \le 1 \\ 2y_1 + 9y_2 \le 1 \\ 9y_1 + 11y_3 \le 1 \\ y_1, y_2, y_3 \ge 0 \end{cases} \quad (4.15)$$

Решим задачу (4.15): перейдём к канонической форме записи, введя переменныё y_4, y_5, y_6; запишем очевидный начальный опорный план, проведём оптимизацию.

$$\begin{array}{r|c|ccc|} & & y_1 & y_2 & y_3 \\ y_4 = & 1 & -7 & -2 & -9 \\ y_5 = & 1 & -2 & \boxed{-9} & 0 \\ y_6 = & 1 & -9 & 0 & -11 \\ g = & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array} \to \begin{array}{r|c|ccc|} & & y_1 & y_5 & y_3 \\ y_4 = & 7/9 & -59/9 & 2/9 & \boxed{-9} \\ y_2 = & 1/9 & -2/9 & -1/9 & 0 \\ y_6 = & 1 & -9 & 0 & -11 \\ g = & 1/9 & 7/9 & -1/9 & 1 \end{array} \to \begin{array}{r|c|ccc|} & & y_1 & y_5 & y_4 \\ y_3 = & 7/81 & -59/81 & 2/81 & -1/9 \\ y_2 = & 1/9 & -2/9 & -1/9 & 0 \\ y_6 = & 4/81 & \boxed{-80/81} & -22/81 & 11/9 \\ g = & 16/81 & 4/81 & -7/81 & 1/9 \end{array} \to$$

$$\to \begin{array}{r|c|ccc|} & & y_1 & y_5 & y_4 \\ y_3 = & 1/20 & & & \\ y_2 = & 1/20 & & & \\ y_1 = & 1/20 & & & \\ g = & 1/5 & -1/20 & -1/10 & -1/20 \end{array}.$$

Задача (4.15) решена: $g_{\max} = \frac{1}{5},\ y_1 = \frac{1}{20},\ y_2 = \frac{1}{10},\ y_3 = \frac{1}{20}$. Так как переменные y_1, y_2, y_3 – свободные, то x_1, x_2, x_3 – базисные: $\begin{cases} 7x_1 + 2x_2 + 9x_3 = 1 \\ 2x_1 + 9x_2 = 1 \\ 9x_1 + 11x_3 = 1 \end{cases}$, $\begin{cases} x_1 = 1/20 \\ x_2 = 1/10 \\ x_3 = 1/20 \end{cases}$.

Двойственные задачи решены. Перейдём к решению матричной игры с матрицей A'. Её цены игры находится по формуле $v' = \frac{1}{g_{\max}}$, значит, $v' = 5$. Находим оптимальные стратегии по формулам $p_i = v' \cdot x_i,\ q_j = v' \cdot y_j$: $p_1 = \frac{1}{4},\ p_2 = \frac{1}{2},\ p_3 = \frac{1}{4},\ q_1 = \frac{1}{4},\ q_2 = \frac{1}{2},\ q_3 = \frac{1}{4}$. Цена исходной игра с матрицей A находится из равенства $v' = v + c$. У нас $c = 5,\ v' = 5$, значит,

$v=0$. Таким образом, придерживаясь стратегий $\overline{p}^*=\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$, $\overline{q}^*=\left(\frac{1}{4};\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right)$, игроки в среднем будут иметь нулевой выигрыш.

5. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Динамическое программирование (ДП) – это математический метод решения оптимизационных задач с многошаговой структурой. Эти задачи моделируют реальные процессы таким образом, что изменение рассматриваемого объекта не является непрерывным, а происходит скачками, переходя за некоторое конечное число шагов из начального состояния в конечное.

Ключевые понятия и термины

Система – рассматриваемый объект.

Состояние – перечень значений интересующих нас параметров объекта. Будем обозначать его вектором $\overline{x}=(x_1,\ldots,x_s)$.

Шаг – скачкообразный переход из одного состояния системы в другое.

Управляющее решение – воздействие на систему на одном шаге.

Управление – последовательность управляющих решений, переводящих систему из начального состояния в конечное.

Функция цели – критерий эффективности управления.

Цель управления – оптимизация значения функции цели.

Аксиомы ДП

1. Все возможные управления содержат одно и то же конечное число шагов.

2. На каждом шаге выбирается ровно одно управляющее решение из конечного множества допустимых решений.

3. Результат управляющего решения зависит только от состояния, в котором решение принимается, и самого решения и не зависит от предыстории управления. Результатом управляющего решения является переход системы (шаг) из одного состояния в другое.

Обозначим число всех шагов – N; начальное состояние обозначим – $\overline{x}_0$, состояние после i-того шага – $\overline{x}_i$. То есть система за N шагов проходят последовательно состояния $\overline{x}_0,\overline{x}_1,...,\overline{x}_N$. Управляющее решение на i-том шаге обозначим u_i. Оно переводит систему из состояния $\overline{x}_{i-1}$ в $\overline{x}_i$. Аксиому 3 можно записать в виде функциональной зависимости $\overline{x}_i=\overline{x}_i(\overline{x}_{i-1},u_i)$. Если состояния $\overline{x}_0$ и $\overline{x}_N$ фиксированы, то задача называется задачей с закрепленными концами; если нет – со свободными концами. Всякую задачу со свободными концами можно свести к задаче с закрепленными концами, добавив фиксированные начало и конец и два дополнительных шага управления. Полную картину возможности осуществления *i*-того шага назовем *i*-тым этапом (это перечень всех возможных состояний и управляющих решений перед *i*-тым шагом).

Принципы построения оптимального управления

Процесс управления в задаче ДП можно рассматривать как от начального состояния к конечному, так и наоборот. Мы будем двигаться от конечного состояния к начальному. При этом следует придерживаться следующих двух принципов.

ПРИНЦИП ОПТИМАЛЬНОСТИ

Оптимальное управляющее решение на каждом шаге определяется состоянием системы на начало шага и целью управления. То есть на данном шаге нужно выбрать такое управляющее решение, чтобы управление, начинающееся с этого шага, было оптимальным.

ПРИНЦИП ПОГРУЖЕНИЯ

Рассмотрим задачу, в которой процесс изменения начинается не с первого шага, исходя из состояния $\overline{x}_0$, а с *k*-го шага, исходя из состояния $\overline{x}_{k-1}$. Мы имеем опять задачу ДП той же природы, что и исходная, но с меньшим числом шагов $(N-k+1)$. То есть исходную задачу мы можем мыслить погруженной в семейство аналогичных задач ДП. Оптимальное управление для задачи с меньшим чем N шагов будем называть условно-оптимальным.

Уравнения Беллмана

Эти уравнения дают математическое выражение принципа оптимальности при условии аддитивности функции цели; причем мы ограничимся задачей с закрепленными концами. Функция цели f называется аддитивной, если имеет вид

$$f=\sum_{i=1}^{N} f_i\,, \tag{5.1}$$

где $f_i=f_i(\overline{x}_{i-1},u_i)$ – вклад i-того шага. Поскольку $\overline{x}_i=\overline{x}_i(\overline{x}_{i-1},u_i)$, то f зависит от $\overline{x}_0,u_1,\ldots,u_n$: $f=f(\overline{x}_0,u_1,\ldots,u_n)$.

Опишем процесс максимизации функции цели (минимизация проводится аналогично). Исходя из принципов оптимальности и погружения, рассмотрим последовательно задачи, начинающиеся с *N*-го шага, с $N-1$-го шага и так далее. Пусть оптимизация управления начинается из состояния $\overline{x}_{N-1}$ перед *N*-м шагом. Обозначим через $F_1(\overline{x}_{N-1})$ максимум функции цели такой задачи. Очевидно

$$F_1(\overline{x}_{N-1})=\max_{\{u_N\}} f_N(\overline{x}_{N-1},u_N)\,, \tag{5.2}$$

где максимум берется по всем возможным управляющим решениям в состоянии $\overline{x}_{N-1}$. Аналогично обозначим через $F_2(\overline{x}_{N-2})$ условно-оптимальное (максимальное) значение функции цели на двух последних шагах, исходя из состояния $\overline{x}_{N-2}$; через $F_3(\overline{x}_{N-3})$ – на трех последних шагах, исходя из $\overline{x}_{N-3}$; через

$F_k(\overline{x}_{N-k})$ – на k шагах, исходя из $\overline{x}_{N-k}$. Наконец, через $F_N(\overline{x}_0)$ – на N шагах, исходя из $\overline{x}_0$. Очевидно, $F_N(\overline{x}_0)$ и есть оптимальное значение функции цели (ее максимум). На основании (5.1) можно записать следующие равенства:

$$F_2(\overline{x}_{N-2}) = \max_{\{u_{N-1}\}}\{ f_{N-1}(\overline{x}_{N-2}, u_{N-1}) + F_1(\overline{x}_{N-1})\}, \qquad (5.3)$$

где $\overline{x}_{N-1} = \overline{x}_{N-1}(\overline{x}_{N-2}, u_{N-1})$, max берется по всем возможным управляющим решениям u_{N-1} в состоянии $\overline{x}_{N-2}$;

$$F_k(\overline{x}_{N-k}) = \max_{\{u_{N-k+1}\}}\{ f_{N-k+1}(\overline{x}_{N-k}, u_{N-k+1}) + F_{k-1}(\overline{x}_{N-k+1})\}, \qquad (5.4)$$

где $\overline{x}_{N-k+1} = \overline{x}_{N-k+1}(\overline{x}_{N-k}, u_{N-k+1})$;

$$F_N(\overline{x}_0) = \max_{\{u_1\}}\{ f_1(\overline{x}_0, u_1) + F_{N-1}(\overline{x}_1)\}, \qquad (5.5)$$

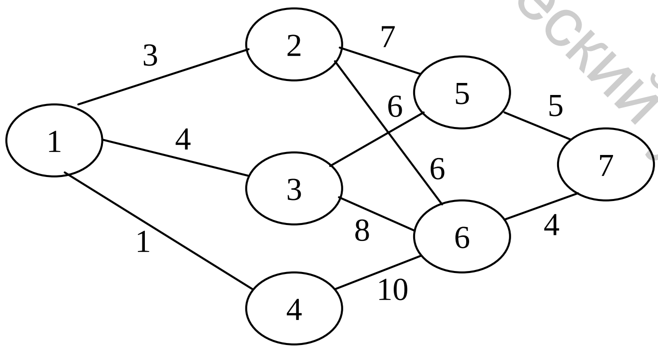
где $\overline{x}_1 = \overline{x}_1(\overline{x}_0, u_1)$.

Равенства (5.2) – (5.5) называются функциональными уравнениями Беллмана. Они позволяют найти условно-оптимальное управление на последних k шагах, зная условно-оптимальные управления на последних $k-1$-ном шагах.

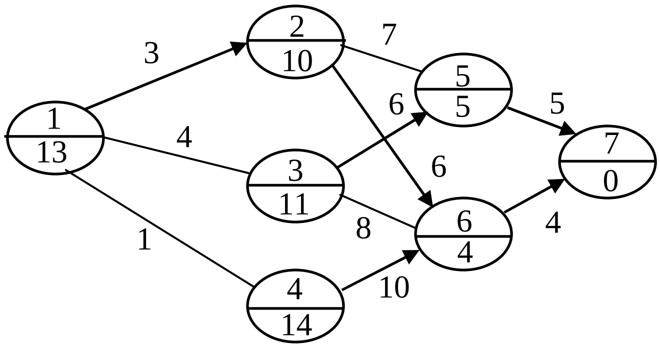
ЗАМЕЧАНИЕ. Рассмотрев всю предысторию изменения системы до данного момента как состояние системы в данной момент, мы можем задачу, учитывающую предысторию изменения системы, рассмотреть как задачу ДП (см. аксиому 3).

Примеры

1. Задача оптимизации маршрута для транспортной сети. Рассмотрим транспортную сеть, изображенную на рисунке. Овалы с цифрами обозначают пункты на сети и их номера; отрезки обозначают участки сети, соединяющие два пункта, число возле отрезка означает затраты на преодоление этого участка. Нужно найти самый экономичный маршрут и затраты на его преодоление при переходе из п.1 в п.7.



Разобьем движение по сети на этапы. Здесь будет 3 этапа – I, II, III. Функция цели – суммарные затраты на маршруте – равны сумме затрат на каждом этапе, то есть имеет аддитивную структуру. На рисунке в кружках внизу указаны условно-оптимальные значения функции цели. Стрелки указывают условно-оптимальные маршруты.



Находим условно-оптимальные значения функции цели по уравнениям Беллмана:

1) $F_1(5) = 5,\ F_1(6) = 6$;

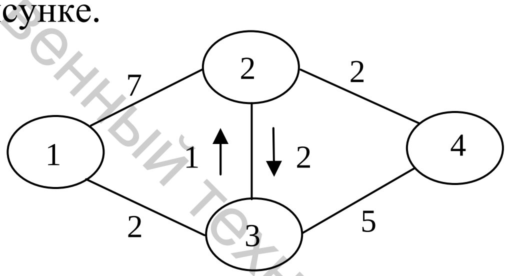
2) $F_2(2) = \min\{7+5; 6+4\} = 10,\ F_2(3) = \min\{6+5; 8+4\} = 11,$

$F_2(4) = \min\{10+4\} = 14$;

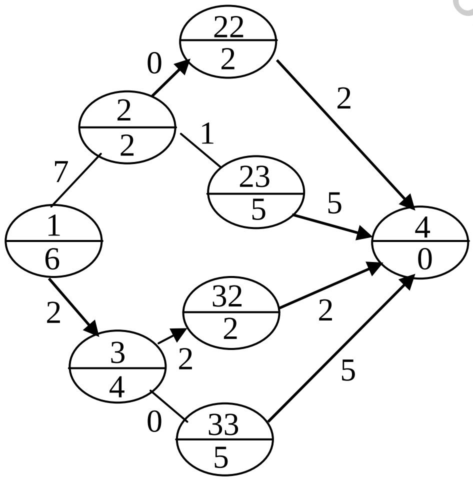
3) $F_3(1) = \min\{3+10; 4+11; 1+14\} = 13$.

Оптимальный маршрут имеет вид $1 \to 2 \to 6 \to 7;\ f_{\min} = 13$.

2. Оптимизировать маршрут перехода из п. 1 в п. 4 для транспортной сети, представленной на рисунке.



Здесь удобно ввести в рассмотрение состояния, описывающие движение по маршруту (то есть предысторию процесса): 1, 2, 3, 23, 32, 22, 33, 4, где выражение, например, 23 означает переход из п. 2 в п. 3, выражение 22 означает задержку в п. 2 на один шаг. Задержка введена для удобства разбиения на этапы.



Применяем уравнение Беллмана.

$F_1(22) = 2,\ F_1 = (23) = 5,\ F_1(32) = 2,\ F_1(33) = 5$;

$F_2(2) = \max\{0+2, 1+5\} = 2,\ \ F_2(3) = \max\{2+2, 0+5\} = 4$;

$F_3(1) = \max\{7+2, 2+4\} = 6$.

Оптимальным является маршрут $1 \to 3 \to 2 \to 4$; $f_{\min} = 6$.

3. Пусть между четырьмя предприятиями распределяется 100 у. е. инвестиций, причем инвестируемые суммы кратны 20-ти. Прирост выпуска продукции на *i*-том предприятии при вложении в него x единиц инвестиций обозначим $r_i(x)$. Значения $r_i(x)$ даны в таблице. Найти план распределения инвестиций, максимизирующий прирост выпуска продукции.

	r_1	r_2	r_3	r_4
20	10	12	11	16
40	31	26	36	37
60	42	36	45	46
80	62	54	60	63
100	76	78	77	80

Состояния и этапы. Проведем следующее разбиение на этапы:

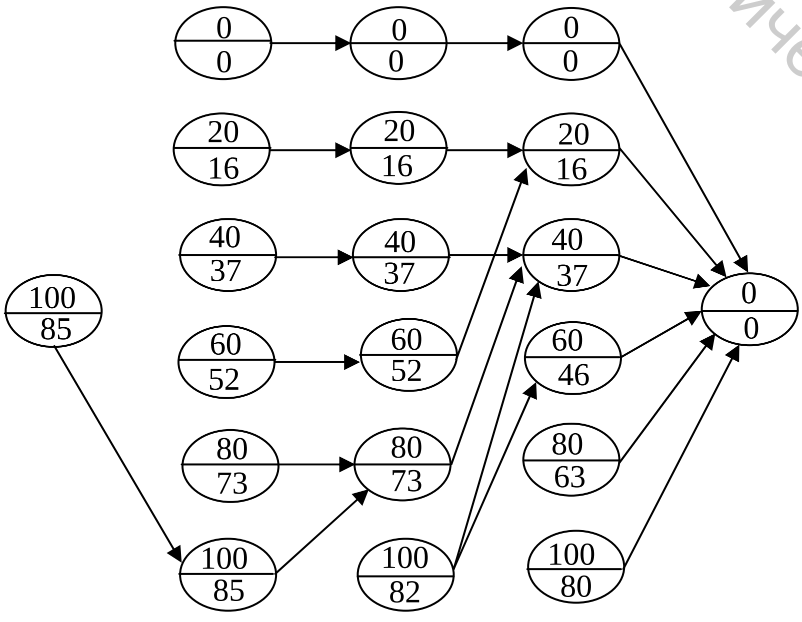
I – выделение средств I предприятию;

II – выделение средств (из остатка) II предприятию;

III – выделение средств (из остатка) III предприятию;

IV – выделение оставшихся средств IV предприятию.

Состоянием назовём объём оставшихся нераспределенными денежных средств. Обозначим состояния y_0, y_1, y_2, y_3, y_4; очевидно $y_0 = 100,\ y_4 = 0$ (задача с закрепленными концами). Объем инвестиций, выделяемых *i*-тому предприятию, обозначим x_i. Очевидно $x_i = y_{i-1} - y_i$. Изобразим схему задачи в виде транспортной сети и проведем вычисления по уравнениям Беллмана.



1) $F_1(0) = 0,\ F_1(20) = 16,\ F_1(40) = 37,\ F_1(60) = 46,\ F_1(80) = 63,\ F_1(100) = 80$;

2) $F_2(0)=0,\ F_2(20)=\max\{0+16, 11+0\}=16$,

$F_2(40)=\max\{0+37, 11+16, 36+0\}=37$,

$F_2(60)=\max\{0+46, 11+37, 36+16, 45+0\}=52$,

$F_2(80)=\max\{0+63, 11+46, 36+37, 45+16, 60+0\}=73$,

$F_2(100)=\max\{0+80, 11+63, 36+46, 45+37, 60+16, 77+0\}=82$;

3) $F_3(0)=0,\ F_3(20)=\max\{0+16, 12+0\}=16$,

$F_3(60)=\max\{0+52, 12+37, 26+16, 36+0\}=52$,

$F_3(80)=\max\{0+73, 12+52, 26+37, 36+16, 54+0\}=73$,

$F_3(100)=\max\{0+82, 12+73, 26+52, 36+37, 54+16, 78+0\}=85$;

4) $F_4(100)=\max\{0+85, 10+73, 31+52, 42+37, 62+16, 76+0\}=85$.

Мы получили $y_0=100,\ y_1=100,\ y_2=80,\ y_3=40,\ y_4=0$. Значит, $x_1=0,\ x_2=20$, $x_3=40,\ x_4=40;\ f_{\max}=85$.

Проведенные вычисления удобно оформить в виде таблице, согласно проходимым в обратном порядке этапам.

$y_3=x_4$ / y_2	0	20	40	60	80	100	max	y_3	$x_3=y_2-y_3$
0	0+0						0	0	0
20	11+0	0+16					16	20	0
40	36+0	11+16	0+37				37	40	0
60	45+0	36+16	11+37	0+46			52	20	40
80	60+0	45+16	36+37	11+46	0+63		73	40	40
100	77+0	60+16	45+37	36+46	11+63	0+80	82	40, 60	60, 40

y_2 / y_1	0	20	40	60	80	100	max	y_2	$x_2=y_1-y_2$
0	0+0						0	0	0
20	12+0	0+16					16	20	0
40	26+0	12+16	0+37				37	40	0
60	36+0	26+16	12+37	0+52			52	60	0
80	54+0	36+16	26+37	12+52	0+73		73	80	0
100	76+0	54+16	36+37	26+52	12+73	0+82	85	80	20
y_1 / y_0	0	20	40	60	80	100	max	y_1	$x_1=y_0-y_1$
100	76+0	62+16	42+37	31+52	10+73	0+85	85	100	0

Получили: $y_0=100,\ y_1=100,\ y_2=80,\ y_3=40,\ y_4=0$;

$x_1=0,\ x_2=20,\ x_3=40,\ x_4=40;\ f_{\max}=85$.

Литература

1. Кузнецов, А. В. Высшая математика. Математическое программирование : учебник / А. В. Кузнецов, В. А. Сакович, Н. И. Холод ; под общ. ред. А. В. Кузнецова : Вышэйшая школа, 1994. – 286 с. : ил.
2. Кузнецов, А. В. Математическое программирование : учебное пособие / А. В. Кузнецов, Н. И. Холод. – Минск : Вышэйшая школа, 1984. – 221 с. : ил.
3. Кузнецов, А. В. Сборник задач по математическому программированию: программирование : учебное пособие / А. В. Кузнецов, Г. И. Новикова, Н. И. Холод. – Минск : Вышэйшая школа, 1985. – 143 с. : ил.
4. Таха, Х. Введение в исследование операций : монография ; пер. с англ. В 2 кн. Кн. 1 / Х. Таха. – Москва : Мир, 1985. – 479 с. : ил.
5. Таха, Х. Введение в исследование операций : монография ; пер. с англ. В 2 кн. Кн. 2 / Х. Таха. – Москва : Мир, 1985. – 496 с. : ил.