

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«Витебский государственный технологический университет»

**Информатика.
Система компьютерной математики Maple**

Методические указания к лабораторным работам
для студентов специальности 1-50 01 01 «Технология пряжи, тканей,
трикотажа и нетканых материалов»
дневной формы обучения

Витебск
2016

УДК 004.43(075)

Информатика. Система компьютерной математики Maple: методические указания к лабораторным работам для студентов специальности 1-50 01 01 «Технология пряжи, тканей, трикотажа и нетканых материалов» дневной формы обучения

Витебск : Министерство образования Республики Беларусь, УО «ВГТУ», 2015.

Составители: ст.пр. Стасеня Т.П.,
ст.пр. Мандрик О.Г.

В методических указаниях рассмотрены основные приемы работы в среде Maple. Методические указания предназначены для использования при выполнении лабораторных работ студентами специальности 50 01 01 «Технология пряжи, тканей, трикотажа и нетканых материалов» по курсу «Информатика» и будут полезны для студентов других специальностей при изучении курса «Информатика».

Одобрено кафедрой «Математика и информационные технологии» УО «ВГТУ»
24 января 2015 г., протокол № 4

Рецензент: Любочко Н.С.
Редактор: Казаков В.Е.

Рекомендовано к опубликованию редакционно-издательским советом
УО «ВГТУ» 26 марта 2015 г., протокол № 3

Ответственный за выпуск: Шпакова М.В.

Учреждение образования «Витебский государственный технологический университет»

Подписано к печати 04.03.16. Формат 60х90 1/16. Уч-изд. лист. 3.3.
Печать ризографическая. Тираж 70 экз. Заказ № 77

Отпечатано на ризографе учреждения образования «Витебский государственный технологический университет».

Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя, распространителя печатных изданий № 11172 от 12 февраля 2014г.
210035, Витебск, Московский пр., 72

СОДЕРЖАНИЕ

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 1	4
ТЕМА. СИСТЕМА КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ MAPLE. ОСНОВНЫЕ ПРИЕМЫ РАБОТЫ	4
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 2	22
ТЕМА. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ СРЕДСТВАМИ MAPLE.....	22
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА № 3	34
ТЕМА. ТИПОВЫЕ СРЕДСТВА ГРАФИКИ ПАКЕТА MAPLE	34
ЛИТЕРАТУРА	50

Лабораторная работа № 1

Тема. Система компьютерной математики Maple. Основные приемы работы

Цель работы: научиться выполнять математические расчеты средствами Maple

Теоретическая часть

В последние десятилетия развитие вычислительной техники способствовало популяризации таких дисциплин, как «Численные методы», «Численный анализ» и т. п. Для решения задач математики используются пакеты MathLab, MathCAD, Mathematica, электронные таблицы. Среди программных пакетов наиболее значителен продукт университета Ватерлоо (Канада) Maple. Он модифицирован под Windows, интерфейс интуитивно понятен, правила работы предельно просты для таких сложных и объемных программ.

Версии Maple стали популярны у ученых, инженеров и студентов. Регулярно появляются новые версии пакета. Мы будем работать с Maple 13.

Общие сведения. Пользовательский интерфейс

Maple – программный продукт для автоматизации символьных, численных и графических вычислений. Имеет мощный аппарат визуализации и анимации. Функциональные возможности Maple наиболее полно охватывают разделы математики, по каждому разделу написано большое количество процедур и функций, которыми легко пользоваться.

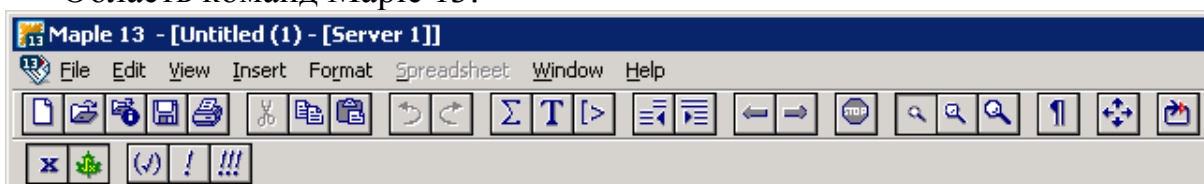
Во внутренней структуре Maple различают три компонента:

- ядро как математический инструментарий всех видов вычислений, написанное на языке C;
- библиотека встроенных процедур и процедур, написанных в среде Maple на его языке программирования;
- интерфейс, зависящий от качества дисплея и версии программы Maple.

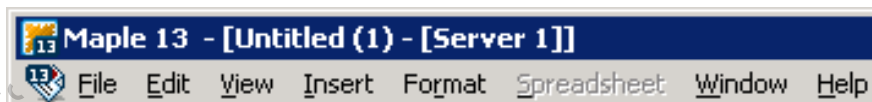
Экранный интерфейс классической версии Maple 13

Maple имеет все особенности Windows-приложений. Экранный интерфейс включает строку меню, панель кнопочных команд, рабочее окно пользователя и в нижней части экрана – строку состояния.

Область команд Maple 13:



Командное меню содержит полный набор команд управления работой в Maple.



Секция меню может быть открыта щелчком мыши либо набором ведущего символа (подчеркнутой буквы в названии секции).

Секция **File** предназначена для открытия и сохранения документов в разных традиционных вариантах.

Секция **Edit** обеспечивает редактирование документов.

Секция **View** нужна для настройки рабочего окна Maple.

Секция **Insert** обеспечивает вставку текста, стандартной математики, строк Maple и др. соответственно структуре документа.

Секция **Format** позволяет выбрать стиль оформления или пронумеровать страницы как это может быть в MS Word.

Секция **Spreadsheet** (Using of Maple Spreadsheets) содержит команды обработки таблиц Maple. Меню Spreadsheet активно, когда курсор стоит внутри таблицы. Таблицы Maple ведут себя аналогично таблицам других программных приложений. Эта секция нам не понадобится.

Секция **Window** содержит команды манипуляции с окнами.

Секция Help

Справочная система особенно удобна при освоении работы с процедурами, функциями и командными строками. Если Вы нашли в меню Help нужный Вам раздел, то сразу получите справку. В меню достаточно трудно ориентироваться. Следует иметь список процедур и функций по нужному разделу. Тогда процедуры легко просматривать, изучать и даже дополнять.

Библиотеки Maple содержат более 95 % программного кода математических знаний и экспертных решений. Самый легкий способ получения информации по процедурам: ввести знак вопроса и набрать нужное слово, зная состав процедур и функций. Или набрать нужное слово и нажать клавишу F1. Самый общий случай – нажать после выделения словообразования клавиши <Ctrl> + <F1>. В информационных статьях командные строки можно скопировать в свою рабочую область Maple и запустить их.

Использование справочной системы возможно через меню секции Help. Секция Help содержит следующие команды.

- **Introduction** – справка по теме, которую Вы задаете. Например, справка по элементарным функциям вызывается через цепочку команд **Help** → **Introduction**. В открывшихся пяти окнах последовательно выбираем Mathematics... → Basic Mathematics → Exponential, Trig... → выбор функции в списке.
- **Help on Context** – справка по словообразованию, после которого стоит курсор.
- **New User's Tour** – ознакомиться с возможностями Maple в общем.
- **What's New** – информация о новинках и дополнениях системы.
- **Using Help** – как использовать справочную систему.
- **Glossary** – базовая терминология Maple.
- **Topic Search...** – поиск статьи последовательно по буквам.
- **Full Text Search...** – поиск статьи по словам.
- **History** – возвращает предыдущие посещения справки.
- **Save to Database** – добавляет текущее содержимое экрана в Help.
- **Remove Topic...** – удаление статьи из базы Help.
- **Maple on the Web** – следует выучить это, если есть интернет. Содержит свое подменю сетевой поддержки Help.

Панель кнопочных команд содержит кнопки, частично повторяющие команды текстового меню. Их использование ускоряет работу.

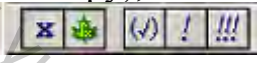


Панель содержит группы кнопок и отдельные кнопки.



– общепринятые процедуры обмена, передачи через буфер, отмены действий.

Ведущую роль играют кнопки .

Выполнение процедур и вычислений задается открытием командной строки кнопкой , признак которой – промпт (приглашение к набору), то есть символ «>». В режиме командной строки появляется группа . Нам важны кнопки запуска текущей командной строки «!» или экрана «!!!».

 – кнопка автокоррекции синтаксиса выражения; ее нажатие проверяет и исправляет синтаксис, иногда не там, где нужно.

Кнопка  позволяет превратить формулу, запрограммированную в командной строке, в текст типографской печати. Используется для оформления решения.

Кнопка  предназначена для получения символьной формы выражения. Используется в отчете, как и предыдущая кнопка.

Кнопка вставки математики в текст . Набор – на языке программирования. Происходит регенерация в математическую запись.

Кнопка  задает режим набора пассивного поясняющего текста и открывает панель редактирования текста как в Word.

Панель к режиму 



Группа  убирает/создает секцию, содержание которой можно закрыть/открыть:   .

 — перелистывание предыдущих статей справки в режиме команды Help → History...

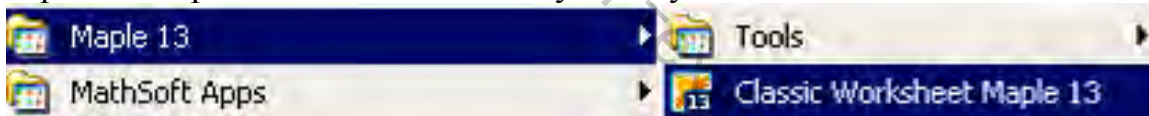


— кнопка «Stop» (прервать вычислительный процесс).



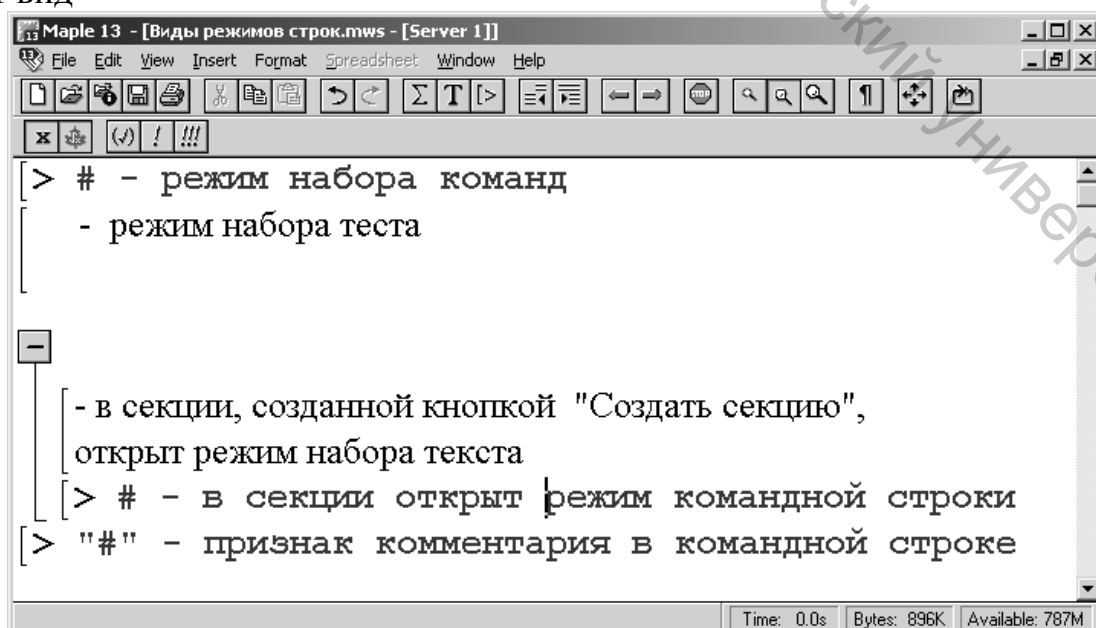
— кнопка **Рестарт**, обновляет вычисления. Есть команда **restart**;

О запуске и термине «Worksheet» (Worksheet переводится как «рабочий лист»). Maple имеет несколько версий пользовательского интерфейса: стандартный интерфейс, версию командной строки, классическую версию и приложения, построенные пользователем. Мы будем работать с классической версией Maple. Из меню кнопки Пуск запускаем **Classic WorkSheet Maple**:



Classic WorkSheet Maple содержит полную математическую обработку.

Экран Maple после запуска и открытия режимов , , группы  имеет вид



Вычисление выражений и создание формул

Первая задача применения Maple – построение и вычисления выражений и формул. Работа в Maple организована в диалоговом режиме. Возможны вопрос – ответ в отдельном блоке. Блок на экране выделяется квадратной скобкой, высота которой зависит от величины блока и количества выражений в нем.

Несколько терминов:

- **текущая строка** ввода формул, выражений или процедур открывается кнопкой , отличается приглашением к набору;
- **команда** – указание системе на выполнение действий, заложенных в наборе строки; заканчивается знаком «;» ;
- **комментарий** – пишется после знака «номер» (#); возможен перенос комментария на следующую строку и по команде <Shift> + <Enter>;
- **строка ввода текста**, открывается кнопкой , отличается пустой квадратной скобкой;
- **выражение** – это объект, содержащий операторы (знаки операций), операнды, участвующие в операции (числа, выражения, функции); ввод команд и выражений осуществляется в командную строку с клавиатуры и Панелей формул (готовые шаблоны).

Выражения в Maple могут изменяться под влиянием математики и правил преобразования. Мы при наборе выражений и формул будем пользоваться форматами и правилами языков программирования. Запись выражений близка к синтаксису других языков высоких уровней. В формулах используются знак присваивания «:=», знаки арифметических операций и знаки операций возведения в степень «^» и «**», а также функции. Есть кнопки преобразования вида записи (см. выше). Итоговое нажатие клавиши «Ввод» или кнопки «!» приводит к обработке выражения или оператора присваивания, то есть команды в целом. На экране отобразится результат. Цвет команды – красный, цвет результата – голубой.

С появлением результата связаны следующие правила:

- Если строка закрыта знаком «:», то результат не появится. Тогда в строке можно записать несколько команд через двоеточие и закрыть их точкой с запятой. Появится последний результат.
- Если в выражении есть неопределенная переменная, то в выводе повторится выражение в инертной форме, что по сути дела является комментарием.
- Если имена писать с большой буквы, то переменные будут неопределенными, а выражения становятся инертными.

Примеры командных строк, дополненных комментариями. Манипулируем высотой символа **Pi (pi)** и первой буквы имен, чтобы увидеть, когда будет выведен численный результат.

> **sin(Pi/2)*Pi**; # выполнено символьное преобразование:

$$\pi$$

> **sin(pi/2)*pi**; # выводит инертное выражение без преобразования:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\pi$$

> **Sin(Pi/2)*Pi**; # выводит инертное выражение без преобразования:

$$\text{Sin}\left(\frac{\pi}{2}\right)\pi$$

> **Sin(Pi/2.0)*Pi**; # выводит инертное выражение и частичное символьное преобразование:

$$\text{Sin}(0.5000000000 \pi) \pi$$

> **evalf(Sin(Pi/2)*Pi)**; # выводит смешанный вариант трех видов представления:

$$3.141592654 \text{ Sin}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

> **evalf(sin(Pi/2)*Pi)**; # подсчитано вещественное значение:

$$3.141592654$$

> **y := evalf(sin(Pi/2)*Pi)**; # подсчитало вещественное значение:

$$y := 3.141592654$$

> **tan(Pi+1.278)/3**; # выводит вещественное значение:

$$1.105727405$$

> **Y := simplify(sin(Pi/2)*Pi)**; # упрощение выражения функцией **simplify()** через символьное преобразование:

$$Y := \pi$$

> **y:=sin(Pi/2.0)*Pi**; # выводит символьное преобразование:

$$y := \pi$$

> **C:=Pi+0.5**; # выводит инертное выражение:

$$C := \pi + 0.5$$

> **c:=Pi**; # выводит символьное преобразование:

$$c := \pi$$

> **evalf(Pi)**; # выводит вещественное значение:

$$3.141592654$$

> **evalf(pi)**; # выводит символьное преобразование:

$$\pi$$

> **Evalf(tan(Pi+1)/3)**; # выводит инертное выражение:

$$\text{Evalf}\left(\frac{1}{3} \tan(1)\right)$$

- > **3/7*4+5**; # выводит символьное преобразование:

$$\frac{47}{7}$$
- > **3/7*4+5.**; # выводит вещественное значение:
 6.714285714
- > **y:=evalf(Catalan)**; # константа Каталана:
 y := 0.9159655942
- > **Y:=evalf(gamma)**; # константа Эйлера:
 Y := 0.5772156649
- > **gamma, pi, PI**; # способ набора греческих букв:
 γ, π, Π

Выводы по примеру. Наряду с заданием константы с точкой в выражении (точки может не быть) для вывода численных результатов вернее всего использовать функцию evalf(). Но не Evalf(). Используется команда simplify – для упрощения выражения в символьной форме. В Maple существует два типа числа π в трех видах. Первый тип – это **константа-число** Pi. Второй тип – буквы pi (прописная) и PI (заглавная). Последние примеры и примеры с числом π советуют: осторожнее с константами.

Всего в Maple имеем четыре вида вывода:

- вывод символических преобразований;
- вывод инертного выражения;
- вывод вещественных результатов вычислений;
- построение графиков.

Символические преобразования отражают результат в аналитической форме. Вывод инертного выражения можно использовать в сопровождающем тексте. Нас больше интересуют численные результаты и построенные графики.

Мы можем задавать точность вычислений выводом заданного количества цифр при помощи глобальной переменной Digits. Например:

Digits := 15;

По умолчанию Maple устанавливает 10 цифр для численных результатов.

Формулы в Maple создаются путем написания оператора присваивания, который имеет вид:

<имя переменной>:=<выражение>;

Имена в выражениях и для переменной составляют из букв, цифр и символа подчеркивания «_». Первый символ имени – буква. Имена чувствительны к регистру. Именем может служить любая строка, составленная из разрешенных для имен символов и заключенная в обратные кавычки.

Примеры вычисления выражений

Пример 1.

Вычислить выражение

$$2 \cdot 10^2 (\operatorname{arctg} bx - \sqrt[3]{|ax|})x;$$

значения аргументов задать.

В рабочем окне Maple используем строку с промптом «>». Можем ее создать, нажав на . Задаем в операторах присваивания исходные данные. Выражение набираем на языке программирования как аргумент функции evalf. Вид экрана Maple с решением

```
> a:=2: x:=0.45: b:=1.7;
                                     b := 1.7
> eval(2e02*(arctan(b*x) - (abs(a*x))^(1/3))*x);
                                     -28.12114712
>
```

Пример 2.

Вычислить

$$Y = \frac{a - z\sqrt{x+2b}}{2.7 \cdot 10^{-3} \cdot e^{a-x^2}};$$

значения аргументов задать самостоятельно.

Заданная функция была набрана в редакторе формул приложения Word. Мы можем сразу приступить в решении к набору командных строк в Maple. Командная строка должна заканчиваться знаком «;». Комментарий за знаком «#» в команду не входит. Решение получим, нажав на клавишу «Enter».

Покажем два варианта решения:

```
> a:=7.5: b:=1.3: x:=1.5: z:=4.3:
# вариант с вещественным числом
y:=(a-z*sqrt(x-0.2*b))/(2.7e-3*exp(a-x*x));
evalf(y); # вариант с функцией evalf
```

```
y := 5.270301660
5.270301660
```

Синтаксических ошибок мы не допустили. Поэтому Maple вывел результаты на экран.

Заметим, что под корнем может получиться отрицательное число. В таком случае результатом будет комплексное число вида $a+bi$. Например, зададим x, равным 0,15, получим:

```
> a:=7.5: b:=1.3: x:=0.15: z:=4.3;
```

вариант с комплексным числом:

$y := (a - z \cdot \sqrt{x - 0.2 \cdot b}) / (2.7e-3 \cdot \exp(a - x \cdot x)) ;$

$\text{evalf}(y) ;$ # вариант с функцией evalf

$z := 4.3$

$y := 1.571305066 - 0.2987886153 I$

$1.571305066 - 0.2987886153 I$

Таблица 1. Выборка из перечня операторов Maple

№	Оператор	Назначение	Вид
1.	+	Сложение	Бинарный инфиксный
2.	-	Вычитание	Бинарный инфиксный
3.	*	Умножение	Бинарный инфиксный
4.	/	Деление	Бинарный инфиксный
5.	** или ^	Возведение в степень	Бинарный инфиксный
6.	!	Факториал	Унарный постфиксный
7.	-	Унарный минус	Префиксный

Таблица 2. Некоторые математические функции Maple

№	Запись в Maple	Назначение	Запись в математике
1.	exp (x)	Показательная функция	e^x
2.	ln (x)	Логарифм натуральный	$\ln x$
3.	log10 (x)	Логарифм десятичный	$\lg x$
4.	sqrt (x)	Корень квадратный	
5.	cos (x)	Косинус триг.	
6.	sin (x)	Синус триг.	$\sin x$
7.	tan (x)	Тангенс триг	$\tan x$
8.	arccos (x)	Арккосинус	$\arccos x$
9.	arcsin (x)	Арксинус	$\arcsin x$
10.	arctan (x)	Арктангенс	$\arctan x$
11.	abs (x)	Модуль числа	$ x $
12.	round (x)	Округлить до целого	
13.	trunc (x)	Отбросить дробную часть	
Используется радианная мера угла			

Примеры вычислений для разделов высшей математики

Дифференцирование

В среде Maple можно легко находить простые производные, частные производные, производные высших порядков, а также дифференциалы функций.

Для нахождения производных существует функция **diff()** :

diff(функция, аргумент)

Пример 3.

Найти производную функции $y = 3 \cdot x^4 - 8x^2$. Покажем решение в Maple:

```
> restart;
> y := 3*x^4-8*x^2:diff(y,x);
12 x^3 - 16 x
```

В этом решении применена процедура **restart**. Процедура обновляет список всех переменных, отменяя присвоенные им ранее значения. Чтобы выполнить наш последний пример, расположенный в рабочем окне Maple ниже другие примеров и связанный с именами тех же переменных, нужно отменить предыдущие присвоения значений.

Есть другой способ сброса значений: на каждую переменную пишут оператор присваивания типа **> y:='y'; x:='x';**. Далее пишут командную строку процедуры дифференцирования.

```
> y:='y'; x:='x';
> y:=3*x^4-8*x^2: diff(y,x);
>
y := y
x := x
12 x^3 - 16 x
```

Для функции $ff(x, y) = \cos x \cdot y + \sin y \cdot x$ найдем частные производные по x и y

```
> restart;
> ff:=cos(x)*y+sin(y)*x: diff(ff,x); diff(ff,y);
-sin(x) y + sin(y) – производная по x;
cos(x) + cos(y) x – производная по y.
```

Для нахождения производных более высокого порядка указывают после аргумента дифференцирования знак «\$» и порядок производной:

```
> diff(ff,x$2); # найти производную второго порядка по x:
-cos(x) y
> diff(ff,x$3); # найти производную третьего порядка по x:
sin(x) y
>
```

Интегрирование

С помощью функции Maple **int()** можно находить неопределенные и определенные интегралы.

Пример 4.

Возьмем неопределенный интеграл $Z = \int \frac{x^2 - 3}{x + 4} dx$:

```
> int((x^2-3)/(x+4), x);
```

$$\frac{x^2}{2} - 4x + 13 \ln(x + 4)$$

Вычислим определенный интеграл $Z = \int_a^b \frac{x^2 - 3}{x + 4} dx$

```
> restart;
```

```
> a:=1: b:=3: int((x^2-3)/(x+4), x=a..b); # аналитическое
```

решение:

$$-13 \ln(5) + 13 \ln(7) - 4$$

```
> evalf(int((x^2-3)/(x+4), x=a..b)); # численное решение:
```

$$0.37413908$$

Пределы

Среду Maple можно использовать для нахождения пределов от различных функций. Зная имя процедуры, выполняющей нахождение пределов, мы сможем изучить ее синтаксис по вызванной справке. Достаточно набрать слово **limit** в командной строке и появившейся справке изучить примеры. Примеры можно скопировать на рабочий лист Maple и запустить. Например, скопируем из справки текст примеров и запустим командные строки

```
> limit(1/x, x=0, real);
```

$$\text{undefined}$$

```
> limit(1/x, x=infinity); # x стремится к бесконечности
```

$$0$$

```
> limit(sin(x)/x, x=0);
```

$$1$$

Процедура combine

Позволяет вычислять сложные комбинации в выражениях. Например

```
> combine(Int(x, x=a..b) - Int(x^2, x=a..b)); # объединяет
```

интегралы

$$\int_1^3 x - x^2 dx$$

> combine(int(x, x=a..b) - int(x^2, x=a..b)); # дает общий результат

$$\frac{-14}{3}$$

Второй пример – с пределами:

> combine(limit(x, x=a) * limit(x^2, x=a) + c);
1 + c

Задание

1. Запустите приложение Classic WorkSheet Maple 13.
2. Изучите теоретическую часть ЛР № 1.
3. Изучить структуру справки среды Maple.
4. Выполните и оформите в Word все примеры из теоретической части МУ к ЛР №
5. Создать формулы в среде Maple и вычислить значения выражений по вариантам из таблиц 1 и 2.
6. Продифференцировать функцию из таблицы
7. Сохраните файл Word с отчетом по выполнению ЛР № 1.

Варианты заданий

Таблица 3. Задание 1

№	Функция и проверочные данные
1	$y = \frac{5x + \sin x^2}{2x + \operatorname{tg} x} + \sin x^2 $
	При $x=2$ $y(x) = 5,8496$
2	$y = \frac{\log_3 x-10 }{2x-7} - \cos(3x+5)$
	При $x=2$ $y(x) = -0,6354$
3	$y = \frac{\cos(x+5) + x}{3x + 6x} * \sin x^2 $
	При $x=2$ $y(x) = 0,1158$

Продолжение таблицы 3

4	$y = \frac{\cos(3x+5) + 5^x}{4.35x} + \cos x^2 + \frac{5}{x}$
	При $x=2$ $y(x)=6,028$
5	$y = \frac{3x + 2^x}{\sin(x+x)} + \frac{5}{ \sin x } + 6$
	При $x=2$ $y(x) = -1,7147$
6	$y = \frac{\sin^2(x+3.5) + \lg x}{3x + e^{x+1.35}}$
	При $x=2$ $y(x)=0,0232$
7	$y = \frac{x + 5.5x}{\cos x + \ln x} + \operatorname{tg}(x + 4.3)$
	При $x=2$ $y(x)=46,9482$
8	$y = \frac{3^{x-1.4} + e^x}{4.5 + x} + \operatorname{tg} 3x$
	При $x=2$ $y(x)=1,1432$
9	$y = \frac{x^x + 3.5 \operatorname{tg} x}{3x + 5x} + \frac{5x}{x+6} + 5$
	При $x=2$ $y(x)=6,022$
10	$y = \frac{\cos^3(x+2.5) + 1.5x}{x^2 + 3.5} + \frac{3x^2}{8x} + 8.5$
	При $x=2$ $y(x)=9,6488$
11	$y = \frac{\ln(x+1.3) + 5}{1.35x^2 + 6} + \sqrt{\frac{x+1.3}{(35x)^2 + 6}}$
	При $x=2$ $y(x)=0,5693$

Окончание таблицы 3

12	$y = \frac{2x + 1.4^x}{\operatorname{tg} x + 2x} + \sqrt[3]{6x + 8^x}$
	При $x=2$ $y(x)=7,5196$
13	$y = \frac{3x + \operatorname{tg} x}{2.36x + 6} + 2x + 1.4^x$
	При $x=2$ $y(x)=6,3159$
14	$y = \frac{e^{x-1.3} + \sin x}{x + 3.5} + 2x + 1.4 \sin x$
	При $x=2$ $y(x)=5,8045$
15	$y = \frac{x + 3 \cos(x^2 + 1.5)}{\operatorname{tg} x + 4.56} + \sin x \frac{2 + x}{\sqrt{5^x + 56x}}$
	При $x=2$ $y(x)=2,0480$
16	$y = \frac{x + 3 \cos(x^2 + 1.5)}{\operatorname{tg} x + 4.56} + \sin(2x) + \cos(x^2 + 5)$
	При $x=2$ $y(x)=0,0694$
17	$y = \frac{\cos^2(x + 1.3) + x}{2x + e^x} + \cos(x^2 + 1.5) + \frac{x}{\cos(x^2 + 1.5)}$
	При $x=2$ $y(x)=3,7921$
18	$y = \frac{5x + 1.3^x}{\cos(x + x)} + \cos(x^2 + 1.5) + \frac{5 + x}{\sqrt{x}}$
	При $x=2$ $y(x)= - 12,2259$

Таблица 4. Задание 2

№	Функция и проверочные данные
1	$t = \frac{2 \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right)}{0.5 + \sin^2 y} \left(1 + \frac{z^2}{3 - z^2 / 5} \right)$
	При $x=14,26$, $y= - 1,22$, $z=0,035$ $t=0,564846$
	$u = \frac{\sqrt[3]{8 + x - y ^2 + 1}}{x^2 + y^2 + 2} - e^{ x-y } (g^2 z + 1)^x$
2	При $x= - 4,5$, $y=0,000075$, $z=84,5$ $u= - 55,6848$
	$c = \frac{1 + \sin^2 \left(\frac{x+y}{2} \right)}{\left \frac{x-y}{1+x^2 y^2} \right } x^{ y } + \cos^2 \left(\operatorname{arctg} \frac{1}{z} \right)$
	При $x=0,0374$, $y= - 0,825$, $z=16$ $c=1,05534$
3	$w = \cos x - \cos y ^{(1+2\sin^2 y)} \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} \right)$
	При $x=4000$, $y= - 0,875$, $z= - 0,000475$ $w=1,98727$
	$a = \ln \left(y^{-\sqrt{ x }} \right) \left(x - \frac{y}{2} \right) + \sin^2 \operatorname{arctg} \left(\frac{x}{y} \right)$
4	При $x= - 15,246$, $y=0,04642$, $z=2000,1$ $a= - 182,036$
	$b = \sqrt{10} \left(\sqrt{x} + x^{y+2} \right) \left(\operatorname{rctg}^2 z - x - y \right)$
	При $x=0,01655$, $y= - 2,75$, $z=0,15$ $b= - 40,6307$
4	$d = 5 \operatorname{arctg} \left(\frac{x+y}{x-y} \right) - \frac{1}{4} \arccos \left(\frac{x+3 x-y +x^2}{ x-y z+x^2} \right)$
	При $x=0,1722$, $y=6,33$, $z=0,000325$ $d= - 205,3056$
	$d = \frac{e^{ x-y } x-y ^{x+y}}{\operatorname{arctg} \left(\frac{x}{y} \right) \operatorname{arctg} \left(\frac{y}{x} \right)} + \sqrt[3]{x^6 + \ln^2 y}$
	При $x= - 0,02235$, $y=2,23$, $z=15,221$ $d=39,374$

Продолжение таблицы 4

5	$d = \left x^{\frac{y}{x}} - \sqrt[3]{\frac{y}{x}} \right + \sqrt[4]{x - x} \sqrt{\frac{\cos y - \frac{z}{x - x}}{1 + \sqrt[4]{x - x}}}$
	При $x=182,5, y=18,225, z=-0,03298$ $d=1,2131$
	$a = 2^{-x} \sqrt{x + \sqrt[4]{ y }} \sqrt[3]{e^{x-1/\sin z}}$
	При $x=0,03981, y=-1625, z=0,512$ $a=1,26185$
6	$b = y^{\sqrt[3]{ x }} + \cos^3 \sqrt[4]{x} \sqrt{\frac{ x-y \left(1 + \frac{\sin^2 z}{\sqrt{x+y}} \right)}{e^{ x-y } + \frac{x}{2}}}$
	При $x=6,251, y=0,827, z=25,001$ $b=0,7121$
	$c = 2^{\sqrt[4]{x} + \sqrt[3]{x}} - \frac{y \left(\arctg \left(z - \frac{\pi}{6} \right) \right)}{ x + \frac{1}{y^2 + 1}}$
	При $x=3,251, y=0,325, z=0,0000466$ $c=4,2482$
7	$c = \frac{\sqrt[4]{y + \sqrt[3]{x-1}}}{ x-y \sqrt{\sin^2 z + \operatorname{tg} z}}$
	При $x=17,421, y=0,010365, z=82800$ $c=0,33056$
	$g = \frac{y^{x+1}}{\sqrt[3]{ y-2 } + 3} + \frac{x + \frac{y}{2}}{2 x+y } \sqrt[4]{x+1}^{\frac{1}{\sin z}}$
	При $x=1,23, y=15,4, z=252$ $g=82,8257$
8	$h = \frac{x^{y+1} + e^{y-1}}{1 + x y - \operatorname{tg} z } \sqrt[4]{x + y-x } \sqrt{\frac{ y-x ^2}{2} - \frac{ y-x ^3}{3}}$
	При $x=2,444, y=0,00869, z=-130$ $h=-0,49871$
	$t = \frac{2 \cos \left(x - \frac{\pi}{6} \right)}{0.5 + \sin^2 y} \left(1 + \frac{z^2}{3 - z^2/5} \right)$
	При $x=14,26, y=-1,22, z=0,035$ $t=0,56485$

Продолжение таблицы 4

9	$u = \frac{\sqrt[3]{8 + x - y ^2 + 1}}{x^2 + y^2 + 2} - e^{ x-y } (g^2 z + 1)^x$
	При $x = -4,5$, $y = 0,000075$, $z = 84,5$ $u = -55,6848$
	$c = \frac{1 + \sin^2 \left(\frac{x + y}{x - \frac{2y}{1 + x^2 y^2}} \right)}{\left x - \frac{2y}{1 + x^2 y^2} \right } + \cos^2 \left(\arctg \frac{1}{z} \right)$
	При $x = 0,0374$, $y = -0,825$, $z = 16$, $c = 1,05534$
10	$w = \cos x - \cos y ^{(1 + 2 \sin^2 y)} \left(1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4} \right)$
	При $x = 4000$, $y = -0,875$, $z = -0,000475$ $w = 1,98727$
	$a = \ln \left(y^{-\sqrt{ x }} \right) \left(x - \frac{y}{2} \right) + \sin^2 \arctg \left(\frac{y}{x} \right)$
	При $x = -15,246$, $y = 0,04642$, $z = 2000,1$ $a = -182,036$
11	
	При $x = 0,01655$, $y = -2,75$, $z = 0,15$ $b = -40,6307$
	$d = 5 \arctg \left(\frac{y}{x} \right) - \frac{1}{4} \arccos \left(\frac{x + 3 x - y + x^2}{ x - y z + x^2} \right)$
	При $x = 0,1722$, $y = 6,33$, $z = 0,000325$ $d = -205,3056$
12	$d = \frac{e^{ x-y } x - y ^{x+y}}{\arctg \left(\frac{y}{x} \right) + \arctg \left(\frac{y}{x} \right)} + \sqrt[3]{x^6 + \ln^2 y}$
	При $x = -0,02235$, $y = 2,23$, $z = 15,221$ $d = 39,374$
	$d = \left x^{\frac{y}{x}} - \sqrt[3]{\frac{y}{x}} \right + \left(y - x \right) \frac{\cos y - \frac{z}{y - x}}{1 + \left(y - x \right)^2}$
	При $x = 182,5$, $y = 18,225$, $z = -0,03298$ $d = 1,2131$

Окончание таблицы 4

13	$a = 2^{-x} \sqrt{x + \sqrt[4]{ y }} \sqrt[3]{e^{x-1/\sin z}}$
	При $x=0,03981, y=-1625, z=0,512$ $a=1,26185$
	$b = y^{\sqrt[3]{ x }} + \cos^3 \left(\frac{ x-y \left(1 + \frac{\sin^2 z}{\sqrt{x+y}} \right)}{e^{ x-y } + \frac{x}{2}} \right)$
14	При $x=6,251, y=0,827, z=25,001$ $b=0,7121$
	$c = 2^{\sqrt{x}} + \sqrt[3]{x} - \frac{y \left(\arctg \left(z - \frac{\pi}{6} \right) \right)}{ x + \frac{1}{y^2 + 1}}$
	При $x=3,251, y=0,325, z=0,0000466$ $c=4,2482$
	$c = \frac{\sqrt[4]{y + \sqrt[3]{x-1}}}{ x-y \left(\sin^2 z + \tg z \right)}$
15	При $x=17,421, y=0,010365, z=82800$ $c=0,33056$
	$g = \frac{y^{x+1}}{\sqrt[3]{ y-2 } + 3} + \frac{x + \frac{y}{2}}{2 x+y } \left(\sqrt{x+1} \right)^{1/\sin z}$
	При $x=1,23, y=15,4, z=252$ $g=82,8257$
	$h = \frac{x^{y+1} + e^{y-1}}{1 + x y - \tg z } \left(\sqrt{x+ y-x } \right) \left[\frac{ y-x ^2}{2} - \frac{ y-x ^3}{3} \right]$
	При $x=2,444, y=0,00869, z=-130$ $h=-0,49871$

Лабораторная работа № 2

Тема. Решение уравнений и систем уравнений средствами Maple.

Цель: научиться решать уравнения и системы уравнений средствами Maple

Теоретическая часть

Решение уравнений

При помощи Maple можно находить решения систем алгебраических и дифференциальных уравнений как в замкнутой форме (аналитически), так и численно.

Для аналитического решения алгебраических уравнений используется команда

solve(eqns,vars)

со следующими параметрами:

eqns - уравнение или система уравнений, разделенных запятыми, в фигурных скобках,

vars - переменная или группа переменных в фигурных скобках.

Уравнения могут быть заданы непосредственно в теле команды, а могут быть введены приравниванием выражений некоторой переменной, например, eqns. Если в качестве первого параметра команды solve ввести выражение, то приравнивание этого выражения нулю производится автоматически.

Для хранения решений удобно ввести переменную и обращаться к конкретному решению по индексу, например:

```
> sols:=solve(x^2+x=0,x);
```

```
sols:=0,I,-I
```

```
> sols[2];
```

```
I
```

При достаточном количестве времени и памяти Maple всегда отыщет решение системы линейных уравнений. Для нелинейных уравнений может быть найдено несколько решений (но не обязательно все), а может оказаться, что Maple не находит решения. Тогда Maple просто выдаст приглашение ввода, ожидая новой команды. Если не указаны переменные, относительно которых должно быть найдено решение, Maple сообщит решение для всех переменных

```
> solve(ax+b=0);
```

```
b=ax, x=x, a=a
```

Если в выражении ответа появилась функция RootOf, это означает, что решение выражается через корни аргумента этой функции.

Для численного решения системы уравнений **eqns** относительно переменных **vars** используется команда **fsolve**

fsolve(eqns,vars,option).

Здесь при помощи параметров **option** могут быть заданы дополнительные условия:

complex $\approx$ разыскиваются комплексные корни;

a..b $\approx$ задан интервал для поиска корней;

maxsols=n $\approx$ определено число разыскиваемых решений;

fulldigits $\approx$ для решения используется арифметика с максимальной мантиссой.

По умолчанию Maple старается найти все вещественные корни.

> fsolve(x^4-x^3-x^2-x-2,x);

-1., 2.

> fsolve(cos(x)=x);

0.739

Решение дифференциальных уравнений

Для нахождения решений дифференциальных уравнений используется команда **dsolve**. Рассмотрим характерные применения этой команды:

dsolve(eqns,vars) $\approx$ решение уравнений **eqns** относительно переменных **vars**.

dsolve(eqns+inits,vars) $\approx$ решение задачи Коши для **eqns** с начальными данными **inits**.

Можно также указывать дополнительные условия (**option**):

laplace $\approx$ использовать трансформанту Лапласа;

series $\approx$ применять разложение в ряды;

explicit $\approx$ явно выражать решение через зависимую переменную;

numeric $\approx$ численно решать задачу Коши.

При составлении уравнений для указания производной применяется команда **diff**, а команда **D** используется для обозначения производной при задании начальных или краевых условий.

Рассмотрим примеры задания системы дифференциальных уравнений и обращения к команде **dsolve**.

$$deqn := \frac{\partial^3}{\partial x^3} y(x) + 3 \frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x) + 2 y(x) = 0$$

> deqn := diff(y(x), x\$2) + 3*diff(y(x), x) + 2*y(x);

```
>dsolve(deqn,y(x));
```

$$y(x) := _C1 e^{-x} + _C2 e^{-2x}$$

Здесь $_C1$ и $_C2$ - произвольные константы.

Зададим краевые условия и решим то же уравнение еще раз.

```
>bvp:=y(0)=0,y(1)=1;
```

```
bvp:= y(0)=0, y(1)=1;
```

```
>dsolve({deqn,bvp},y(x));
```

$$y(x) = \frac{e^{-x}}{e^{-1} - e^{-2}} - \frac{e^{-2x}}{e^{-1} - e^{-2}}$$

В этом разделе Вы научитесь применять команду **solve** для нахождения точных корней уравнений (если это возможно). Известно, что далеко не каждый тип уравнений имеет точные корни. В таких случаях интересуются приближенным численным решением. И у Maple для этого имеется соответствующая команда - **fsolve**. Кроме того, в этом разделе мы получим опыт решения систем линейных уравнений.

Напомним, что уравнению, точно так же как и выражению, можно присвоить имя.

$$x^3 - 5x^2 + 23 = 2x^2 + 4x - 8$$

В следующей командной строке мы введём уравнение и присвоим ему имя "eq1":

```
> eq1:=x^3-5*x^2+23=2*x^2+4*x-8;
```

$$eq1 := x^3 - 5x^2 + 23 = 2x^2 + 4x - 8$$

Мы можем вывести на экран левую и правую части уравнения по-отдельности при помощи команд **lhs** и **rhs**:

```
> lhs(eq1);
```

$$x^3 - 5x^2 + 23$$

> **rhs(eq1);**

$$2x^2 + 4x - 8$$

Воспользуемся командами lhs и rhs для того, чтобы привести уравнение к стандартному виду, в котором все члены собраны слева, а справа остался только 0:

> **eq2:=lhs(eq1)-rhs(eq1)=0;**

$$eq2 := x^3 - 7x^2 + 31 - 4x = 0$$

Рассмотрим вначале рациональные уравнения. Известно, что существуют алгоритмы определения точных корней рациональных уравнений вплоть до 4-го порядка включительно. В Maple-команду solve и заложены эти алгоритмы.

Воспользуемся командой solve для нахождения точных корней кубического

$$3x^3 - 4x^2 - 43x + 84 = 0$$

уравнения

:

> **solve(3*x^3-4*x^2-43*x+84=0,x);**

$$3, -4, \frac{7}{3}$$

Обратите внимание: в команде мы указываем, относительно какой переменной следует решать уравнение. Хотя в нашем конкретном случае это и не обязательно:

> **solve(3*x^3-4*x^2-43*x+84=0);**

$$3, -4, \frac{7}{3}$$

Maple нашел все 3 действительных корня и вывел их (в неупорядоченном виде).

Иногда очень важно выбрать конкретный корень, чтобы потом использовать в дальнейших преобразованиях именно его. Для этого заранее следует присвоить имя результату исполнения команды **solve**. Назовём его **X**. Тогда конструкция **X[1]** будет соответствовать первому корню из списка (подчеркнем: *это не обязательно меньший корень!*), **X[2]** - второму корню, и т.д. (Скобки - квадратные!):

> **X:=solve(x^2-5*x+3=0,x);**

$$X := \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}, \frac{5}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{13}$$

> **X[1];**

$$\frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}$$

Посмотрите, однако, что будет выведено в результате выполнения похожей команды:

> **x[1]=%;**

$$x_1 = \frac{5}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{13}$$

Ещё раз подчеркнём: практика показывает, что уравнению целесообразно присвоить имя. Традиционно в Maple такое имя начинается с букв eq :

> **eq1:=7*x^3-11*x^2-27*x-9=0;**

$$eq1 := 7x^3 - 11x^2 - 27x - 9 = 0$$

(Не путать оператор присваивания " := " со знаком равенства " = " !)

Теперь решим уравнение при помощи команды **solve**. Множеству корней присвоим имя **X** :

> **X:=solve(eq1,x);**

$$X := -1, 3, \frac{-3}{7}$$

Для убедительности проверим, нет ли среди найденных корней посторонних. Проверку выполним непосредственной подстановкой

> **subs(x=X[1],eq1);**

$$0 = 0$$

> **subs(x=X[2],eq1);**

$$0 = 0$$

> **subs(x=X[3],eq1);**

$$0 = 0$$

Разумеется, часто "точные" решения довольно громоздки. Например, это касается уравнения:

$$x^3 - 34x^2 + 4 = 0$$

> **eq1:=x^3-34*x^2+4=0;**

> **X:=solve(eq1,x);**

$$eq1 := x^3 - 34x^2 + 4 = 0$$

$$X := \frac{1}{3} (39250 + 6I\sqrt{117831})^{\left(\frac{1}{3}\right)} + \frac{\frac{1156}{3}}{(39250 + 6I\sqrt{117831})^{\left(\frac{1}{3}\right)}} + \frac{34}{3}, -\frac{1}{6} (39250 + 6I\sqrt{117831})^{\left(\frac{1}{3}\right)} - \frac{578}{3} \frac{1}{(39250 + 6I\sqrt{117831})^{\left(\frac{1}{3}\right)}} + \frac{34}{3}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} I \sqrt{3} \left[\frac{1}{3} (39250 + 6 I \sqrt{117831})^{\left(\frac{1}{3}\right)} - \frac{1156}{3} \frac{1}{(39250 + 6 I \sqrt{117831})^{\left(\frac{1}{3}\right)}} \right] \\
& - \frac{1}{6} (39250 + 6 I \sqrt{117831})^{\left(\frac{1}{3}\right)} - \frac{578}{3} \frac{1}{(39250 + 6 I \sqrt{117831})^{\left(\frac{1}{3}\right)}} + \frac{34}{3} \\
& - \frac{1}{2} I \sqrt{3} \left[\frac{1}{3} (39250 + 6 I \sqrt{117831})^{\left(\frac{1}{3}\right)} - \frac{1156}{3} \frac{1}{(39250 + 6 I \sqrt{117831})^{\left(\frac{1}{3}\right)}} \right] \\
& \sqrt{-1}
\end{aligned}$$

Мнимая единица $\sqrt{-1}$ в Maple обозначается посредством прописной буквы I . Разумеется, в таких случаях можно найти приближенные значения корней.

> **evalf(X);**

$$33.99653909 + 0. I, -34.12885417 + 0. I, 34.47494457 + 0. I$$

В подобных ситуациях хорошей альтернативой команде `solve` является `fsolve`.

Команда `solve` используется при отыскании точных решений не только рациональных уравнений. Ниже приведено несколько тому иллюстраций. Но для многих типов иррациональных, показательных, логарифмических, тригонометрических и даже рациональных уравнений точное решение искать бесполезно. На помощь призывается команда `fsolve`.

Решим уравнение :

> **solve(5*exp(x/4)=43,x);**

$$4 \ln\left(\frac{43}{5}\right)$$

Иногда Maple, по умолчанию, не выводит всё множество корней:

> **solve(sin(x)=1/2,x);**

$$\frac{1}{6}\pi$$

Решить уравнение:

$$x^3 - 11x^2 + 7x + 147 = 0.$$

Разберитесь, сколько различных корней имеет уравнение.

Как Maple поступает при наличии равных корней?

Совет: разложите на множители левую часть уравнения.

$$-3, 7, 7$$

$$(x+3)(x-7)^2$$

Корень $x = 7$ является двукратным, а потому у кубического уравнения только два различных корня. Разложение на множители левой части уравнения - тому подтверждение.

Для приближенного решения уравнений используется Maple-команда **fsolve**. В случае рационального уравнения, **fsolve** выводит весь список действительных корней (см. Пример 01). Для трансцендентных уравнений эта команда, по умолчанию, выводит только один корень (см. Примеры 02 и 03).

При помощи **fsolve** найдём приближенные значения сразу всех четырёх действительных корней рационального уравнения:

$$x^4 - x^3 - 17x^2 - 6x + 2 = 0$$

> **eq:=x^4-x^3-17*x^2-6*x+2=0;**

$$eq := x^4 - x^3 - 17x^2 - 6x + 2 = 0$$

> **fsolve(eq,x);**

$$-3.414213562, -.5857864376, .2087121525, 4.791287847$$

Эти четыре корня и составляют исчерпывающее решение исходного рационального уравнения (хотя и приближенное).

Используя команду **fsolve**, найти хотя бы один действительный корень

$$x^3 + 1 - e^x = 0$$

уравнения :

```
> eq:=x^3+1-exp(x)=0;
```

$$eq := x^3 + 1 - e^x = 0$$

```
> fsolve(eq,x);
```

0.

```
>
```

Решение систем линейных уравнений

Команда **solve** используется и для решения системы из m линейных уравнений с n неизвестными. Для краткости, в таких случаях будем говорить: "линейная система m на n ".

Решить систему 2 на 2:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ x - y = -4 \end{cases}$$

Вот как можно ввести систему уравнений в привычном для математика виде, используя команду **piecewise**:

```
> piecewise(3*x+2*y=3,``,x-y=-4,``);
```

$$\begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ x - y = -4 \end{cases}$$

Но для решения системы следует применять команду **solve** :

```
> solve({3*x+2*y=3,x-y=-4});
```

$$\{x = -1, y = 3\}$$

А вот пример решения системы 3 на 3 относительно переменных x , y , и z .

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x + y = 3 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

Решить систему 3 на 3:, которую можно "нарисовать" так:

> `piecewise(x+y+z=1,`,3*x+y=3,`,x-2*y-z=0,`);`

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 3x + y = 3 \\ x - 2y - z = 0 \end{cases}$$

Решать же следует так:

> `solve({x+y+z=1, 3*x+y=3, x-2*y-z=0});`

$$\left\{ z = \frac{-2}{5}, y = \frac{3}{5}, x = \frac{4}{5} \right\}$$

Задание

1. Решить систему линейных уравнений.
2. Решить нелинейное уравнение.

Варианты заданий

Таблица 5. Задание 1

№ варианта	Система уравнений
1	$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4 \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18 \end{cases}$
2	$\begin{cases} 4,25x_1 - 1,48x_2 + 0,73x_3 = 1,44 \\ -1,48x_1 + 1,73x_2 - 1,85x_3 = 2,73 \\ 0,73x_1 - 1,85x_2 + 1,93x_3 = -0,64 \end{cases}$

Продолжение таблицы 5

3	$\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$
4	$\begin{cases} 2,56x_1 + 0,67x_2 - 1,78x_3 = 1,14 \\ 0,67x_1 - 2,67x_2 + 1,35x_3 = 0,66 \\ -1,78x_1 + 1,35x_2 - 0,55x_3 = 1,72 \end{cases}$
5	$\begin{cases} 0,53x_1 - 0,75x_2 + 1,83x_3 = 0,68 \\ -0,75x_1 + 0,68x_2 - 1,19x_3 = 0,95 \\ 1,83x_1 - 1,19x_2 + 2,15x_3 = 1,27 \end{cases}$
6	$\begin{cases} 4,25x_1 - 1,48x_2 + 0,73x_3 = 1,44 \\ -1,48x_1 + 1,73x_2 - 1,85x_3 = 2,73 \\ 0,73x_1 - 1,85x_2 + 1,93x_3 = -0,64 \end{cases}$
7	$\begin{cases} 2,56x_1 + 0,67x_2 - 1,78x_3 = 1,14 \\ 0,67x_1 - 2,67x_2 + 1,35x_3 = 0,66 \\ -1,78x_1 + 1,35x_2 - 0,55x_3 = 1,72 \end{cases}$
8	$\begin{cases} 0,53x_1 - 0,75x_2 + 1,83x_3 = 0,68 \\ -0,75x_1 + 0,68x_2 - 1,19x_3 = 0,95 \\ 1,83x_1 - 1,19x_2 + 2,15x_3 = 1,27 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 4,25x_1 - 1,48x_2 + 0,73x_3 = 1,44 \\ -1,48x_1 + 1,73x_2 - 1,85x_3 = 2,73 \\ 0,73x_1 - 1,85x_2 + 1,93x_3 = -0,64 \end{cases}$

Окончание таблицы 5

10	$\begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 5 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$
11	$\begin{cases} 1,63x_1 + 1,27x_2 - 0,84x_3 = 1,51 \\ 1,27x_1 + 0,65x_2 + 1,27x_3 = -0,63 \\ -0,84x_1 + 1,27x_2 - 1,21x_3 = 2,15 \end{cases}$
12	$\begin{cases} 1,65x_1 - 1,76x_2 + 0,77x_3 = 2,15 \\ -1,76x_1 + 1,04x_2 - 2,61x_3 = 0,82 \\ 0,77x_1 - 2,61x_2 - 3,18x_3 = -0,73 \end{cases}$
13	$\begin{cases} 1,54x_1 - 0,75x_2 + 1,36x_3 = 2,45 \\ -0,75x_1 + 0,87x_2 - 0,79x_3 = 1,07 \\ 1,36x_1 - 0,79x_2 + 0,64x_3 = 0,54 \end{cases}$
14	$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4 \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18 \end{cases}$
15	$\begin{cases} 1,63x_1 + 1,27x_2 - 0,84x_3 = 1,51 \\ 1,27x_1 + 0,65x_2 + 1,27x_3 = -0,63 \\ -0,84x_1 + 1,27x_2 - 1,21x_3 = 2,15 \end{cases}$
16	$\begin{cases} 1,54x_1 - 0,75x_2 + 1,36x_3 = 2,45 \\ +0,75x_1 + 0,67x_2 - 0,79x_3 = 1,07 \\ 1,36x_1 - 0,29x_2 + 0,64x_3 = 0,54 \end{cases}$

Таблица 6 - Задание 2

№ варианта	Уравнение	отрезок, содержащий корень
1	$3\sin\sqrt{x} + 0.35x - 3.8 = 0$	[2; 3]
2	$x - \frac{1}{3 + \sin 3.6x} = 0$	[0; 0.85]
3	$\arccos x - \sqrt{1 - 0.3x^3} = 0$	[0; 1]
4	$\sqrt{1 - 0.4x^2} - \arcsin x = 0$	[0; 1]
5	$x - 2 + \sin \frac{1}{x} = 0$	[1.2; 2]
6	$0.25x^3 + x - 1.2502 = 0$	[0; 2]
7	$0.1x^2 - x \cdot \ln x = 0$	[1; 2]
8	$3x - 4 \ln x - 5 = 0$	[2; 4]
9	$e^x - e^{-x} - 2 = 0$	[0; 1]
10	$e^x + \ln x - 10x = 0$	[3; 4]
11	$3\sin\sqrt{x} + 0.35x - 3.8 = 0$	[2; 3]
12	$0.25x^3 + x - 1.2502 = 0$	[0; 2]
13	$x - \frac{1}{3 + \sin 3.6x} = 0$	[0; 0.85]
14	$0.1x^2 - x \cdot \ln x = 0$	[1; 2]
15	$\arccos x - \sqrt{1 - 0.3x^3} = 0$	[0; 1]
16	$3x - 4 \ln x - 5 = 0$	[2; 4]
17	$\sqrt{1 - 0.4x^2} - \arcsin x = 0$	[0; 1]
18	$e^x - e^{-x} - 2 = 0$	[0; 1]

Лабораторная работа № 3

Тема. Типовые средства графики пакета MAPLE

Цель: научиться создавать двумерные графики и трехмерные изображения средствами Maple

Теоретическая часть

Одним из самых интересных применений пакетов компьютерной алгебры является использование их графических возможностей для визуализации

результатов исследования. В пакете MAPLE имеется богатый набор команд и процедур двумерной и трехмерной графики. Основные процедуры доступны пользователю по умолчанию, доступ к другим становится возможным после подключения графической библиотеки (команда **with(plots)**), или при полном вызове команды (**plots[имя команды] (параметры)**). В качестве параметров при вызове графических команд указывается выводимый объект (функция, набор точек, множество и т.д.), интервал изменения переменных, опции вывода. После вызова команды программа MAPLE переходит в меню графики. Опции вывода могут изменяться пользователем при обращении к команде, а также в интерактивном режиме при работе в меню графики. Для переноса полученной картинки в текст MAPLE-документа (рабочее поле) ее нужно занести в буфер, нажав комбинацию клавиш CTRL-C или выбрав этот пункт в меню графики, затем перейти в режим работы с документом и скопировать содержимое буфера, нажав CTRL-V или указав пункт меню EDIT - PASTE. Ниже приведены основные графические команды и опции. Подчеркиванием выделены опции вывода графики, установленные по умолчанию.

Двумерная графика

При вызове процедур двумерной графики пользователь может задавать различные опции представления картинки. Основные опции :

title=`Заголовок` - название картинки,

coords=polar - тип координат (полярные или нет),

axes=NORMAL - тип выводимых осей координат (варианты: NORMAL - с центром в начале координат, BOXED - график заключается в рамку с нанесенной шкалой, FRAME - центр в левом нижнем углу, NONE - вывод без нанесения осей),

scaling=CONSTRAINED - тип масштабировки (CONSTRAINED - график выводится с одинаковым масштабом по осям, UNCONSTRAINED - график масштабируется по размеру графического окна),

style=LINE - вывод графика линией или точками (POINT),

numpoints=n - число вычисляемых узлов графика (по умолчанию 49),

resolution=n - разрешение дисплея в точках (по умолчанию 200),

color=red - цвет вывода графика (red,blue,black...),

xtickmarks=nx или **ytickmarks**=ny - число пометок координат по осям X и Y. Некоторые опции могут переопределяться при помощи соответствующих пунктов меню работы с графиком.

Для команд fieldplot и gradplot существует дополнительная опция, которая задает тип стрелок для изображения вектора:

arrows=line (или thin,slim,thick), по умолчанию thin.

Для команд **fieldplot**, **gradplot** и **implicitplot** существует дополнительная опция, задающая число узлов для расчета на плоскости:

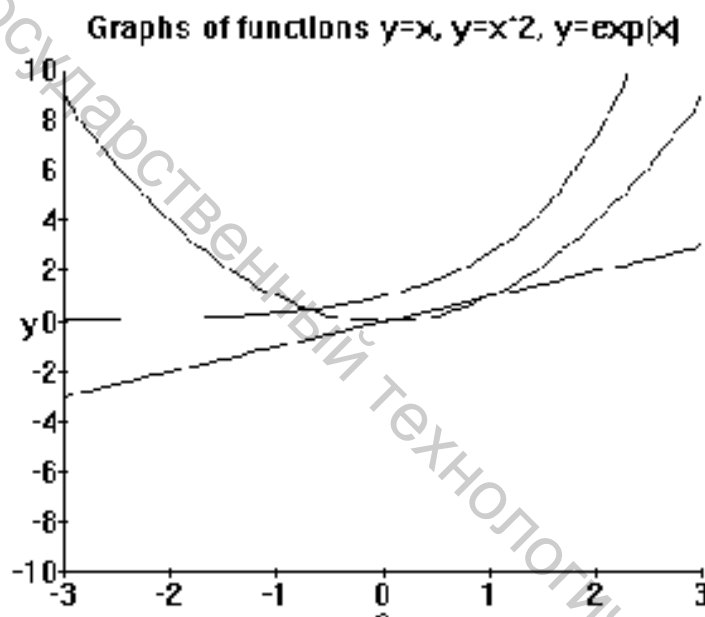
grid=[int1,int2], где int1 - число узлов по оси X, int2 - по Y. По умолчанию grid=[20..20].

Вывод графиков функций одной переменной:

plot({func1,func2...,funcn} ,x=a..b, y=c..d, options); - где func1,func2,... - MAPLE-функции от переменной x, a..b - интервал изменения переменной x, c..d - вертикальный размер. Например, в результате выполнения команды

plot({x,x^2,exp(x)},x=-3..3,y=-10..10,title='Graphs of functions y=x, y=x^2, y=exp(x)',axes=FRAME,xtickmarks=6,ymtickmarks=10,color=black);

будет построен следующий график:

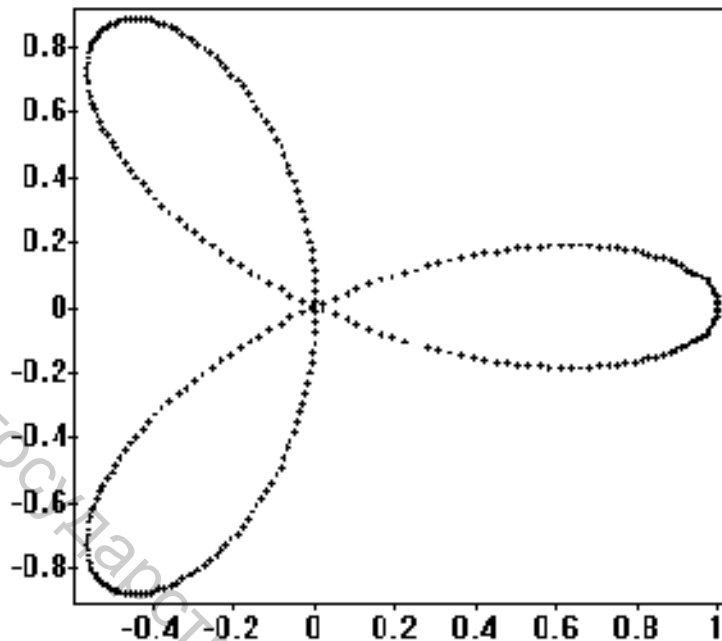


Вывод параметрически заданной кривой:

plot([funx(t),funy(t),t=a..b],options), где funx(t),funy(t) - функции координат, зависящие от параметра t, a и b - интервал изменения параметра. Пример:

plot([cos(3*t),t,t=0..2*Pi], numpoints=300, coords= polar, title = 'Трилистник', axes= boxed, style=point);

Трилистник



Графический вывод набора точек:

plot([x1,y1,x2,y2,...,xn,yn],x=a..b,y=c..d,options), где $[x1,y1,...]$ - набор точек, который также может задаваться в виде: $[[x1,y1],[x2,y2],...,[xn,yn]]$.

Кроме многофункциональной команды **plot** в пакете имеются следующие процедуры двумерной графики:

densityplot(expr,var1=a..b,var2=c..d,options), - Рисование плотности функции уровня для выражения **expr**, зависящего от переменных **var1** и **var2**.

fieldplot([expr1,expr2],var1=a..b,var2=c..d,options), - изображение векторного поля, определяемого выражениями **expr1** и **expr2**, переменные **var1** и **var2** изменяются на отрезках $[a,b]$, $[c,d]$ соответственно.

gradplot(expr,var1=a..b,var2=c..d,options) - изображение векторного поля градиента выражения **expr**, зависящего от переменных **var1**, **var2**.

implicitplot(expr=f,var1=a..b,var2=c..d,options) - изображение линии уровня постоянного значения **f** для функции **expr** в прямоугольнике $[a,b][c,d]$.

logplot(expr,var1=a..b,options) - график выражения **expr** в логарифмическом масштабе по оси **Y**.

loglogplot(expr,var1=a..b,options) - график выражения **expr** в логарифмическом масштабе по осям **X** и **Y**.

poligonplot([pt1,pt2,...ptn]) - вывод **n**-угольника, заданного вершинами **pt1**,..., причем последняя точка соединяется линией с первой.

polarplot([exprad,expang,var=a..b]) - вывод графика в полярных координатах, где радиус и угол задаются соответственно выражениями **exprad**, **expang**, зависящими от одной переменной **var**, изменяющейся на отрезке $[a,b]$.

textplot([exprx,exproy,string],options) - вывод текстовой строки string, начиная с точки с координатами, задаваемыми выражениями exprx,exproy.

setoptions(option1=expr1,...,optionn=exprn) - задание опций двумерной графики, которые будут приниматься по умолчанию в данном сеансе работы.

display([pic1,pic2,...,picn]) - вывод графических двумерных структур pic1,...,picn на одной картинке в общих осях координат.

Работу некоторых перечисленных команд продемонстрируем на примере:

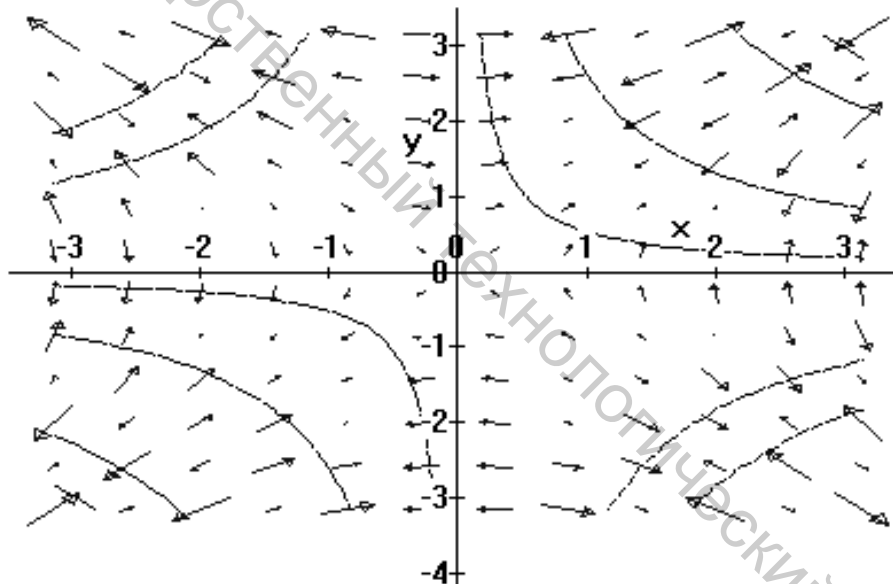
> **f:=sin(x*y): with(plots):**

> **pic1:=implicitplot(f=1/2 , x=-Pi..Pi , y= -Pi..Pi,grid=[30,30], axes=**
> **NORMAL):**

> **pic2:=gradplot(f,x=-Pi..Pi,y=-Pi..Pi, grid=[12,12], arrows=SLIM,**
> **axes=NORMAL, color =blue):**

> **pic3:=textplot([0,-3/2*Pi, cat (`Поле градиента и линии уровня**
> **значения f=1/2. Функция f=`,convert(f,string),`.`)]):**

> **display([pic1,pic2,pic3]);**



Поле градиента и линии уровня значения $f=1/2$. Функция $f=\sin([x]*[y])$.

Заметим, что переменной может быть присвоен результат работы команды графики, при этом внутренняя структура переменной содержит всю необходимую информацию для построения графика. Для вывода изображения должна быть выполнена команда **display** (для двумерной графики) или **display3d** (для трехмерной графики).

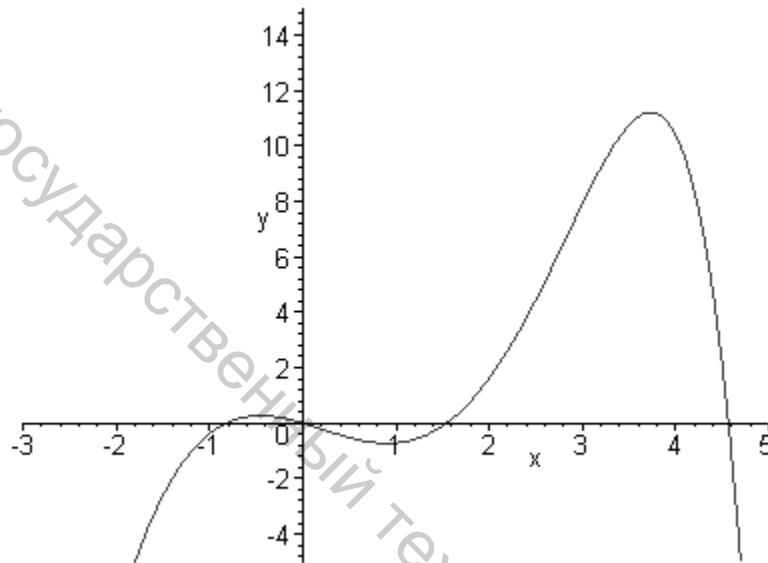
Получить *все* действительные корни уравнения

$$x^3 + 1 - e^x = 0$$

и убедиться в этом.

Шаг первый (*Основная идея*) : найдём графическое решение уравнения. Для этого построим график функции, стоящей в левой части уравнения. Абсциссы точек пересечения этого графика с осью Ox и будут искомыми корнями.

```
> plot(x^3+1-exp(x),x=-3..5,y=-5..15);
```



Т.к. мы умело выбрали диапазоны изменений абсцисс и ординат точек графика, то легко обнаружим **4** точки пересечения линии с осью Ox . Одна из них соответствует корню, найденному в Примере 02 (*какая именно?*).

Второй корень очевиден: $x = 0$. А как поточнее найти остальные?

Шаг второй (*Уточнение*) : применим команду **fsolve**. В Maple предусмотрена возможность указания промежутка, на котором отыскиваются корни. В частности, для определения отрицательного корня нашего уравнения, укажем, что поиски следует вести в "районе" $[-1;-0.2]$. Об этом красноречиво свидетельствует графическое решение.

```
> fsolve(eq,x=-1..-0.2);
```

-0.8251554697

Оставшиеся корни явно принадлежат промежуткам $[1;2]$ и $[4;5]$. Расскажем об этом команде **fsolve** :

```
> fsolve(eq,x=1..2);
fsolve(eq,x=4..5);
```

```
1.545007279
```

```
4.567036837
```

Ну а что произойдёт, если мы подсунем Maple "пустой участок"? Например, отрезок $[2;4]$ для нашего уравнения. Там графического решения явно нет:

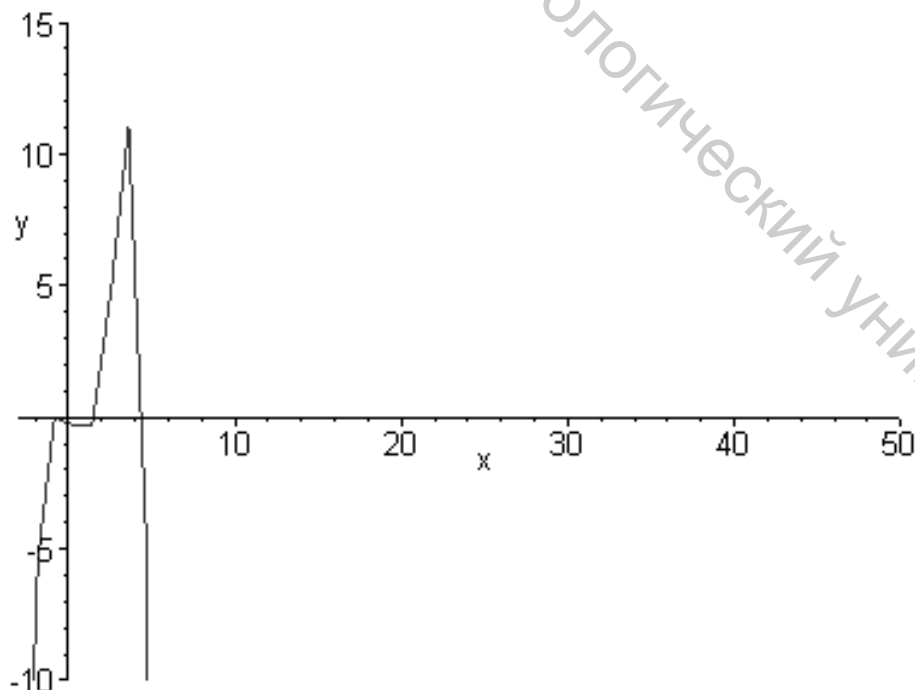
```
> fsolve(eq,x=2..4);
```

```
fsolve( $x^3 + 1 - e^x = 0$ ,  $x$ , 2 .. 4)
```

Maple выдаёт название команды, само уравнение, имя аргумента и отрезок. Т.е. ничего нового. Мол: "Ищите корни сами, а я не нашел".

Шаг третий (Дополнительный анализ) : Как теперь удостовериться в том, что найдены *все* корни, а не только в видимой области графического решения? Для этого следует расширить интервал поисков:

```
> plot( $x^3 + 1 - \exp(x)$ ,  $x = -3..50$ ,  $y = -10..15$ );
```



Новых точек пересечения нет. В конце концов, мы понимаем, что экспоненциальное слагаемое на границах промежутка вносит самый

существенный вклад в величину функции из левой части уравнения. Значения функции в этой области стремятся к $-\infty$, а потому дополнительных корней нам не найти.

Попробуем в других местах: справа и слева от области найденных корней.

> **fsolve(eq,x=5..50);**

$$\text{fsolve}(x^3 + 1 - e^x = 0, x, 5 \dots 50)$$

> **fsolve(eq,x=-50..-1);**

$$\text{fsolve}(x^3 + 1 - e^x = 0, x, -50 \dots -1)$$

И здесь ни одного дополнительного корня! Поняв, что с влиянием показательной части уравнения всё ясно, делаем окончательные выводы.

$$x^3 + 1 - e^x = 0$$

Исчерпывающее решение уравнения состоит из четырёх корней: -0.8251554597 , 0 , 1.545007279 , 4.567036837 .

Применим команду **fsolve** для приближенного решения трансцендентного

$$\frac{x^2}{20} - 10x = 15 \cos(x + 15)$$

уравнения

Как и в предыдущем случае, найдём вначале качественное графическое решение. Для этого ещё нужно угадать, как разбросать по обеим частям уравнения его члены. Но графические возможности Maple настолько великолепны, что почти всегда можно собирать все члены уравнения с одной стороны.

Рассмотрим уравнение, равносильное данному:

$$\frac{x^2}{20} - 10x - 15 \cos(x + 15) = 0$$

Абсциссы точек пересечения графика функции, стоящей в левой части уравнения, с осью Ox и будут искомыми корнями.

> **eq:=x^2/20-10*x-15*cos(x+15)=0;**

$$eq := \frac{1}{20}x^2 - 10x - 15\cos(x+15) = 0$$

> **plot(lhs(eq),x=-10..10);**

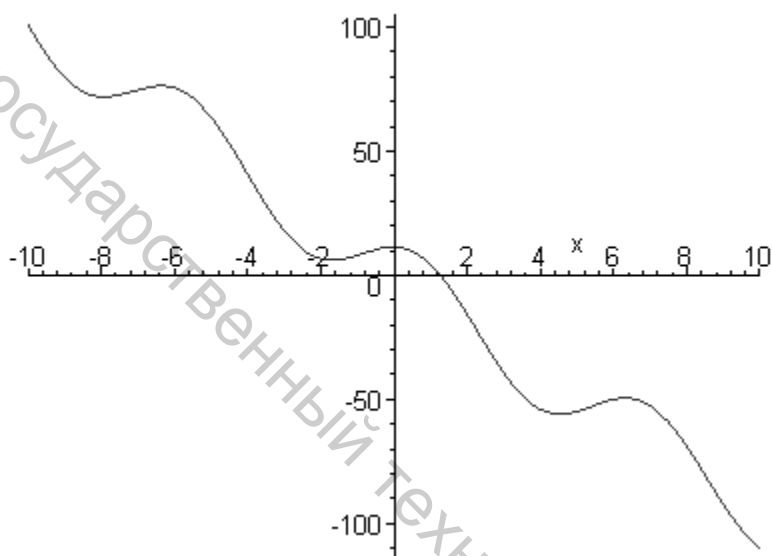


График указывает область поисков корней: промежуток $[1;2]$. Настаёт черёд команды **fsolve** :

> **fsolve(eq,x=1..2);**

1.274092075

Корень найден. Но, очевидно, он - не единственный. Расширьте область поисков и ещё раз примените команду **fsolve** для отыскания второго корня.

Команда **solve** используется и для решения системы из m линейных уравнений с n неизвестными. Для краткости, в таких случаях будем говорить: "линейная система m на n ".

Решить систему 2 на 2:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ x - y = -4 \end{cases}$$

Вот как можно ввести систему уравнений в привычном для математика виде, используя команду **piecewise** :

> **piecewise(3*x+2*y=3,``,x-y=-4,``);**

$$\begin{cases} 3x + 2y = 3 \\ x - y = -4 \end{cases}$$

Но для *решения* системы следует применять команду **solve** :

> **solve({3*x+2*y=3,x-y=-4});**

$$\{x = -1, y = 3\}$$

Можно предложить и графический вариант решения. Легко получить единственную точку пересечения прямых, соответствующих линейным уравнениям.

Координаты этой точки: (-1;3).

Если графики строить самым примитивным способом, то придётся решить каждое из уравнений относительно переменной y :

> **y1:=solve(3*x+2*y=3,y);**

$$y1 := \frac{3}{2} - \frac{3}{2}x$$

> **y2:=solve(x-y=-4,y);**

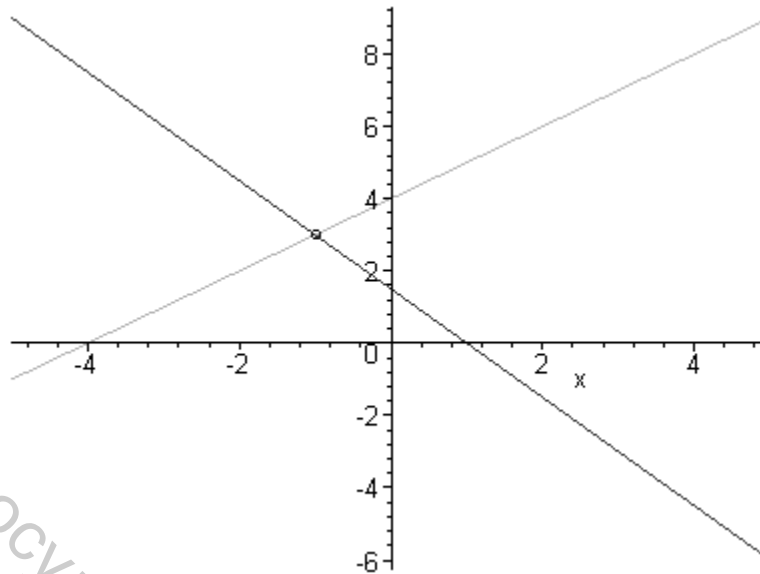
$$y2 := 4 + x$$

Предложим Maple изобразить в одной системе координат комбинацию фигур. Фигуре из двух пересекающихся прямых присвоим имя "**крест**". Команду, выводящую на экран точку-решение, назовём "**точка**":

> **крест:=plot([y1,y2],x=-5..5);**

> **точка:=plot([-1,3],style=point,color=blue,symbol=circle);**

> **display([крест,точка]);**



Трехмерная графика

В данном разделе приводятся наиболее популярные процедуры трехмерной графики. Как и для двумерной графики, пользователь имеет возможность управлять выводом при помощи опций (**options**). Перечислим основные опции (подчеркиванием отмечены установки по умолчанию):

coords=opt - тип координат (варианты: CARTESIAN, SPHERICAL или CYLINDRICAL),

title=string - вывод заголовка, содержащегося в строке string,

axes=opt - тип осей координат (FRAME, NORMAL, BOXED, NONE),

scaling=opt - тип масштабирования (UNCONSTRAINED, CONSTRAINED),

orientation=[angle1,angle2] - углы ракурса в градусах,

view=az..bz или **view**=[ax..bx,ay..by,az..bz] - выводимая на картинку область (все за ее пределами отсекается),

projection=n - тип проекции, задается числом n[0,1],

style=opt - стиль вывода (POINT - точки, LINE - линии, HIDDEN - сетка с удалением невидимых линий, PATCH - заполнитель, WIREFRAME -сетка с выводом невидимых линий, CONTOUR - линии уровня, PATCHCONTOUR - заполнитель и линии уровня),

shading=opt - функция плотности заполнителя (Z-по оси Z, XY - в зависимости от координат XY, XYZ, ZGREYSCALE - по оси Z серыми полутонами, ZHUE, NONE),

grid=[i1,i2] - число узлов по осям X и Y для вычисления поверхности (grid=[25,25]),

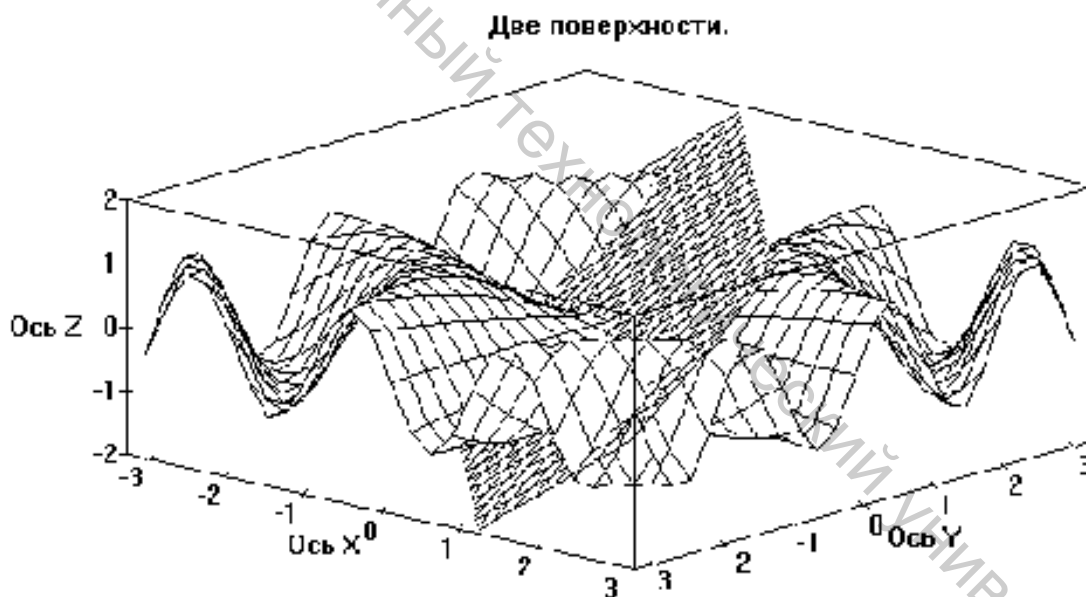
numpoints=n - число выводимых точек, эквивалентно $\text{grid}=[\sqrt{n}, \sqrt{n}]$,
color=opt - цвет поверхности (red,blue,...),
light=[angl1, angl2, numr, numg, numb] - функция яркости по углам angl1, angl2, определяемая процентами цветов красного (numr), зеленого (numg) и синего (numb), изменяемых от 0 до 1,
ambientlight=[numr,numg,numb] - яркость по каждому направлению,
tickmarks=[i1, i2, i3] - число насечек на осях координат,
labels=[str1,str2,str3] - надписи на осях координат, задаваемые строками str1,str2,str3.

Вывод нескольких поверхностей, определяемых выражениями expr1, expr2,..., зависящими от двух переменных var1[a,b], var2[c,d], осуществляется при помощи команды:

plot3d({expr1,expr2,...,exprn},var1=a..b,var2=c..d,options).

Например:

>plot3d({x+y, sin(x*y)},x=-Pi..Pi,y=-Pi..Pi,orientation=[-48,56],view=-2..2, style= HIDDEN ,axes=BOXED,shading=NONE,color=BLACK, labels=['Ось X','Ось Y','Ось Z'],title='Две поверхности.');



Параметрически заданную поверхность можно изобразить также при помощи команды plot3d:

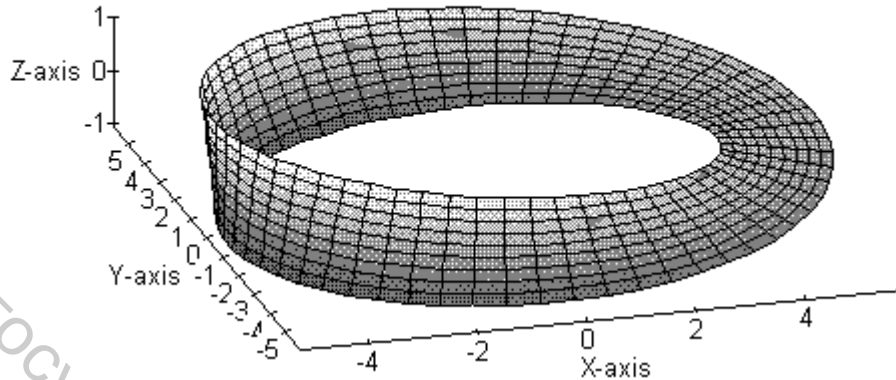
plot3d([expr1,expr2,expr3],var1=a..b,var2=c..d)

где координаты заданы выражениями expr1,expr2,expr3 от двух переменных var1, var2, которые изменяются на отрезках [a,b], [c,d].

Например:

>plot3d([(5+cos(1/2*t)*u)*cos(t), (5+cos(1/2*t)*u)*sin(t), sin(1/2*t)*u], t=0..2*Pi, u=-1..1, grid=[60,10], scaling=CONSTRAINED, orientation =[-106,

```
70] , title='Moebius band.', axes = FRAMED , shading=ZGREYSCALE,
tickmarks= [5,8,3] ,labels=['X-axis','Y-axis','Z-axis']);
Moebius band.
```



Кроме функции `plot3d` в программе Maple имеются следующие процедуры трехмерной графики:

`contourplot(expr,var1=a..b,var2=c..d,options)` - вывод линий уровня функции (`expr`) двух переменных (`var1,var2`). Идентична команде `plot3d` с опцией `style=CONTOUR`.

`cylinderplot(expr,var1=a..b,var2=c..d,options)` - вывод поверхности, определяемой выражением `expr`, заданным в цилиндрических координатах,

`fieldplot3d([expr1,expr2,expr3],var1=a..b,var2=c..d,var3=e..f,options)` - вывод трехмерного векторного поля с компонентами заданными выражениями `expr1,expr2,expr3`, зависящими от переменных `var1,var2,var3`, с заданными интервалами изменения.

`gradplot3d(expr,var1=a..b,var2=c..d,var3=e..f,options)` - изображение трехмерного поля градиента выражения `expr`, зависящего от трех переменных `var1,var2,var3`. Переменные изменяются в заданных интервалах.

`implicitplot3d(expr=g,var1=a..b,var2=c..d,var3=e..f,options)` - изображение в трехмерном пространстве (переменные `var1,var2,var3`) поверхности, на которой выражение `expr`, зависящее от `var1,var2,var3`, имеет одинаковое значение `g`.

`matrixplot(M)` - рисование поверхности, заданной таблицей `M`.

`pointplot([x1,y1,z1],...[xn,yn,zn],options)` - вывод точек, заданных координатами `x,y,z`.

`polygonplot3d([pnt1,...,pntn])` - вывод трехмерного `n`-угольника, заданного точками с координатами `pnt1,...,pntn`, причем первая точка соединяется с последней.

`spacecurve([exprx,expry,exprz],var=a..b,options)` - рисование кривой в трехмерном пространстве. Кривая задана параметрически выражениями `exprx` (`X`-координата), `expry` (`Y`) и `exprz` (`Z`). Выражения `exprx,expry,exprz` должны зависеть от одной переменной `var`.

sphereplot(expr,var1=a..b,var2=c..d,options) - вывод поверхности, заданной в сферических координатах. Выражение **expr** задает радиус, зависящий от двух угловых переменных **var1** и **var2**.

surfdata([[x1,y1,z1],...[xn,yn,zn]],options) - рисование поверхности, проходящей через заданные точки. Точки задаются своими координатами в трехмерном пространстве (x,y,z).

textplot3d([exprx,expry,exprz],string) - вывод текстовой строки **string** с центром в позиции, задаваемой координатами **exprx** (X), **expry** (Y) и **exprz** (Z).

tubeplot([exprx,expry,exprz],var=a..b,,radius=r) - рисование поверхности, определяемой параметрически заданной пространственной кривой. Кривая задается выражениями **exprx** (X-координата), **expry** (Y) и **exprz** (Z) и радиусом **r**. Выражения **exprx**, **expry**, **exprz** должны зависеть от одной переменной **var**.

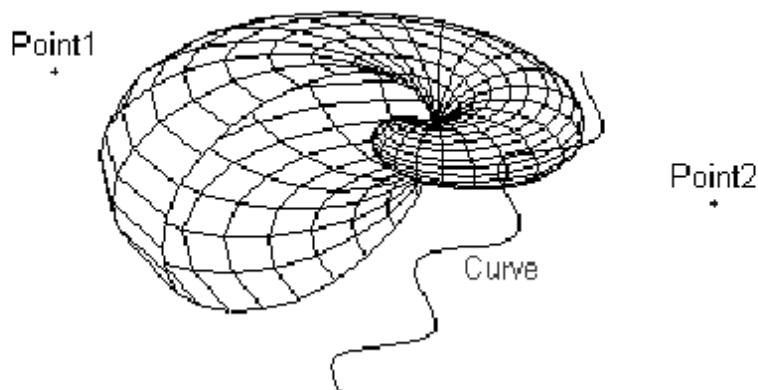
setoptions3d(options1=exp1,...,optionsn=expn) - управление опциями трехмерной графики, принимаемыми по умолчанию.

display3d([pic1,pic2,...,picn]) - вывод **n** трехмерных графических структур (**pic1**,...,**picn**) в общих осях координат.

Приведенный ниже пример демонстрирует работу некоторых процедур трехмерной графики.

```
> with(plots):
> pic1:= sphereplot ( (1.3)^z*sin(theta) ,z=-1..2*Pi, theta=0..Pi, style=
> HIDDEN, shading=NONE):
> pic2:=pointplot([[4,-3,2],[-2,3,-1]],color=blue):
> pic3:=textplot3d([4,-3,2.6,`Point1`],color=black):
> pic4:=textplot3d([-2,3,-0.4,`Point2`],color=black):
> pic5:=spacecurve([5-t,3-0.5*sin(4*t),t-2],t=0..5,color=black):
> pic6:=textplot3d([2,3,-0.5,`Curve`],color=red):
> display3d([pic1,pic2,pic3,pic4,pic5,pic6]);
```

В результате работы данных команд получим рисунок:



Задание

1. Изучить справку и примеры по процедуре **plot**.
2. Построить 3 графика функции в одной системе координат (таблица 7).
3. Выполнить расчеты по заданным функциям и сравнить результат расчета с графиками (таблица 7).
4. Вызвать справку по процедуре **plot3d**, изучить примеры и построить любых два трехмерных графика.

Варианты заданий

Построить в одной системе координат три графика функции $Y(x)$ на промежутке $[a;b]$. Значения c, d задать самостоятельно.

Таблица 7

1	$y1 = \frac{e}{\lg(d+x)},$ $y2 = \ln(10 - x^2),$ $y3 = 4 + \operatorname{tg} d^2$ $a=1, b=6$	9	$y1 = -\frac{\lg(c^2 + x^2 + 4)}{\cos 2d},$ $y2 = 12 + \ln x,$ $y3 = \sqrt{ c^2 - x^2 }$ $a=-3, b=5$
2	$y1 = c * (1 + \lg x),$ $y2 = \sin x + 5x,$ $y3 = c * \sqrt{x^2 + 1}$ $a=1, b=4\pi$	10	$y1 = c * e^{\sin x},$ $y2 = c * \lg x,$ $y3 = \sqrt{a * \cos^2 x}$ $a=1, b=5$
3	$y1 = c * (\cos^2 x - \sin^2 2x),$ $y2 = \sqrt{3c^2 + x^2},$ $y3 = \operatorname{tg}^2 x + \cos(c * x)$ $a=-2, b=3$	11	$y1 = d - \lg(2 * x),$ $y2 = \sin x + c,$ $y3 = c + \operatorname{arctg}\left(\frac{x}{1 + \sqrt{x}}\right)$ $a=0,5, b=2$
4	$y1 = d * \ln(10 - x^2),$ $y2 = \frac{\operatorname{tg}(3+x)}{2x+2},$ $y3 = 4 + d^2$ $a=0, b=9$	12	$y1 = \frac{2 * e}{x + d},$ $y2 = d * \cos(x^2 - 2),$ $y3 = 4 + d^2$ $a=0, b=10$

Продолжение таблицы 7

5	$y_1 = \sqrt{\ln(1+c)},$ $y_2 = \lg x + 2c,$ $y_3 = \sqrt{c^2 + 1}$ $a=1, b=5$	13	$y_1 = e^x * \operatorname{arctg}(b+x),$ $y_2 = \operatorname{ctgx} + 3,$ $y_3 = -1 + \lg x$ $a=1, b=5$
6	$y_1 = \frac{e}{\operatorname{tg}(d+x)},$ $y_2 = d * \ln(10 - x^2),$ $y_3 = 4 + d^2$ $a=1, b=6$	14	$\begin{cases} y_1 = 1 + 2 \sin 2x, \\ y_2 = \sin x, \\ y_3 = \lg(4x + 1) \\ y_4 = -1 \end{cases}$ $a=0, b=6$
7	$y_1 = 4 + d^2,$ $y_2 = d * \ln(0,47 - x^2),$ $y_3 = \frac{4}{\operatorname{tg}(d+x)}$ $a=0, b=8$	15	$y_1 = \frac{e}{\operatorname{tg}(d+x)},$ $y_2 = d * \ln(10 - x^2),$ $y_3 = 3x + d^2 + 23$ $a=1, b=6$
8	$y_1 = 2 + \lg(4x),$ $y_2 = \sin^2(x^2),$ $y_3 = \sin^2(4 * \sqrt{x})$ $a=0,5, b=2\pi$	16	$y_1 = \operatorname{tg} x * e^{\sin x},$ $y_2 = c * \lg x,$ $y_3 = \sqrt{a * (\lg 10x)^2 x}$ $a=1, b=5$

Литература

1. **Голоскоков, Д. П.** Уравнения математической физики. Решение задач в системе Maple: учебник для вузов / Д. П. Голоскоков. - Санкт-Петербург: Питер, 2004. - 539с.
2. **Аладьев, В. З.** Программирование и разработка приложений в Maple: монография / В. З. Аладьев, В. К. Бойко, Е. А. Ровба; УО "ГрГУ им. Я. Купалы". - Гродно ; Таллинн, 2007. - 454 с.
3. **Maple: система компьютерной алгебры:** учебно-методическое пособие / УО "ВГУ им. П. М. Машерова" ; авт.-сост. : И. Е. Андрушкевич, В. А. Жизневский. - Витебск: УО "ВГУ им. П. М. Машерова", 2006. - 158 с.
4. **Технологии обработки экономической информации в среде MS OFFICE и СКМ MAPLE:** методические указания по курсу "Компьютерные информационные технологии" для студентов экономических спец. заочной формы обучения / УО "ВГТУ" ; сост. Е. Ю. Вардомацкая. - Витебск, 2010. - 75 с.
5. **Технологии обработки экономической информации в среде MS OFFICE и СКМ MAPLE [Электронный ресурс]:** методические указания по курсу "Компьютерные информационные технологии" для студентов экономических спец. заочной формы обучения / УО "ВГТУ" ; сост. Е. Ю. Вардомацкая. - Витебск, 2010. - 1 CD-ROM (1,09 Мб).